Capítulo 1

Espacios métricos y normados

1.1. Métricas

El concepto de métrica, permite incorporar a un conjunto una estructura explícita asociada a la noción de cercanía.

Definición 1.1. Suponga que X es un conjunto (no vacío) y que ρ es una función real sobre $X \times X$ con las siguientes tres propiedades:

(a) $\rho(x, y) \geq 0$ para todo $x, y \in X$ y $\rho(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$.

(b) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ para todo $x, y \in X$.

(c) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$ para todo $x, y, z \in X$ (la desigualdad triangular).

La función ρ se llama **métrica** o **distancia** sobre X; y X junto a la métrica ρ, se llama un **espacio métrico** el cual es denotado por (X, ρ).

Ejemplo

(i) Cualquier conjunto X puede ser equipado con la métrica;

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ 1 & \text{si } x \neq y \end{cases}$$

Esta métrica es denominada la **métrica discreta**.

(ii) Sobre $\mathbb{R}$ la **métrica usual** o **Euclidiana** es aquella que asocia a todo par de puntos el valor absoluto de su diferencia. En $\mathbb{R}^n$ la **métrica usual** o **Euclidiana** coincide con nuestra idea intuitiva de distancia en el espacio y se define como,

$$\begin{aligned} &\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}, \\ &x = (x_1, \ldots, x_n), \quad y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Claramente ρ satisface (a) y (b) de la Definición 1.1. Tomemos $a_i = x_i - z_i$, $b_i = z_i - y_i$ vemos que (c) es equivalente a

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^2 \right)^{1/2} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2 \right)^{1/2} \tag{1.2}$$

Pero elevando al cuadrado ambos lados de (1.2) obtenemos otra forma equivalente,

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^{1/2} \tag{1.3}$$

Esto ahora sigue del hecho que, para todo real α,

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i \alpha + b_i)^2 = A\alpha^2 + 2H\alpha + B \geq 0,$$

de modo que

$$H^2 \leq AB,$$

donde

$$A = \sum_{i=1}^{n} a_i^2, \quad H = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i, \quad B = \sum_{i=1}^{n} b_i^2.$$

Por lo tanto ρ, definida por (1.1) es una métrica sobre $\mathbb{R}^n$. La ecuación (1.3) es conocida como la **desigualdad de Cauchy-Schwarz** en $\mathbb{R}^n$.

El espacio métrico $(\mathbb{R}^n, \rho)$, donde ρ es la métrica usual, es denominado el **espacio Euclidiano n-dimensional**.

(iii) Sobre $\mathbb{C}$, el plano complejo, la métrica usual es de la misma forma que sobre $\mathbb{R}^2$. Si $z = x + iy$ y $z' = x' + iy'$ (x, y, x', y' reales),

$$\rho(z, z') = |z - z'| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}.$$

En efecto, cuando equipamos con la métrica usual, $\mathbb{C}$ y $\mathbb{R}^2$ son esencialmente el mismo espacio métrico en el cual sólo la notación es diferente. Sin embargo, a diferencia de $\mathbb{R}^2$, el conjunto de los complejos $\mathbb{C}$ posee una estructura algebraica incluyendo una operación de multiplicación conmutativa, que lo convierte en un cuerpo.

(iv) Sea $B[a, b]$ el conjunto de las funciones reales acotadas sobre el intervalo $[a, b]$ y, para $f, g \in B[a, b]$, sea

$$\rho(f, g) = \sup_{a \leq x \leq b} |f(x) - g(x)|.$$

Claramente ρ tiene las propiedades (a) y (b) de la definición de métrica. La propiedad (c) sigue de las desigualdades

$$\sup |\phi(x) + \psi(x)| \leq \sup(|\phi(x)| + |\psi(x)|) \leq \sup |\phi(x)| + \sup |\psi(x)|.$$

(v) Sea S el espacio de sucesiones $x = (x_1, x_2, \ldots)$ de números complejos tal que $\sum x_n$ converge absolutamente. Para $x, y \in S$ definimos

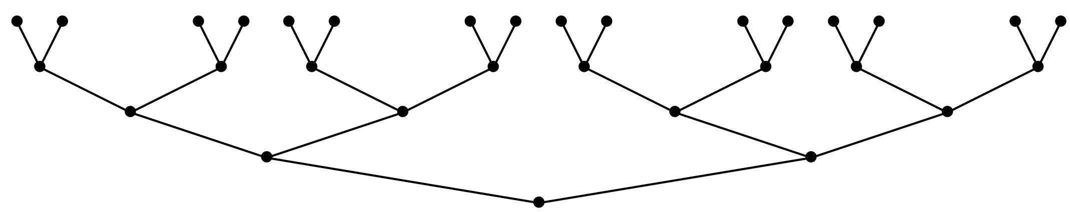
$$\rho(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|.$$

Es fácil probar que ρ es una métrica sobre S.

(vi) Un espacio métrico que satisface

(c') $\rho(x,y) \le \max\{\rho(x,z), \rho(z,y)\}$ para todo $x, y, z \in X$ (la desigualdad ultramétrica),

en vez de (c) de la definición, se llama un espacio **ultramétrico**.Notemos que (c') implica (c). Veremos pronto que la métrica p-adica en los racionales es una ultramétrica. Consideremos un árbol binario con raíz. Una métrica natural en el conjunto de vértices del árbol, es aquella qu asigna como distancia entre dos puntos, el número de aristas del camino más corto que los une. La restricción de esta métrica al conjunto de puntos que se encuentran a una distancia fija de la raíz, es una ultramétrica.



El siguiente resultado muestra que la métrica que se le puede asignar a un conjunto es bastante arbitraria.

Teorema 1.2. *Sea X un conjunto, $x \in X$, y $f : X \to [0,\infty)$, inyectiva y tal que $f(x) = 0$. Luego existe una métrica ρ en X tal que $\rho(x,y) = f(y)$.*

Demostración. Definimos $\rho(z,y) = |f(y) - f(z)|$. Es claro que $\rho \ge 0$ y si $\rho(z,y) = 0$ entonces $z = y$, dado que f es inyectiva; entonces se satisface (a) de la definición de métrica. La parte (b) resulta obvia, y (c) sigue de

$$|f(y) - f(z)| \le |f(y) - f(u)| + |f(u) - f(z)|, \quad \text{para todo } y, z, u \in X$$

□

Sea (X,ρ) un espacio métrico y sea Y un subconjunto de X. Si σ es la restricción de ρ a $Y \times Y$, es decir $\sigma(x,y) = \rho(x,y)$ para todo $x, y \in Y$, entonces σ es una métrica sobre Y; diremos que es la **métrica inducida** por (X,ρ) sobre Y. El espacio métrico (Y,σ) es denominado un **subespacio** (métrico) de (X,ρ). Si $\mathbb{Q}$ es el conjunto de los *números racionales*, la métrica inducida σ sobre $\mathbb{Q}$ está dada por

$$\sigma(q_1, q_2) = |q_1 - q_2|$$

esto define una métrica en $\mathbb{Q}$ que lo hace un subespacio de $\mathbb{R}$.

Definición 1.3. Decimos que una sucesión $\{x_n\}$ de puntos en el espacio métrico (X,ρ) **converge** a un punto $x \in X$ si

$$\rho(x_n, x) \to 0 \quad \text{cuando} \quad n \to \infty. \tag{1.4}$$

Escribimos, como en el análisis clásico, $x_n \to x$ cuando $n \to \infty$ o $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

Como $\rho(x, y)$ es un número real, podemos usar el concepto de convergencia en $\mathbb{R}$ reemplazando (1.4) por la frase "dado $\varepsilon > 0$ existe N tal que $\rho(x_n, x) < \varepsilon$ para $n > N$".

Ejercicio. Demuestre que una sucesión, en un espacio métrico, no converge a dos límites distintos.

Cuando las métricas ρ, σ sobre un conjunto X son tales que una sucesión converge en (X, ρ) si y sólo si converge en (X, σ), diremos que ρ y σ son **métricas equivalentes**.

Una condición suficiente, aunque no necesaria, para que las métricas ρ, σ sean equivalentes es la existencia de constantes estríctamente positivas λ y μ tales que

$$\lambda\rho(x, y) \leq \sigma(x, y) \leq \mu\rho(x, y)$$

para todo $x, y \in X$.

Ejercicio. Pruebe las afirmaciones anteriores.

1.2. Normas

Comenzaremos con una discusión sobre el concepto de espacio vectorial sobre un cuerpo con valucaión.

Definición 1.4. Decimos que una función real $|\cdot|$ definida sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ es una **valuación** de rango 1 si

(i) $|x| \geq 0$ para todo x en $\mathbb{K}$ y $|x| = 0$ si y sólo si $x = 0$.

(ii) $|xy| = |x||y|$ para todo $x, y \in \mathbb{K}$.

(iii) $|x + y| \leq |x| + |y|$ para todo $x, y \in \mathbb{K}$.

Una valuación que satisface la condición,

(iii') $|x + y| \leq \max\{|x|, |y|\}$ para todo $x, y \in \mathbb{K}$,

se llama **no-arquimediana**.

A veces una valuación también recibe el nombre "norma".

Ejemplo. (i) Definimos para cada primo p la **valuación p-ádica** en $\mathbb{Q}$ por

$$|q|_p = p^{-a}$$

donde $q = \frac{p^a s}{t}$, con a, s, t enteros y s, t no son divisibles por p.

(ii) Dado un cuerpo arbitrario F, podemos definir en él la valuación trivial por $|0| = 0$ y $|x| = 1$ para $x \neq 0$.

Decimos que dos valuaciones $|\cdot|_1$, $|\cdot|_2$ sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ son **equivalentes** si existe un $\lambda \geq 1$ tal que

$$|x|_1 = |x|_2^\lambda$$

Todas las valuaciones no triviales en $\mathbb{Q}$ son equivalentes al valor absoluto o a alguna valuación p-ádica. (Ostrowski 1935)

Definición 1.5. Sea V un conjunto no vacío y $\mathbb{K}$ un cuerpo. Supongamos que: (i) para cualquier par de elementos x, y (que llamaremos **vectores**) de V les corresponde un elemento en V, llamado **suma**, el cual es donotado por $x+y$; y (ii) para cualquier número real α en el cuerpo $\mathbb{K}$ y cualquier x en V corresponde un elemento en V, llamado el **producto escalar** de α y x, el cual es denotado por αx (*la suma es una función desde* $V \times V$ *en* V *y la multiplicación escalar es una función desde* $\mathbb{K} \times V$ *en* V). Supongamos además que las siguientes condiciones se satisfacen:

(i) **Asociatividad**. $x + (y + z) = (x + y) + z$;

(ii) **Conmutatividad**. $x + y = y + x$;

(iii) **Identidad**. Existe un elemento $\theta \in V$ (el elemento cero) tal que $x + \theta = x$ para todo $x \in V$;

(iv) **Inverso**. A todo elemento $x \in V$ le corresponde un elemento $-x \in V$ tal que $x+(-x) = \theta$;

(v) **Asociatividad escalar**. $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$;

(vi) **Identidad escalar**. $1x = x$;

(vii) **Distributividad I**. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$;

(viii) **Distributividad II**. $\alpha(x + y) = \alpha x + \beta y$.

Luego V (simultaneamente con la operación de adición y multiplicación escalar definida en V) se llama un **espacio vectorial** (o **lineal**) sobre $\mathbb{K}$. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ lo llamamos un **espacio vectorial real**, mientrias que si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ lo llamamos un **espacio vectorial complejo**. Si M es un subconjunto de V que satisface las condiciones de espacio vectorial (con las mismas operaciones definidas en V), diremos que M es un **subespacio vectorial** de V.

Definición 1.6. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ con valuación $|\cdot|$. Decimos que una función real $\|\cdot\|$ sobre V es una **norma** sobre V, y V es un **espacio normado** sobre el cuerpo valuado $\mathbb{K}$, si

(i) $\|x\| \geq 0$ para todo $x \in V$ y $\|x\| = 0$ si y sólo si $x = 0$.

(ii) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$ para todo $\alpha \in \mathbb{K}$ y todo $x \in V$.

(iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ para todo $x, y \in V$.

Se puede verificar fácilmente que todo cuerpo es un espacio vectorial sobre si mismo. Además, en un espacio vectorial normado, induce siempre una métrica ρ definida como

$$\rho(x, y) = \|x - y\|.$$

Definición 1.7. Sea V un espacio vectorial y $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ dos normas en V. Decimos que ellas son **equivalentes** si existen constantes λ, μ estríctamente positivas tales que

$$\lambda\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \mu\|x\|_2$$

para todo $x \in V$.

Ejercicio. Ocupando la definición de métricas equivalentes, pruebe que las normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ son equivalentes según la Definición 1.7.

Lema 1.8. *Todas las normas sobre $\mathbb{R}^n$ son equivalentes.*

Demostración. Utilizaremos la compacidad de la bola euclideana en $\mathbb{R}^n$. Sea $\|\cdot\|$ una norma sobre $\mathbb{R}^n$ y $|\cdot|_e$ la norma euclideana. Buscamos constantes m y M estrictamente positivas tales que:

$$m|\cdot|_e \leq \|\cdot\| \leq M|\cdot|_e$$

Sea $e_1, ..., e_n$ la base canónica de modo que $x = x_1e_1 + ... + x_ne_n$. Luego, por la desigualdad triangular y la de Cauchy-Schwarz se tiene

$$\|x\| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|\|e_i\| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} \|e_i\|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2} = M \cdot |x|_e$$

Esto prueba la segunda desigualdad y además, obtenemos

$$\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\| \leq M \cdot |x - y|_e$$

Esta relación prueba que la función $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es continua. Por ende, alcanza su ínfimo m sobre la esfera euclideana de radio 1. Es claro que m es estríctamente positivo, luego:

$$m \leq \left\|\frac{x}{|x|_e}\right\| = \frac{\|x\|}{|x|_e}$$

de donde se obtiene la primera desigualdad. $\square$

Terminamos esta sección con el concepto de producto interno y la desigualdad de Cauchy-Schwartz cuya demostración es analoga a la desigualdad de Cauchy-Schwartz en $\mathbb{R}^n$.

Definición 1.9. Producto Interno. Sea V un espacio vectorial normado complejo y supongamos que a todo par ordenado (x, y) de elementos de V se asocia un número complejo, denotado por $x \cdot y$ y que satisface las siguientes condiciones,

(i) $x \cdot y = \overline{y \cdot x}$ para todo $x, y \in V$.

(ii) $(\alpha x + \beta y) \cdot z = \alpha(x \cdot y) + \beta(y \cdot z)$ para todo α, β complejos y $x, y, z \in V$.

(iii) $x \cdot x = ||x||^2$ para todo $x \in V$.

Luego la operación $x \cdot y$ se llama el **producto interno** de x con y y V se llama un **espacio producto interno complejo**. Similarmente definimos un **espacio producto interno real**.

Teorema 1.10. Cauchy-Schwarz. *Si V es un espacio producto interno complejo o real luego para todo $x, y \in V$ tenemos,*

$$|x \cdot y| \leq ||x||||y||.$$

Además la igualdad se satisface si y solo si x es un múltiplo escalar de y o vice-versa.

1.3. Conjuntos abiertos y cerrados

En esta sección consideraremos subconjuntos de un espacio métrico fijo (X, ρ). Sea $x \in X$ y sea r un número real positivo. El conjunto de los puntos y tal que $\rho(x, y) < r$ es denominado la **bola abierta** con **centro** x y **radio** r; que denotaremos por $B(x; r)$.

Definición 1.11. Dado un subconjunto E de X (el cual puede ser todo X), decimos que el punto $x_0 \in X$ es un **punto límite** de E si, para todo $\varepsilon > 0$, existe un $x \in E$ tal que

$$0 < \rho(x_0, x) < \varepsilon,$$

es decir, $B(x_0; \varepsilon) - \{x_0\}$ contiene un punto de E.

Un punto límite x_0 de E puede ser también definido por cualquiera de las siguientes dos condiciones:

(i) Toda bola abierta $B(x_0, \varepsilon)$ contiene infinitos puntos de E.

(ii) Existe una sucesión de puntos $y_n \in X$ tal que $y_n \neq x_0$ y $y_n \to x_0$ cuando $n \to \infty$.

Claramente un punto x_0 que satisface la propiedad (i) o la propiedad (ii) es un punto límite de E. Recíprocamente, si x_0 es un punto límite de E, para todo n, existe un punto $y_n \in E$ tal que

$$0 < \rho(x_0, y_n) < 1/n$$

y luego (ii) se satisface. También (ii) implica (i).

Las condiciones (i) o (ii) muestran que un conjunto finito no tiene puntos límites. Un conjunto infinito puede o no tener un punto límite. Por ejemplo el conjunto $\{1, 2, 3, \ldots\}$ de $\mathbb{R}$ (con la métrica usual) no tiene puntos límites.

Definición 1.12. Decimos que un punto x_0 de E es un **punto aislado** de E si este no es un punto límite de E.

Entonces, si x_0 es un punto aislado de E, existe un $\delta > 0$ tal que $B(x_0; \delta)$ no contiene puntos de E distintos que x_0.

Definición 1.13. Dado un conjunto $E \subset X$, decimos que el punto $x_0 \in E$ es un **punto interior** de E si existe un $\delta > 0$ tal que $B(x_0, \delta) \subset E$.

Definición 1.14. (i) Decimos que un conjunto F en X es **cerrado** si F contiene todos sus puntos límites.

(ii) Decimos que un conjunto G en X es **abierto** si todo punto de G es un punto interior de G.

Notemos que toda bola abierta es abierta y todo conjunto sin puntos límites es cerrado. En particular, todo conjunto finito es cerrado.

Ejemplo. Consideremos $C[a, b]$, con la **norma del supremo** definida por

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|.$$

Luego se puede verificar que los conjuntos

$$E_1 = \{f \in C[a,b] : \inf f(x) > 0\}$$
$$E_2 = \{f \in C[a,b] : f(a) = 1\}$$

son tales que E_1 es abierto y no cerrado, y E_2 es cerrado y no abierto, en el espacio métrico $(C[a,b], \|\cdot\|_\infty)$.

Ejercicio. Demuestre las afirmaciones del ejemplo anterior.

Teorema 1.15. *Un conjunto F es cerrado si y sólo si cuando $\{x_n\} \subset F$ es una suseción convergente, entonces $\lim_{n\to\infty} x_n \in F$.*

Demostración. Si F es cerrado y $\{x_n\} \subset F$ es una sucesión convergente tal que $x_n \to x$. Como F es cerrado, entonces $x \in F$.

Recíprocamente, si x es un punto límite de F, luego existe una suceción $\{x_n\} \subset F$, $x_n \neq x$, tal que $x_n \to x$. Por hipótesis $\lim_{n\to\infty} x_n \in F$, luego $x \in F$. □

A continuación expondremos un resultado que nos permitirá caracterizar los conjuntos abiertos (cerrados), a partir de su complemento.

Teorema 1.16. *(i) El conjunto G en X es abierto si y sólo si $G^c = X - G$ es cerrado.*

(ii) El conjunto F en X es cerrado si y sólo si $F^c = X - F$ es abierto.

Demostración. Sólo probaremos (i), ya que para (ii) basta considerar que $(G^c)^c = G$. Sea $G \subset X$ un conjunto abierto y sea x un punto límite de G^c, luego existe $\{x_n\} \in G^c, x_n \neq x$, tal que $x_n \to x$. Supondremos que $x \notin G^c$, entonces $x \in G$ y tendremos que x es punto interior de G (G es abierto), luego existe $N > 0$ tal que para todo $n > N$ $x_n \in G$, lo que es una contradicción.

Recíprocamente, supondremos que G no es abierto, luego existe $x \in G$ tal que para todo $\varepsilon > 0$: $B(x,\varepsilon) \nsubseteq G$. Luego, existe $y_\varepsilon \in B(x,\varepsilon) \cap G^c$, $y_\varepsilon \neq x$, para todo ε. Entonces x es punto límite de G^c y, con $G \cap G^c = \varnothing$, se concluye que G^c no es cerrado. □

Ejercicio. Pruebe que para todo $A \subset X$, $(A^c)^c = A$.

Teorema 1.17. *(i) La unión de cualquier colección de conjuntos abiertos es abierto.*

(ii) La intersección finita de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.

Demostración. Por el teorema 1.16, basta probar la primera parte. Sea entonces $x \in G = \cup_\alpha G_\alpha$, con G_α abiertos. Luego, $x \in G_\alpha$, para algún α y existe una bola abierta $B(x;\epsilon)$ contenida en G_α, por lo tanto contenida en G. Es decir x es un punto interior de G. □

Ejercicio. Pruebe que

(i) La intersección de cualquier colección de conjuntos cerrados es cerrado.

(ii) La unión finita de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.

Consideremos algunos ejemplos en que la intersección numerable de abiertos no es un conjunto abierto, y una unión numerable de cerrados no es un conjunto cerrado.

Ejemplo. Sea $\mathbb{R}$ con la métrica usual.

(i) $\cap_{n=1}^{\infty}(0, 1 + 1/n) = (0, 1]$

(ii) $\cup_{n=1}^{\infty}[0, 1 - 1/n] = [0, 1)$

Sea (Y, σ) un subespacio del espacio métrico (X, ρ) . Aunque los abiertos (cerrados) en Y generalmente no son abiertos (cerrados) en X, la relación entre conjuntos abiertos y cerrados en X y en Y es muy simple.

Teorema 1.18. *Sea (Y, σ) un subespacio del espacio métrico (X, ρ). Entonces un conjunto es abierto en (Y, σ) si y sólo si es de la forma $Y \cap G$, donde G es un abierto en (X, ρ). Un resultado similar se obtiene para conjuntos cerrados.*

DEMOSTRACIÓN. Si $B_\rho(x; \varepsilon)$ es la bola abierta en X y $B_\sigma(x; \varepsilon)$ es la bola abierta en Y, entonces bastará probar que $Y \cap B_\rho(x; \varepsilon) = B_\sigma(x; \varepsilon)$, ya que todo abierto en X e Y es una unión arbitraria de bolas abiertas. Sabemos que $B_\rho(x; \varepsilon) = \{y \in X : \rho(x, y) < \varepsilon\}$, luego

$$Y \cap B_\rho(x; \varepsilon) = \{y \in Y : \rho(x, y) < \varepsilon\} = B_\sigma(x; \varepsilon)$$

$\square$

Corolario 1.19. *Si Y es abierto en X, entonces un subconjunto de Y es abierto en Y si y sólo si es abierto en X. Si Y es un cerrado en X, entonces un subconjunto de Y es cerrado en Y si y sólo si es cerrado en X.*

Definición 1.20. Sea E un subconjunto de X.

(i) El **interior** de E, denotado por $\mathring{E}$, es el conjunto de puntos interiores de E.

(ii) La **clausura** de E, denotado por $\overline{E}$, es la unión de E y el conjunto de los puntos límites de E.

Notemos que $\overline{E}$ es el conjunto de puntos x tales que para todo $\varepsilon > 0$, la bola $B(x, \varepsilon)$ contiene a algún punto de E o, equivaléntemente, $x \in \overline{E}$ si y sólo si x es el límite de una sucesión de puntos de E.

Teorema 1.21. *Para todo conjunto E en X, $\mathring{E}$ es abierto y $\overline{E}$ es cerrado.*

Definición 1.22. Un **punto frontera** de un conjunto E en X es un punto x tal que toda bola abierta $B(x; \varepsilon)$ contiene al menos un punto de E y al menos un punto de E^c. El conjunto de todos los puntos fronteras de E se llama la **frontera** de E y lo denotamos por E'.

Claramente E y E^c tienen la misma frontera.

Ejercicio. Pruebe que,

$$E' = \overline{E} - \mathring{E}$$