Capítulo 4

Preámbulos de la integración

4.1. Completitud de las funciones Riemann integrables

Consideremos la sucesión de funciones reales en $[0, 1]$ definidas por

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = q_1, \ldots, q_n \\ 0 & \text{si } x \neq q_1, \ldots, q_n, \end{cases}$$

donde $\{q_n\}$ es una enumeración de los racionales en $[0, 1]$. Notemos que todos los términos son Riemann-integrables y que $\in_0^1 f_n(x)dx = 0$. Sin embargo, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ donde

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \cap [0, 1]. \end{cases}$$

Pero esta función no es Riemann integrable. Esta es la primera indicación de la dificultad que existe en tratar de definir un espacio L_R de funciones en $[0, 1]$ con una "norma" dada por la integral de Riemann del módulo de la funciíon. En efecto, si tal espacio existeria hemos construído una sucesión de Cauchy $\{f_n\}$,

$$\sup_{m\geq n} \int_0^1 |f_n(x) - f_m(x)|dx = 0$$

que converge puntualmente a una función que no es Riemann integrable. Es decir, pareciera que nuestro espacio L_R no puede ser completo. Sin embargo, si Ud. está atento, notará que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 |f_n(x) - g(x)|dx = 0,$$

donde $g(x) := 0$. Es decir, a pesar de que la sucesión converge puntualmente a f, en "norma" de Riemann convergería a la función 0. Lo que hemos hecho es reemplazar el límite puntual f por una función (g) que difiere en un conjunto de medida de Lebesgue 0. En realidad, existe una ambiguedad, expresada por el siguiente lema.

Lema 4.1. *Sean $f, g, h : [0, 1] \to \mathbb{R}$ Riemann integrables tales que sus módulos y los módulos de sus diferencias también los son. Supongamos además que g difiere de h en un conjunto de medidad de Lebesgue 0. Entonces*

$$\int_0^1 |f - g|dx = \int_0^1 |f - h|dx.$$

Demostración. Notemos que, $\int_0^1 |h-g|dx = 0$. Además,

$$\int_0^1 |f-g|dx \le \int_0^1 |f-h|dx + \int_0^1 |h-g|dx = \int_0^1 |f-h|dx.$$

Similarmente $\int_0^1 |f-h|dx \le \int_0^1 |f-g|dx$. □

Por lo tanto, si quisieramos definir un espacio de funciones Riemann integrables, deberíamos considerar las clases de equivalencias de funciones, donde dos funciones son equivalentes si y sólo si difieren en un conjunto de medida de Lebesgue 0. Lamentablemente, aceptando que fuera posible definir tal espacio nos encontraríamos con sucesiones de Cauchy que no convergen. Consideremos el conjunto de Cantor C definido recursivamente: C_1 es el intervalo $[0,1]$ menos el intervalo abierto central de largo $1/5$; C_2 se obtiene luego de remover de cada uo de los dos intervalos de C_1 sus intervalos abiertos centrales de largo $1/5^2$; etc. Luego $C = \cap_n C_n$. Ahora definimos f_n como la función indicatriz de C_n y f como la función indicatriz de C. Claramente f_n converge puntualmente a f. Además tenemos los siguientes resultados.

Lema 4.2. *La sucesión f_n satisface,*

$$\sup_{m\ge n} \int_0^1 |f_n(x) - f_m(x)|dx \le \frac{1}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^n.$$

Demostración. Notemos que si $m \ge n$, la integral $\int_0^1 |f_n(x) - f_m(x)|dx$, representa la longitud total de todos los intervalos abiertos eliminados entre la n-ésima y m-ésima etapa en la construcción del conjunto C. Es decir,

$$\frac{1}{5}\sum_{k=n}^{m}\left(\frac{2}{5}\right)^k \le \frac{1}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^n.$$

□

Lema 4.3. *Cualquier modificación de f en un conjunto de medida de Lebesgue 0 no es Riemann integrable.*

4.2. Divergencia de las series de Fourier

A principios del siglo 19, se sabía, gracias al trabajo de Joseph Fourier sobre la ecuación del calor, que toda función periódica se podía aproximar por combinaciones lineales de funciones trigonométricas. Sin emargo, el sentido preciso de tal aproximación no se comprendí a. En esta sección describiremos algunos de los problemas a los que se enfrentaron en este contexto los matemáticos de la época.

Consideremos una función $f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$. Los trabajos de Fourier explicaban que la serie

$$S_n(f;x) := \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-n}^{n} c_k e_k,$$

donde $e_k := e^{ikx}$ y $c_k := \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\bar{e}_k dx$ llamados los *coeficientes de Fourier* de f, aproxima a la función f. Más adelante veremos que tal afirmación cobra naturalidad en el contexto de los espacios de Hilbert. Es obvio que si

$$\sum_{k=-n}^{n} |c_k|$$

converge, entonces $S_n(f;x)$ es convergente, y es posible probar que su límite es f.

Teorema 4.4. Wiener. *Supongamos que $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ es Riemann integrable y que sus coeficientes de Fourier forman una serie absolutamente convergente. Supongamos además que f nunca es 0. Luego $1/f$ tiene coeficientes de Fourier que forman una serie absolutamente convergente.*

Examinaremos esta serie en el caso en el que $f \in C_c[-\pi, \pi]$, el espacio de funciones continuas complejas en $[-\pi, \pi]$. Probaremos el siguiente resultado sorprendente, que ilustra la dificultad que existe al insitir en interpretar la convergencia de una serie de Fourier en el sentido puntual.

Teorema 4.5. *Existe un conjunto $F \subset C_c[-\pi, \pi]$ de primera categoría tal que para toda función $f \in F^c$ el conjunto*

$$Q_f = \{x : \sup_n s_n(f;x) = \infty\},$$

tiene complemento en $[-\pi, \pi]$ de primera categoría.

La observación esencial para demostrar este teorema es el siguiente lema.

Lema 4.6. *Sea $x \in [-\pi, \pi]$. Luego el conjunto*

$$\{f \in C_c[-\pi, \pi] : \sup_n s_n(f;x) = \infty\},$$

tiene complemento de primera categoría.

Veamos como demostrar el teorema a partir de este lema. Para cada x llamemos F_x al conjunto de primera categoría del lema. Definamos

$$F := \cup_{x \text{ racional}} F_x.$$

Luego F es de primera categoría. Addemás, si $f \notin F$, necesariamente

$$\sup_n s_n(f;x) = \infty,$$

para todo x racional. Ahora, para cada funcion f en $C_c[-\pi, \pi]$, podemos esciribir

$$\{x : s_n(f;x) = \infty\} = \cap_N \{x : s_n(f;x) > N\}.$$

Como cada uno de los conjuntos de la intersección del lado derecho es abierto (por ser $s_n(f;x)$ continua), esta igualdad muestra que $\{x : s_n(f;x) = \infty\}$ es un G_δ, es decir una intersección numerable de abiertos. Por lo tanto, si $f \in F^c$, hemos probado que tal conjunto es un G_δ que contiene los racionales. Esto implica que su complemento es de primera categoría, lo que prueba el teorema.

A continuación demostraremos el lema. Como primera observación notemos que

$$S_n(f;x) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(x-t) dt,$$

donde

$$D_n(t) := \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt}$$

es el llamado *kernel de Dirichlet*. Probaremos el lema en el caso $x = 0$. Definimos

$$\Lambda_n f := S_n(f; 0).$$

Esto define un operador lineal desde $C_c[-\pi, \pi]$ en los reales. Por le teorema de Banach-Steinhaus, basta probar que

$$\lim_{n\to\infty} ||\Lambda_n|| = \infty.$$

Notemos que

$$\frac{||\Lambda_n f||}{||f||} \leq \frac{1}{2\pi} \in_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)|dt.$$

Además, siempre es posible definir una sucesión de funciones $g_k \in C_c[-\pi, \pi]$ tales que $-1 \leq g_k \leq 1$ y $\lim_{k\to\infty} g_k(t) = g(t)$, donde $g(t) = 1$ si $D_n(t) \geq 0$ y $g(t) = -1$ si $D_n(t) < 0$. Luego

$$\lim_{k\to\infty} \Lambda_n(g_k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) D_n(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)| dt.$$

Esto prueba que $||\Lambda_n|| = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)|dt$. Pero un cálculo simple muestra que

$$D_n(t) = \frac{\sin(n + 1/2)t}{\sin t/2}.$$

Luego

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)|dt \geq \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left| \frac{\sin(n+1/2)t}{t} \right| dt \tag{4.1}$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{(n+1/2)\pi} |\sin t| \frac{dt}{t} \geq \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}. \tag{4.2}$$

Es decir, $||\Lambda_n|| \to \infty$.

Es importante comparar el teorema demostrado con el siguiente caso particular de un teorema de Carleson.

Teorema 4.7. Carleson. *Sea $f \in C_c[-\pi, \pi]$. Luego existe un conjunto $E \subset [-\pi, \pi]$ de medida de Lebesgue 0 tal que*

$$\lim_{n\to\infty} S_n(f; x) = f(x),$$

para todo $x \in E^c$.

El resultado original de Carleson de 1966 es para funciones Lebesgue integrables demostrando una conjetura de Luzin formulada en 1922. Parcialmente por ello, en 2006, Carleson obtuvo el premio Abel.

Antes de terminar, mencionamos el siguiente teorema.

Teorema 4.8. Kahane-Katznelson. *Sea $E \subset [-\pi, \pi]$ un conjunto de medida de Lebesgue 0. Luego existe una función $f \in C_c[-\pi, \pi]$ tal que la sucesion $S_n(f; x)$ diverge si y sólo si $x \in E$.*

4.3. Funciones monótonas: Weierstrass y el teorema de Lebesgue

Un problema que atrajo la atención en el siglo 19, son las propiedades de diferenciabilidad de las funciones continuas. La pregunta más básica es cuán poco diferenciable puede ser una función continua. En una charla a la Academia Real de Ciencias de Berlín en 1872, Riemann conjeturó que la función

$$R(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k^2}, \tag{4.3}$$

es continua en todas partes y no diferenciable en ningún punto (CTPND), pero sin demostrarlo. Por la convergencia absoluta de la serie es obvio que la función es continua. En 1876 Weierstrass examinó

$$K(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x)$$

con $a \in (0,1)$, $b \in (2n+1)\mathbb{Z}$ y $ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$, probando que es continua y no diferenciable en ningún punto. Recién en 1916, G. Hardy prueba que $R(x)$ es no diferenciable en todos los irracionales y en alguos racionales. Además probó que $K(x)$ es CTPND si $0 < a < 1$ y $ab \geq 1$. En 1969, Joseph Gerver prueba el siguiente resultado.

Teorema 4.9. *La función $R(x)$ es diferenciable en x si y sólo si $x = p/q$ es racional con p y q impares. Además, en tales puntos su derivada es igual a $-1/2$.*

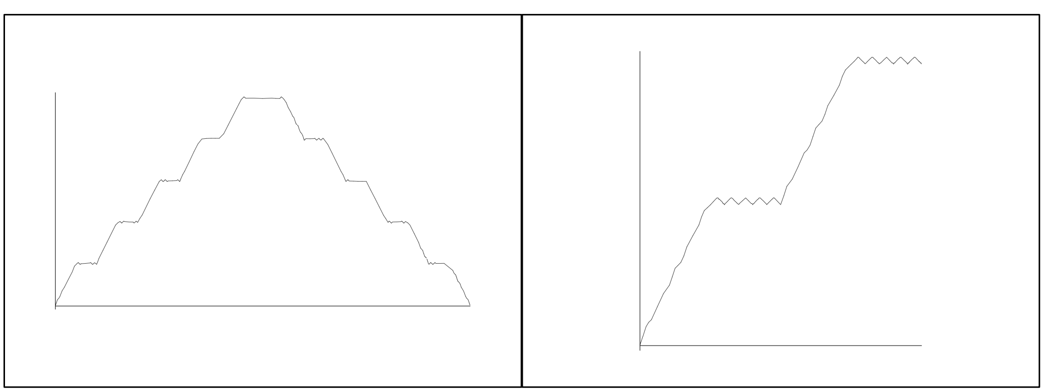
Finalmente, en 1930 Van den Waerden estudio la función

$$W(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(10^n x)}{10^n}$$

donde f es periódica de periodo 1 y

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x \leq 1/2 \\ 1-x & \text{si } 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

probando el siguiente resultado.



Teorema 4.10. *La función $W(x)$ es continua y no diferenciable en ningún punto.*