4.3. Funciones monótonas: Weierstrass y el teorema de Lebesgue

Un problema que atrajo la atención en el siglo 19, son las propiedades de diferenciabilidad de las funciones continuas. La pregunta más básica es cuán poco diferenciable puede ser una función continua. En una charla a la Academia Real de Ciencias de Berlín en 1872, Riemann conjeturó que la función

$$R(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k^2}, \tag{4.3}$$

es continua en todas partes y no diferenciable en ningún punto (CTPND), pero sin demostrarlo. Por la convergencia absoluta de la serie es obvio que la función es continua. En 1876 Weierstrass examinó

$$K(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x)$$

con $a \in (0,1)$, $b \in (2n+1)\mathbb{Z}$ y $ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$, probando que es continua y no diferenciable en ningún punto. Recién en 1916, G. Hardy prueba que $R(x)$ es no diferenciable en todos los irracionales y en alguos racionales. Además probó que $K(x)$ es CTPND si $0 < a < 1$ y $ab \geq 1$. En 1969, Joseph Gerver prueba el siguiente resultado.

Teorema 4.9. *La función $R(x)$ es diferenciable en x si y sólo si $x = p/q$ es racional con p y q impares. Además, en tales puntos su derivada es igual a $-1/2$.*

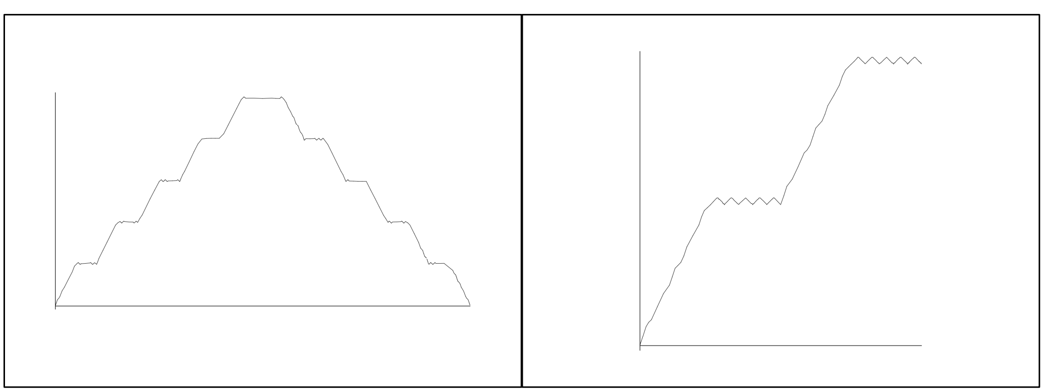
Finalmente, en 1930 Van den Waerden estudio la función

$$W(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(10^n x)}{10^n}$$

donde f es periódica de periodo 1 y

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x \leq 1/2 \\ 1-x & \text{si } 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

probando el siguiente resultado.



Teorema 4.10. *La función $W(x)$ es continua y no diferenciable en ningún punto.*

Demostración. Para probar la continuidad de $W(x)$ definamos

$$W_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f(10^k x)}{10^k}$$

luego W_n es una sucesión de funciones continua en $\mathbb{R}$ tal que si $m > n$ tendremos que

$$|W_n(x) - W_m(x)| \leq \sum_{k=n}^{m} \frac{1}{10^k}$$

que va a cero uniformemente cuando $n, m \to \infty$ (dada la convergencia de la serie con términos 10^{-k}). Por lo tanto $\{W_n\}$ es una sucesión de Cauchy en las funciones continuas, con límite la función continua $W(x)$.

Para probar que $W(x)$ no es diferenciable en ningún punto, notemos que $W(x+1) = W(x)$. Entonces, es suficiente que $W(x)$ es no diferenciable en $[0,1]$. Si $[x]$ es la parte entera de x, definimos $\mathrm{Fr}(x) := x - [x]$ la parte fraccionaria de x. Luego es fácil probar que $f(10^n x) = f(\mathrm{Fr}(10^n x))$. Sea $x \in [0,1]$ dado por su expansión decimal

$$x = 0.a_1 a_2 \ldots a_m \ldots, \qquad 0 \leq a_i \leq 9,\ i \in \mathbb{N}.$$

Definimos

$$h_m = \begin{cases} -10^{-m} & \text{si } a_m = 4, 9 \\ 10^{-m} & \text{si } a_m \neq 4, 9 \end{cases}$$

Queremos analizar

$$\frac{W(x+h_m) - W(x)}{h_m} = \pm 10^m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(10^n(x+h_m)) - f(10^n x)}{10^n}.$$

Separamos el análisis en tres casos:

1) Si $n \geq m$, entonces $\mathrm{Fr}(10^n(x+h_m)) = 0.a_{n+1} \ldots = \mathrm{Fr}(10^n x)$. Luego

$$\frac{W(x+h_m) - W(x)}{h_m} = \pm 10^m \sum_{n=0}^{m-1} \frac{f(10^n(x+h_m)) - f(10^n x)}{10^n}.$$

2) Si $n = m-1$, entonces $\mathrm{Fr}(10^n(x+h_m)) = 0.(a_m \pm 1)a_{m+1} \ldots$. Luego

$$f(10^n(x+h_m)) - f(10^n x) = \begin{cases} \mp 10^{n-m} & \text{si } a_m = 5, 6, 7, 8, 9 \\ \pm 10^{n-m} & \text{si } a_m = 0, 1, 2, 3, 4 \end{cases}$$

3) Si $n < m-1$, si definimos $k := m - n$ tenemos que $k = 2, \ldots, m$. Entonces

$$\mathrm{Fr}(10^n(x+h_m)) = 0.a_{m-(k-1)} a_{m-(k-2)} \ldots (a_m \pm 1) a_{m+1} \ldots$$

y tendremos que

$$f(10^n(x+h_m)) - f(10^n x) = \begin{cases} \mp 10^{n-m} & \text{si } a_{m-(k-1)} = 5, 6, 7, 8, 9 \\ \pm 10^{n-m} & \text{si } a_{m-(k-1)} = 0, 1, 2, 3, 4 \end{cases}$$

Luego,

$$\frac{W(x+h_m) - W(x)}{h_m} = \pm 10^m \sum_{n=0}^{m-1} \frac{f(10^n(x+h_m)) - f(10^n x)}{10^n} = \pm m$$

que diverge cuando $m \to \infty$. Por lo tanto $W(x)$ no es diferenciable en ningún punto. $\square$

Teorema 4.11. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función monótona, entonces la cardinalidad del conjunto de puntos donde f no es continua es a lo más numerable.*

DEMOSTRACIÓN. Sin pérdida de generalidad supondremos que f es monótona no decreciente. Definamos

$$w(x) := \lim_{y\downarrow x} f(y) - \lim_{y\uparrow x} f(y)$$

y

$$D_x := \{z : \lim_{y\uparrow x} f(y) < z < \lim_{y\downarrow x} f(y)\}.$$

luego f es continua en x si y sólo si $w(x) = 0$. Supongamos que x_0 y x_1 son puntos de discontinuidad de f, entonces D_{x_0}, D_{x_1} son no vacíos tales que $D_{x_0} \cap D_{x_1} = \varnothing$. Como para cada D_x no vacío existe un racional q que está en D_x, entonces no puede haber más que una cantidad numerable de puntos de discontinuidad de f, dado que los $D_x \neq \varnothing$ son disjuntos. □

Acabamos de probar que una función monótona definida en un intervalo acotado es continua salvo por una cantidad numerable de puntos. Ahora nos interesa analizar, para la clase de funciones monótonas su diferenciabilidad. Probaremos el siguiente resultado.

Teorema 4.12 (Lebesgue). *Sea f una función monótona en $[a, b]$. Luego f es c.s. diferenciable.*

Como primer paso en la demostración, probaremos el siguiente lema ocupando implícitamente el concepto de medida externa.

Lema 4.13. *Sea $0 < q < 1$ y $E \subset \mathbb{R}$. Supongamos que E ocupa una fracción menor o igual a q en todo intervalo. Es decir, si $(a, b) \subset \mathbb{R}$, entonces $E \cap (a, b)$ está contenido en $\cup_{k=1}^{\infty}(a_k, b_k)$ tal que*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(b_k - a_k) \leq q(b - a).$$

Luego $m(E) = 0$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $(a, b) \subset \mathbb{R}$. Sabemos que existe una sucesión de intervalos abiertos (a_k, b_k) tales que $E \cap (a, b) \subset \cup_{k=1}^{\infty}(a_k, b_k)$ y

$$\sum_{k=1}^{\infty}(b_k - a_k) \leq q(b - a).$$

Similarmente, para cada intervalo (a_k, b_k) existe una sucesión $(a_{k,1}, b_{k,1}), (a_{k,2}, b_{k,2}), \ldots$ tal que $E \cap (a_k, b_k) \subset \cup_{k_1=1}^{\infty}(a_{k,k_1}, b_{k,k_1})$ y

$$\sum_{k_1=1}^{\infty}(b_{k,k_1} - a_{k,k_1}) \leq q(b_k - a_k).$$

Combinando ambas desigualdades concluímos que

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{k_1=1}^{\infty}(b_{k,k_1} - a_{k,k_1}) \leq q^2(b - a).$$

Por inducción en n podemos entonces concluír que para todo n existe una colección de intervalos abiertos $(c_1, d_1), (c_2, d_2), \ldots$ tales que $E \cap (a, b) \subset \cup_{j=1}^{\infty}(c_j, b_j)$ y

$$\sum_{j=1}^{\infty}(c_j - d_j) \leq q^n(b-a).$$

Por lo tanto, por definición $m(E) = 0$. □

Continuamos con el siguiente Lema conocido como el lema del *agua que fluye* o el lema *del sol creciente.*

Lema 4.14 (Riesz). *Sea g una función en $[a,b]$ tal que $g(a^+) = \text{lím}_{h\downarrow 0} g(a+h)$ y $g(b^-) = \text{lím}_{h\uparrow 0} g(b+h)$ existen, y para todo punto $x \in (a,b)$,*

$$g(x^+) = \lim_{h\downarrow 0} g(x+h) \quad \text{y} \quad g(x^-) = \lim_{h\uparrow 0} g(x+h)$$

existen. Sea

$$G(x) := \text{máx}\{g(x^-), g(x), g(x^+)\}.$$

Luego

$$E := \{x \in [a,b] \,:\, \exists\, y \in [a,b], y > x, g(y) > G(x)\}$$

es abierto. Además, si (c,d) es alguna componente en E, entonces

$$G(d) \geq g(c^+).$$

Demostración. Probaremos primero que E es abierto. Sea $x \in E$. Luego existe $y \in [a,b]$, $y > x$, tal que

$$g(y) > G(x).$$

Definamos $\varepsilon := g(y) - G(x) > 0$. Como $g(x^-)$ existe, entonces existe un $\delta > 0$ tal que para todo $z \in (x-\delta, x)$

$$|g(z^-) - g(x^-)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |g(z) - g(x^-)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |g(z^+) - g(x^-)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.4}$$

Luego de (6.3) se tiene

$$\begin{aligned} G(z) &\leq g(x^-) + \frac{\varepsilon}{2} \leq G(x) + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leq g(y) - \frac{\varepsilon}{2} \leq g(y) \end{aligned}$$

por lo tanto $z \in E$. Similarmente, haciendo el mismo análisis para $g(x^+)$ podemos concluir que existe una vecindad de x que está enteramente contenida en E. De ello concluimos que E es abierto.

Sea (c,d) una componente conexa abierta de E. Supondremos que $g(c^+) > G(d)$, luego existe $\varepsilon > 0$ y $x \in (c,d)$ tales que

$$g(x) \geq G(d) + \varepsilon$$

Definamos

$$z_1 := \sup\{z \in [x,d] \,:\, g(z) \geq G(d) + \varepsilon\}.$$

Luego $G(z_1) \geq g(z_1^-) \geq G(d) + \varepsilon$, de donde es inmediato que $z_1 \neq d$ (en particular $z_1 < d$). Entonces $z_1 \in E$. Por lo tanto existe $y \in (a,b)$, $y > z_1$, tal que

$$g(y) > G(z_1) \geq G(d) + \varepsilon$$

Pero esto contradice la definición de z_1. □

Definición 4.15. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Luego definimos las **derivadas de Dini** de f por,

$$f^+(x) := \limsup_{y \downarrow x} \frac{f(y)-f(x)}{y-x}, \quad f^-(x) := \limsup_{y \uparrow x} \frac{f(y)-f(x)}{y-x},$$
$$f_+(x) := \liminf_{y \downarrow x} \frac{f(y)-f(x)}{y-x}, \quad f_-(x) := \liminf_{y \uparrow x} \frac{f(y)-f(x)}{y-x},$$

Para demostrar el teorema de Lebesgue probaremos que

$$f^+(x) < \infty \qquad c.s. \tag{4.5}$$

y que

$$f^+(x) \leq f_-(x) \qquad c.s.$$

En efecto, si la segunda desigualdad es verdadera, definiendo $h(x) := -f(-x)$, vemos que $h^+(x) = f^-(-x)$ y $h_-(x) = f_+(x)$. Luego

$$f^-(x) \leq f_+(x) \qquad c.s.$$

Por lo tanto

$$f^+(x) \leq f_-(x) \leq f^-(x) \leq f_*(x) \leq f^+(x) \qquad c.s.$$

y la desigualdad (4.5) implica que f es c.s. diferenciable. Para probar (4.5) definimos el conjunto

$$E_R := \{x \in (c,d) : f \text{ es continua en x}, \mathrm{f^+(x) > R}\}.$$

Mostraremos que el conjunto

$$E = \cap_R E_R,$$

tiene medida de Lebesgue 0. Notemos que si $x \in E_R$, entonces existe un $y > x$ tal que

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} > R.$$

Es decir, $g(y) > g(x)$ donde $g(x) = f(x) - Rx$. Por el lema anterior, existen intervalos disjuntos (a_k, b_k) tales que

$$F(b_k) - Cb_k \geq f(a_k) - Ca_k,$$

con $F(x) := \max\{f(x^-), f(x), f(x^+)\}$, lo que equivale a

$$C(b_k - a_k) \leq F(b_k) - f(a_k).$$

Sumando sobre k y ocupando la monotonicidad de f concluímos que

$$R \sum (b_k - a_k) \leq \sum (f(b_k^+) - f(a_k)) \leq f(b) - f(a).$$

Esto prueba que E tiene medida de Lebesgue 0. Ahora sea

$$E_{r,R} := \{x \in (a,b) : f_-(x) < r < R < f^+(x)\}.$$

Mostraremos que el conjunto

$$F := \cup_{r,R\in\mathbb{Q}} E_{r,R},$$

tiene medida de Lebesgue 0. Para ello probaremos que cada conjunto $E_{r,R}$ tiene medida de Lebesgue 0. En efecto, primero notemos que si $x \in Er, R$, entonces $f_-(x) < r$. Por lo tanto, considerando la función $f(x) - rx$, vemos que deben existir intervalos disjuntos (a_k, b_k) cuya unión contiene a $E_{r,R}$ tales que

$$\sum_k (f(b_k) - f(a_k)) \leq r \sum_k (b_k - a_k).$$

Por otra parte, para cada k el conjunto $(a_k, b_k) \cap E_{r,R}$ debe estar contenido en la unión disjunta de intervalos (a_j^k, b_j^k) tales que

$$\sum_j (b_j^k - a_j^k)) \leq r \sum_j (f(b_j^k) - f(a_j^k)).$$

Combinando estas desigualdades vemos que el conjunto $E_{r,R}$ ocupa una fracción menor o igual a r/R en cada intervalo abierto de $[a, b]$. Por lo tanto, debe tener medida de Lebesgue 0.

Teorema 4.16 (Fubini). *Sea $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ una serie convergente de funciones monótonas del mismo tipo en $[a, b]$. Luego s es c.s. diferenciable.*

Demostración. Pendiente

□

4.4. Funciones de variación acotada: Jordan y diferenciabilidad

Definición 4.17. Sea $[a, b] \subset \mathbb{R}$ un intervalo acotado. Sea $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = b$ y definimos

$$\pi := \bigcup_{i=1}^{k} (x_i - x_{i-1}]$$

Diremos que π es una **partición** del intervalo $[a, b]$

Definición 4.18. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Sea $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = b$. Definimos,

$$p = \sum_{i=1}^{k} (f(x_i) - f(x_{i-1}))_+, \qquad n = \sum_{i=1}^{k} (f(x_i) - f(x_{i-1}))_- \quad \text{y} \quad t = n + p$$

donde

$$\begin{aligned} (f(x_i) - f(x_{i-1}))_+ &= f(x_i) - f(x_{i-1}) \quad \text{cuando } f(x_i) \geq f(x_{i-1}) \\ (f(x_i) - f(x_{i-1}))_- &= f(x_{i-1}) - f(x_i) \quad \text{cuando } f(x_i) \leq f(x_{i-1}) \end{aligned}$$

Además, $P = \sup p$, $N = \sup n$ y $T = \sup t$, donde los supremos se toman sobre todas las particiones π posibles de $[a, b]$. Denominaremos P, N, T las **variaciones positivas, negativas y total** de f en $[a, b]$.
Si $T < \infty$, diremos que f es una **función de variación acotada**. Ocuparemos la notación T_a^b, $T_a^b(f)$ o simplemente T cuando no haya problema de confusión. Análogamente usaremos la misma notación para P y N. El conjunto de funciones de variación acotada se nota por BV_a^b.

Ejercicio. Pruebe que t se puede escribir en la forma

$$t = \sum_{i=1}^{k} |f(x_i) - f(x_{i-1})|$$

Ejemplo. Sea $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x^2) & \text{en } [-1,1] - \{0\} \\ f(0) = 0 & \text{en } x = 0 \end{cases}$$

Luego $f(x)$ es una función de variación no acotada. Para ello basta tomar la partición $x_k = (\frac{\pi}{2} + k\pi)^{-1/2}$, con $k = 1, \ldots, n$. Esta partición no hace que la variación total t esté minorada por la suma armónica, luego al hacer $n \gg 1$ tendremos que la variación de $f(x)$ se puede hacer tan grande como queramos. Por lo tanto $f(x)$ no es de variación acotada. Ver la Figura 6.2.

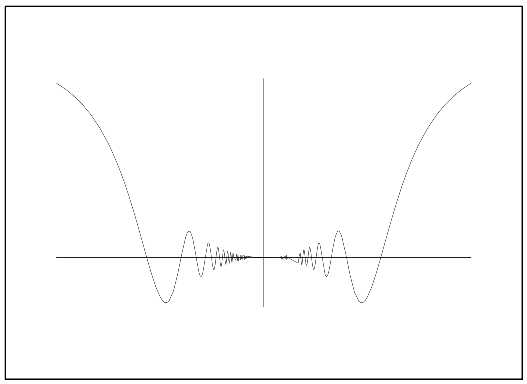


Figura 4.1: Función de variación no acotada

Ejercicio. Probar que $f(x)$ definida en el Ejercicio anterior no es de variación acotada.
Hint: Considerar la partición sugerida en el Ejercicio.

Ejercicio. Demuestre que el conjunto BV_0^1 es de primera categoría en $C[0, 1]$.

Lema 4.19. *Si $f \in BV_a^b$, luego*

$$T_a^b = P_a^b + N_a^b \quad y \quad f(b) - f(a) = P_a^b - N_a^b$$

DEMOSTRACIÓN. Por definición tenemos que

$$f(x_k) - f(x_{k-1}) = (f(x_k) - f(x_{k-1}))_+ - (f(x_k) - f(x_{k-1}))_-$$

luego sumando sobre la partición de $[a, b]$ se tiene

$$f(b) - f(a) = p - n \quad \Longleftrightarrow \quad n + (f(b) - f(a)) = p \tag{4.6}$$

Si tomamos supremo sobre todas las particiones de $[a, b]$ en el lado derecho de (6.4) tendremos que $N + (f(b) - f(a)) = P$. Además,

$$t = n + p = 2p - (f(b) - f(a)) \tag{4.7}$$

y tomando nuevamente supremo sobre todas las particiones de $[a, b]$ en (6.5) concluimos que

$$T = 2P - (f(b) - f(a)) = P + N$$

□

Ejercicio. Si $a < c < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Demuestre que

$$T_a^b(f) = T_a^c(f) + T_c^b(f)$$

Además, pruebe que si f es monótona entonces es medible.

Teorema 4.20 (Jordan). *Si f es una función en $[a, b]$, entonces f es de variación acotada si y sólo si f es la diferencia entre dos funciones no decrecientes.*

Demostración. Supongamos que f es de variación acotada. Definamos para $a < x < b$ la función $T(x) = T_a^x(f)$. Por el Ejercicio anterior tenemos que $T(x)$ es no decreciente, luego

$$f(x) = T(x) - (T(x) - f(x))$$

que está bien definida ya que $T(x) < \infty$ para todo $x \in (a, b)$. Entonces basta probar que $H(x) = T(x) - f(x)$ es no decreciente. Sea $h > 0$, entonces

$$T_x^{x+h}(f) \geq |f(x+h) - f(x)| \quad \Longrightarrow \quad T(x+h) - T(x) \geq f(x+h) - f(x)$$

de donde se concluye que $H(x+h) \geq H(x)$ y queda probada esta implicancia.

Si f es diferencia entre dos funciones no decrecientes, es decir $f = g - h$, con g, h no decrecientes, entonces

$$T_a^b(f) \leq T_a^b(g) + T_a^b(h) = (g(a) - g(b)) + (h(a) - h(b)) < \infty$$

$\square$

Corolario 4.21. *Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es de variación acotada, luego es c.s diferenciable.*