Capítulo 5

Medida e integración

5.1. Medidas y espacios medibles

Definición 5.1. Sea $\mathbb{R}$ la recta real. Definimos $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{\infty\}$ la **recta real extendida**. Sobre $\overline{\mathbb{R}}$ definimos la topología generada por la base $\mathcal{B} = \mathcal{B}_0 \cup \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ donde $\mathcal{B}_0$ son los abiertos de $\mathbb{R}$ y

$$\mathcal{B}_1 = \{(a, \infty] = (a, \infty) \cup \{\infty\} \,:\, a \in \mathbb{R}\}, \qquad \mathcal{B}_2 = \{[-\infty, a) = (-\infty, a) \cup \{-\infty\} \,:\, a \in \mathbb{R}\}$$

Ejercicio. Pruebe que este espacio es compacto.

Definición 5.2. Sea $\mathcal{M}$ una colección de subconjuntos de un conjunto X. Decimos que $\mathcal{M}$ es una **σ-álgebra** sobre X si $\mathcal{M}$ satisface las siguientes propiedades:

(i) $X \in \mathcal{M}$.

(ii) Si $A \in \mathcal{M}$, entonces $A^c \in \mathcal{M}$.

(iii) Si $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, con $A_n \in \mathcal{M}$, para todo natural n, entonces $A \in \mathcal{M}$.

En este caso diremos que $(X, \mathcal{M})$ es un **espacio medible** (o espacio de medida), y los elementos de $\mathcal{M}$ se denominan **conjuntos medibles**. Si S es una colección de subconjuntos de X definimos $\sigma(S)$ como la σ-álgebra más pequeña que contiene a S, llamándola la **σ-álgebra generada por** S.

Si $(X, \mathcal{M})$ es una espacio medible, (Y, τ) es un espacio topológico y f es una función de X en Y, decimos que f es una **función medible** si para todo conjunto abierto de Y se tiene que $f^{-1}(V)$ es un conjunto medible de X.

El próximo teorema es una aplicación directa de la definición de función medible y función continua y su demosstración se deja como ejercicio para el lector.

Teorema 5.3. *Sean Y y Z espacios topológicos y sea X un espacio medible. Si $f : X \to Y$ es medible y $g : Y \to Z$ es continua, luego $h := g \circ f : X \to Z$ es medible.*

Teorema 5.4. *Sean X un espacio medible y sean u, $v : X \to \mathbb{R}$ medibles. Luego, si $\phi : \mathbb{R}^2 \to Y$ con Y espacio topológico es una función continua, se tiene que $\phi(u(x), v(x)) : X \to Y$ es medible.*

Demostración. Definamos $f : X \to \mathbb{R}^2$ como

$$f(x) = (u(x), v(x)).$$

Mostraremos que f es medible. Sean I_1, J_1 conjuntos abiertos de $\mathbb{R}$, entonces $R_1 = I_1 \times J_1$ es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^2$. Luego

$$f^{-1}(R_1) = u^{-1}(I_1) \cap v^{-1}(J_1),$$

es un conjunto medible en X. Como todo abierto V de $\mathbb{R}^2$ es de la forma $V = \bigcup_{n=1}^{\infty} R_n$, con $R_n = I_n \times J_n$ e I_n, J_n conjuntos abiertos de $\mathbb{R}$, tenemos que

$$f^{-1}(V) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(R_n),$$

es medible en X. Luego, por el teorema anterior $\phi \circ f$ es medible. □

Observación. Sean f, $g : X \to \mathbb{R}$ funciones medibles. Luego, por los resultados anteriores,

(i) $f + g$ y fg son medibles.

(ii) $|f|$ es medible.

(iii) Las funciones

$$f_+ = \frac{|f| + f}{2} \quad \text{y} \quad f_- = \frac{|f| - f}{2},$$

son medibles.

Definición 5.5. Dado un espacio topológico X, denotamos por F_σ a la colección de subconjuntos de X que se pueden expresar como uniones numerables de conjuntos cerrados, y G_δ a la colección de subconjuntos de X que se pueden expresar como intersecciones numerables de conjuntos abiertos. Similarmente, se define $F_{\sigma\delta} = (F_\sigma)_\delta$, etc.

Ejemplo. Consideremos $\mathbb{R}$ con la topología usual. Luego,

$$\begin{aligned}[a, b) &= \bigcup_{n=1}^{\infty} [a, b - 1/n] \in F_\sigma \\ &= \bigcap_{n=1}^{\infty} (a - 1/n, b) \in G_\delta\end{aligned}$$

De este modo, en $\mathbb{R}$ todo abierto es un F_σ y todo cerrado es un G_δ.

Ejercicio. Sea (X, ρ) un espacio métrico. Pruebe, a partir del ejemplo anterior, que en X toda bola abierta es una F_σ y toda bola cerrada es una G_δ.

Definición 5.6. Sean X e Y espacios topológicos. Si $\mathcal{T}$ es la topología de X, definimos $\mathcal{B}(X) = \sigma(\mathcal{T})$ como la **σ-álgebra de Borel** sobre X. Además, decimos que una función $f : X \to Y$ es **Borel medible** si para todo abierto $V \subset Y$, $f^{-1}(V) \in \mathcal{B}(X)$.

Ejercicio. Pruebe que toda función continua es Borel medible.

Teorema 5.7. *Sea $(X, \mathcal{M})$ un espacio medible, Y un espacio topológico, y $f : X \to Y$.*

(i) Sea Ω la colección de subconjuntos de Y tales que $f^{-1}(E) \in \mathcal{M}$ con $E \in \Omega$, luego Ω es una σ-álgebra.

(ii) Si f es medible, entonces para todo $B \in \mathcal{B}(Y)$ se tiene que $f^{-1}(B) \in \mathcal{M}$.

(iii) Si $Y = \overline{\mathbb{R}}$ y para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, $f^{-1}((\alpha, \infty]) \in \mathcal{M}$, entonces f es medible.

(iv) Sea Z un espacio topológico y $g : Y \to Z$ Borel medible. Si f es medible, luego, $h = g \circ f : X \to Z$ es medible.

Demostración. Para probar (i) basta considerar las identidades $f^{-1}(Y) = X$, $f^{-1}(Y - A) = X - f^{-1}(A)$ y que $f^{-1}(\cup_n A_n) = \bigcup_n f^{-1}(A_n)$. La parte (ii) es una consecuencia directa de (i) pues basta observar que Ω es una σ-álgebra que contiene a los abiertos de Y, por ende, a los borelianos. Finalmente, (iii) y (iv) son inmediatos y se dejan como ejercicio. □

El siguiente teorema nos permite concluir la medibilidad de algunos límites de sucesiones de funciones medibles.

Teorema 5.8. *Sea $\{f_n\}_n$ una sucesión de funciones medibles definidas sobre un espacio de medida $(X, \mathcal{M})$ con valores en $\overline{\mathbb{R}}$. Luego,*

$$g = \sup_n f_n \quad y \quad h = \limsup_{n\to\infty} f_n$$

son funciones medibles.

Demostración. Observamos que $g^{-1}((\alpha, \infty]) = \bigcup_n f_n^{-1}((\alpha, \infty]) \in \mathcal{M}$. Luego, por el teorema anterior, se tiene que g es medible. Además, $h = \inf_n \sup_{k\geq n} f_k$. Usando lo anterior y que el $\inf a_n = -\sup(-a_n)$, concluimos que h es medible. □

Ejercicio. Bajo las hipótesis del teorema anterior, pruebe que el ínfimo y el límite inferior de sucesiones de funciones medibles es medible.

Definición 5.9. Sea $(X, \mathcal{M})$ un espacio de medida. Decimos que una función $s : X \to \mathbb{R}$ es **simple** si es medible y toma una cantidad finita de valores.

Ejercicio. Sea $(X, \mathcal{M})$ un espacio de medida y $s : X \to \mathbb{R}$ una función. Pruebe:

(i) Si s es simple, entonces existen $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ y $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{M}$, disjuntos dos a dos, tales que

$$s(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{A_k}(x)$$

(ii) Si existen $b_1, \ldots, b_m$ tales que

$$s(x) = \sum_{k=1}^{m} b_k \chi_{E_k}(x)$$

con $E_k \in \mathcal{M}$, entonces s es medible.

Nota: No necesariamente los E_k son disjuntos.

Lema 5.10. *Sea $f : X \to [0, \infty]$ medible. Luego existen funciones simples s_n tales que* *(i)* $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \cdots$

(ii) para cada $x \in X$

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x) = f(x)$$

Demostración. Sea $\delta_n = 1/2^n$, luego para cada $t \in [0,\infty]$ y $n \in \mathbb{N}$ existe un único $k := k(t)$ tal que

$$k \leq t\, 2^n < k+1$$

y definimos

$$\varphi_n(t) = \begin{cases} k(t)\,\delta_n & \text{si } 0 \leq t < n \\ n & \text{si } t \geq n \end{cases}$$

que es una función escalonada (por lo tanto simple). Luego para cada $t \in [0,\infty)$ existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\varphi_n(t) \leq t < \varphi_n(t) + \delta_n \quad \Longrightarrow \quad t - \delta_n < \varphi_n(t) \leq t$$

si $n \geq N$. Entonces para cada $t \in [0,\infty]$ tendremos que

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(t) = t$$

y definimos $s_n := \varphi_n \circ f$ que es medible por consecuencia del Teorema 5.7 (iv). □

Ejercicio. En el Lema 5.10 pruebe que $s_n \leq s_{n+1}$ para cada natural n.

Corolario 5.11. *Sea f una función real medible. Luego existe una sucesión de funciones simples s_n que converge a f puntualmente.*

Demostración. Recordemos que toda función real medible f se puede escribir como $f = f_+ - f_-$ donde

$$f_+ = \frac{|f|+f}{2} \quad \text{y} \quad f_- = \frac{|f|-f}{2}$$

y cada una de estas funciones son medibles y no negativas. Luego, por el Lema 5.10 existen r_n y t_n funciones simples que convergen puntual y monótamente a f_+ y f_-, respectivamente. Entonces,

$$s_n(x) = r_n(x) - t_n(x)$$

es una sucesión de funciones simples que convergen puntualmente a f. □

Definición 5.12. Sea $(X,\mathcal{M})$ un espacio de medida. Decimos que una función μ definida en $\mathcal{M}$ con valores en $[0,\infty]$ es una **medida positiva** sobre $(X,\mathcal{M})$ (o simplemente sobre el espacio de medida X) si satisface las siguientes propiedades:

(i) Para toda sucesión $\{A_m\}$ de conjuntos medibles y disjuntos se tiene que

$$\mu(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

(ii) Existe al menos un $A \in \mathcal{M}$ con $\mu(A) < \infty$.

Denotaremos $(X,\mathcal{M},\mu)$ al espacio medible con la medida positiva μ.

Si μ es una medida positiva sobre X, diremos que μ es **finita** si $\mu(X) < \infty$. Diremos que μ es **semi-finita** si para cada $A \in \mathcal{M}$, $\mu(A) = \infty$, y natural n existe un $B \subset A$, $B \in \mathcal{M}$, tal que $n \leq \mu(B) < \infty$.

Teorema 5.13. *Sea μ una medida positiva definida en $(X, \mathcal{M})$. Luego*

(a) $\mu(\varnothing) = 0$.

(b) μ *es* finitamente aditiva*, es decir si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son medibles disjuntos, luego*

$$\mu(\cup_{k=1}^n A_k) = \sum_{k=1}^n \mu(A_k).$$

(c) $\mu(A) \leq \mu(B)$ *si* $A \subset B$, *con* $A, B \in \mathcal{M}$.

(d) $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A)$ *cuando* $A = \cup_{n=1}^\infty A_n$ *con* $A_n \in \mathcal{M}$ *y* $A_n \subset A_{n+1}$.

(e) $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A)$ *cuando* $A = \cap_{n=1}^\infty A_n$ *con* $A_n \in \mathcal{M}$, $A_{n+1} \subset A_n$ *y* $\mu(A_1) < \infty$.

Demostración. (a) Sabemos que existe $A \in \mathcal{M}$ con la propiedad $\mu(A) < \infty$. Consideremos los conjunto medibles A_n dados por $A_1 = A$ y $A_n = \varnothing$ si $n > 1$. Luego

$$\mu(A) = \sum_{k=1}^\infty \mu(A_n) = \mu(A) + \sum_{k=2}^\infty \mu(A_n),$$

de donde se concluye que $\mu(\varnothing) = 0$.

(b) Consideremos una colección A_k de conjuntos disjuntos, medibles que son vacíos salvo por una cantidad finita. Luego

$$\mu(\cup_{k=1}^n A_k) = \mu(\cup_{k=1}^\infty A_k) = \sum_{k=1}^\infty \mu(A_k) = \sum_{k=1}^n \mu(A_k).$$

(c) Sean $A, B \in \mathcal{M}$. Luego

$$\mu(B) = \mu((B \backslash A) \cup A) = \mu(B \backslash A) + \mu(A) \geq \mu(A).$$

(d) Sea $A_n \subset X$ una colección de conjuntos medibles tal que $A = \cup_{n=1}^\infty A_n$ y $A_n \subset A_{n+1}$. Como $A_n = \cup_{k=1}^n A_k$ podemos considerar la colección de conjuntos medibles $B_k = A_{k+1} \backslash A_k$, disjuntos, tales que $A_n = \cup_{k=1}^n B_k$. Luego

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \sum_{k=1}^\infty \mu(B_k) = \mu(\cup_{k=1}^\infty B_k) = \mu(A).$$

(e) Sea $A_n \subset X$ una colección de conjuntos medibles tal que $A = \cap_{n=1}^\infty A_n$, $A_{n+1} \subset A_n$ y $\mu(A_1) < \infty$. Definamos $B_k = A_1 \backslash A_k$, luego por (d) tendremos

$$\lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = \mu(\cup_{n=1}^\infty B_n).$$

Como $A_1 \backslash A = \cup_{k=1}^\infty B_k$, luego

$$\mu(A_1) - \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_1 \backslash A_n) = \mu(A_1 \backslash A) = \mu(A_1) - \mu(A)$$

de donde se concluye (e) dado que $\mu(A_1) < \infty$.

$\square$

Ejemplo. Consideremos $X = \mathbb{R}$ con la σ-álgebra de Borel y μ la medida de Lebesgue. Sean $A_n = (n, \infty)$, luego $\mu(A_n) = \infty$ y

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \infty \neq 0 = \mu(\lim_{n\to\infty} A_n) = \mu(\varnothing)$$

lo que muestra que en el Teorema 5.13 la hipótesis $\mu(A_1) < \infty$, en la parte (e), no es superflua.

Ejercicio. Demuestre que una medida finitamente aditiva μ definida en una σ-álgebra $\mathcal{M}$ es numerablemente aditiva si y sólo si satisface (d) $\vee$ (e) del Teorema 5.13.

5.2. Integral de Lebesgue

Definición 5.14. Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio medible, con medida positiva. Decimos que una función real φ tiene **soporte de medida finita** si

$$\{x : \varphi(x) \neq 0\}$$

es medible y tiene medida finita. Es decir

$$\mu(\{x : \varphi(x) \neq 0\}) < \infty.$$

Notemos que si φ es una función real medible, luego el conjunto

$$\{x : \varphi(x) \neq 0\} = \{x : \varphi(x) > 0\} \cup \{x : \varphi(x) < 0\}$$

es medible, como consecuencia del Teorema 5.7 (*iii*).

Definición 5.15. Sea $(X, \mathcal{M})$ un espacio medible, μ una medida positiva definida en él y s una función simple acotada,

$$s(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{A_k}(x),$$

definida en X, donde a_k son los valores distintos de s. Supongamos que s tiene soporte de medida finita. Si $E \in \mathcal{M}$, definimos la **integral de Lebesgue** de s en E como

$$\int_E s \, d\mu = \sum_{k=1}^{n} a_k \mu(A_k \cap E)$$

Definición 5.16. Sea $(X, \mathcal{M})$ un espacio medible y μ una medida positiva sobre X. Diremos que $\mathcal{M}$ es una **σ-álgebra completa** respecto a la medida μ, si contiene a todos los subconjuntos de los conjuntos medibles de X que tienen medida cero. Es decir, si $E \subset A$ y $A \in \mathcal{M}$ satisface $\mu(A) = 0$, entonces $E \in \mathcal{M}$. Además, diremos que dos funciones f, g en X, son iguales **casi seguramente**, si el conjunto donde difieren está contenido en un conjunto de medida cero. En ese caso escribiremos $f = g$ c.s.

Notemos que en un espacio de medida completo, si $f = g$ c.s., entonces el conjunto donde f y g difieren es medible.

Proposición 5.17. *Sea $(X, \mathcal{M})$ un espacio de medida, y μ una medida positiva sobre X. Si $\mathcal{M}$ es completa, f es medible y $f = g$ c.s., entonces g es medible.*

Demostración. Definamos $E := \{x : f(x) \neq g(x)\}$. Como $\mathcal{M}$ es completa, E y todo subconjunto de E es medible. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$, luego

$$\begin{aligned}\{x : g(x) > \alpha\} &= \{x \in E : g(x) > \alpha\} \cup \{x \in E^c : g(x) > \alpha\} \\ &= \{x \in E : g(x) > \alpha\} \cup \{x \in E^c : f(x) > \alpha\} \\ &= \{x \in E : g(x) > \alpha\} \cup \{\{x : f(x) > \alpha\} \cap E^c\}\end{aligned}$$

es medible para cada $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces, por el Teorema 5.7 (iii) concluimos que g es medible. □

Proposición 5.18. *Sea $(X, \mathcal{M})$ un espacio medible, y μ una medida positiva sobre X. Sea f acotada y con soporte de medida finita. Consideremos las siguientes afirmaciones:*

(i) $\inf_{\psi \geq f} \int \psi \, d\mu = \sup_{\varphi \leq f} \int \varphi \, d\mu$, *donde el supremos y el ínfimo se toma sobre funciones simples con soporte de medida finita.*

(ii) f es medible.

Luego (ii) implica (i). Además, si se satisface (i) y $\mathcal{M}$ es completa, entonces se tiene (ii).

Demostración. Comenzaremos suponiendo que se satisface (ii). Sea $n \in \mathbb{N}$, M tal que $|f(x)| < M$ para todo $x \in X$ y $-n \leq k \leq n$. Definamos el conjunto

$$E_k := \left\{x \in X : \frac{(k-1)}{n} M < f(x) \leq \frac{k}{n} M\right\},$$

que es medible por ser f es medible. Consideremos las funciones simples

$$\varphi_n(x) := \frac{M}{n} \sum_{k=-n}^{n} (k-1)\, \chi_{E_k}(x) \quad \text{y} \quad \psi_n(x) := \frac{M}{n} \sum_{k=-n}^{n} k\, \chi_{E_k}(x).$$

Notemos que

$$\varphi_n(x) \leq f(x) \leq \psi_n(x),$$

para todo $x \in E$. Luego

$$\int \varphi_n d\mu \leq \sup_{\varphi \leq f} \int \varphi d\mu \quad \text{y} \quad \inf_{\psi \geq f} \int \psi d\mu \leq \int \psi_n d\mu,$$

de donde se concluye que

$$0 \leq \inf_{\psi \geq f} \int \psi d\mu - \sup_{\varphi \leq f} \int \varphi d\mu \leq \int \psi_n d\mu - \int \varphi_n d\mu = \frac{M}{n} \sum_{k=-n}^{n} \mu(E_k) = \frac{M}{n} \cdot \mu(E),$$

donde E es el soporte de f. Tomando el límite cuando $n \to \infty$ vemos que (i) se satisface.

Ahora supongamos que se satisface (i) y que $\mathcal{M}$ es completa. Dado que

$$\inf_{\psi \geq f} \int \psi d\mu = \sup_{\varphi \leq f} \int \varphi d\mu$$

entonces existen dos sucesiones $\{\varphi_n\}$ y $\{\psi_n\}$ de funciones simples tales que $\varphi_n(x) \leq f(x) \leq \psi_n(x)$ y

$$\int \psi_n d\mu - \int \varphi_n d\mu \leq \frac{1}{n}.$$

Definamos las funciones medibles

$$\varphi^\star(x) := \sup_n \varphi_n(x) \quad \text{y} \quad \psi^\star(x) := \inf_n \psi_n(x).$$

Notemos que $\varphi^\star(x) \leq f(x) \leq \psi^\star(x)$. Luego, para probar que f es medible basta demostrar que el conjunto

$$\Delta := \{x : \psi^\star(x) > \varphi^\star(x)\},$$

tiene medida cero. Además, para todo n

$$\Delta = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Delta_k,$$

donde $\Delta_k := \{x : \psi^\star(x) > \varphi^\star(x) + 1/k\}$. Pero notemos que para todo n, $\Delta_k \subset \{x : \psi_n(x) > \varphi_n(x) + 1/k\}$. Luego $\mu(\Delta_k) \leq k \int (\psi_n - \varphi_n) d\mu \leq \frac{k}{n}$. Como n es arbitrario esto implica que $\mu(\Delta_k) = 0$ y por lo tanto $\mu(\Delta) = 0$. Es decir, f es medible. $\square$

Definición 5.19. (Integral de Lebesgue para funciones acotadas con soporte de medida finito). Sea f una función medible, acotada y con soporte de medida finita. Definimos para cada $E \in \mathcal{M}$, la **integral de Lebesgue** de f en E por

$$\int_E f d\mu := \sup_{\varphi \leq f} \int_E \varphi d\mu$$

donde el supremo es sobre las funciones simples con soporte de medida finita.

El siguiente ejemplo muestra que la condición de que la función medible tenga soporte de medida finita no es superflua.

Ejemplo. Consideremos un conjunto no vacío X y una σ-álgebra $\mathcal{M} = \{\varnothing, X\}$. Además sea μ una medida positiva en $\mathcal{M}$ tal que $\mu(\varnothing) = 0$ y $\mu(X) = \infty$. Si $f(x) = 1$ para cada $x \in X$, luego

$$\int_X f d\mu = \mu(X) = \infty$$

pero si definimos

$$\int_X f d\mu := \sup_{\varphi \leq f} \int \varphi d\mu = 0$$

para toda φ medible con soporte de medida finita. La razón por la cual la definición anterior no funciona es que μ no es una medida semi-finita. En cambio, la medida de Lebesgue si lo es.

Definición 5.20. (Integral de Lebesgue para funciones no negativas). Sea $s : X \to [0, \infty)$ una función simple

$$s(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \chi_{A_k}$$

donde $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ son los valores distintos que toma s. Definimos la **integral de Lebesgue** de s en $E \in \mathcal{M}$,

$$\int_E s \, d\mu := \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mu(E \cap A_k)$$

con la convención $0 \cdot \infty = 0$, o sea, si algún $\alpha_i = 0$ con $\mu(A_i) = \infty$, entonces $\alpha_i \cdot \mu(A_i) = 0$. Sea $f : X \to [0, \infty]$, una función medible no negativa y $E \in \mathcal{M}$. Luego definimos la **integral de Lebesgue** de f en E por

$$\int_E f\, d\mu := \sup_{0 \le s \le f} \int_E s\, d\mu$$

donde el supremo es sobre funciones simples, no necesariamente con soporte de medida finita.

Ejercicio. Si en la Definición 5.20 consideramos

$$\int_E s\, d\mu = \sup_{0 \le t \le s} \int_E t\, d\mu$$

donde t tiene soporte de medida finita. Pruebe que se puede concluir que $0 \cdot \infty = 0$.

Proposición 5.21. *Sean f y g funciones medibles no-negativas con valores en $[0, \infty]$.*

(a) Si $0 \le f \le g$, entonces

$$\int_E f\, d\mu \le \int_E g\, d\mu.$$

(b) Si A, B son conjuntos medibles con $A \subset B$, entonces

$$\int_A g\, d\mu \le \int_B g\, d\mu.$$

(c) Si $\alpha \ge 0$, entonces

$$\int_E \alpha f\, d\mu = \alpha \int_E f\, d\mu.$$

(d) Si $f(x) = 0$ para $x \in E$, entonces

$$\int_E f\, d\mu = 0.$$

(e) Si $\mu(E) = 0$, entonces

$$\int_E f\, d\mu = 0.$$

aunque $f(x) = \infty$ en E.

Demostración. Para probar (a) definimos los conjuntos de funciones simples

$$\mathcal{A} = \{\varphi : 0 \le \varphi \le f\} \quad \text{y} \quad \mathcal{B} = \{\psi : 0 \le \phi \le g\}.$$

Claramente $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$. Luego para cualquier conjunto medible E se tiene

$$\int_E f\, d\mu = \sup_{\varphi \in \mathcal{A}} \int_E \varphi\, d\mu \le \sup_{\psi \in \mathcal{B}} \int_E \psi\, d\mu = \int_E g\, d\mu.$$

Para probar (b) consideramos la función $f = \chi_A g$, apliquamos el resultado obtenido en la parte (a) ocupando el hecho que $f(x) \le g(x)$ para todo $x \in B$ y observamos que

$$\int_B f\, d\mu = \sup_{0 \le \varphi \le f} \int_B \varphi\, d\mu = \sup_{0 \le \psi \le g} \int_A \psi\, d\mu = \int_A g\, d\mu.$$

Si $\alpha > 0$ tenemos que

$$\int_E \alpha f\, d\mu = \sup_{0\leq\alpha\psi\leq\alpha f} \int_E \alpha\, \psi\, d\mu = \alpha \sup_{0\leq\psi\leq f} \int_E \psi\, d\mu = \alpha \int_E f\, d\mu,$$

lo que prueba (c) para $\alpha > 0$. El caso $\alpha = 0$ es trivial, dada la convención $0 \cdot \infty = 0$. La demostración de (d) es consecuencia de la parte (c) eligiendo $\alpha = 0$. Finalmente, (e) es consecuencia de la definición de la integral de Lebesgue. □

La demostración de la siguiente proposición se deja como ejercicio para el lector. Posteriormente se ocupará para probar la linealidad de la integral de Lebesgue.

Proposición 5.22. *Sean s y t dos funciones simples no negativas. Si E es medible, definimos*

$$\varphi(E) := \int_E s\, d\mu.$$

Luego φ es una medida positiva. Además

$$\int_X (s+t)\, d\mu = \int_X s\, d\mu + \int_X t\, d\mu$$

Teorema 5.23 (Convergencia monótona). *Sea $f_n : X \to [0,\infty]$ una sucesión de funciones medibles tales que $0 \leq f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ para todo $x \in X$. Sea $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \in [0,\infty]$. Entonces, f es medible y*

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu = \int f\, d\mu$$

Demostración. Notemos que $f = \lim f_n$ existe por monotonía y es medible. Además, como $\int f_n d\mu \leq \int f_{n+1} d\mu$, el límite $\lim_{n\to\infty} \int_X f_n\, d\mu$, existe y

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n\, d\mu \leq \int_X f(x)\, d\mu.$$

Sea $0 \leq s \leq f$ simple, $c \in (0,1)$ y

$$E_n := \{x \,:\, f_n(x) \geq c\, s(x)\},$$

que son medibles, $E_n \subset E_{n+1}$, para todo natural n, y $\cup_{n=1}^{\infty} E_n = X$. La última afirmación se debe a que si $x \in X$ entonces: (i) si $f(x) = 0$ luego $f_n(x) = 0$ para todo natural n, y tendremos que $x \in E_1$, (ii) si $f(x) > 0$ luego $f(x) > c\, s(x)$ y tendremos que existe un natural N tal que $f_n(x) \geq c\, s(x)$ para todo $n \geq N$. Es decir $x \in E_n$ para todo $n \geq N$. Además

$$\int_X f_n\, d\mu \geq \int_{E_n} f_n\, d\mu \geq c \int_{E_n} s\, d\mu. \tag{5.1}$$

Si definimos $\varphi(E) := \int_E s\, d\mu$, por la Proposición 5.22 vemos que $\varphi(E_n) \to \varphi(X) = \int_X s\, d\mu$. Luego,

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n\, d\mu \geq c \int_X s\, d\mu. \tag{5.2}$$

Como (5.2) se satisface para todo c menor que 1

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n\, d\mu \geq \int_X s\, d\mu. \tag{5.3}$$

Finalmente, como $0 \leq s \leq f$, podemos tomar el supremo en (5.3) sobre todas las funciones simples positivas menores o iguales a f, deduciendo que

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu \geq \sup_{0\leq s\leq f} \int_X s \, d\mu = \int_X f \, d\mu.$$

□

Corolario 5.24. *Sean f y g funciones medibles no-negativas con valores en $[0, \infty]$. Leugo*

$$\int_X (f + g) \, d\mu = \int_X f \, d\mu + \int_X g \, d\mu.$$

Demostración. Por el Lema 5.10 sabemos que existen dos sucesiones no-decrecientes s_k y t_k, tales que $\lim_{k\to\infty} s_k(x) = f(x)$ y $\lim_{k\to\infty} t_k(x) = g(x)$ para todo $x \in X$. Además, $s_k + t_k$ es una sucesión no-decreciente tal que

$$\lim_{k\to\infty} (s_k + t_k)(x) = (f + g)(x) = f(x) + g(x).$$

Luego

$$\int_X (f + g) \, d\mu = \lim_{k\to\infty} \int_X s_k \, d\mu + \lim_{k\to\infty} \int_X t_k \, d\mu = \int_X f \, d\mu + \int_X g \, d\mu,$$

por el Teorema de convergencia monótona 5.23, la linealidad de la integral para funciones simples y la linealidad del límite. □

Corolario 5.25. *Sea f_n una sucesión de funciones medibles no-negativas valores en $[0, \infty]$ y*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x).$$

Luego f es medible y

$$\int f \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n \, d\mu.$$

Demostración. Definimos la sucesión de funciones medibles

$$g_n(x) := \sum_{k=1}^{n} f_k(x).$$

Notemos que $g_n(x) \to f(x)$ y $g_n(x) \leq g_{n+1}(x)$, para todo $x \in X$. Luego por Teorema de la convergencia monótona 5.23 tenemos que

$$\int_X f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X g_n(x) \, d\mu.$$

Pero del Corolario 5.24 se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \int_X g_n(x) \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_X f_n \, d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_X f_n \, d\mu,$$

con lo que concluimos la demostración. □

Se deja la prueba del siguiente corolario al lector.

Corolario 5.26. *Si* $a_{ij} \geq 0$ *para* $i, j \in \mathbb{N}$*, entonces*

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}$$

Lema 5.27 (Fatou). *Consideremos una sucesión* f_n *de funciones medibles no-negativas con valores en* $[0, \infty]$*. Luego*

$$\int \liminf_{n\to\infty} f_n \, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu.$$

Demostración. Definamos la sucesión de funciones medibles $g_n(x) := \inf_{k\geq n} f_n(x)$. Notemos que $g_n(x) \leq g_{n+1}(x)$. Luego, por el Teorema de convergencia monótona 5.23

$$\lim_{n\to\infty} \int g_n \, d\mu = \int \lim_{n\to\infty} g_n \, d\mu = \int \liminf_{n\to\infty} f_n \, d\mu.$$

Pero la sucesión $\int g_n d\mu$ es no-decreciente y $g_n \leq f_n$. Luego

$$\lim_{n\to\infty} \int g_n \, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu.$$

□

El siguiente ejemplo muestra que la desigualdad en el Lema de Fatou puede ser estricta.

Ejemplo. Consideremos $X = [0, 1]$ y μ definida en los Borelianos. Sea $E \subset [0, 1]$ un conjunto medible tal que con $0 < \mu(E) < 1$. Además

$$f_n(x) := \begin{cases} \chi_E(x) & \text{si } n \text{ es par} \\ 1 - \chi_E(x) & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Entonces $\liminf f_n = 0$ y

$$0 = \int \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n d\mu = \min\{\mu(E), \mu(E^c)\} > 0.$$

Ejercicio. Sea f una función medible no-negativa con valores en $[0, \infty]$. Si E, F son dos conjuntos medibles y disjuntos, pruebe que

$$\int_{E\cup F} f \, d\mu = \int_E f \, d\mu. + \int_F f \, d\mu$$

Proposición 5.28. *Sea* f *una función medible no-negativa con valores en* $[0, \infty]$*. Para cada* $E \in \mathcal{M}$ *definimos*

$$\varphi(E) = \int_E f \, d\mu.$$

Luego φ *es una medida positiva. Además, si* g *es medible no-negativa con valores en* $[0, \infty]$

$$\int g \, d\varphi = \int g \, f \, d\mu.$$

Demostración. Sea E_k una partición en conjuntos medibles de $E \in \mathcal{M}$. Luego

$$\chi_E(x)f(x) := \sum_{k=1}^{n} \chi_{E_k}(x)f(x).$$

Por el corolario anterior y el hecho que $\varphi(\varnothing) = 0$, concluímos que φ es una medida positiva. Ahora, sea s_n una sucesión de funciones simples que aproximan monótonamente a g. Entonces, por el Teorema de convergencia monótona 5.23

$$\int g\, d\varphi = \lim_{n\to\infty} \int s_n\, d\varphi = \lim_{n\to\infty} \int s_n f\, d\mu = \int g\, f\, d\mu.$$

□

5.3. Funciones integrables

Definición 5.29. Consideremos un espacio medible arbitrario $(X, \mathcal{M})$. Llamamos $L^1(X, \mu)$ al conjunto de funciones f medibles definidas en X con valores reales, tales que

$$\int |f| d\mu < \infty.$$

Para f en $L^1(X, \mu)$ definimos la **integral de Lebesgue** de f como

$$\int f d\mu = \int f_+ d\mu - \int f_- d\mu.$$

Observación. Notemos que $f_+ \leq |f|$ luego

$$\int f_+ d\mu \leq \int |f| d\mu$$

y análogamente para f_-.

Ejemplo. Sea $X = \mathbb{R}$ y la función

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$

luego

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x}\, dx = \pi,$$

pero la integral del valor absoluto de la función f está acotada inferiormente por la serie

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\sin(x)}{x} \right| dx \geq \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \geq \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty,$$

por lo tanto, $f \notin L^1(X, \mu)$

Teorema 5.30. *Sean $f, g \in L^1(X, \mu)$. Luego si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $\alpha f + \beta g \in L^1(X, \mu)$, entonces*

$$\int (\alpha f + \beta g)\, d\mu = \alpha \int f\, d\mu + \beta \int g\, d\mu.$$

Demostración. Notemos que

$$|\alpha f + \beta g| \leq |\alpha||f| + |\beta||g|$$

luego, por la linealidad de la integral para funciones medibles positivas, tenemos

$$\int |\alpha f + \beta g|\, d\mu \leq |\alpha| \int |f|\, d\mu + |\beta| \int |g|\, d\mu < \infty$$

y por lo tanto, $\alpha f + \beta g \in L^1(X, \mu)$. La linealidad de la integral es ahora una consequencia de la linealidad de la integral de Lebesgue para funciones no-negativas. □

El siguiente lema es una consecuencia de la definición que hemos dado del espacio $L^1(X, \mu)$.

Lema 5.31. *Sea $f \in L^1(X, \mu)$, luego*

$$\left| \int f d\mu \right| \leq \int |f| d\mu$$

Definición 5.32. En un espacio medible $(X, \mathcal{M}, \mu)$ decimos que una afirmación se satisface **casi seguramente** o **c.s.** si no se satisface en un conjunto contenido en otro conjunto medible de medida 0.

Teorema 5.33 (Convergencia dominada). *Sea $f_n : X \to \mathbb{R}$ una sucesión de funciones y $g \in L^1(X, \mu)$, y $f : X \to \mathbb{R}$, tales que*

(i) $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ *c.s.*

(ii) $|f_n| \leq |g|$

Luego, $f \in L^1(X, \mu)$ y

$$\lim_{n\to\infty} \int |f_n - f|\, d\mu = 0.$$

Demostración. Como $|f_n| \leq |g|$ y $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ c.s. tenemos que $|f| \leq |g|$ c.s. Esto claramente implica que $f \in L^1(X, \mu)$. Ahora si $h_n := |2|g| - |f_n - f||$ entonces

$$\liminf_{n\to\infty} h_n = 2|g|, \quad \text{c.s.}$$

Luego, por el Lema de Fatou 5.27, tenemos que

$$\int_X 2|g|\, d\mu = \int_X \liminf_{n\to\infty} h_n\, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X h_n\, d\mu.$$

Es decir

$$0 \leq \int_X |f_n - f|\, d\mu \leq \limsup_{n\to\infty} \int_X |f_n - f|\, d\mu \leq 0.$$

□

Ejercicio. Pruebe que si f_n satisface las condiciones del Teorema de convergencia dominada, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu = \int f\, d\mu$$

A continuación expondremos dos ejemplos, los cuales no satisfacen la condición (ii) del teorema anterior. En el primer caso notaremos que no es posible pasar el límite bajo la integral y en el segundo sí. La importancia de estos ejemplos es que presentan la suficiencia pero no necesidad de las condiciones del Teorema de convergencia dominada.

Ejemplo. Sea $X = [0, 1]$ y μ la medida de Lebesgue.

(i) Consideremos la sucesión de funciones medibles en $L_1(\mu)$ dadas por

$$f_n(x) = \begin{cases} n & \text{si } 0 \leq x < 1/n \\ 0 & \text{si } 1/n \leq x \leq 1 \end{cases}$$

es claro que $f_n \to 0$ c.s., pero no existe $g \in L_1(x)$ tal que $|f_n(x)| \leq |g(x)|$. Además

$$\int_0^1 f_n\, dx = 1, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Podemos observar que no tan sólo es necesario que las f_n sean integrables, sino que además estén uniformemente acotadas por una función integrable.

(ii) Sea

$$g_n(x) = \begin{cases} n & \text{si } 1/n - 1/n^2 \leq x < 1/n \\ 0 & \text{si } 1/n \leq x \leq 1 \quad \text{ó} \quad 0 \leq x \leq 1/n - 1/n^2 \end{cases}$$

Luego $\text{lím}_{n\to\infty} g_n = 0$ y

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 g_n\, dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Sin embargo, la sucesión $\{g_n\}$ no puede estar dominada por ninguna función integrable. Este es un ejemplo de las limitaciones del teorema de convergencia dominada.

5.4. Integrabilidad uniforme y el teorema de Vitali

Definición 5.34. Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio medible. Decimos que una colección de funciones $\mathcal{F}$ en $L^1(X, \mu)$ es **uniformemente integrable** si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$\sup_{f\in\mathcal{F}} \int_E |f| d\mu < \varepsilon \quad si \quad \mu(E) < \delta.$$

Lema 5.35. *Toda función $f \in L^1(X, \mu)$ es uniformemente integrable.*

Demostración. Notemos que $f < \infty$ c.s. Luego $|f|1_{|f|\geq k}$ tiende a 0 c.s. cuando $k \to \infty$. Por lo tanto si k es tal que $\int |f|1_{|f|\geq k} d\mu < \epsilon$, tenemos que si $\mu(E) < \delta$ con $\delta + \epsilon/k$ entonces

$$\int_E |f| d\mu = \int_E |f|1_{|f|<k} d\mu + \int_E |f|1_{|f|\geq k} d\mu \leq 2\epsilon.$$

□

Queremos a continuación establecer un criterio equivalente a integrabilidad uniforme en espacios de medida finita. Necesitaremos primero establecer la desigualdad de Tchebychev.

Lema 5.36. *Sea* $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *un espacio de medida,* $f \in L_1(\mu)$ *y* $\alpha > 0$*, luego*

$$\mu(|f| \geq \alpha) \leq \frac{1}{\alpha} \int |f| \, d\mu$$

Esta es conocida como la ***desigualdad de Tchebychev****.*

Demostración. Por definición tenemos que

$$\mu(|f| \geq \alpha) = \int_{\{|f| \geq \alpha\}} d\mu \leq \frac{1}{\alpha} \int_{\{|f| \geq \alpha\}} |f| \, d\mu \leq \frac{1}{\alpha} \int |f| \, d\mu$$

ya que $1 \leq \frac{|f|}{\alpha}$ en el conjunto $\{|f| \geq \alpha\}$. □

Lema 5.37. *Sea* $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *un espacio medible. Consideremos una colección* $\mathcal{F}$ *en* $L^1(X, \mu)$*. Luego, si* μ *es finita, las siguientes condiciones son equivalentes.*

(i) La colección $\mathcal{F}$ *satisface*

$$\lim_{\alpha \to \infty} \sup_{f \in \mathcal{F}} \int_{\{|f| \geq \alpha\}} |f| \, d\mu = 0.$$

(ii) La colección $\mathcal{F}$ *es uniformemente integrable y* $\sup_{f \in \mathcal{F}} \int |f| d\mu < \infty$*.*

Además, (i) *implica que la colección* $\mathcal{F}$ *es uniformemente integrable.*

Demostración. Primero probamos que (i) implica (ii). Sea E un conjunto medible y $\varepsilon > 0$. Luego,

$$\begin{aligned} \int_E |f| \, d\mu &= \int_{E \cap \{|f| \geq \alpha\}} |f| \, d\mu + \int_{E \cap \{|f| < \alpha\}} |f| \, d\mu \\ &\leq \int_{\{|f| \geq \alpha\}} |f| \, d\mu + \alpha \mu(E). \end{aligned}$$

Por hipótesis, existe un α_1 tal que

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} \int_{\{|f| \geq \alpha\}} |f| \, d\mu < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{cuando} \quad \alpha \geq \alpha_1.$$

Entonces, si elegimos $\alpha \geq \alpha_1$ y $\delta = \frac{\varepsilon}{2\alpha_1}$ vemos que para $\mu(E) \leq \delta$

$$\sup_n \int_E |f_n| \, d\mu < \varepsilon.$$

Similarmente podemos ver que $\sup_f \int |f| d\mu < \infty$. Ahora probaremos que (ii) implica (i). Sea $M := \sup_f \int |f| d\mu < \infty$. Definamos $E_f = \{|f| \geq \alpha\}$, luego

$$\mu(E_f) \leq \frac{1}{\alpha} \int |f| \, d\mu \quad \Longrightarrow \quad \sup_{f \in \mathcal{F}} \mu(E_f) \leq \frac{M}{\alpha}.$$

Sea $\varepsilon > 0$. Luego, como la colección $\mathcal{F}$ es uniformemente integrable, para α suficiéntemente grande

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} \int_{\{|f| \geq \alpha\}} |f| \, d\mu < \varepsilon.$$

□

Observación. Sea $g \in L^1(X,\mu)$ y f_n en $L^1(X,\mu)$ tales que $|f_n| \leq |g|$. Luego, por la desigualdad de Tchebychev, el teorema de convergencia dominada y el teorema anterior, es obvio que la sucesión $\{f_n\}$ es uniformemente integrable.

Lema 5.38. *Una colección de funciones $\mathcal{F}$ en $L^1(X,\mu)$, con μ finita, es uniformemente integrable si y sólo si existe un $\varepsilon > 0$ tal que*

$$M = \sup_{f\in\mathcal{F}} \int |f|^{1+\varepsilon} d\mu < \infty.$$

Demostración. Por la desigualdad de Tchebychev tenemos que

$$\int_{\{|f|\geq\alpha\}} |f|\, d\mu \leq \int \frac{|f|^{1+\varepsilon}}{\alpha^\varepsilon}\, d\mu \leq \frac{M}{\alpha^\varepsilon}.$$

Luego, tomando el supremo sobre las funciones en $\mathcal{F}$ y haciendo $\alpha \to \infty$ concluímos que la colección $\mathcal{F}$ es una sucesión de funciones uniformemente integrables. □

Nota. En las hipótesis del Lema 5.38 podemos cambiar $|f|^{1+\varepsilon}$ por $\varphi(f)$, para φ convexa y positiva.

Ejemplo. Mostraremos un ejemplo de una colección de funciones que es uniformemente integrable, pero que sin embargo no satisface la condición (i) del lema 5.37. Consideremos el espacio métrico $[0,1]$ con la métrica usual y la sucesión de funciones medibles $\{f_n\}$ definidas por

$$f_n(x) = \begin{cases} n & \text{si } x = 1/2 \\ 0 & \text{si } x \neq 1/2 \end{cases}$$

Sobre $[0,1]$ definimos la medida $\mu = \frac{m}{2} + \frac{\delta_{1/2}}{2}$ donde m es la medida de Lebesgue sobre $[0,1]$ y $\delta_{1/2}$ es la medida delta de Dirac concentrada en $1/2$. Luego,

$$\int f_n\, d\mu = \frac{n}{2}$$

Además

$$\int_{\{|f_n|\geq\alpha\}} f_n\, d\mu = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha > n \\ n/2 & \text{si } \alpha \leq n. \end{cases}$$

Sin embargo, la sucesión f_n es uniformemente integrable. En efecto

$$\int_E |f_n|\, d\mu = 0, \quad \text{si} \quad \mu(E) < \frac{1}{2}.$$

Lema 5.39. *Si μ es finita y* $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ *c.s. entonces*

$$f_n\, 1_{\{f_n\leq\alpha\}} \longrightarrow f\, 1_{\{f\leq\alpha\}} \quad c.s.$$

salvo para una cantidad numerable de valores de α.

Demostración. Como μ es finita, es cierto que el conjunto

$$\mathcal{A} := \{\alpha \in \mathbb{R} : \mu(x : |f(x)| = \alpha) > 0\},$$

es numerable. Por lo tanto, si $\alpha \notin \mathcal{A}$, tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} f_n 1_{|f_n|\leq\alpha} = f 1_{|f|\leq\alpha}.$$

□

Definición 5.40. Decimos que una sucesión de funciones medibles f_n **converge en μ-medida** a f si y sólo si, para todo $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mu(|f_n - f| > \varepsilon) = 0.$$

Ocuparemos también la notación $f_n \xrightarrow{\mu} f$.

Ejemplo. La convergencia casi segura no implica convergencia en medida. En efecto consideremos el espacio métrico $\mathbb{R}$ con la topología usual y la medida de Lebesgue. Sea f_n una sucesión de funciones medibles definidas por

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \le n \\ 1 & \text{si } x > n \end{cases}$$

es claro que $f_n(x) \to 0$ c.s., pero para cualquier $0 < \varepsilon < 1$ tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \mu(|f_n - f| > \varepsilon) = \infty.$$

Por otra parte, la convergenci en medida no implica la convergencia casi segura.

Lema 5.41. *Consideremos un espacio medidible $(X, \mathcal{M}, \mu)$ con μ finite. Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones medibles que converge a una función medible f casi seguramente. Entonces, f_n converge en medida a f.*

Demostración. Notemos que

$$\mu(\limsup_{n\to\infty} |f_n - f| = 0) = \mu(X).$$

Luego, para todo $\varepsilon > 0$ se tiene que

$$\mu(\lim_{n\to\infty} \sup_{k\ge n} |f_k - f| > \varepsilon) = 0. \tag{5.4}$$

Por lo tanto

$$0 = \lim_{n\to\infty} \mu(\sup_{k\ge n} |f_k - f| > \varepsilon) \ge \lim_{n\to\infty} \mu(|f_n - f| > \varepsilon).$$

□

Observación. Si $f_n \to f$ en $L_1(\mu)$, para todo $\varepsilon > 0$

$$\mu(|f_n - f| > \varepsilon) \le \frac{1}{\varepsilon} \int |f_n - f| \, d\mu \longrightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad n \to \infty.$$

La demostración del siguiente resultado se deja como un ejercicio.

Lema 5.42. *Consideremos una sucesión f_n que converge a f en medida. Luego existe una subsucesión f_{n_k} que converge c.s. a f.*

Teorema 5.43. (Vitali). *Consideremos un espacio de medida $(X, \mathcal{M}, \mu)$. Sea $\{f_n\}$ una sucesión en $L^1(X, \mu)$ y $f \in L^1(X, \mu)$. Supongamos que*

(i) La sucesión $\{f_n\}$ es uniformemente integrable.

(ii) La sucesión f_n converge en medida a f.

(iii) Para todo $\epsilon > 0$ existe un conjunto medible E de medida finita tal que

$$\int_{E^c} |f_n| d\mu \leq \epsilon.$$

Luego

$$\lim_{n\to\infty} \int |f_n - f|\, d\mu = 0.$$

Demostración. Primero supondremos que μ es finita. Notemos que

$$\int |f_n - f|\, d\mu \leq \int_{\{|f_n|<\alpha\}} |f_n - f|\, d\mu + \int_{\{|f_n|\geq\alpha\}} |f_n|\, d\mu + \int_{\{|f_n|\geq\alpha\}} |f|\, d\mu.$$

Además para $\varepsilon > 0$ arbitrario tenemos

$$\begin{aligned}
\int_{\{|f_n|<\alpha\}} |f_n - f|\, d\mu &= \int_{\substack{\{|f_n|<\alpha\}\\ \{|f_n-f|\leq\varepsilon\}}} |f_n - f|\, d\mu + \int_{\substack{\{|f_n|<\alpha\}\\ \{|f_n-f|>\varepsilon\}}} |f_n - f|\, d\mu \\
&\leq \varepsilon\mu(X) + \int_{\substack{\{|f_n|<\alpha\}\\ \{|f_n-f|>\varepsilon\}}} |f_n|\, d\mu + \int_{\substack{\{|f_n|<\alpha\}\\ \{|f_n-f|>\varepsilon\}}} |f|\, d\mu \\
&\leq \varepsilon\mu(X) + \alpha\mu(|f_n - f| > \varepsilon) + \int_{\substack{\{|f|<\alpha\}\\ \{|f_n-f|>\varepsilon\}}} |f|\, d\mu + \int_{\substack{\{|f|\geq\alpha\}\\ \{|f_n-f|>\varepsilon\}}} |f|\, d\mu \\
&\leq \varepsilon\mu(X) + 2\alpha\mu(|f_n - f| > \varepsilon) + \int_{\{|f|\geq\alpha\}} |f|\, d\mu.
\end{aligned}$$

Por la integrabilidad uniforme, sabemos que existe un $\delta > 0$ tal que $\int_E |f_n| d\mu \leq \varepsilon$ y $\int_E |f| d\mu \leq \varepsilon$ si $\mu(E) \leq \delta$. Ahora, sea $\alpha > 0$ tal que

$$\mu(|f| \geq \alpha - 1) \leq \frac{\delta}{2}.$$

Afirmamos que entonce existe un N tal que

$$\mu(|f_n| \geq \alpha) \leq \delta,$$

cuando $n \geq N$. En efecto

$$\mu(|f_n| \geq \alpha) \leq \mu(|f_n - f| \geq 1) + \mu(|f| \geq \alpha - 1).$$

Luego basta elegir N tal que $\mu(|f_n - f| \geq 1) \leq \delta/2$ cuando $n \geq N$. Concluímos que

$$\limsup_{n\to\infty} \int |f_n - f|\, d\mu \leq \varepsilon\mu(X) + \int_{\{|f|\geq\alpha\}} |f|\, d\mu + \sup_{n\geq N} \int_{\{|f_n|\geq\alpha\}} |f_n|\, d\mu + \sup_{n\geq N} \int_{\{|f_n|\geq\alpha\}} |f|\, d\mu.$$

Por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} \int |f_n - f|\, d\mu \leq \varepsilon\mu(X) + 3\varepsilon.$$

Como ε es arbitrario, esto termina la demostración para el caso μ finita. El caso para μ general se puede reducir facilmente al anterior ocupando la condición (*iii*). $\square$