5.5. Unicidad y completaciones

En esta sección estableceremos dos resultados de unicidad para medidas positivas. Nuestro primer obejtivo es probar que dos medidas positivas que coinciden en un álgebra de conjuntos, necesariamente coinciden en la σ-álgebra más pequeña que contiene al álgebra.

Definición 5.45. Sea X un conjunto. Decimos que una colección $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X es un **álgebra** si la siguientes condiciones se satisfacen.

(i) $A \in \mathcal{A}$ entonces $A^c \in \mathcal{A}$,

(ii) $A \cap B \in \mathcal{A}$ si $A, B \in \mathcal{A}$.

Definición 5.46. Sea X un conjunto. Decimos que una coleción de subconjuntos $\mathcal{M}$ de X es una **clase monótona** si se satisfacen las siguientes propiedades.

(i) Si $A_n \in \mathcal{M}$ y $A_n \subset A_{n+1}$, para todo natural n, entonces

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

también está en $\mathcal{M}$.

(ii) Si $B_n \in \mathcal{M}$ y $B_{n+1} \subset B_n$, para todo natural n, entonces

$$B = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$$

también está en $\mathcal{M}$.

El siguiente resultado es conocido como el Teorema de Clase Monótona, y se deja como ejercicio al lector, ya que su prueba no requiere más que un poco de astucia, junto con la definición de clase monótona y álgebra de conjuntos.

Teorema 5.47 (Clase Monótona). *Sea $\mathcal{A}$ una álgebra de conjuntos que contiene el vacío y $\mathcal{M}$ una clase monótona que contiene a $\mathcal{A}$. Luego $\sigma(\mathcal{A}) \subset \mathcal{M}$.*

Definición 5.48. Decimos que una medida positiva μ definida en un espacio de medida $(X, \mathcal{M})$ es **σ-finita** si existe una sucesión $\{A_n\} \subset \mathcal{M}$ tal que $X = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$ y $\mu(A_n) < \infty$. Si $\mathcal{M} = \sigma(\mathcal{A})$ para algún álgebra $\mathcal{A}$, decimos que μ es **fuertemente σ-finita** si existe una sucesión A_n en el álgebra $\mathcal{A}$ tal que $X = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$ y $\mu(A_n) < \infty$.

Observación. Toda medida positiva σ-finita es semi-finita. Sin embargo, existen medidas semi-finitas que no son σ-finitas. Por ejemplo, sea $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{M}$ la potencia de X y μ se define como

$$\mu(\{x\}) = 1,$$

para cada real x,

$$\mu(A) = \sum_{x \in A} \mu(\{x\}),$$

para A finito o numerable y $\mu(A) = \infty$ para A no numerable. Luego μ es semi-finita, pero no es σ-finita.

Proposición 5.49. *Sea X un conjunto no vacío, $\mathcal{A}$ un álgebra de conjuntos de X que contiene al vacío y $\sigma(\mathcal{A})$ la σ-álgebra más pequeña conteniendo $\mathcal{A}$. Sea μ_1 una medida en $\sigma(\mathcal{A})$ que es fuértemente σ-finita. Supongamos que existe otra medida positiva μ_2 en $\sigma(\mathcal{A})$ tal que $\mu_1(A) = \mu_2(A)$ si $A \in \mathcal{A}$. Luego $\mu_1 = \mu_2$ en $\sigma(\mathcal{A})$.*

Demostración. Supongamos primero que μ_1 es finita. Sea

$$\mathcal{R} := \{A \in \sigma(\mathcal{A}) \,:\, \mu_1(A) = \mu_2(A)\}.$$

Probaremos que $\mathcal{R} = \sigma(\mathcal{A})$. En efecto, notemos que $\mathcal{A} \subset \mathcal{R}$. Además, si $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$, con $A_n \in \mathcal{R}$ y $A_n \subset A_{n+1}$ tenemos

$$\mu_1(A) = \lim_{n\to\infty} \mu_1(A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu_2(A_n) = \mu_2(A).$$

Similarmente tenemos igualdad cuando $A = \cap_{n=1}^{\infty} A_n$ con $A_{n+1} \subset A_n$. Por lo tanto $\mathcal{R}$ es una clase monótona. Por el teorema de la clase monótona concluímos que $\mathcal{R} = \sigma(\mathcal{A})$.

En general, si μ_1 es fuertemente σ-finita sobre $\sigma(\mathcal{A})$, elegimos $A_n \in \mathcal{A}$ disjuntos con medida finita tales que $X = \coprod_{n=1}^{\infty} A_n$. Luego para cada $B \in \sigma(\mathcal{A})$ tenemos

$$\mu_1(B) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_1(B \cap A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_2(B \cap A_n) = \mu_2(B).$$

En efecto, para cada n, $A_n \cap \sigma(\mathcal{A}) = \sigma(A_n \cap \mathcal{A})$ y por lo tanto aplicando la el resultado para el caso de medidas finitas concluímos que

$$\mu_1(B \cap A_n) = \mu_2(B \cap A_n).$$

$\square$

Ejercicio. Pruebe la afirmación $A \cap \sigma(\mathcal{A}) = \sigma(A \cap \mathcal{A})$, de la Proposición 5.49. Además demuestre que se puede elegir una sucesión disjunta A_n de elementos del álgebra tal que $X = \amalg_{n=1}^{\infty} A_n$.

Queremos ahora mostrar como se puede extender una medida positiva definida en una σ-álgebra a una σ-álgebra completa.

Definición 5.50. Consideremos un espacio de medida $(X, \mathcal{M}, \mu)$. Llamamos $\mathcal{M}^*$ a la colección de todos los subconjuntos $E \subset X$ tales que $\mu(B - A) = 0$ para $A, B \in \mathcal{M}$ tales que $A \subset E \subset B$. A la colección $\mathcal{M}^*$ la llamamos la **completación de** $\mathcal{M}$ respecto a μ.

Teorema 5.51. *Consideremos un espacio de medida $(X, \mathcal{M}, \mu)$. La completación $\mathcal{M}^*$ de $\mathcal{M}$ respecto a μ es una σ álgebra. Además μ tiene una extensión única como medida positiva a la completación $\mathcal{M}^*$ de $\mathcal{M}$.*

Demostración. Dado un conjunto $E \in \mathcal{M}^*$, definimos

$$\mu(E) := \mu(A),$$

donde $A, B \in \mathcal{M}$ son tales que $A \subset E \subset B$ y $\mu(B - A) = 0$. Notemos que esta extensión está bien definida. En efecto, si $A_1 \subset E \subset B_1$ y $\mu(B_1 - A_1) = 0$, entonces

$$A - A_1 \subset E - A_1 \subset B_1 - A_1,$$

y por lo tanto $\mu(A - A_1) = 0$. Luego $\mu(A) = \mu(A \cap A_1)$. Por simtería $\mu(A_1) = \mu(A \cap A_1)$. Es decir $\mu(A) = \mu(A_1)$. Por otra parte es obvio que la extensión que hemos definido es única.

Ahora, notemos que $X \in \mathcal{M}^*$. Además, si $A \subset E \subset B$, entonces $B^c \subset E^c \subset A^c$ y $A^c - B^c = B - A$. Luego $E^c \in \mathcal{M}^*$. Y si $A_i \subset E_i \subset B_i$, claramente $A \subset E \subset B$, donde $A = \cup A_i$, $E = \cup E_i$ y $B = \cup B_i$, y $B - A \subset \cup(B_i - A_i)$. Esto implica que $E \in \mathcal{M}^*$. Es fácil ver que la extensión de μ sigue siendo σ-aditiva.

$\square$