1.4. Funciones continuas

Los matemáticos demoraron un tiempo en encontrar una definición que correspondiera a la noción intuitiva de continuidad incluso para funciones de los reales en si mismos. Una definición que resultó no ser la adecuada es la llamada actualmente *continuidad de Darboux* o *propiedad del valor intermedio*.

Definición 1.23. Sea $E \subset \mathbb{R}$. Decimos que una función $f : E \to \mathbb{R}$ es **Darboux continua** o que satisface la **propiedad del valor intermedio** si para todo $x_1, x_2 \in E$ e $y \in \mathbb{R}$ que satisfacen

$$f(x_1) \leq y \leq f(x_2),$$

existe un $x \in E$ tal que

$$f(x) = y.$$

Recordemos que una funcion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua en $x \in \mathbb{R}$ si para todo $\epsilon > 0$ existe un δ tal que $|f(x) - f(y)| \leq \epsilon$ si $|x - y| \leq \delta$. Además, una función continua en $\mathbb{R}$ es Darboux continua en $\mathbb{R}$. Existen funciones que satisfacen la propiedad del valor intermedio, pero que no son continuas. Por ejemplo

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ sen\frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

no es continua en 0. Por otra parte, si $x_2 > x_1 > 0$, por la continuidad de f en $[x_1, x_2]$, todo valor entre $f(x_1)$ y $f(x_2)$ es alcanzado. Si $x_1 < 0 < x_2$, claramente todos los valores entre $f(x_1)$ y $f(x_2)$ se alcanzan. En realidad, existen funciones aún más patologicas que este ejemplo.

Lema 1.24. *Existe una función $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ que satisface la propiedad del valor intermedio en $[0,1]$, pero que es discontinua en todo $x \in [0,1]$.*

Demostración. Sea $x \in [0,1]$. Consideremos su expansión decimal

$$x = 0.a_1 a_2 \ldots,$$

con $a_n \in \{0, 1, \ldots, 9\}$. Consideremos el número

$$z = 0.a_1 a_3 a_5 \ldots$$

Si la sucesión $\{a_{2k+1} : k \geq 0\}$ no es periódica, definimos

$$f(x) = 0.$$

En cambio si $\{a_{2k+1} : k \geq 0\}$ es periódica, con su primer periodo comenzando en a_{2n-1} $(k = n - 1)$ definimos

$$f(x) = 0.a_{2n} a_{2n+2} a_{2n+4} \cdots$$

Ahora verifiquemos que esta función satisface la siguiente propiedad: para todo intervalo cerrado $I \subset [0,1]$ e $y \in (0,1)$ existe un $x \in I$ tal que

$$f(x) = y.$$

En efecto, siempre es posible encontrar un n tal que el intervalo I contiene un decimal truncado

$$0.a_1a_2\dots a_{2n-2},$$

y además a todos los decimales que comienzan con los mismos primeros $2n-2$ dígitos. Ahora expandamos $y = 0.b_1b_2\dots$. Elegimos un numero $0.a_1a_3\dots a_{2n-1}a_{2n+1}a_{2n+3}\dots$ periódico con su primer periodo comenzando en a_{2n-1}. Luego si elegimos,

$$x = 0.a_1a_2\dots a_{2n-1}b_1a_{2n+1}b_2a_{2n+3}\dots,$$

tenemos que $f(x) = y$. $\square$

Antes de introducir la noción correcta de continuidad, introducimos el concepto de límite de una función.

Definición 1.25. Sean (X,ρ) e (Y,σ) espacios métricos. Sea f una función con dominio $E \subset X$ y recorrido en Y. Supongamos también que x_0 es un punto límite de E e $y_0 \in Y$. Entonces diremos

$$f(x) \to y_0 \quad \text{cuando} \quad x \to x_0 \quad \text{o} \quad \lim_{x\to x_0} f(x) = y_0$$

si, dado $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que

$$\sigma(f(x), y_0) < \varepsilon \quad \text{cuando} \quad x \in E \quad \text{y} \quad 0 < \rho(x, x_0) < \delta$$

En este caso diremos que y_0 es el **límite de la función** f cuando $x \to x_0$ en E.

Teorema 1.26. *Sean (X,ρ) e (Y,σ) espacios métricos. Sea f una función con dominio $E \subset X$ y con recorrido en Y y suponga que x_0 es un punto límite de E. Entonces $f(x) \to y_0$ cuando $x \to x_0$ si y sólo si, para toda sucesión $\{x_n\}$ en $E - \{x_0\}$ tal que $x_n \to x_0$, $f(x_n) \to y_0$ cuando $n \to \infty$.*

La prueba de este teorema se deja como ejercicio. Este teorema será de gran importancia a la hora de encontrar una forma equivalente de continuidad en espacios métricos.

La definición de continuidad que daremos es una generalización del concepto familiar en análisis matemático.

Definición 1.27. Sean (X,ρ) e (Y,σ) espacios métricos. Decimos que la función $f : X \to Y$ es **continua** en el punto x_0 de X si, dado $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que

$$\sigma(f(x), f(x_0)) < \varepsilon \quad \text{cuando} \quad \rho(x, x_0) < \delta$$

Es decir,

$$f(B(x_0;\delta)) \subset B(f(x_0);\varepsilon).$$

Si f es continua en todo punto de un conjunto, diremos que f es continua sobre este conjunto.

Notemos que si x_0 es un punto límite de X la condición de continuidad de puede expresar como

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Teorema 1.28. *Sean (X,ρ) e (Y,σ) espacios métricos y $f : X \to Y$ una función. Luego, las siguientes condiciones son equivalentes,* *(i)* f *es continua.*

(ii) Para todo cerrado F *en* Y*, el conjunto* $f^{-1}(F)$ *es cerrado en* X*.*

(iii) Para todo abierto G *en* Y*, el conjunto* $f^{-1}(G)$ *es abierto en* X*.*

DEMOSTRACIÓN. (i) implica (iii). Sea G abierto en Y. Si $f^{-1}(G) = \varnothing$, entonces por definición es abierto en X. Sea x un punto de $f^{-1}(G)$. Luego $f(x) \in G$ y existe un $\varepsilon > 0$ tal que $B(f(x); \varepsilon) \subset G$. Por continuidad existe $\delta > 0$ tal que $f(B(x; \delta)) \subset B(f(x); \varepsilon)$, luego $B(x; \delta) \subset f^{-1}(G)$. Como $x \in f^{-1}(G)$ es arbitrario concluimos que $f^{-1}(G)$ es abierto en X.
(iii) implica (i). Sea $x \in X$ y $\varepsilon > 0$. Como $B(f(x); \varepsilon)$ es abierto en Y, entonces existe $\delta > 0$ tal que $B(x; \delta) \subset f^{-1}(B(f(x); \varepsilon))$. Por lo tanto $f(B(x; \delta)) \subset B(f(x); \varepsilon)$.
(ii) es equivalente a (iii). Si F es cerrado en Y entonces F^c es abierto. Luego X es una unión disjunta de $f^{-1}(F)$ y $f^{-1}(F^c)$, lo que prueba la equivalencia. □

Más adelante definiremos una noción conjuntista de cercanía que llamaremos topología. Así, la parte *(iii)* del Teorema 1.28 será la definición de continuidad en espacios que tengan "estructura topológica".

Definición 1.29. Sean (X, ρ) e (Y, σ) espacios métricos. Decimos que la función $f : X \to Y$ es **uniformemente continua** sobre X si, dado $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que

$$\sigma(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon \qquad \text{cuando} \qquad \rho(x_1, x_2) < \delta.$$

La condición es claramente equivalente a que el conjunto

$$E(\delta) = \{\sigma(f(x_1), f(x_2)) \,:\, \rho(x_1, x_2) < \delta\}$$

es acotado y el supremo $\omega(\delta)$ en $E(\delta)$ tiende a 0 cuando $\delta \to 0$.

Ejercicio. Pruebe la afirmación de equivalencia en la Definición 1.29.

Definición 1.30. Sea (X, ρ) un espacio métrico, $E \subset X$ y $x \in X$. Definimos la **distancia entre un punto y un conjunto** por

$$\rho(x, E) = \inf_{y \in E} \rho(x, y)$$

Lema 1.31. *Sea* (X, ρ) *un espacio métrico y* $E \subset X$*. La función* $\rho(x, E) : X \to \mathbb{R}$ *es uniformemente continua, además* $\rho(x, E) = 0$ *si y sólo si* $x \in \overline{E}$*.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $z \in E$, $x, y \in X$. Luego,

$$\rho(x, E) \leq \rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$$

entonces, tomando el ínfimo sobre $z \in E$, tenemos

$$\rho(x, E) - \rho(y, E) \leq \rho(x, y)$$

luego, por simetría se concluye que $\rho(x, E)$ es uniformemente continua (tomando $\delta = \varepsilon$).

Ahora, supongamos que $x \in \overline{E}$ entonces existe $\{x_n\} \subset E$ tal que $x_n \to x$ cuando $n \to \infty$. Luego

$$\rho(x, E) \leq \rho(x, x_n) \to 0 \quad \text{cuando} \quad n \to \infty$$

por lo tanto $\rho(x, E) = 0$.
Recíprocamente , si $\rho(x, E) = 0$ tenemos que para todo $n > 0$ existe un $y_n \in E$ tal que

$$\rho(x, y_n) \leq \frac{1}{n}$$

de donde se concluye que x es un punto de límite de E, es decir $x \in \overline{E}$. □

Lema 1.32 (Urysohn). *Sea (X, ρ) un espacio métrico y sean C y D conjuntos cerrados disjuntos en X. Luego existe una función continua $f : X \to [0, 1]$ con la propiedad $f(x) = 1$ si $x \in C$, $f(x) = 0$ si $x \in D$.*

Demostración. Bastará considerar la función

$$f(x) = \frac{\rho(x, D)}{\rho(x, C) + \rho(x, D)}$$

Es fácil ver que $f : X \to [0, 1]$, $f(x) = 1$ si $x \in C$ y $f(x) = 0$ si $x \in D$. Sólo debemos probar que f es continua, para ello consideremos $g(x) = \rho(x, D)$ y $h(x) = \rho(x, C) + \rho(x, D)$, entonces $h(x) \neq 0$ para todo $x \in X$ y

$$\begin{aligned} \left| \frac{g(x)}{h(x)} - \frac{g(y)}{h(y)} \right| &\leq \left| \frac{g(x)}{h(x)} - \frac{g(y)}{h(x)} \right| + \left| \frac{g(y)}{h(x)} - \frac{g(y)}{h(y)} \right| \\ &\leq \frac{|g(x) - g(y)|}{h(x)} + \frac{g(y)}{h(x)h(y)} |h(y) - h(x)| \end{aligned}$$

Por la continuidad de h, g y que $h \neq 0$ en X se concluye la continuidad del cuociente g/h. Por lo tanto f es continua. □

Finalizamos con la siguiente definición, análoga al concepto de homomorfismo en grupos.

Definición 1.33. Sean (X, ρ) e (Y, σ) espacios métricos. Decimos que una función $f : X \to Y$ es un **homeomorfismo** si f es continua, biyectiva y tiene inversa $f^{-1} : Y \to X$ continua. En este caso escribimos $X \cong Y$ y decimos que X es **homeomorfo** a Y.

1.5. Topología en pocas palabras

Daremos una breve introducción a los conceptos básicos de topología general. Tal como los espacios métricos son una abstracción de los espacios euclidianos, puede decirse que la topología da un paso más en esta abstracción. En las secciones anteriores, se formalizó el concepto de cercanía mediante una función que llamamos métrica. Ahora, se buscará una noción conjuntista de cercanía mediante la definición de conjuntos abiertos.

Definición 1.34. Sea X un conjunto y τ una familia de subconjuntos de X. Diremos que τ es una **topología** si se cumple:

1. $\varnothing$, $X \in \tau$
2. Sea $(A_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}) \subset \tau$. Luego, $\cup_\alpha A_\alpha \in \tau$
3. Sean $A_1, ..., A_n \in \tau$. Luego, $\cap_{i=1}^n A_i \in \tau$

Al par (X, τ) lo denominaremos **espacio topológico** . Los elementos de τ se denominan **conjuntos abiertos**. Los subconjuntos de X cuyo complemento esté en τ se denominan **conjuntos cerrados**.

Así, las propiedades de la colección de los abiertos de un espacio métrico pueden resumirse diciendo que dicha colección es una topología.

Ejercicio. Pruebe, dada la definición de conjunto abierto en un espacio métrico (X, ρ), que la colección de todos los conjuntos abiertos de un espacio métrico forman una topología.

Ejemplo. 1. Sea X un conjunto no vacío. La topología más sencilla es aquella dada por $\tau = \{\phi, X\}$. Esta se denomina **topología indiscreta**.

2. Sea X como antes. La potencia de X es una topología denominada la **topología discreta**. Observe que esta topología coincide con la topología de los abiertos de X con la métrica discreta.

3. Sea X un conjunto infinito. Considere τ, la familia de aquellos conjuntos cuyo complemento es finito. Es fácil verificar que τ es una topología.

Recordemos la definición de abierto en un espacio métrico. Un conjunto A es abierto si para todo punto $x \in A$ existe $\epsilon_x > 0$ tal que $B(x; \epsilon_x) \subset A$. Esta propiedad es muy útil, pues permite escribir cualquier abierto como una unión arbitraria de bolas abiertas:

$$A = \cup_{x \in A} B(x; \epsilon_x)$$

Podemos dar un paso más al observar que, gracias a lo anterior, no necesitamos conocer todos los abiertos. Basta saber qué conjuntos son bolas abiertas. Luego, los abiertos serán simplemente uniones arbitrarias de bolas abiertas.
Así, supongamos que tenemos una subcolección $\mathcal{B}$ de τ que satisface la siguiente propiedad:

$$\forall A \in \tau, \forall x \in A, \exists B_x \in \mathcal{B} \text{ tal que } x \in B \subset A \tag{1.5}$$

Nuevamente, podemos escribir A como

$$A = \cup_{x \in A} B_x$$

Luego, los elementos de la topología (los abiertos) son exactamente las uniones arbitrarias de elementos de $\mathcal{B}$. A una colección $\mathcal{B}$ que cumple (1.5), la denominamos una **base** para la topología τ.

Ejemplo. 1. A la topología de $\mathbb{R}$ formada por todos los conjuntos abiertos con la métrica euclidiana la denominamos la topología usual. Observe que los intervalos abiertos son una base para esta topología.

2. Considere la familia formada por uniones arbitraria de intervalos semiabiertos a la izquierda $(a, b]$. Es fácil verificar que esta colección es efectivamente una topología. Los intervalos semiabiertos a la izquierda son una base para esta topología.

Ejercicio. Pruebe, en el ejemplo anterior, que ambas topologías coinciden.

Tomemos una familia $\mathcal{C}$ de subconjuntos de un conjunto X. Nos preguntamos cuando es posible definir una topología sobre X que contenga a esta familia. El siguiente Lema nos brinda la respuesta:

Lema 1.35. *Dada una familia $\mathcal{C}$ de subconjuntos de un conjunto X, siempre existe una única topología τ sobre X que cumple la siguiente propiedad: si σ es una topología sobre X que contiene a $\mathcal{C}$, entonces, $\tau \subset \sigma$.*

DEMOSTRACIÓN. Observe que la potencia de X es una topología que contiene a $\mathcal{C}$. Luego, considere τ, la intersección de todas las topologías que contienen a $\mathcal{C}$. Es fácil verificar que esta es la topología buscada. □

La topología dada anteriormente puede parecer un tanto imprecisa. Daremos a continuación un método para construir explícitamente una topología a partir de una cierta familia de conjuntos.

Definición 1.36. Sea X un conjunto y $\mathcal{C}$ una familia de subconjuntos de X. Decimos que $\mathcal{C}$ es una **sub-base** si $X = \cup_{C \in \mathcal{C}} C$. Sea $\tau(\mathcal{C})$ la familia formada por las uniones arbitrarias de intersecciones finitas de elementos de $\mathcal{C}$. Decimos que $\tau(\mathcal{C})$ es la **topología generada** por la sub-base $\mathcal{C}$.

Obviamente, tenemos que mostrar que $\tau(\mathcal{C})$ es una topología.

Lema 1.37. *La topología generada por una sub-base es una topología.*

DEMOSTRACIÓN. Ejercicio □

Ejemplo. Sea $\{(X_\alpha, \tau_\alpha) : \alpha \in \mathcal{A}\}$ una familia de espacios topológicos. Definimos la topología producto sobre $X = \prod_{\alpha \in \mathcal{A}} X_\alpha$ como aquella que tiene por subbase los conjuntos de la forma $\pi_\alpha^{-1}(U_\alpha)$ donde $\pi_\alpha : X \to X_\alpha$ es la proyección sobre la coordenada α y $U_\alpha \subset X_\alpha$ es un abierto.

Ahora, tomemos dos espacios topológicos (X, τ) e (Y, σ), y una función $f : X \to Y$ tal que para todo $A \in \sigma$, se tiene $f^{-1}(A) \in \tau$. Dichas funciones se denominan funciones continuas y son la generalización de aquellas que estudiamos en las secciones anteriores. Similarmente, decimos que una biyección continua entre X e Y es un homeomorfismo si su inversa es continua.
Notamos que la continuidad de una función depende exclusivamente de la topología de los espacios involucrados.

Ejemplo.
1. Consideremos τ_1 la topología formada por uniones arbitrarias de intervalos semiabiertos por la izquierda de $\mathbb{R}$, τ_2 la topología usual sobre $\mathbb{R}$. Las funciones continuas $F : X \to Y$ donde $X = \mathbb{R}$ con la topología τ_1, $Y = \mathbb{R}$ con la topología τ_2, son exactamente las funciones continuas por la izquierda considerando X e Y con la topología usual. Véase ejercicio anterior.

   Veamos otro ejemplo patológico:

2. Considere la función $f : X \to Y$ dada por $f(x) = x$ donde $X = Y = [0, 1]$. Consideremos el caso en que premunimos X de la topología usual e Y de la topología discreta. Es fácil ver que f es continua. Pero, observemos que f^{-1} no es continua pues, por ejemplo, los puntos son abiertos en X y no lo son en Y.

1.6. Espacios métricos completos

El concepto de espacio métrico completo, surgió a fines del siglo 19, primero en el contexto de los números reales. En efecto, una de las primeras construcciones de los números reales fue hecha por el matemático alemán W. Heine, definiéndolos como clases de equivalencia de sucesiones de números racionales satisfaciendo la propiedad de Cauchy.

Definición 1.38. Decimos que una sucesión $\{x_n\}$ de puntos en un espacio métrico (X, ρ) es una **sucesión de Cauchy** si, dado $\varepsilon > 0$, existe un N tal que

$$\rho(x_m, x_n) < \varepsilon \quad \text{cuando} \quad m, n > N.$$

Teorema 1.39. *Toda sucesión convergente en un espacio métrico es una sucesión de Cauchy.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\{x_n\} \subset X$ una sucesión convergente a $x \in X$, luego dado $\varepsilon > 0$ existe $N > 0$ tal que

$$\rho(x, x_n) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{cuando} \quad n > N$$

luego

$$\rho(x_n, x_m) \leq \rho(x_n, x) + \rho(x, x_m) < \varepsilon \quad \text{cuando} \quad m, n > N$$

por lo tanto $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy. □

Existen espacios métricos donde $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy, pero x_n no converge en el espacio. Por ejemplo, en el espacio métrico $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ la sucesión

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

es una sucesión de Cauchy, pero no converge en $\mathbb{Q}$ con la métrica usual $(x_n \to e)$.

Ejercicio. Probar que $e \notin \mathbb{Q}$, es decir que

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

no es de la forma m/n con $m, n \in \mathbb{Z}$.

Definición 1.40. Decimos que un espacio métrico (X, ρ) es **completo** si toda sucesión de Cauchy converge. Además, si $E \subset X$, decimos que E es completo si toda sucesión de Cauchy en E converge a un punto en E.

Observación. La propiedad de que un espacio métrico sea completo no es invariante bajo homeomorfismos. En efecto, consideremos $f : X \to Y$ donde X es el conjunto de los naturales con la métrica usual e Y los naturales con la métrica $d(n, m) = \frac{|n-m|}{nm}$. El lector podrá verificar fácilmente que ambos espacios métricos están dotados de la topología discreta y luego, f dada por $f(n) = n$ es un homeomorfismo. Sin embargo, X es completo e Y no lo es ya que la sucesión 1, 2, 3,... es de cauchy con la métrica d y no tiene límite en Y. Este ejemplo ilustra el mal comportamiento de la completitud con respecto a los homeomorfismos, aun en espacios métricos sencillos.

Lema 1.41. *Toda sucesión de números reales tiene una subsucesión monótona.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\{x_n\}$ cualquier sucesión de números reales. Llamaremos x_p un **punto terraza** si $x_n \leq x_p$ para todo $n \geq p$.

Si existe una cantidad infinita de puntos terrazas, sea x_{ν_1} el primero, x_{ν_2} el segundo, y así sucesivamente. Luego $\{x_{\nu_k}\}$ es una sucesión monótona no creciente.

Si existe a lo más una cantidad finita de puntos terrazas (o no existen), entonces existe un ν_1 tal que para ningún $n \geq \nu_1$, x_n es un punto terraza. Luego, existe $\nu_2 > \nu_1$ tal que $x_{\nu_2} > x_{\nu_1}$. Por inducción en k, podemos construir un subsucesión $\{x_{\nu_k}\}$ creciente. □

Teorema 1.42. *El espacio $\mathbb{R}$ (con la métrica usual) es completo.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\{x_n\}$ una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$. Primero probaremos que $\{x_n\}$ es acotada. Ya que existe un entero N tal que

$$|x_n - x_m| < 1 \quad \text{cuando} \quad n, m \geq N,$$

sigue que

$$|x_n| \leq |x_n - x_N| + |x_p| < 1 + |x_p|$$

cuando $n \geq N$. Entonces, para todo n,

$$|x_n| \leq \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_{N-1}|, |x_N| + 1\}.$$

Ahora sigue del Lema 1.41 que $\{x_n\}$ tiene una subsucesión acotada, monótona y por lo tanto convergente, diremos $\{x_{\nu_k}\}$. Supongamos que $x_{\nu_k} \to x$, luego dado $\varepsilon > 0$ existe N_1 tal que

$$|x_{\nu_k} - x| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{cuando} \quad k > N_1$$

Como x_n es una sucesión de Cauchy tendremos que existe N_2 tal que

$$|x_{\nu_k} - x_n| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{cuando} \quad k, n > N_2$$

luego

$$|x_n - x| \leq |x_n - x_{\nu_k}| + |x_{\nu_k} - x| < \varepsilon \quad \text{cuando} \quad n > \max\{N_1, N_2\}$$

Por lo tanto, $x_n \to x$ y concluimos que $\mathbb{R}$ es completo. □

Definición 1.43. Sea (Y, σ) un espacio métrico. Decimos que $E \subset Y$ es un **conjunto acotado** de Y si existen $x_0 \in E$ y $r > 0$ tales que $E \subset B(x_0; r)$. Sea X un conjunto, decimos que $f : X \to Y$ es una **función acotada** si $f(X)$ es un conjunto acotado en Y. Llamamos $B(X, Y)$ al conjunto de las funciones acotadas de X en Y, con la métrica

$$\sigma(f, g)_\infty := \sup_{x \in X} \sigma(f(x), g(x)), \quad f, g \in B(X, Y)$$

Si X tiene una métrica ρ, llamamos $C(X, Y)$ al subespacio de $B(X, Y)$ formado por las **funciones continuas**. Además, notaremos

$$C(X) := C(X, \mathbb{R})$$

al espacio de las funciones continuas con valores reales. Escribiremos $C[a, b]$ para el caso en que $X = [a, b]$.

Teorema 1.44. *Si (Y, σ) es completo, entonces $B(X; Y)$ es completo.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\{f_n\}$ una sucesión de Cauchy en $B(X, Y)$. Luego, para todo $x \in X$, la sucesión $\{f_n(x)\}$ es una sucesión de Cauchy en Y. Como Y es un espacio métrico completo podemos definir para cada $x \in X$

$$f(x) := \lim_{n \to \infty} f_n(x).$$

Esta función es la candidata para ser el límite de la sucesión $\{f_n\}$. Tenemos que probar que $f \in B(X,Y)$ y que f es efectivamente el límite de nuestra sucesión en $B(X,Y)$. Para probar la primera afirmación, elija N tal que,

$$\sigma(f_n, f_m)_\infty < 1 \quad \text{para } n, m \geq N$$

Luego, para todo $x \in X$, $\sigma(f_n(x), f_N(x)) < 1$, $n \geq N$. Ahora, si hacemos n tender a infinito, se obtiene $\sigma(f(x), f_N(x)) \leq 1$, con lo cual f es acotada.
Para probar la segunda afirmación, sea $\varepsilon > 0$ luego existe M tal que

$$\sigma(f_n, f_m)_\infty < \varepsilon, \quad \text{para } n, m \geq M.$$

Luego se tiene que $\sigma(f_n(x), f_m(x)) < \epsilon$ si $n, m \geq M$, para cada $x \in X$. Haciendo m tender a infinito, obtendremos que

$$\sigma(f_n(x), f(x)) \leq \epsilon, \quad \text{para } n \geq M, \text{ para todo } x \in X$$

con lo cual se prueba que $\sigma(f_n, f)_\infty \to 0$ cuando $n \to \infty$. $\square$

Las siguientes propiedades generales de los conjuntos completos se dejan como ejercicio para el lector:

Teorema 1.45. *Sea (X, ρ) un espacio métrico y $E \subset X$, luego*

(i) Si E es completo, entonces es cerrado.

(ii) Si X es completo y E es cerrado, luego E es completo.

Corolario 1.46. *Sean (X, ρ) e (Y, σ) espacios métricos, con Y completo. Luego, $C(X,Y)$ es cerrado en $B(X,Y)$.*