## 1.7. Compacidad

El concepto que se desarrolla en esta sección tendrá gran importancia en todo lo que sigue. De alguna forma, la compacidad intenta generalizar las buenas propiedades a las cuales estamos acostumbrados al tratar con intervalos cerrados y acotados de $\mathbb{R}$ (especialmente las buenas propiedades que conciernen la maximización de funciones continuas en estos intervalos). Otros aspectos no menos importantes relacionados, por ejemplo, con el teorema del valor intermedio del cálculo se tratarán en la próxima sección.

**Definición 1.47.** Dado un conjunto $X$, decimos que una colección $\mathcal{G}$ de conjuntos es un **cubrimiento** de $X$ si

$$X \subset \bigcup_{G \in \mathcal{G}} G.$$

Si $X \subset Y$ con $(Y, \rho)$ espacio métrico, decimos que $\mathcal{G}$ es un **cubrimiento por abiertos** de $X$ (o simplemente cubrimiento abierto de $X$), si $\mathcal{G}$ es un cubrimiento de $X$ y cada $G \in \mathcal{G}$ es un abierto de $Y$.

Una subcolección $\mathcal{G}'$ de elementos de $\mathcal{G}$ se denomina un **subcubrimiento** de $X$ si a su vez es un cubrimiento de $X$.

**Observación.** Si $(X, \rho)$ es un espacio métrico y $G \subset X$ un abierto, luego

$$G = \bigcup_{x \in G} B(x; \varepsilon_x)$$

donde $\varepsilon_x := \frac{1}{2} \sup\{\delta : B(x; \delta) \subset G\}$. Claramente

$$\mathcal{G} = \{B(x; \varepsilon_x) \, : \, x \in G\}$$

es un cubrimiento por abiertos de $G$ (en realidad es igual a $G$).

**Definición 1.48.** Sea $(X, \rho)$ un espacio métrico,
**Bicompacidad:** Decimos que un subconjunto $E \subset X$ es bicompacto si todo cubrimiento abierto de $E$ tiene un subcubrimiento finito.
**Compacidad secuencial:** Decimos que un subconjunto $E \subset X$ es secuencialmente compacto si toda sucesión de elementos de $E$ tiene una subsucesión convergente en $E$.
**Compacidad del punto límite:** Decimos que $E \subset X$ es compacto en el sentido del punto límite si todo subconjunto infinito $A$ de $E$ tiene un punto límite en $E$.

**Ejercicio.** Pruebe que $[a, b] \subset \mathbb{R}$ es secuencialmente compacto ($-\infty < a \leq b < \infty$). Luego generalice para el caso

$$X = \prod_{k=1}^{n} [a_k, b_k] \subset \mathbb{R}^n, \quad -\infty < a_k \leq b_k < \infty$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

La finalidad de esta sección será probar la equivalencia de estos tres conceptos de "compacidad" en espacios métricos. La equivalencia entre las dos primeras definiciones (en un espacio métrico) se conoce habitualmente como el teorema de Heine-Borel. Comenzaremos probando un Lema que mostrará la equivalencia entre compacidad secuencial y compacidad del punto límite. Este Lema será de gran importancia para la demostración del Teorema de Heine-Borel.

**Lema 1.49.** *Sea $(X,\rho)$ un espacio métrico y sea $E \subset X$. Luego las siguientes afirmaciones son equivalentes*

*(i) $E$ es secuencialmente compacto.*

*(ii) $E$ es compacto en el sentido de punto límite.*

DEMOSTRACIÓN. Si $E$ es secuencialmente compacto y $A$ es un subconjunto infinito de $E$. Sea $\{x_n\}$ una sucesión en $A$ con todos sus términos deferentes entre sí. Luego por hipótesis, ésta tiene una subsucesión convergente a un $x \in E$. Este $x$ claramente es punto límite de $A$. Por lo tanto, $E$ es compacto en el sentido de punto límite.

Recíprocamente, si $E$ es compacto en el sentido de punto límite, sea $\{x_n\}$ un sucesión en $E$ y definamos

$$A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$$

Luego tenemos dos casos:

(a) Si $A$ es finito es trivial elegir una subsucesión $x_{n_k} = x_m$ idénticamente constante para algún natural $m$ y todo $k \in \mathbb{N}$.

(b) Si $A$ es infinito, por hipótesis, tendremos que existe $x \in E$ que es punto límite de $A$. Luego existe $\{x_{n_k}\} \subset A$ que converge a $x$.

Entonces $E$ es secuencialmente compacto. □

El siguiente teorema se deja como ejercicio para el lector, y se conoce en la literatura como el Teorema de Bolzano-Weierstrass.

**Teorema 1.50 (Bolzano-Weierstrass).** *Todo subconjunto acotado e infinito de $\mathbb{R}$ tiene al menos un punto límite.*

Antes de proseguir con esta sección y la prueba del Teorema de Heine-Borel será necesario introducir la siguiente definición:

**Definición 1.51.** Sea $(X,\rho)$ un espacio métrico. Diremos que $E \subset X$ es **totalmente acotado** si para todo $\varepsilon > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ y puntos $x_1, x_2, \ldots, x_n \in E$ tales que

$$E \subset \bigcup_{k=1}^{n} B(x_k;\varepsilon)$$

Existen conjuntos en espacios métricos que son acotados y no totalmente acotados. Por ejemplo, si consideramos el espacio métrico

$$l_2 = \left\{\{x_n\} : \Sigma_{n=1}^{\infty} x_n^2 < \infty, x_n \in \mathbb{R}\right\}$$

con la métrica inducida por la norma

$$\|\{x_n\}\|_2 = \left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2\right)^{1/2}$$

Claramente la bola $B(\bar{0};2) := \{\{x_n\} \in l^2 : ||\{x_n\}|| < 2\}$ en $l_2$ es un conjunto acotado. Definamos $\{e_n\} \in l_2$ aquellos elementos que tienen todas sus coordenadas cero excepto la $n$-ésima que tiene un 1, luego $\|e_n\|_2 = 1$ y

$$\|e_n - e_m\|_2 = \begin{cases} \sqrt{2} & \text{si } n \neq m \\ 0 & \text{si } n = m \end{cases}$$

Entonces la bola $B(\bar{0};2)$ en $l_2$ es acotada pero no totalmente acotada, ya que para $\varepsilon < \sqrt{2}$ no es posible cubrirla totalmente por una cantidad finita de bolas de radio $\varepsilon$.

**Lema 1.52.** *Sea $(X,\rho)$ un espacio métrico y sea $E \subset X$. Luego si $E$ es secuencialmente compacto, entonces*

*(i) $E$ es completo,*

*(ii) $E$ es cerrado, y*

*(iii) $E$ es totalmente acotado.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\{x_n\}$ una sucesión de Cauchy en $E$, luego existe una subsucesón $x_{n_k}$ y un $x \in E$ tal que $x_{n_k} \to x$, cuando $k \to \infty$, ya que $E$ es secuencialmente compacto. Luego,

$$\rho(x, x_n) \leq \rho(x, x_{n_k}) + \rho(x_{n_k}, x_n)$$

de donde se concluye la completud de $E$.

Si $x$ es un punto límite de $E$, luego existe $\{x_n\} \subset E$ que converge a $x$. Dada esta convergencia tendremos que $\{x_n\}$ es de Cauchy en $E$ y, por la completud probada arriba, se tendrá que $x \in E$.

Finalmente, si suponemos que $E$ no es totalmente acotado, luego existe $\varepsilon > 0$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ no existen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tales que

$$E \subset \bigcup_{k=1}^{n} B(x_k;\varepsilon)$$

Sea $x_0 \in E$, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ existe un $x_n \in E$ tal que

$$(B(x_n;\varepsilon) \cap E) \subsetneqq E \setminus \bigcup_{k=0}^{n} B(x_k;\varepsilon)$$

Luego, hemos construido una sucesión $x_n$ que no tiene subsucesión convergente ya que

$$\rho(x_n, x_m) > \varepsilon, \qquad \text{para todo } n, m \in \mathbb{N}$$

Por lo tanto, $E$ no es secuencialmente compacto, lo que es una contradicción con nuestra hipótesis. Esto termina de probar el Lema. $\square$

**Ejercicio.** Probar el recíproco del Lema 1.52, es decir, si $E$ es completo, cerrado y totalmente acotado, entonces $E$ es secuencialmente compacto.

El siguiente Lema es fundamental para probar el Teorema de Heine-Borel, que es conocido en la literatura como el Número de Lebesgue.

**Lema 1.53 (Número de Lebesgue).** *Sea $(X,\rho)$ un espacio métrico y sea $\mathcal{G}$ un cubrimiento abierto de $X$. Si $X$ es secuencialmente compacto, luego existe $\alpha > 0$ tal que para todo $x \in X$, $B(x;\alpha)$ está contenida en algún $G \in \mathcal{G}$.*

DEMOSTRACIÓN. Demostremos el Lema por contradicción. Si $X$ es un espacio secuencialmente compacto y para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in X$ tal que

$$B(x_n, 1/n) \nsubseteq G, \qquad \text{para todo } G \in \mathcal{G} \tag{1.6}$$

Como $X$ es secuencialmente compacto, existe una subsucesión de $x_n$, que notaremos $x_{n_k}$, que converge en $X$. Sea $x$ dicho límite, luego tendremos que existe $G \in \mathcal{G}$ y $\delta > 0$ tales que

$$B(x; 2\delta) \subset G$$

Por la convergencia de $x_{n_k}$ a $x$ tendremos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\rho(x, x_{n_k}) < \delta, \quad k \geq N$$

lo que es una contradicción con (1.6), pues esto implicaría que existe un $G \in \mathcal{G}$ tal que

$$B(x_{n_k}; 1/n_k) \subset B(x_{n_k}; \delta) \subset G, \quad k \geq \text{máx}\{N, 1/\delta\}$$

□

**Teorema 1.54 (Heine-Borel).** *Sea $(X, \rho)$ un espacio métrico. Luego, $X$ es bicompacto si y sólo si $X$ es secuencialmente compacto.*

Demostración. Si suponemos que $X$ no es secuencialmente compacto, entonces por el Lema 1.49 existe $D \subset X$ infinito y sin puntos límites (este $D$ es claramente cerrado). Luego, para todo $x \in D$ existe un abierto $G_x$ de $X$ tal que

$$G_x \cap D = \{x\}$$

De donde se concluye que $X$ no es bicompacto considerando el cubrimiento abierto de $X$

$$\mathcal{G} = \{G_x \,:\, x \in D\} \cup \{X \setminus D\}$$

que no tiene un subcubrimiento finito.

Recíprocamente, si $E$ es secuencialmente compacto y $\mathcal{G}$ un cubrimiento abierto de $E$, entonces por el Lema 1.53 existe $\alpha > 0$ tal que para todo $x \in E$ existe $G_x \in \mathcal{G}$ tal que

$$B(x; \alpha) \subset G_x$$

Por el Lema 1.52 tendremos que existen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tales que

$$E \subset \bigcup_{k=1}^{n} B(x_k; \alpha) \subset \bigcup_{k=1}^{n} G_{x_k}$$

por lo tanto $E$ es bicompacto. □

Con este Teorema podemos asegurar la equivalencia entre las tres definiciones presentadas al comienzo de esta sección. Esto nos motiva a realizar una nueva definición en espacios métricos.

**Definición 1.55.** Sea $(X, \rho)$ un espacio métrico, $E \subset X$. Diremos que $E$ es **compacto** en $X$ si todo cubrimiento por abiertos $\mathcal{G}$ de $E$ tiene un subcubrimiento finito.

Gracias al teorema de Heine-Borel podemos ver que la compacidad es una propiedad topológica. En lo sucesivo de la sección expondremos algunos resultados que clarificarán esta afirmación y nos permitirán relacionar algunas características de la compacidad y la continuidad en espacios métricos.

Notemos primero el siguiente corolario del lema 1.52 y el ejercicio 1.7.

**Corolario 1.56.** *Sea $(X,\rho)$ un espacio métrico y $E \subset X$. Luego $E$ es compacto si y sólo si $E$ es completo y totalmente acotado.*

Continuemos con el siguiente resultado.

**Teorema 1.57.** *Sean $(X,\rho)$, $(Y,\sigma)$ espacios métricos y $f : X \to Y$ continua. Si $E \subset X$ es compacto en $X$, entonces $f(E)$ es compacto en $Y$.*

Demostración. Sea $\{y_n\}$ una sucesión en $f(E)$, luego existe $\{x_n\} \subset E$ tal que $f(x_n) = y_n$. Como $E$ es compacto, existe una subsucesión $\{x_{n_k}\}$ que converge a un $x \in E$. Por continuidad $y_{n_k} \to f(x) \in f(E)$. Por lo tanto, $f(E)$ es compacto en $Y$. □

**Observación.** Si $X$ es un espacio métrico y $E \subset X$ es compacto, luego $E$ es cerrado. Además, si $X$ es compacto y $E$ cerrado, luego $E$ es compacto.

**Teorema 1.58.** *Sean $(X,\rho)$, $(Y,\sigma)$ espacios métricos con $X$ compacto. Si $f : X \to Y$ es una función continua y biyectiva, luego $f$ es un homeomorfismo.*

Demostración. Por ser $f$ biyectiva, $f^{-1}$ está bien definida como función. Entonces sólo será necesario probar que $f$ manda conjuntos abiertos en conjuntos abiertos o equivalentemente que $f$ manda conjuntos cerrados en conjuntos cerrados.
Sea $C \subset X$ cerrado, luego $C$ es compacto, y por continuidad de $f$ tendremos que $f(C)$ es compacto en $Y$ (ver Teorema 1.57). Pero por la observación anterior tendremos que $f(C)$ es cerrado en $Y$. Luego $f$ es un homeomorfismo entre $X$ e $Y$. □

**Teorema 1.59.** *Si $(X,\rho)$, $(Y,\sigma)$ son espacios métrico, con $X$ compacto y $f : X \to Y$ es una función continua, entonces $f$ es uniformemente continua.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$, luego existen $y_1, y_2, \ldots, y_n \in f(X)$ tales que

$$f(X) \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(y_i; \tfrac{\varepsilon}{2})$$

dada la compacidad de $f(X)$ en $Y$ (ver Teorema 1.57). Por el Lema 1.53 (del número de Lebesgue) tendremos que existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in X$ existe un $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que

$$B(x;\delta) \subset f^{-1}(B(y_i; \tfrac{\varepsilon}{2}))$$

luego

$$f(B(x;\delta)) \subset B(y_i; \tfrac{\varepsilon}{2}) \subset B(f(x);\varepsilon)$$

Como este procedimiento se puede realizar para todo $x \in X$, dado el $\varepsilon > 0$, podemos concluir

$$f(B(x;\delta)) \subset B(f(x);\varepsilon), \quad \text{para todo } x \in X$$

Por lo tanto, $f$ es uniformemente continua. □

**Lema 1.60.** *Sea $(X,\rho)$ un espacio métrico. Para cada $x \in X$ definimos $d(x)$ como la distancia de $x$ a su complemento. Luego $X$ es compacto si y sólo si se satisfacen:*

*(i) Si $f : X \to \mathbb{R}$ continua, luego es uniformemente continua.*

*(ii) Para todo $\varepsilon > 0$ el conjunto $\{x \in X \,:\, d(x) \geq \varepsilon\}$ es finito.*

Demostración. Si $X$ es compacto, la continuidad uniforme de $f$ es consecuencia del Teorema 1.59. Además, si tenemos $\varepsilon > 0$ tal que $D = \{x \in X \,:\, d(x) \geq \varepsilon\}$ es un conjunto infinito, entonces $D$ es cerrado y

$$\mathcal{G} = \{B(x; \tfrac{\varepsilon}{2}) \,:\, x \in D\} \cup \{X \setminus D\}$$

es un cubrimiento por abiertos de $X$ que no tiene un subcubrimiento finito, lo que sería una contradicción con la compacidad de $X$.

Recíprocamente, si suponemos que $X$ no es compacto y que se satisface (ii), entonces existe $B = \{z_n \,:\, n \in \mathbb{N}\}$ infinito y numerable sin puntos límites en $X$. Es claro que $B$ es cerrado. De (ii) tenemos que para cada $\varepsilon > 0$, $d(z_n) \geq \varepsilon$ para una cantidad finita de $n$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(z_n) < \varepsilon$ si $n \geq N$. Luego,

$$\lim_{n\to\infty} d(z_n) = 0.$$

Por lo tanto existe $\{y_n \,:\, n \in \mathbb{N}\}$ con $y_n \neq z_n$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \rho(z_n, y_n) = 0.$$

Podemos concluír que $\{y_n \,:\, n \in \mathbb{N}\}$ tampoco tiene puntos límites en $X$, de lo contrario $B$ los tendría. Además, podemos afirmar que $\{y_n \,:\, n \in \mathbb{N}\}$ tiene una cantidad infinita de valores y que cada uno de ellos no se repite infinitas veces. Luego existen subsucesiones $\{z_{n_k}\}$ y $\{y_{n_k}\}$ indexadas por los mismos índices, tales que los subconjuntos cerrados de $X$

$$Z = \{z_{n_k} \,:\, k \in \mathbb{N}\} \quad \text{y} \quad Y = \{y_{n_k} \,:\, k \in \mathbb{N}\},$$

satisfacen $Z \cap Y = \varnothing$. Por el Lema de Urysohn existe una función continua $f$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in Z \\ 0 & \text{si } x \in Y \end{cases}$$

Es fácil probar que $f$ no es uniformemente continua. Con lo que finalizamos la prueba del lema. □

**Ejercicio.** Pruebe que la función definida al final del Lema 1.60 no es uniformemente continua.

## 1.8. Conexidad

**Definición 1.61.** Sea $(X, \rho)$ un espacio métrico. Decimos que $X$ es **conexo** si no se puede expresar como una unión disjunta de dos abiertos no vacíos. Decimos que un subconjunto $E \subset X$ es conexo en $X$, si es conexo con la métrica inducida por $(X, \rho)$.

**Lema 1.62.** *Los únicos conjuntos conexos de $\mathbb{R}$ son los puntos y los intervalos.*

Demostración. Claramente un punto es conexo en $\mathbb{R}$. Supongamos que $E \subset \mathbb{R}$ no es un intervalo ni un punto, luego existen $a < u < b$ tales que $a, b \in E$ y $u \notin E$. De este modo,

$$E \cap (-\infty, u) \quad \text{y} \quad E \cap (u, \infty)$$

son abiertos disjuntos no vacíos de $E$, cuya unión es $E$. Por lo tanto, $E$ no es conexo.

Recíprocamente, si $E$ es un intervalo en $\mathbb{R}$ y suponemos que no es conexo, entonces existen abiertos $G_1$ y $G_2$ en $\mathbb{R}$ tales que

$$G_1 \cap E \neq \varnothing, \quad G_2 \cap E \neq \varnothing, \quad \text{y} \quad G_1 \cap G_2 \cap E = \varnothing, \quad E \subset G_1 \cup G_2$$

Sin pérdidad de generalidad supondremos que existen $a$, $b$ tales que $a \in G_1 \cap E$, $b \in G_2 \cap E$ y $a < b$. Cómo $E$ es un intervalo es inmediato que $[a, b] \subset E$. Además podemos definir

$$u = \sup\{x \,:\, x \in G_1 \cap [a, b]\}$$

que claramente es un punto límite de $G_1$ y que no se encuentra en este abierto. Tampoco puede $u$ encontrarse en el abierto $G_2$ ya $u$ es punto límite de $G_1$. Obviamente $u \in [a, b]$, luego

$$u \in E, \quad u \notin G_1, \quad u \notin G_2 \quad \Longrightarrow \quad E \subsetneq G_1 \cap G_2$$

lo que es una contradicción con nuestras hipótesis. Por lo tanto $E$, cualquier intervalo de $\mathbb{R}$, es conexo. □

**Lema 1.63.** *Un subconjunto abierto $G$ de $\mathbb{R}^n$ es conexo si y sólo si todo par de puntos de $G$ se puede unir por una línea poligonal.*

Demostración. Si $G$ es un abierto conexo de $\mathbb{R}^n$, definamos para cada $x \in G$ el conjunto

$$G_x = \{y \in G \,:\, y \sim x\}$$

donde $y \sim x$ es la relación de equivalencia: $y$ se puede unir mediante una poligonal con $x$ en $G$. Para cada $y \in G_x$ existe un $\varepsilon > 0$ tal que $B(y; \varepsilon) \subset G$, luego $B(y; \varepsilon) \subset G_x$, ya que todo punto en $B(y; \varepsilon)$ se puede unir con $y$ mediante un segmento recto. Entonces $G_x$ es abierto.
Si suponemos que $G \setminus G_x \neq \varnothing$, entonces para cada $z \in G \setminus G_x$ existe un $\varepsilon > 0$ tal que $B(z; \varepsilon) \subset G$. Como todo punto en $B(z; \varepsilon)$ se puede unir con $z$ mediante un segmento recto, podemos concluir que $B(z; \varepsilon) \subset G \setminus G_x$. Lo que es una contradicción ya que $G$ sería la unión de dos abiertos disjuntos y no vacíos. Esto concluye la primera implicancia.

El recíproco, en este lema, es consecuencia del Lema 1.62. □

En lo que sigue, denotaremos por $\{0, 1\}$ al espacio métrico con dos elementos 0 y 1, con la métrica discreta.

**Teorema 1.64.** *Sean $(X, \rho)$ un espacio métrico. Las siguientes condiciones son equivalentes.*

*(i) $X$ es conexo.*

*(ii) No existe ningún subconjunto (propio) de $X$, no vacío que sea cerrado y abierto.*

*(iii) No existe ninguna función $f : X \to \{0, 1\}$, continua y sobre.*

Demostración. En cada una de las implicancias procederemos por el argumento de contradicción. Para probar que $(i)$ implica $(ii)$ supondremos que existe un subconjunto propio no vacío $G \subset X$ que es abierto y cerrado en $X$, luego su complemento $G^c$ también es abierto, cerrado y no vacío. Entonces $X = G \cup G^c$ es una unión disjunta no vacía de dos abiertos. Por lo tanto, $X$ no es conexo.

En la demostración de que $(ii)$ implica $(iii)$, supondremos la existencia de una función $f : X \to \{0, 1\}$ que es continua y sobre. Por continuidad de $f$ tendremos que $X = f^{-1}(0) \cup f^{-1}(1)$

que es una unión disjunta no vacía de dos abiertos. Luego $f^{-1}(0)$ es un subconjunto propio de $X$, no vacío, que es abierto y cerrado.

Finalmente, para probar que $(iii)$ implica $(i)$, supondremos que $X$ no es conexo, luego existen $A, B \subset X$ abiertos, no vacíos y disjuntos cuya unión es $X$. Así, podemos definir $f : X \to \{0,1\}$ por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in A \\ 1 & \text{si } x \in B \end{cases}$$

la cual es continua y sobre. □

**Teorema 1.65.** *Sean $(X,\rho)$ e $(Y,\sigma)$ espacios métricos, con $X$ conexo. Si $f : X \to Y$ es una función continua, entonces $f(X)$ es un subconjunto conexo de $Y$.*

Demostración. Si $f(X)$ no fuera un subconjunto conexo de $Y$, luego existiría $g : f(X) \to \{0,1\}$ continua y sobre. Es decir, $g \circ f : X \to \{0,1\}$ es una función continua y sobre, lo que es una contradicción ya que $X$ es conexo. Por lo tanto, $f(X)$ es un subconjunto conexo de $Y$. □

El siguiente corolario es una consecuencia inmediata del Teorema 1.65, y se deja como ejercicio para el lector.

**Corolario 1.66.** *Si $f$ es una función continua y real definida en un espacio métrico conexo $X$, entonces $f$ toma todos los valores comprendidos entre dos valores que alcance.*

**Teorema 1.67.** *Sea $(X,\rho)$ un espacio métrico y $\{A_\alpha \subset X \,:\, \alpha \in \mathcal{A} \neq \varnothing\}$ una colección de subconjuntos conexos de $X$. Si $\bigcap_{\alpha\in\mathcal{A}} A_\alpha \neq \varnothing$, entonces $\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} A_\alpha$ es conexo.*

Demostración. Primero definamos $C = \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} A_\alpha$, y supongamos que $C$ no es conexo. Entonces existe $f : C \to \{0,1\}$ continua y sobre. Si $y_0 \in \bigcap_{\alpha\in\mathcal{A}} A_\alpha$, como la restricción de la función $f$ al conjunto $A_\alpha$ es continua, tendremos que $f(y) = f(y_0)$ para todo $y \in A_\alpha$ (por la conexidad de $A_\alpha$). Dado que esto es cierto para todo $\alpha \in \mathcal{A}$, no es posible que $f$ sea sobre. Por lo tanto, $C$ es conexo. □

**Corolario 1.68.** *Sea $(X,\rho)$ un espacio métrico y $A \subset X$, conexo. Entonces, la clausura de $A$ es conexa.*

Demostración. Si $\overline{A}$ no es conexo, entonces existe $f : \overline{A} \to \{0,1\}$ continua y sobre. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $f(A) = 0$. Sea $x \in \overline{A}$, luego existe $\{x_n\} \subset A$ tal que $x_n \to x$, cuando $n \to \infty$. Por continuidad de la $f$ tendremos que

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0$$

lo que resulta ser una contradicción con la sobreyectividad de $f$. Por lo tanto, $\overline{A}$ es conexo si $A$ es conexo. □

El siguiente corolario se deja como ejercicio para el lector.

**Corolario 1.69.** *Sea $(X,\rho)$ un espacio métrico. Si $A$ es un subconjunto conexo de $X$, y $A \subset B \subset \overline{A}$ entonces $B$ es conexo.*

**Ejemplo.** Consideremos el subconjunto de $\mathbb{R}^2$ con la métrica usual

$$A = \left\{(x,y) \,:\, x > 0, y = \sin\left(\tfrac{1}{x}\right)\right\}$$

no es difícil probar que $A$ es un subconjunto conexo de $\mathbb{R}^2$. Y por consecuencia del Corolario 1.68 tendremos que

$$\overline{A} = A \cup \{(x,y) \,:\, x = 0, -1 \leq y \leq 1\}$$

también es conexo.

**Teorema 1.70.** *Para todo natural $n > 1$, $\mathbb{R}$ no es homeomorfo a $\mathbb{R}^n$.*

Demostración. Si $\mathbb{R}$ es homeomorfo a $\mathbb{R}^n$, luego existe $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continua biyectiva y con inversa continua. La restricción de $f$ a $\mathbb{R}^n \setminus \vec{0}$ también es un homeomorfismo entre $\mathbb{R}^n \setminus \vec{0}$ y $\mathbb{R} \setminus f(\vec{0})$ (consecuencia del Teorema 1.65). Lo que es una contradicción ya que $\mathbb{R}^n \setminus \vec{0}$ es conexo para $n > 1$ y $\mathbb{R} \setminus f(\vec{0})$ no es conexo. Por lo tanto, no es posible que $\mathbb{R}$ sea homeomorfo a $\mathbb{R}^n$ si $n > 1$. $\square$

**Nota:** En general $\mathbb{R}^n$ no es homeomorfo a $\mathbb{R}^m$ si $n \neq m$.

**Lema 1.71.** *No existen funciones $f : [0,1] \to [0,1]^2$ que sean continuas y biyectivas.*

Demostración. Si existiera una función $f : [0,1] \to [0,1]^2$ que sea continua y biyectiva, por el Teorema 1.58 tendríamos que existe $f^{-1} : [0,1]^2 \to [0,1]$ continua y biyectiva. Sea $x_0 \in (0,1)$ y consideremos $f(x_0)$, entonces $f^{-1}([0,1]^2 \setminus f(x_0)) = [0,1] \setminus x_0$. Lo que contradice que la imagen continua de un conexo es conexo(Teorema 1.65). Por lo tanto, no existe dicha función. $\square$

**Lema 1.72 (curva de Peano).** *Existe una función $f : [0,1] \to [0,1]^2$ que es continua y sobreyectiva.*

Demostración. Pendiente $\square$

**Proposición 1.73.** *Sea $\{A_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ una colección de subconjuntos conexos de un espacio métrico $(X,\rho)$ tales que la intersección de todo par es no vacía. Entonces $\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} A_\alpha$ es conexo.*

Demostración. Si $C = \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} A_\alpha$ no es conexo, luego existe $f : C \to \{0,1\}$ continua y sobre. Como $f$ es sobre, luego existe $x_0 \in C$ tal que $f(x_0) = 0$, con $x_0 \in A_\alpha$ para algún $\alpha \in \mathcal{A}$. Por continuidad de $f$ y la conexidad de $A_\alpha$ tenemos que $f(A_\alpha) = 0$. Sea $\beta$ cualquier elemento en $\mathcal{A}$, por hipótesis sabemos que $A_\alpha \cap A_\beta \neq \varnothing$. Entonces $f(A_\beta) = 0$ para todo $\beta \in \mathcal{A}$, lo que contradice que $f$ sea sobre. Por lo tanto $C$ es conexo. $\square$

**Definición 1.74.** Si $(X,\rho)$ es un espacio métrico, $x \in X$, definimos la **componente** de $x$, que notaremos $C(x)$, como la unión de todos los conjuntos conexos de $X$ que contienen a $x$.

Diremos que un espacio métrico $(Y,\sigma)$ es **totalmente disconexo** si para todo $y \in Y$ se tiene que $C(y) = \{y\}$

**Ejemplo.** Si miramos al conjunto de los número racionales $\mathbb{Q}$ como subespacio de $\mathbb{R}$ con la métrica usual, tendremos que las componentes de $\mathbb{Q}$ son puntos. En este caso $\mathbb{Q}$ es totalmente disconexo.

**Corolario 1.75.** *Sea $(X,\rho)$ un espacio métrico y $x \in X$, luego $C(x)$ es conexo.*

**Lema 1.76.** *Sea $(X,\rho)$ un espacio métrico, entonces:*

*(i) Si $x \in X$, luego $C(x)$ es el conjunto conexo maximal que contiene a $x$.*

*(ii) Las componentes de $X$ definen una partición.*

*(iii) Las componentes son cerradas.*

Demostración. Las pruebas de $(i)$ y $(ii)$ son consecuencia de la definición de componente y de la Proposición 1.73, respectivamente. La prueba de $(iii)$ es consecuencia de la parte $(i)$ del lema y el Corolario 1.68. □

**Definición 1.77.** Diremos que una espacio métrico $(X, \rho)$ es **localmente conexo** si todo abierto de $X$ se puede escribir como una unión de conjuntos abiertos y conexos.

**Teorema 1.78.** *Sea $(X, \rho)$ un espacio métrico. Luego $X$ es localmente conexo si y sólo si las componentes de cada conjunto abierto son conjuntos abiertos.*

Demostración. Si las componentes de cada conjunto abierto son conjuntos abiertos, luego cada abierto de $X$ se puede escribir como una unión de conjuntos abiertos y conexos, es decir, $X$ es localmente conexo.

Recíprocamente, si $X$ es localmente conexo y $G$ es un abierto, entonces $G$ es una unión de abiertos conexos. Sea $x \in G$ y sea $C(x)$ su componente conexa en $G$, luego para cada $y \in C(x)$ existe un abierto conexo $G_y$ en $X$ que contiene a $y$ y está contenido en $G$. Por la maximalidad de $C(x)$ se tiene que $G_y \subset C(x)$. Por lo tanto $C_x$ es abierto, y concluimos la demostración del teorema. □

**Corolario 1.79.** *Todo abierto en $\mathbb{R}^n$ se puede escribir como una unión numerable de conjuntos abiertos, disjuntos y conexos.*

**Ejemplo.** Existen espacios que son conexos pero no localmente conexos. Si consideremos el subespacio de $\mathbb{R}^2$

$$A = \left\{(x, y) \,:\, x > 0,\, y = \sin\left(\tfrac{1}{x}\right)\right\}$$

se puede probar que en $\overline{A}$ existe un abierto $G$ (conteniendo al origen) con componentes que no son abiertas.