Capítulo 2

Completitud y categorías

2.1. Teorema de Baire

Definición 2.1. Dado un espacio métrico (X, ρ), decimos que $G \subset X$ es **denso** si $\overline{G} = X$.

Ejemplo. Como vimos en la sección 1.7, $\mathbb{R}$ es un espacio métrico completo tal que $\overline{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{R}$. Por otra parte el conjunto

$$C^{\infty}[0,1] := \{f \in C[0,1] \,:\, f \text{ tiene derivadas continuas de todo orden }\}$$

es un subconjunto denso de $C[0,1]$.

Teorema 2.2 (Baire). *Sea (X, d) un espacio métrico completo. Sea $\{O_n \,:\, n \in \mathbb{N}\}$ una colección de subconjuntos abiertos densos de X. Luego, $O := \bigcap_{n=0}^{\infty} O_n$ es denso.*

Demostración. Para demostrar que O es denso en X, bastará probar que para todo abierto V de X se tiene que

$$O \cap V \neq \varnothing$$

Para ello definiremos los siguientes conjuntos: sea $V_1 = V \cap O_1$ que es abierto y no vacío, ya que O_1 es abierto y denso. Luego existe $x_1 \in V_1$ y $r_0 > 0$ tales que $\overline{B(x_1; r_0)} \subset V_1$. Análogamente, definimos $V_2 = B(x_1; r_0) \cap O_2$ que es abierto y no vacío, luego existe $x_2 \in V_2$ y $0 < r_1 \leq r_0/2$ tal que $\overline{B(x_2; r_1)} \subset V_2$. Inductivamente podemos definir $V_{n+1} = B(x_n; r_{n-1}) \cap O_{n+1}$, tal que $x_n \in V_n$, $0 < r_{n-1} \leq r_2/2^{n-1}$ y $\overline{B(x_n; r_{n-1})} \subset V_n$.
De este modo, hemos definido una sucesión $\{x_n\} \subset V$ que es de Cauchy. En efecto,

$$\sup_k \rho(x_n, x_{n+k}) \leq \frac{r_0}{2^{n-1}}.$$

Dado que X es completo, existe $x \in X$ tal que $x_n \to x$ cuando $n \to \infty$. Por construcción de la sucesión $\{x_n\}$ tendremos que

$$x \in \overline{B(x_{k+1}, r_k)} \subset B(x_k, r_{k-1}), \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Luego $x \in O$ y $x \in V$, de donde concluímos que O es denso en X. □

Definición 2.3. Sea (X, ρ) un espacio métrico.

(i) Decimos que $E \subset X$ es **denso en ninguna parte** si $\overline{E}^c$ es denso.

(ii) Decimos que $F \subset X$ es de **primera categoría** si se puede expresar como una unión numerable de conjuntos densos en ninguna parte.

(iii) Decimos que un conjunto es de **segunda categoría** si no es de primera categoría.

Ejercicio. Pruebe que E es denso en ninguna parte si y sólo si su clausura tiene interior vacío.

Corolario 2.4. *Sea (X, ρ) un espacio métrico completo. Luego, no hay ningún subconjunto abierto no vacío que sea de primera categoría.*

Demostración. Supongamos que un conjunto no vacío $V \subset X$ es abierto y de primera categoría, entonces existen $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ densos en ninguna parte tales que $V = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n$. Luego,

$$V \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{V_n} \quad \Longrightarrow \quad \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{V_n}^c \subset V^c$$

Pero los $\overline{V_n}^c$ son abiertos densos en X, entonces por el Teorema 2.2 tendríamos que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{V_n}^c$ es denso en X, lo que es una contradicción ya que

$$X = \overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{V_n}^c} \subset \overline{V^c} = V^c \subset X$$

y tendríamos que $V^c = X$, o sea $V = \varnothing$. □

Algunas aplicaciones del teorema de Baire:

1.- *El espacio métrico $\mathbb{R}$ no es numerable.* Basta observar que todo subconjunto numerable de $\mathbb{R}$ es necesariamente de primera categoría. Esto se debe a que todo punto de $\mathbb{R}$ es cerrado y de interior vacío.

2.- *Existe subconjunto de $[0, 1]$ de medida de Lebesgue 0 y cuyo complemento es de primera categoría.* Definimos la medida de Lebesgue del intervalo abierto (a, b), $m(a, b) = b - a$. Ahora, si O es abierto, lo podemos descomponer como una unión disjunta de intervalos abiertos, $O = \cup_n (a_n, b_n)$, y definimos $m(O) = \sum_n m(a_n, b_n)$. Decimos que $A \subset \mathbb{R}$ es de medida de Lebesgue 0 si $\forall \epsilon > 0$ existe un abierto $G_\epsilon \supset A$ tal que $m(G_\epsilon) < \epsilon$. Ahora, sea $\{q_n\}$ una enumeración de los racionales en $[0, 1]$. Para cada m, consideremos el abierto,

$$O_m := \cup_{n=1}^{\infty} B(q_n; (1/m)^n).$$

Luego $O := \cap_m O_m$ es un conjunto de medida de Lebesgue 0 y cuyo complemento es de primera categoría.

3.- El siguiente ejemplo puede encontrarse en [1]. Supongamos que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es de clase C^∞. Suponga además que para todo $x \in \mathbb{R}$ existe un natural $n = n(x)$ tal que $f^{(n(x))}(x) = 0$. Se puede demostrar que luego f es un polinomio. Aqui probaremos algo más débil: existe un abierto en $\mathbb{R}$ donde f es un polinomio. En efecto, cosideremos para cada n el conjunto

$$E_n := \{x \in \mathbb{R} : f^{(n)}(x) = 0\}.$$

Claramente estos conjuntos son cerrados. Si alguno de ellos tiene interior no vacío, entonces f es un polinomio en algún abierto. Supongamos entonces que todos estos conjuntos tienen interior vacío. Luego tendríamos que $\mathbb{R} = \cup_n E_n$ es un conjunto de primera categoría, lo que contradice el corolario del teorema de Baire.

4.- *El cuadrado $X := [0,1] \times [0,1]$ no puede expresarse como una unión de dos o más cuadrados cerrados de interior no vacío disjuntos.* Ocupando la densidad de los puntos con coordenadas racionales en X podemos concluír que tal unión a lo más puede ser numerable: $X = \cup_n C_n$. Consideremos el conjunto $D := \cup D_n$ donde D_n es la frontera de C_n en X. Al ser complemento de un abierto (la unión de los interiores de los cuadrados), D es cerrado. Luego es completo. Pero al ser cada D_n cerrado en X, debe también ser cerrado en D. Afirmamos que además son de interior vacío en D. En efecto, si $x \in D_n$, toda vecindad de x necesariamente contiene algún punto del exterior del cuadrado que define a D_n y que por lo tanto está contenido en algún C_m lo que implica que D_m intersecta la vecindad. Es decir X sería de primera categoría, lo que nuevamente contradice el corolario del teorema de Baire.

Enseguida, veremos una aplicación más extensa del teorema de Baire a la teoría analítica de números.