2.2. Aproximaciones diofantinas

Iniciamos esta sección con un resultado de Dirichlet.

Teorema 2.5. (Dirichlet). *Sea α un número irracional. Luego, existen infinitos enteros p, $q > 0$, tales que*

$$|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^2}$$

Demostración. Para cada x real definimos $[x]$ como la parte entera de x y $\{x\} = x - [x]$ su parte fraccionaria. Sea $Q > 0$ un entero.
Consideremos los números $\{0\alpha\}, \{1\alpha\}, ..., \{Q\alpha\}$ y los intervalos $[\frac{i}{Q}, \frac{i+1}{Q}), \quad 0 \leq i \leq Q-1$ que forman una partición de $[0,1)$. Como para todo real $0 \leq \{x\} < 1$, debe existir algún j y $a < b$ tales que

$$\{a\alpha\}, \{b\alpha\} \in [\frac{j}{Q}, \frac{j+1}{Q})$$
$$\Rightarrow |\{a\alpha\} - \{b\alpha\}| < \frac{1}{Q}$$

Además,

$$a\alpha = n + \{a\alpha\}$$
$$b\alpha = m + \{b\alpha\}$$
$$\Rightarrow -\{a\alpha\} + \{b\alpha\} = (b-a)\alpha + (n-m)$$
$$\Rightarrow |\alpha - \frac{n-m}{b-a}| < \frac{1}{(b-a)Q} \leq \frac{1}{(b-a)^2}$$

Es decir, para cada natural Q, existen enteros p, q con $0 \leq q \leq Q$ tales que

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{qQ} \leq \frac{1}{q^2}. \tag{2.1}$$

Supongamos que existe sólo una cantidad finita de racionales p/q tal que las desigualdades de arriba se satisfacen para algún Q. Luego, existen enteros p, q y una sucesión de naturales $\{Q_n\}$ con $Q_n \to \infty$ tales que (2.1) se satisface con $Q = Q_n$. Tomando el límite cuando $n \to \infty$ concluímos que α debe ser igual a p/q, lo que es una contradicción.

□

Definición 2.6. Un **número algebraico** es cualquier número real que satisface una ecuación del tipo

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n = 0,$$

para algún $n \geq 1$ y $a_0, a_1, \ldots, a_n$ enteros, $a_0 \neq 0$.
Decimos que un número algebraico tiene grado n si satisface una ecuación del tipo anterior, pero no satisface ninguna ecuación $b_0x^m + ... + b_m = 0$ con $m < n$.
Decimos que un número es **trascendente** si no es algebraico.

No es obvio que existan números trascendentes. En 1873, Hermite demostró que e es trascendente. Posteriormente, en 1882, Lindemann, mostró un resultado análogo para π. El siguiente ejercicio invita a demostrar la existencia de números trascendentes mediante un argumento de cardinalidad. Luego, en el teorema 7, se establecerá un criterio que nos permitirá entre otras cosas exhibir explícitamente un número trascendente mediante una serie.

Ejercicio. Muestre que existe una cantidad a lo más numerable de números algebraicos. Concluya que deben existir números trascendentes.

Teorema 2.7. (Liouville). *Si α es un número algebraico de grado $n > 1$, entonces existe una constante $M(\alpha) > 0$ tal que*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{M(\alpha)}{q^n},$$

para todo racional p/q.

Antes de probar este resultado, lo utilizaremos en el siguiente corolario.

Corolario 2.8. *El número definido por*

$$z := \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{10^{m!}}$$

es trascendente.

Demostración. Supongamos que z es algebraico de grado n. Luego para todo N podemos escribir

$$z_N := \sum_{m=1}^{N} \frac{1}{10^{m!}} =: \frac{p}{10^{N!}} =: \frac{p}{q}$$

$$\Rightarrow |z - z_N| \leq 10\frac{1}{10^{(N+1)!}}$$

$$\Rightarrow |z - \frac{p}{q}| \leq \frac{1}{10^{(N+1)!-1}}$$

Como z es algebraico, por el teorema que aún no hemos probado tenemos que para todo n existe una constante M tal que

$$|z - \frac{p}{10^{N!}}| \geq \frac{M}{10^{N!n}}.$$

Esto implica que para todo N

$$(N+1)! - 1 \leq N!n$$

lo cual es una contradicción. □

Prueba del teorema de Liouville: Sea $f(x) := a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ un polinomio no nulo con coeficientes enteros de grado minimal y con raíz α. Consideremos el intervalo $I := [\alpha - 1, \alpha + 1]$ y

$$c := \min\{1, A\},$$

donde A es el mínimo en I de $|f'(x)|^{-1}$. Si $p/q \notin I$ es trivialmente se cumple que

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geq 1 \geq \frac{1}{q^n} \geq \frac{c}{q^n}.$$

Si $p/q \in I$, por el teorema del valor medio

$$\frac{f(\alpha) - f(p/q)}{\alpha - p/q} = f'(\beta),$$

para algún β entre α y p/q. Como $f(\alpha) = 0$, tenemos

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| = \frac{|f(p/q)|}{|f'(\alpha)|}.$$

Pero por la definición de c tenemos que $1/|f'(\alpha)| \geq c$. Además $f(p/q) \neq 0$, de lo contrario $f(x)/(x - p/q)$ sería un polinomio de grado $n-1$ con raíz α. Pero luego

$$|f(p/q)| = \frac{|a_n p^n + \cdots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n|}{q^n} \geq \frac{1}{q^n}.$$

Concluímos que,

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{c}{q^n}.$$

□

Definición 2.9. Decimos que un número irracional α es un número de **Liouville** si para todo $n > 1$ existen enteros p y $q > 1$ tales que

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^n}$$

El conjunto de números de Liouville tiene la interesante propiedad de ser a la vez de segunda categoría y de medida de Lebesgue 0.

Teorema 2.10. *El conjunto de números de Liouville tiene medida de Lebesgue* 0 *y complemento de primera categoría.*

Demostración. Para cada natural definamos el abierto

$$U_n := \cup_{q=2}^{\infty} V_{n,q}$$

donde,

$$V_{n,q} = \cup_{p=-\infty}^{\infty} \left(\frac{p}{q} - \frac{1}{q^n}, \frac{p}{q} + \frac{1}{q^n} \right).$$

Ahora notemos que el conjunto de números de Liouville L se puede expresar como

$$L = \{\cap_{n=1}^{\infty} U_n\} \cap \{\cap_{n=1}^{\infty} \{q_n\}^c\}.$$

Esto muestra que su complemento es de primera categoría. Por otra parte, notemos que para todo n

$$L \subset \cup_{q=2}^{\infty} V_{n,q}.$$

Luego

$$L \cap (-m, m) \subset \cup_{q=2}^{\infty} V_{n,q} \cap (-m, m) \subset \cup_{q=2}^{\infty} \cup_{p=-mq}^{mq} \left(\frac{p}{q} - \frac{1}{q^n}, \frac{p}{q} + \frac{1}{q^n} \right).$$

De quí concluímos que,

$$m(L) \leq \sum_{q=2}^{\infty} \frac{2(2mq+1)}{q^n} \leq (4m+1) \int_1^{\infty} \frac{1}{q^{n-1}} = \frac{4m+1}{n-2}.$$

Como n es arbitrario $m(L) = 0$. □

Ocupando el hecho que la medida de Lebesgue de los reales es infinita tenemos el siguiente corolario.

Corolario 2.11. *Existen números trascendentes que no son de Liouville.*

Definición 2.12. Constante de Liouville-Roth. Sea x un número irracional. Consideremos el conjunto de números reales $\mathcal{R}$ tales que la desigualdad

$$0 < \left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^{\mu}},$$

se satisface a lo más para una cantidad finita de pares (p, q) de números enteros con $q \neq 0$. Definimos la **medida de irracionalidad** o la **constante de Liouville-Roth** de x como el ínfimo de $\mathcal{R}$.

Se puede demostrar que los números trascendentes e y π no son de Liouville. En efecto se ha demostrado (1992, Hata) que la medida de irracionalidad de π está acotada por 8,0161 y que la medida de irracionalidad de e es 2 (Borwein y Borwein, 1987).

Finalmente enunciamos la siguiente mejora del teorema de Liuoville del matemático inglés Klaus Roth por lo que ganó la medalla Fields en 1955.

Teorema 2.13. *(Roth, 1955) Si α es un número algebraico de grado $n > 1$, entonces para todo $\epsilon > 0$ existe una constante $C(\alpha, \epsilon) > 0$ tal que*

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{C(\alpha, \epsilon)}{q^{2+\epsilon}},$$

para todo racional p/q.