2.3. Aplicaciones del teorema de Baire a espacios de Banach

En esta sección, veremos algunas aplicaciones del teorema de Baire a espacios vectoriales normados. En particular, demostraremos los teoremas de Banach-Steinhaus, del mapeo abierto y del gráfico cerrado.

Primero introduciremos el concepto de función u operador lineal y demostraremos las propiedades más básicas que ellos satisfacen.

Definición 2.14. Sean V, W espacios vectoriales normados sobre un cuerpo valuaddo K. Decimos que una función $f : V \to W$ es **lineal** si

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y),\ \forall x,\, y \in V,\, \alpha,\, \beta \in K.$$

También se ocupa el término **operador lineal**.

Ejercicio. Si $f : V \to W$ es una función lineal, pruebe que $f(0) = 0$.

El siguiente resultado da una caracterización de las funciones lineales continuas.

Teorema 2.15. *Sean V, W espacios vectoriales normados, $f : V \to W$ lineal. Luego, las siguientes tres condiciones son equivalentes:*

(i) f es continua.

(ii) f es continua en el origen.

(iii) $\frac{\|f(x)\|}{\|x\|}$ está acotado en $V - \{0\}$.

Demostración. Que (i) implica (ii) es trivial. Para ver que (iii) implica (i) sólo hay que notar que si $\frac{\|f(x)\|}{\|x\|}$ está acotado en $V - \{0\}$ entonces existe $0 < C < \infty$ tal que $\|f\| \leq C\|x\|$ para todo $x \in V - \{0\}$. Ahora supongamos que (ii) se satisface. Luego existe un $\delta > 0$ tal que

$$||f(x)|| \leq 1,$$

cuando $||x|| \leq \delta$. Por linealidad, esto implica que,

$$||f(x)|| \leq \frac{2}{\delta}||x||,$$

para todo $x \in V$, es decir (iii). □

El teorema anterior permite dar una estructura de espacio vectorial normado al conjunto de todas las funciones lineales $f : V \to W$.

Definición 2.16. Sean V y W dos espacios vectoriales normados. Definimos $L(V; W)$ como el conjunto de todas los **operadores lineales continuos** o los **operadores lineales acotados** de V en W. Para $f \in L(V; W)$ definimos la norma

$$\|f\| = \sup_{x \in V - \{0\}} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|}.$$

Ejercicio. Pruebe que esto define efectivamente una norma y que se verifica

(i) $\|f\| = \sup_{\|x\|=1} \|f(x)\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|f(x)\|$

(ii) $\|f(x)\| \leq \|f\| \cdot \|x\|$

Definición 2.17. Decimos que un espacio vectorial normado es un **espacio de Banach** si es completo con la métrica inducida por la norma.

Teorema 2.18. *Si W es un espacio de Banach, entonces $L(V;W)$ también lo es.*

Demostración. Sea $\{f_n\}$ una sucesión de Cauchy en $L(V,W)$. Para cada $x \in V$, se tiene que $\{f_n(x)\} \subset W$ es de Cauchy. Luego, podemos definir

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

La linealidad de f es inmediata, así que sólo bastará probar la continuidad de f y la convergencia de la sucesión $\{f_n\}$ a f. Notemos que para todo $x \in V$,

$$||f(x)|| = \lim_{n\to\infty} ||f_n(x)|| \leq ||x|| \sup ||f_n||.$$

Como $\{f_n\}$ es de Cauchy, es acotada y $\sup ||f_n|| < \infty$. Esto prueba la continuidad de f. Ahora notemos que para $m \geq n$,

$$\|f_n(x) - f_n(x)\| \leq \sup_{k\geq n} \|f_n - f_k\| ||x||.$$

Luego, tomando el límite cuando $n \to \infty$,

$$\|f(x) - f_n(x)\| \leq ||x|| \sup_{k\geq n} \|f_n - f_k\|.$$

Por lo tanto $\lim_{n\to\infty} ||f_n - f|| = 0$. □

Ahora proseguimos con una de las aplicaciones más importantes del teorema de Baire a espacios de Banach. Primero introduciremos el concepto de equicontinuidad.

Definición 2.19. Sean (X,ρ), (Y,σ) espacios métricos y sea $\mathcal{F}$ una colección de funciones de X en Y. Decimos que la colección $\mathcal{F}$ es **equicontinua** si para todo $\varepsilon > 0$ y $x \in X$, existe $\delta = \delta(x) > 0$ tal que

$$\sup_{f\in\mathcal{F}} \sigma(f(x), f(y)) < \varepsilon, \quad \text{cuando} \quad \rho(x,y) < \delta.$$

Si $\delta(x)$ no depende de x, decimos que la colección es **uniformemente equicontinua**.

Ejercicio. Demuestre que si $\mathcal{F}$ es una colección de operadores lineales, entonces si es equicontinua, necesariamente es uniformemente equicontinua.

Teorema 2.20. *Sean V, W espacios vectoriales normados; una familia $\mathcal{F} \subset L(V;W)$ es uniformemente equicontinua si y sólo si $\sup_{f\in\mathcal{F}} \|f\| < \infty$.*

Demostración. Supongamos que $\sup_{f\in\mathcal{F}} \|f\| < \infty$. Luego existe $M < \infty$ tal que

$$\sup_x \sup_{f\in\mathcal{F}} \|f(x)\| \leq M\|x\|.$$

Por lo tanto $\sup_{f\in\mathcal{F}} ||f(x+h) - f(x)|| \leq M||h||$. Por otra parte, si $\mathcal{F}$ es uniformemente equicontinua, existe un $\delta > 0$ tal que para todo $x \in V$

$$\sup_{f\in\mathcal{F}} \|f(x)\| < 1, \quad \text{si} \quad \|x\| < \delta.$$

Luego

$$\|f(x)\| = \frac{2\|x\|}{\delta}\left\|f\left(\frac{x}{\|x\|}\frac{\delta}{2}\right)\right\| < \frac{2}{\delta}\cdot\|x\|, \quad \text{para toda } f \in \mathcal{F}.$$

Est implica que $\sup_{f\in\mathcal{F}}\|f\| < \infty$. □

Teorema 2.21 (Banach-Steinhaus o principio de acotación uniforme). *Sean V, W espacios de Banach y sea $\mathcal{F} \subset L(V;W)$ una familia de operadores lineales acotados. Sea $B \subset V$, el conjunto de puntos tales que*

$$\sup_{f\in\mathcal{F}}\|f(x)\| < \infty \tag{2.2}$$

Suponga que B es de segunda categoría. Luego, $B = V$ y

$$\sup_{f\in\mathcal{F}}\|f\| < \infty$$

Demostración. Notemos que (2.2) quiere decir que para cada $x \in B$ existe $c(x) < \infty$ tal que

$$\sup_{f\in\mathcal{F}}\|f(x)\| < c(x)$$

luego podemos definir

$$E_n = \{x \in V \,:\, \sup_{f\in\mathcal{F}}\|f(x)\| \le n\} = \bigcap_{f\in\mathcal{F}}\{x \in V \,:\, \|f(x)\| \le n\}$$

Entonces E_n es cerrado para cada $n \in \mathbb{N}$, ya que los conjuntos $\{x \in V \,:\, \|f(x)\| \le n\}$ son cerrados. Por hipótesis se tiene que

$$B = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$$

luego, dado que B es de segunda categoría tiene que existir $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que E_{n_0} tenga clausura con interior no vacío (Teorema de Baire). Como los E_n son cerrados, entonces existe $x_0 \in E_{n_0}$ y $r_0 > 0$ tales que

$$B(x_0; r_0) \subset E_{n_0}$$

Sea $z \in B(0; r_0)$ luego $y = x_0 + z$ está en la bola $B(x_0; r_0)$ y

$$\sup_{f\in\mathcal{F}}\|f(y)\| \le n_0.$$

Luego, por la linealidad de f y para $z \in B(0; r_0)$ se tiene que

$$\|f(z)\| = \|f(x_0 + z) - f(x_0)\| \le 2n_0, \quad \text{para toda } f \in \mathcal{F}.$$

Consideremos $z \in B(0, r_0)$ tal que $\|z\|\frac{r_0}{2}$, para cada $x \in V$ tendremos

$$\|f(x)\| = \frac{2\|x\|}{r_0}\left\|f\left(\frac{r_0}{2}\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| \le \frac{4n_0}{r_0}\cdot\|x\|, \quad \text{para todo } f \in \mathcal{F}$$

de donde se concluye que $B = V$ y

$$\sup_{f\in\mathcal{F}}\|f\| < \infty$$

□

Consideremos una función real continua h definida en $[0,1]$. Sabemos que para definir una integral de Riemann-Stieljes $\int_0^1 f dh$ para funciones continuas f es necesario exigir alguna propiedad de regularidad a la función h. Una condición suficiente es pedir que

$$\sup_n \sum_{t_k, t_{k+1} \in \pi_n} |h(t_{k+1}) - h(t_k)| < \infty,$$

donde $\{\pi_n\}$ es una sucesión de particiones diádicas del intervalo $[0,1]$, que llamaremos **variación acotada diádica**. Veremos posteriormente que esta condición es equivalente al concepto de función de variación acotada.

Teorema 2.22. *Sea $h \in C[0,1]$. Supongamos que para toda función $f \in C[0,1]$ la sucesión,*

$$S_n(f) := \sum_{t_k, t_{k+1}} f(t_k)(h(t_{k+1}) - h(t_k)),$$

es convergente. Luego h es de variación acotada diádica.

DEMOSTRACIÓN. Notemos que para cada natural n, S_n es un operador lineal en $C[0,1]$. Elijamos ahora una función f_n que toma el valor $sgn(h(t_{k+1}) - h(t_k)$ en los extremos t_k de los intervalos que definen la partición π_n, que es continua y que satiface $||f_n|| = 1$. Luego,

$$||S_n|| \geq \sum_{t_k, t_{k+1}} |h(t_{k+1}) - h(t_k)|. \tag{2.3}$$

Ahora, para todo $f \in C[0,1]$ sabemos que $S_n f$ es acotado por ser convergente. Luego, por el teorema de Banach-Steinhaus $\sup_n ||S_n|| < \infty$. Combinando esto con (2.3) terminamos la prueba. □

El teorema 2.22 explica la dificultad inherente para definir integrales de la forma $\int f dB_t$ dónde f es continua y $\{B_t\}$ es el movimiento Browniano (es decir la integral estocástica). En efecto, es posible establecer que con probabilidad 1 estas trayectorias no son de variación acotada. K. Ito en 1955 logró encontrar una construccón adecuada de la integral estocástica.

Definición 2.23. Dados dos espacios métricos X e Y, decimos que una función $f : X \to Y$ es **abierta** si para todo $G \subset X$ abierto, $f(G) \subset Y$ es abierto.

Ejercicio. Sean V, W espacios normados y $f : V \to W$ una función lineal. Luego,

(i) $B(x; r) = x + B(0; r) = x + rB(0,1)$.

(ii) $f(B(x, r)) = f(x) + rf(B(0,1))$.

Teorema 2.24 (Mapeo abierto). *Sean V y W dos espacios de Banach. Sea $f : V \to W$ lineal y continua tal que $f(V)$ es de segunda categoría. Luego, $W = f(V)$ y f es abierta.*

DEMOSTRACIÓN. Para no caer en confusiones las bolas abiertas en V de radio n y centradas en el origen las notaremos B_n, en cambio las bolas abiertas en W de radio r y centradas en y las notaremos $B(y; r)$.

Claramente $f(V) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f(B_n)$, luego existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f(B_{n_0})$ tiene clausura con interior no vacío (Teorema de Baire). Entonces existen $y_0 \in W$ y $r_0 > 0$ tal que

$$B(y_0; r_0) \subset \overline{f(B_{n_0})}$$

Sea z en la bola de radio r_0 y centrada en el origen en el espacio de Banach W, entonces $y = z + y_0$ está en la bola $B(y_0; r_0)$. Luego existen sucesiones $\{u_n\}$ y $\{v_n\}$ en B_{n_0} tales que

$$\lim_{n\to\infty} f(u_n) = y \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} f(v_n) = y_0$$

entonces la sucesión $w_n = u_n - v_n$, que vive en la bola B_{2n_0}, es tal que

$$\lim_{n\to\infty} f(w_n) = z \quad \Longrightarrow \quad B(0; r_0) \subset \overline{f(B_{2n_0})}$$

Probaremos que para cada $y \in B(0; r_0)$, entonces existe un $x \in B_{4n_0}$ tal que $f(x) = y$, o sea, $B(0; r_0) \subset f(B_{4n_0})$. Como $y \in \overline{f(B_{2n_0})}$ luego existe $x_1 \in B_{2n_0}$ tal que

$$\|y - f(x_1)\| < \frac{r_0}{2}$$

entonces $y - f(x_1) \in B(0; \frac{r_0}{2}) \subset \overline{f\left(B_{\frac{2n_0}{2}}\right)}$. Así, existe $x_2 \in B_{\frac{2n_0}{2}}$ tal que

$$\|y - f(x_1) - f(x_2)\| < \frac{r_0}{2^2}$$

Inductivamente, podemos construir una sucesión $\{x_n\}$ en B_{2n_0} tal que $x_n \in B_{\frac{2n_0}{2^{n-1}}}$ y

$$\left\| y - \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \right\| < \frac{r_0}{2^n} \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \left\| y - f\left(\sum_{k=1}^{n} x_k \right) \right\| = 0.$$

Ahora,

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} x_k \right\| \leq \sum_{k=1}^{n} \|x_k\| < \sum_{k=1}^{n} \frac{2n_0}{2^{k-1}} < 4n_0,$$

luego existe $x \in B_{4n_0}$ tal que

$$x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k.$$

Dada la continuidad de f tendremos que $f(x) = y$. Con esto, concluimos que para cada $x \in V$ y $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $B(f(x); \delta) \subset f(B(x; \varepsilon))$.

Para finalizar, sea $U \subset V$ abierto. Sea $f(x) \in f(U)$, con $x \in U$. Como U es abierto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(x; \varepsilon) \subset U$. Por lo demostrado arriba, existe $\delta > 0$ tal que $B(f(x); \delta) \subset f(B(x; \varepsilon))$. Así, $B(f(x); \delta) \subset f(U)$. □

Los siguientes corolarios son aplicaciones directas del Teorema del mapeo abierto y se dejan como ejercicio para el lector.

Corolario 2.25. *Si V y W son espacios de Banach y $f : V \to W$ es lineal, continua y sobre, luego, f es abierta.*

Corolario 2.26. *Sean V y W espacios de Banach y $f : V \to W$ es lineal, continua, sobre e inyectiva. Luego, f^{-1} es continua y, por lo tanto, existen constantes c_1, c_2 tales que*

$$c_1\|x\| \leq \|f(x)\| \leq c_2\|x\|$$

Ahora veremos que relación existe entre equivalencia en el sentido de métricas y equivalencia en el sentido de normas.

Corolario 2.27. *Sean V un espacio vectorial con normas $||\cdot||_1$ y $||\cdot||_2$. Supongamos que una sucesión converge en $(V, |\cdot|_1)$ si y sól si converge en $(V, |\cdot|_2)$. Luego las normas son equivalentes.*

Demostración. Basta probar que la identidad $i : V_1 \to V_2$ es continua. Como es obviamente lineal, continua y biyectiva, podemos concluir que su inversa también es continua. Por lo tanto, existen constantes positivas c_1, c_2 tales que

$$c_1|x|_1 \leq |x|_2 \leq c_2|x|_1.$$

□

Corolario 2.28. *Sean $V_1 = (V, |\cdot|_1)$ y $V_2 = (V, |\cdot|_2)$ espacios de Banach. Si la bola unitaria en V_1 es compacta en V_2, luego, las normas son equivalentes.*

Demostración. Sea $B_1 = \{x \in V \,:\, |x|_1 < 1\}$ e $i : V_1 \to V_2$ la identidad.

$$\|i\| = \sup_{|x|_1 \leq 1} |i(x)|_2 = \sup_{x \in B} |x|_2 \leq C$$

Luego, i es continua. □

Definición 2.29. Sean V y W espacios de Banach y $f : V \to W$ una función lineal. Definimos el **gráfico** de f como el conjunto

$$G(f) = \{(x, f(x)) \,:\, x \in V\}$$

Ejercicio. Sean V y W son espacio de Banach. Pruebe que si $f : V \to W$ es una función lineal y continua, entonces $G(T)$ es un subespacio cerrado de $V \times W$ con la norma

$$\|(x, y)\| = \|x\| + \|y\|.$$

Además, $V \times W$ es un espacio de Banach con la norma definida arriba.

Consideremos ahora el espacio de sucesiones $\mathcal{A}$ reales. Para cada $p \geq 1$, definimos $l^p := \{x \in A \,:\, ||x||_p < \infty\}$, donde $||x||_p^p := \sum_{k=1}^{\infty} x_k^p < \infty$ es una norma que convierte a l^p en un espacio de Banach. Notemos que

$$l^1 \subset l^2.$$

Teorema 2.30. *l^1 es un conjunto de primera categoría en l^2.*

Demostración. Consideremos la inclusión $j : l^1 \to l^2$ definida como $j(x) = x$. Notemos que,

$$||j|| = \sup_{x:||x||_1 \leq 1} ||x||_2 \leq \sup_{x:||x||_1 \leq 1} ||x||_1 \leq 1.$$

Luego j es un operador lineal continuo. Por lo tanto l_1 no puede ser de segunda categoría en l_2 por el teorema del mapeo abierto y el hecho de que existe sucesiones en l_2 que no están en l_1. □

Teorema 2.31 (Gráfico cerrado). *Sean V y W espacios de Banach y $f : V \to W$ una función lineal. Luego, f es continua si y sólo si $G(f)$ es cerrado.*

Demostración. Si $G(f)$ es cerrado, luego es Banach. Sea $P : G(f) \to V$ tal que

$$P((x, f(x))) = x$$

que es lineal, continua y biyectiva. Luego, por el Corolario 2.26 tendremos que $P^{-1} : V \to G(f)$ es lineal y continua. Es decir, si $x \in V$ y $x_n \to x$ entonces

$$\lim_{n\to\infty} P^{-1}(x_n) = \lim_{n\to\infty} (x_n, f(x_n)) = (x, f(x))$$

de donde se concluye la continuidad de f. □

Corolario 2.32. *Sean $V_1 = (V, |\cdot|_1)$ y $V_2 = (V, |\cdot|_2)$ espacios de Banach. Suponga que, cada vez que una sucesión converge en ambos espacios, su límite coincide. Luego, las normas son equivalentes.*

Demostración. La hipótesis implica que la identidad es un operador quee tiene un gráfico cerrado. Luego es continuo. Similarmente su inverso es continuo. □