2.4. Teorema del punto fijo de Banach

Definición 2.33. Sea (X,ρ) un espacio métrico y $\Omega : X \to X$. Decimos que Ω es una **contracción** si existe una constante $0 < k < 1$ tal que

$$\rho(\Omega(x_1),\Omega(x_2)) \leq k\,\rho(x_1,x_2)$$

Teorema 2.34 (Punto fijo de Banach). *Sea (X,ρ) un espacio métrico completo y $\Omega : X \to X$ una contracción. Luego, existe un único $x \in X$ tal que $\Omega(x) = x$.*

Demostración. Sea $x_0 \in X$ y definamos la sucesión $\{x_n\}$ en X como sigue

$$x_1 = \Omega(x_0), \quad x_2 = \Omega(x_1),\, \ldots\,, x_n = \Omega(x_{n-1}).$$

O sea, $x_n = \Omega^n(x_0)$ donde Ω^n es componer n veces la función Ω. Nuestra intención es probar que esta sucesión es de Cauchy, cuyo límite es precisamente el punto que es invariante bajo la acción de Ω (también es conocido como el *punto fijo* de Ω). Para ello notemos que

$$\rho(x_n,x_{n+1}) = \rho(\Omega(x_{n-1}),\Omega(x_n)) < k\,\rho(x_{n-1},x_n) < \cdots < k^n\,\rho(x_0,x_1).$$

Luego, para todo $m,n \in \mathbb{N}$ tendremos que

$$\rho(x_n,x_{n+m}) \leq \sum_{i=1}^{m} \rho(x_{n+i-1},x_{n+i}) < k^n \rho(x_0,x_1) \sum_{i=1}^{m} k^{i-1} < \frac{k^n}{1-k} \cdot \rho(x_0,x_1)$$

de donde se tiene que $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy en X. Entonces existe $x \in X$ tal que $x_n \to x$, cuando $n \to \infty$.
Ahora, dada la continuidad de Ω y de la métrica ρ, tendremos

$$\rho(x,\Omega(x)) = \lim_{n\to\infty} \rho(x_n,\Omega(x_n)) = \lim_{n\to\infty} \rho(x_n,x_{n+1}) = \rho(x,x) = 0$$

de donde se concluye que $\Omega(x) = x$. Para probar la unicidad del punto fijo, supondremos la existencia de dos. Sean estos x e y que satisfacen

$$\rho(x,y) = \rho(\Omega(x),\Omega(y)) \leq k\,\rho(x,y)$$

lo que no es posible porque tendríamos que

$$(1-k)\rho(x,y) \leq 0$$

entonces $x = y$. Por lo tanto, existe un único $x \in X$ tal que $\Omega(x) = x$. □

Ejemplo. Consideremos la ecuación $x = \cos x$ para $x \in [0,\pi/2]$. Probaremos que esta ecuación tiene una solución única. En efecto, $\Omega x := \cos x$ define una función desde $[0,\pi/2]$ en si mismo. Además,

$$|\Omega x - \Omega y| = |\cos x - \cos y| = |x-y|\,\mathrm{sen}\,\alpha, \tag{2.4}$$

donde α se encuentra en el intervalo definido por x e y. Ahora, como $|\cos x| \leq 1$, cualquier solución de la ecuación $x = \cos x$ tiene que tener la propiedad $|x| \leq 1$. Además, es obvio que Ω tiene su imagen en el intervalo cerrado $[0,1]$. Pero en tal intervalo, por (2.4) y el hecho que $|\,\mathrm{sen}\,\alpha| < \mathrm{sen}\,1 < 1$, Ω es una contracción. Aplicando el teorema del punto fijo de Banach vemos que exite una solución única de la ecuación.

A continuación aplicarremos el teorema del punto fijo de Banach para probar el teorema de la función implícita en $\mathbb{R}^2$.

Teorema 2.35 (Función implícita en $\mathbb{R}^2$). *Sea $E \subset \mathbb{R}^2$ y $(x_0, y_0) \in E^0$, y sea $f : E \to \mathbb{R}$. Supongamos que*

(i) $f(x_0, y_0) = 0$ y f es continua en un abierto $G \subset E$ que contiene al punto (x_0, y_0).

(ii) f_y existe en G y es continua en (x_0, y_0). Además, $f_y(x_0, y_0) \neq 0$.

Luego, existe un rectángulo

$$M \times N = [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \times [y_0 - \beta, y_0 + \beta]$$

y una función continua $\phi : M \to N$ tal que $y = \phi(x)$ es la única solución en $M \times N$ de la ecuación

$$f(x, y) = 0, \quad x \in M$$

Demostración. Sea $q = 1/f_y(x_0, y_0)$. Como f_y es continua en (x_0, y_0), existe un rectángulo

$$[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \times [y_0 - \beta, y_0 + \beta]$$

contenido en G tal que $|1 - qf_y(x, y)| < 1/2$. Por la primera condición existe un número positivo $\alpha \leq \delta$ tal que para $x \in M = [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ se tiene que

$$|qf(x, y_0)| < \frac{1}{2}\beta.$$

Ahora, notemos $C(M, N)$ es completos. Sea Ω una función definida en $B(M, N)$ como $\Omega(\psi) = \phi$ donde

$$\phi(x) = \psi(x) - qf(x, \psi(x)),$$

para $x \in M$. Mostraremos primero que Ω mapea $C(M, N)$ en si mismo. Sea $\psi \in C(M, N)$. Luego para $x \in M$, por el teorema del valor medio

$$\Omega(\psi)(x) - y_0 = \psi(x) - qf(x, \psi(x)) - y_0 = [\psi(x) - qf(x, \psi(x))] - [y_0 - qf(x, y_0)] + qf(x, y_0)$$

$$= [\psi(x) - y_0][1 - qf_y(x, u)] + qf(x, y_0),$$

donde u está entre y_0 y $\psi(x)$ y por lo tanto en N. Luego,

$$|\Omega(\psi)(x) - y_0| < \frac{1}{2}|\psi(x) - y_0| + \frac{1}{2}\beta < \beta.$$

Por otra parte, si $\psi_1, \psi_2 \in C(M, N)$ y $x \in M$,

$$\begin{aligned}\Omega(\psi_1)(x) - \Omega(\psi_2)(x) &= [\psi_1(x) - qf(x, \psi_1(x))] - [\psi_2(x) - qf(x, \psi_2(x))] \\ &= [\psi_1(x) - \psi_2(x)][1 - qf_y(x, v)],\end{aligned}$$

donde v yace entre $\psi_1(x)$ y $\psi_2(x)$. Luego,

$$||\Omega(\psi_1) - \Omega(\psi_2)||_\infty \leq \frac{1}{2}||\psi_1 - \psi_2||_\infty.$$

Por el teorema del punto fijo de Banach sabemos que existe una única función en $C(M, N)$ tal que $\Omega(phi) = \phi$. Es decir, $f(x, \phi(x)) = 0$ para $x \in M$. $\square$

Vale la pena comparar el teorema del punto fijo de Banach con el siguiente resultado de Brouwer.

Teorema 2.36. *Si $f : B^2 \to B^2$ es continua, entonces existe un $x \in B^2$ tal que $f(x) = x$.*

La demostración usual de este teorema requiere ocupar algunos conceptos de topología algebraica, por lo que la omitimos.

2.5. Completación de espacios métricos

Una de las primeras construcciones de los números reales se efectuó a finales del siglo 19 por un procedimiento que consiste en incrustar los racionales en un conjunto más grande, que es completo.

Definición 2.37. Consideremos dos espacios métricos (X, ρ) y (Y, σ). Una función biyectiva $f : X \to Y$ tal que

$$\sigma(f(x_1), f(x_2)) = \rho(x_1, x_2),$$

para todo $x_1, x_2 \in X$ se llama una **isometría**. En este caso decimos que los espacios métricos x e Y son **isométricos**. Si un espacio métrico es isométrico a un subespacio de otro espacio métrico, decimos que el primero se puede **incrustar isométricamente** en el segundo.

Notemos que una isometría siempre es un homeomorfismo.

Ejemplo. Los reales con la métrica Euclidiana son isométricos con el subespacio Λ de $C[0, 1]$ dado por las funciones de la forma

$$\phi_\lambda(x) = \lambda x.$$

Teorema 2.38. *Sea (X, ρ) un espacio métrico. Luego existe una incrustación isométrica de X en un espacio métrico completo.*

Demostración. Consideremos el espacio $B(X, \mathbb{R})$. Sea $x_0 \in X$. Dado $a \in X$ definimos $\phi_a : X \to \mathbb{R}$ por

$$\phi_a = \rho(x, a) - \rho(x, x_0).$$

Notemos que,

$$|\phi_a(x)| = |\rho(x, a) - \rho(x, x_0)| \leq \rho(a, x_0).$$

Ahora definimos $\Phi : X \to B(X, \mathbb{R})$ como

$$\Phi(a) := \phi_a.$$

Mostraremos que Φ define una isometría del espacio métrico (X, ρ) en el espacio $B(X, \mathbb{R})$ con la métrica uniforme σ. Por definición,

$$\sigma(\phi_a, \phi_b) = \sup_{x \in X} |\rho(x, a) - \rho(x, b)| \leq \rho(a, b).$$

Por otra parte, cuando $x = a$ tenemos que $|\rho(x, a) - \rho(x, b)| = \rho(a, b)$, lo que prueba que

$$\sigma(\phi_a, \phi_b) = \rho(a, b).$$

□

Definición 2.39. Sea X un espacio métrico. Si $h : X \to Y$ es una incrustación isométrica de X en un espacio métrico completo Y, el subespacio $\overline{h(X)}$ de Y es un espacio métrico completo llamado la **completación** de X.

Ejercicio. Demuestre que todas las completaciones de un espacio métrico son isométricas entre si.