Capítulo 3

Convergencia uniforme

3.1. Teorema de Stone-Weierstrass

En 1885, el matemático alemán Karl Weierstrass publica en la revista *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin* el artículo *Über die analytische Darstellbarkeit sogennanter willkürlicher Functionen einer reellen Veränderlichen* donde demuestra que toda función continua definida en un intervalo cerrado y acotado de los reales puede aproximarse uniformemente por polinomios. Posteriormente, en 1937 Marshall Stone extiende este teorema a espacios topológicos compactos Hausdorff y a familias de funciones más generales que los polinomios.

Comenzaremos enunciando el resultado de Weierstrass demostrándolo por un método constructivo que ocupa los llamados polinomios de Bernstein. Asumiremos familiaridad con los conceptod más elementales de probabilidad.

Teorema 3.1 (Weierstrass, 1885). *Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una función continua. Luego existe una sucesión de polinomios $p_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ tal que*

$$\lim_{n\to\infty} \|p_n - f\|_\infty = 0$$

Demostración. Sea $x \in [0,1]$. Definamos la variable aleatoria X_i por

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{con probabilidad } x \\ 0 & \text{con probabilidad } 1-x. \end{cases}$$

luego, para cada $i \in \mathbb{N}$, si llamamos $\mathrm{E}[Y]$ a la esparanza de una variable alatoria Y, tenemos

$$\mathrm{E}[X_i] = x \tag{3.1}$$

y

$$\mathrm{E}[(X_i - x)^2] = \mathrm{E}[X_i^2] - \mathrm{E}[X_i]^2 = x - x^2. \tag{3.2}$$

Definamos

$$S_n := X_1 + X_2 + \ldots + X_n.$$

Luego para $0 \le q \le n$ tendremos que

$$\mathrm{P}[S_n = q] = \binom{n}{q} x^q (1-x)^{n-q}. \tag{3.3}$$

Entonces

$$\mathrm{E}\left[f\left(\tfrac{S_n}{n}\right)\right] = \sum_{q=0}^{n} f\left(\frac{q}{n}\right)\binom{n}{q} x^q(1-x)^{n-q}.$$

Por otra parte, como f es uniformemente continua, dado $\varepsilon > 0$ sabemos que existe un $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$ si $|x - y| \leq \delta$. Luego

$$\begin{aligned}
\left|\mathrm{E}\left[f\left(\tfrac{S_n}{n}\right)\right] - f(x)\right| &= \left|\mathrm{E}\left[f\left(\tfrac{S_n}{n}\right) - f(x)\right]\right| \\
&\leq \mathrm{E}\left[\left|f\left(\tfrac{S_n}{n}\right) - f(x)\right|\right] \\
&\leq \mathrm{E}\left[\left|f\left(\tfrac{S_n}{n}\right) - f(x)\right| \mathbb{1}_{\left|\frac{S_n}{n}-x\right|<\delta}\right] + \mathrm{E}\left[\left|f\left(\tfrac{S_n}{n}\right) - f(x)\right| \mathbb{1}_{\left|\frac{S_n}{n}-x\right|\geq\delta}\right] \\
&< \varepsilon + 2MP\left[\left|\tfrac{S_n}{n} - x\right| \geq \delta\right],
\end{aligned}$$

donde M es una cota para f. Ahora, por la desigualdad de Tchebyschev tenemos que

$$P\left[\left|\tfrac{S_n}{n} - x\right| \geq \delta\right] \leq \frac{1}{\delta^2} E[\left|\tfrac{S_n}{n} - x\right|^2] = \frac{1}{\delta^2}\frac{1}{n^2} nE[(X_1 - x)^2] = \frac{x - x^2}{\delta^2}\frac{1}{n},$$

donde en la última igualdad hemos ocupado (3.1) y (3.2).Tomando el límite cuando n tiende a ∞ concluímos que

$$\left|\mathrm{E}\left[f\left(\tfrac{S_n}{n}\right)\right] - f(x)\right| \leq \varepsilon.$$

Como ε es arbitrario, esto concluye la prueba. □

Los polinomios definidos por la expresión (3.3) se llaman **polinomios de Bernstein**.

Ejercicio. Sea $f \in C[0,1]$ una funcion que es k veces continuamente diferenciable. Imitando la demostración del teorema de Weierstrass encuentre el mayor valor posible de α tal que

$$\left|\mathrm{E}\left[f\left(\tfrac{S_n}{n}\right)\right] - f(x)\right| \leq C\frac{1}{n^\alpha},$$

para alguna constante C.

Ahora introduciremos el concepto de álgebra de funciones, necesario para enunciar el teorema de Stone-Weierstrass.

Definición 3.2. Sea X en espacio métrico. Recordemos que $C(X)$ es el conjunto de **funciones reales continuas y acotadas**, con la norma del supremo. Además, denotamos $C_c(X)$ el conjunto de **funciones complejas, continuas y acotadas**, con la norma del supremos. Diremos que $\mathcal{A} \subset C(X)$ (o $C_c(X)$) es un **álgebras de funciones** reales (o complejas) si,

(i) Para todo par de funciones f, g de $\mathcal{A}$, $f + g$ también se encuentra en $\mathcal{A}$.

(ii) Para todo par de funciones f, g de $\mathcal{A}$, fg también se encuentra en $\mathcal{A}$.

(iii) Para toda función f de $\mathcal{A}$ y todo $\alpha \in \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$), αf también está en $\mathcal{A}$.

Además, ocuparemos las siguientes notaciones

$$(f \vee g)(x) := \max\{f(x), g(x)\} \quad y \quad (f \vee g)(x) := \min\{f(x), g(x)\}$$

que puede ser reescrito por

$$f \vee g := \frac{f + g + |f - g|}{2} \quad y \quad f \vee g := \frac{f + g - |f - g|}{2}.$$

Ejemplo. Los siguientes son ejemplos de álgebras de funciones definidas en espacios métricos compactos. Se deja al lector probar las condiciones de álgebra para cada uno de los conjuntos que se definirán.

(a) Sea $X = [0,1]$ con la métrica usual, y consideremos el espacio de las funciones reales continuas $C[0,1]$. En ella podemos considerar el álgebra de funciones

$$\mathcal{A} = \{p(x) \in C[0,1] \,:\, p(x) \text{ es un polinomio}\}$$

(b) Si $X = S_1$, el círculo unitario en $\mathbb{R}^2$, y el espacio de las funciones complejas continuas sobre S_1, $C_c(S_1)$. El siguiente subconjunto de $C_c(S_1)$ es un álgebra

$$\mathcal{A} = \{f(x) \in C_c(S_1) \,:\, f(x) \text{ combinaciones lineales de las funciones } e^{2\pi ikx},\ k \in \mathbb{Z}\}$$

Lema 3.3. *Sea X un espacio métrico. Sea $\mathcal{A} \subset C(X)$ un álgebra de funciones reales. Luego $\overline{\mathcal{A}}$ es un álgebra real.*

Demostración. Sean $f, g \in \overline{\mathcal{A}}$, luego existen $\{f_n\}, \{g_n\} \subset \overline{\mathcal{A}}$ que convergen uniformemente a f y g, respectivamente. Probemos en tres pasos que $\overline{\mathcal{A}}$ es un álgebra: sea $\varepsilon > 0$

(i) Para probar que $f + g \in \overline{\mathcal{A}}$ consideremos

$$\|(f_n + g_n) - (f + g)\|_\infty \leq \|f_n - f\|_\infty + \|g_n - g\|_\infty < \varepsilon$$

si n es suficientemente grande, por lo tanto $f + g \in \overline{\mathcal{A}}$.

(ii) Sea $\lambda \in \mathbb{R}$, luego

$$\|\lambda f - \lambda f_n\|_\infty = |\lambda| \|f - f_n\|_\infty < \varepsilon$$

para n muy grande, luego $\lambda f \in \overline{\mathcal{A}}$.

(iii) Finalmente,

$$\begin{aligned}
\|f_n g_n - fg\|_\infty &= \|f_n g_n + fg_n - fg_n - fg\|_\infty \\
&\leq \|(f_n - f)g_n\|_\infty + \|f(g_n - g)\|_\infty \\
&\leq \|f_n - f\|_\infty \|g_n\|_\infty + \|f\|_\infty \|g_n - g\|_\infty
\end{aligned}$$

pero $\|g_n\|_\infty \leq \|g - g_n\|_\infty + \|g\|_\infty$, luego

$$\|f_n g_n - fg\|_\infty \leq \|f_n - f\|_\infty \|g_n - g\|_\infty + \|f_n - f\|_\infty \|g\|_\infty + \|f\|_\infty \|g_n - g\|_\infty$$

que tiende a cero cuando $n \to \infty$. Por lo tanto, $f \cdot g \in \overline{\mathcal{A}}$.

Luego podemos concluir que $\overline{\mathcal{A}}$ es un álgebra. $\square$

Lema 3.4. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de funciones reales continuas, sobre un espacio métrico X. Si $f \in \mathcal{A}$, luego $|f| \in \overline{\mathcal{A}}$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea M una cota dde la función f. Notemos que por un simple cambio dde variable, el teorema de Weierstrass sigue siendo válido para funciones continuas en el intervalo $[-M, M]$. Luego existe una sucesión de polinómios $\{p_n\}$,

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{m_n} a_{k,n} x^k$$

pra $x \in [-M, M]$, que converge uniformemente al valor absoluto $|x|$. Entonces necesariamente $\lim_{n\to\infty} a_{0,n} = 0$. Si definimos $q_n = p_n - a_{0,n}$ tenemos que

$$\sup_{x\in X} |q_n(x) - |x|| \leq \sup_{x\in X} |p_n(x) - |x|| + |a_{0,n}|$$

y que por lo tanto tiende a cero cuando n tiende al infinito. Luego, $\{q_n\}$ es una sucesión de polinómios sin término libre que converge uniformemente al valor absoluto. Podemos concluír que si $f \in \mathcal{A}$ entonces la sucesión $\{q_n(f)\}$ en $\mathcal{A}$ converge uniformemente a $|f| \in C(X)$. $\square$

Definición 3.5. Sea X un espacio métrico y $\mathcal{A} \subset C(X)$ (o $C_c(X)$) un álgebra de funciones continua. Diremos que $\mathcal{A}$ es un **álgebra que separa puntos** en X, si para todo $x, y \in X$, $x \neq y$, existe una función $f \in \mathcal{A}$ tal que $f(x) \neq f(y)$. Diremos que $\mathcal{A}$ es un **álgebra nunca nula** si para todo $x \in X$, existe una función $f \in \mathcal{A}$ tal que $f(x) \neq 0$.

Lema 3.6. *Sea X un espacio métrico y $\mathcal{A} \subset C(X)$ un álgebra que separa puntos y nunca se anula. Luego si $x, y \in X$, $x \neq y$, y $a, b \in \mathbb{R}$ entonces existe una función $h_{xy} \in \mathcal{A}$ tal que $h_{xy}(x) = a$ y $h_{xy}(y) = b$.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $x, y \in X$, $x \neq y$, luego existe $f_1 \in \mathcal{A}$ tal que $f_1(x) \neq f_1(y)$. Además existen $f_2, f_3 \in \mathcal{A}$ tales que $f_2(x) \neq 0$ y $f_3(y) \neq 0$. Luego tenemos los siguientes casos:

Caso 1. Si $f_1(x) = 0$, luego existen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que el sistema

$$\begin{cases} \alpha f_1(x) + \beta f_2(x) = a \\ \alpha f_1(y) + \beta f_2(y) = b \end{cases}$$

es consistente ya que $f_1(y) f_2(x) \neq 0$. Luego elegimos $h_{xy} = \alpha f_1 + \beta f_2$.

Caso 2. Si $f_1(y) = 0$, luego existen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que el sistema

$$\begin{cases} \alpha f_1(x) + \beta f_3(x) = a \\ \alpha f_1(y) + \beta f_3(y) = b \end{cases}$$

es consistente ya que $f_1(x) f_3(y) \neq 0$. Luego elegimos $h_{xy} = \alpha f_1 + \beta f_3$.

Caso 3. Finalmente, si $f_1(x) \neq 0$ y $f_1(y) \neq 0$, entonces existen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que el sistema

$$\begin{cases} \alpha f_1(x) + \beta f_1(x)^2 = a \\ \alpha f_1(y) + \beta f_1(y)^2 = b \end{cases}$$

es consistente ya que

$$f_1(x) f_1(y)^2 - f_1(y) f_1(x)^2 = f_1(x) f_1(y)(f_1(y) - f_1(x)) \neq 0$$

y elegimos $h_{xy} = \alpha f_1 + \beta f_1^2$. $\square$

Teorema 3.7 (Stone-Weierstrass caso real). *Sea X un espacio métrico compacto. Sea $\mathcal{A} \subset C(X)$ un álgebra de funciones. Supongamos que $\mathcal{A}$ es un álgebra que separa puntos. Luego alguna de las siguientes situaciones ocurre.*

(i) Si $\mathcal{A}$ es nunca nula entonces

$$\overline{\mathcal{A}} = C(X).$$

(ii) Si $\mathcal{A}$ no es nunca nula, entonces existe un punto $p \in X$ que es único tal que

$$\overline{\mathcal{A}} = \{f \in C(X) \,:\, f(p) = 0\}.$$

Demostración. Primero comenzaremos suponiendo que $\mathcal{A}$ es un álgebra nunca nula. Sea $f \in C(X)$ y $\varepsilon > 0$, bastará probar la existencia de $g \in \overline{\mathcal{A}}$ tal que

$$\|f - g\|_\infty < \varepsilon$$

Sean $u, v \in X$. Si $u \neq v$, por el Lema 3.6 existe $h_{uv} \in \mathcal{A}$ con

$$h_{uv}(u) = f(u) \qquad \text{y} \qquad h_{uv}(v) = f(v)$$

En el caso que $u = v$ podemos definir

$$h_{uu}(x) = \frac{f(u)}{h(u)} \cdot h(x)$$

donde $h \in \mathcal{A}$, con $h(u) \neq 0$. Es importante hacer notar que para cada $u \in X$, fijo, $\frac{f(u)}{h(u)} \in \mathbb{R}$. Luego h_{uu} como función de x es un elemento de $\mathcal{A}$. Sea $\varepsilon > 0$. Definamos los siguientes conjuntos de X

$$V_{uv} = \{x \in X \,:\, h_{uv}(x) < f(x) + \varepsilon\}$$

que son abiertos dada la continuidad de h_{uv} y f. Luego, para cada u fijo, la familia de conjuntos $\{V_{uv} \,:\, v \in X\}$ resulta ser un cubrimiento por abiertos de X. Por la compacidad de X existen $v_1, v_2, \ldots, v_n$ tales que

$$X = V_{uv_1} \cup V_{uv_2} \cup \cdots \cup V_{uv_n}$$

Entonces, para cada $u \in X$ existe

$$g_u(x) = \left(h_{uv_1} \wedge h_{uv_2} \wedge \ldots \wedge h_{uv_n}\right)(x)$$

que es una función en $\overline{\mathcal{A}}$ satisfaciendo $g_u(x) < f(x) + \varepsilon$, para todo $x \in X$. Ahora, para cada $u \in X$, definamos los conjuntos

$$W_u = \{x \in X \,:\, g_u(x) > f(x) - \varepsilon\}$$

y nuevamente tendremos que los W_u son abiertos y forman un cubrimiento por abiertos de X. Entonces existen $u_1, u_2, \ldots, u_m$ tales que

$$X = W_{u_1} \cup W_{u_2} \cup \cdots \cup W_{u_m}$$

y definamos, finalmente,

$$g(x) = \left(g_{u_1} \vee g_{u_1} \vee \ldots \vee g_{u_m}\right)(x)$$

que está en $\overline{\mathcal{A}}$ y cumple

$$f(x) - \varepsilon < g(x) < f(x) + \varepsilon, \text{ para todo } x \in X \quad \Longrightarrow \quad \|f - g\|_\infty < \varepsilon$$

Por lo tanto, si $\mathcal{A}$ es un álgebra nunca nula tendremos que $\overline{\mathcal{A}} = C(X)$.

Si suponemos que A no es un álgebra nunca nula, luego existe $p \in X$ tal que $h(p) = 0$ para todo $h \in \mathcal{A}$. Como $\mathcal{A}$ separa puntos p es único. Definamos la coleción de funciones de $C(X)$

$$\mathcal{B} = \{f \in C(X) \,:\, f = h + c,\, h \in \mathcal{A},\, c \in \mathbb{R}\}.$$

Claramente $\mathcal{B}$ es un álgebra de funciones reales en $C(X)$ que separa puntos y nunca nula. Luego, por la parte (i) del teorema tendremos que $\overline{\mathcal{B}} = C(X)$. Sean $f \in C(X)$, con $f(p) = 0$, y $\varepsilon > 0$, luego existe un elemento en $\mathcal{B}$, sea éste $h + c$, tal que

$$\|f - (h + c)\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2} \quad \Longrightarrow \quad |c| = |f(p) - (h(p) + c)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

entonces

$$\|f - h\|_\infty \leq \|f - (h + c)\|_\infty + \|c\|_\infty < \varepsilon$$

de donde se concluye la parte (ii) del teorema. □

Ejemplo. El siguiente ejemplo muestra que no es suficiente tener un álgebra $\mathcal{A}$ nunca nula y que separa puntos en un espacio de funciones complejas continuas $C_c(X)$, para poder aproximar toda f de $C_c(X)$ por un elemento de $\mathcal{A}$. Consideremos el espacio métrico

$$X = \{z \in \mathbb{C} \,:\, |z| = 1\}$$

con la métrica de subespacio inducida por $\mathbb{C}$. Además, sea el álgebra de funciones

$$\mathcal{A} = \{p(z) \in C_c(X) \,:\, p(z) \text{ es un polinomio en } z\}.$$

Luego $\mathcal{A}$ es un álgebra que separa puntos y es nunca nula ya que contiene a las funciones $h_1(z) = z$ y $h_2(z) = 1$. Consideremos la función compleja $f(z) = \overline{z}$ (el conjugado de z) que está en $C_c(X)$.
Sea $h \in \mathcal{A}$, entonces

$$|f(z) - h(z)| = |\overline{z} - h(z)| = |z||\overline{z} - h(z)| = |1 - zh(z)|$$

luego, por el principio del módulo máximo tendremos que

$$\|f(z) - h(z)\|_\infty = \sup_{z \in X} |1 - zh(z)| \geq |1 - 0 \cdot h(0)| = 0$$

lo que muestra la insuficiencia del álgebra $\mathcal{A}$ en el caso complejo.

Esto nos lleva a la siguiente definición.

Definición 3.8. Sea X un espacio métrico y $\mathcal{A}$ un algebra de funciones complejas en $C_c(X)$. Decimos que $\mathcal{A}$ es **autoadjunta** si para toda $f \in \mathcal{A}$ se tiene que $\overline{f} \in \mathcal{A}$.

Teorema 3.9 (Stone-Weierstrass caso complejo). *Sea X un espacio métrico compacto y sea $\mathcal{A} \subset C_c(X)$ un álgebra de funciones complejas, que separa puntos y es autoadjunta. Luego alguna de las siguientes situaciones ocurre.*

(i) Si $\mathcal{A}$ es nunca nula entonce

$$\overline{\mathcal{A}} = C_c(X).$$

(ii) Si $\mathcal{A}$ no es nunca nula existe un punto $p \in X$ que es único tal que

$$\overline{\mathcal{A}} = \{f \in C_c(X) \,:\, f(p) = 0\}.$$

Demostración. Definamos

$$\mathcal{A}_r = \{h \in \mathcal{A} \,:\, h(X) \subset \mathbb{R}\}$$

Este conjunto es claramente no vacío ya que $\mathcal{A}$ es un álgebra autoadjunta, luego, para toda $h \in \mathcal{A}$, tendremos

$$\operatorname{Re} h = \frac{h + \overline{h}}{2} \in \mathcal{A}_r \qquad \text{y} \qquad \operatorname{Im} h = \frac{h - \overline{h}}{2i} \in \mathcal{A}_r$$

Sean $x \neq y$, entonces existe $h \in \mathcal{A}_r$ tal que $h(x) \neq h(y)$ luego,

$$\operatorname{Re} h(x) \neq \operatorname{Re} h(y) \quad \text{o} \quad \operatorname{Im} h(x) \neq \operatorname{Im} h(y)$$

de donde se tiene que $\mathcal{A}_r$ es un álgebra real que separa puntos.

Primero supondremos que $\mathcal{A}$ es nunca nula, luego $\mathcal{A}_r$ es un álgebra real nunca nula, y tendremos por el Teorema de Stone-Weierstrass (para el caso real compacto) que $\overline{\mathcal{A}_r} = C(X)$. Ahora, sea $f \in C_c(X)$ y $\varepsilon > 0$, entonces existen $h_1, h_2 \in \mathcal{A}_r$ tales que

$$\|\operatorname{Re} f - h_1\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{y} \qquad \|\operatorname{Im} f - h_2\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$$

Luego, considerando $h = h_1 + ih_2$, una función en el álgebra de funciones complejas $\mathcal{A}$, que satisface

$$\|f - h\|_\infty < \varepsilon$$

se tiene que $\overline{\mathcal{A}} = C_c(X)$.

Finalmente, si $\mathcal{A}$ no es un álgebra nunca nula, luego existe $p \in X$ tal que $h(p) = 0$, para toda $h \in \mathcal{A}$.
Sea $f \in C_c(X)$ que se anula en p. Entonces $\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f \in \overline{\mathcal{A}_r}$. Como $\mathcal{A}$ es un álgebra compleja y $\mathcal{A}_r \subset \mathcal{A}$ luego tendremos que

$$\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f \in \overline{\mathcal{A}} \quad \Longrightarrow \quad f \in \overline{\mathcal{A}}$$

con lo que se concluye la demostración del teorema. □

Ejercicio. Lo que hemos probado en los dos teoremas de Stone-Weierstrass es que cuando $\mathcal{A}$ no es nunca nula, la clausura de $\mathcal{A}$ en $C(X)$ (resp. $C_c(X)$) contiene a todas las funciones reales (resp. complejas) continuas que se anulan en p. Pruebe que si $f \in C(X)$ (resp. $C_c(X)$) no se anula en p, entonces $f \notin \overline{\mathcal{A}}$.

Ejemplo. Claramente si un álgebra contiene una constante, entonces es nunca nula. Ahora presentaremos un ejemplo de un álgebra nunca nula, que separa puntos y que no contiene a las constantes.

Sea X un subconjunto compacto de $\mathbb{R}$ que no contiene al cero, y definamos el álgebra

$$\mathcal{A} = \{xp(x) \,:\, p \text{ es un polinomio}\}$$

no es difícil de probar que $\mathcal{A}$ es un álgebra de funciones continua sobre X, que es nunca nula y separa puntos. Estas dos últimas afirmaciones se deben a que $x \in \mathcal{A}$ y $0 \notin X$. Por lo tanto, $\mathcal{A} = C(X)$.

Finalizamos esta sección con un interesante resultado de Szász y Münst que da una condición necesaria y suficiente para que un subconjunto de las potencias de la funcion x en $[0,1]$ genere un espacio vectorial cuya clausura es $C[0,1]$.

Teorema 3.10 (Szász-Münst). *Considere las funciones x^{n_k} con*

$$1 = n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \ldots, \quad n_k \in \mathbb{N}$$

Luego, la clausura de el conjunto de combinaciones lineales de estas potencias es $C[0,1]$ si y sólo si

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n_k} = \infty$$