3.2. Teoremas de Dini

Definición 3.11. Sea X un espacio métrico y $\{f_n\}$ una sucesión en $C(X)$. Decimos que la sucesión $\{f_n\}$ es **monótona** en n si para todo $x \in X$ se cumple $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$, $n \geq 1$, o bien para todo $x \in X$ se cumple $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$, $n \geq 1$.

Teorema 3.12 (Dini). *Sea X un espacio métrico compacto y $\{f_n\}$ una sucesión de funciones monótona en $C(X)$ que converge puntualmente a una función continua $f \in C(X)$. Luego la convergencia es uniforme.*

DEMOSTRACIÓN. Sin pérdida de generalidad supondremos que para todo $x \in X$, $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$. Sea $\varepsilon > 0$. Para cada n definimos el abierto

$$A_n := \{x \in X \,:\, f_n(x) < f(x) + \varepsilon\}.$$

Notemos que $A_n \subset A_{n+1}$. Además, la convergencia puntual de f_n a f implica que $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Luego, por la compacidad de X, existe un N tal que

$$X = \bigcup_{k=1}^{N} A_k.$$

Entonces $X = A_N$ y

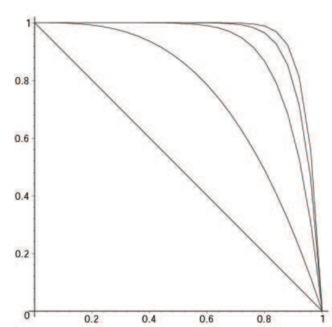
$$f_n(x) - f(x) < \varepsilon,$$

para todo $x \in X$, si $n \geq N$. Por otra parte, es obvio que $f(x) \leq f_n(x)$ para todo $x \in X$ y n. Por lo tanto, $f_n \to f$ uniformemente. $\square$

Ejemplo. En este ejemplo presentaremos una sucesión de funciones mónotonas definidas en un compacto, que no converge uniformemente a ninguna función continua.

Consideremos el espacio métrico compacto $X = [0,1]$ con la métrica inducida por $(R, |\cdot|)$ y la sucesión de funciones continuas $f_n(x) = 1 - x^n$. Esta es una sucesión monótona con $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ para todo $x \in [0,1]$ y n. Además, esta sucesión converge puntualmente en $[0,1]$ a una función discontinua

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$



Luego, la sucesión $\{f_n\}$ no converge uniformemente a ninguna función real continua definida sobre $[0,1]$.

Teorema 3.13 (Dini). *Sea $\{f_n\}$ una sucesión en $C[0,1]$ con todos sus términos funciones monótonas. Supongamos que f_n converge puntualmente a una función $f \in C[0,1]$. Luego la convergencia es uniforme.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\varepsilon > 0$, luego existe $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{3^2} \quad \text{si} \quad |x - y| < \delta$$

Sea $0 =: x_1 < x_2 < \cdots < x_m := 1$ una partición de $[0,1]$ tal que $|x_{i+1} - x_i| < \delta/2$ para $1 \leq i \leq m-1$. Notemos que existe un natural N tal que

$$\sup_{1\leq i\leq m} |f_n(x_i) - f(x_i)| < \frac{\varepsilon}{3^2} \quad \text{si} \quad n \geq N$$

Por otra parte, para cada $i = 1, 2, \ldots m-1$ tenemos

$$\begin{aligned} |f_n(x_i) - f_n(x_{i+1})| &\leq |f_n(x_i) - f(x_i)| + |f(x_i) - f(x_{i+1})| + |f(x_{i+1}) - f_n(x_{i+1})| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{si} \quad n \geq N \end{aligned}$$

Sea $x \in [0,1]$, luego x está en un intervalo de la forma $[x_i, x_{i+1}]$. Como las f_n son monótonas tenemos que $|f_n(x) - f_n(x_i)| < \varepsilon/3$, cuando $n \geq N$. Luego

$$|f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(x) - f_n(x_i)| + |f_n(x_i) - f(x_i)| + |f(x_i) - f(x)| < \varepsilon$$

si $n \geq N$ y $x \in [x_i, x_{i+1}]$. Por lo tanto, la sucesión $\{f_n\}$ converge a f uniformemente en $[0,1]$. □

3.3. Teorema de Arzela-Ascoli

En esta sección estableceremos condiciones fácilmente verificables en algunos casos, que implican que una collección de funciones continuas es un conjunto compacto en la métrica uniforme.

Definición 3.14. Diremos que un espacio métrico es **separable** si tiene un subconjunto denso numerable.

Ejercicio. Sea (X, ρ) un espacio métrico. Pruebe que X es separable si y sólo si tiene una base numerable.

Lema 3.15. *Todo espacio métrico X compacto es separable.*

Demostración. Recordemos que como X es compacto, es totalmente acotado. Luego, para cada $n \in \mathbb{N}$ existen m_n puntos $x_1, \ldots, x_{m_n}$ tales que la unión de las bolas abiertas centradas en ellos de radio $1/n$ es todo el espacio X. Si definimos $A_n := \{x_1, x_2, \ldots, x_{m_n}$, entonces

$$D = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_n$$

es denso y numerable en X. □

Ejercicio. Considere una familia $\mathcal{F}$ de funciones equicontinuas definidas en un compacto X. Demuestre que $\mathcal{F}$ es una colección uniformemente equicontinua.

Lema 3.16. *Sean (X, ρ) e (Y, σ) espacios métricos con Y completo. Sea $\{f_n\}$ una sucesión en $C(X, Y)$. Supongamos que $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ es equicontinua y además que existe un subconjunto $D \subset X$ denso tal que $f_n(x)$ converge si $x \in D$. Luego existe una función $f \in C(X, Y)$ tal que $f_n(x)$ converge puntualmente en X a f, y la convergencia es uniforme en compactos.*

Demostración. Deberemos partir probando la existencia de la función f, para ello probaremos que dado $x \in X$ la sucesión $f_n(x)$ es de Cauchy en Y. Sea $\varepsilon > 0$ y $x \in X$, entonces existe $\delta > 0$ tal que

$$\sup_n \sigma(f_n(x), f_n(y)) < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{si} \quad \rho(x,y) < \delta \tag{3.4}$$

Como D es denso en X, existe $y \in D$ tal que $\rho(x,y) < \delta$ y

$$\sigma(f_n(x), f_m(x)) \leq 2 \sup_n \sigma(f_n(x), f_n(y)) + \sigma(f_n(y), f_m(y)) < \varepsilon$$

para n, m suficientemente grandes, ya que $f_n(y)$ converge. Luego, para cada $x \in X$ la sucesión $f_n(x)$ es de Cauchy y, por la completud del espacio Y, podemos definir

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x).$$

Ahora, si queremos probar la continuidad de f en $x \in X$ notemos que para cada $y \in B(x, \delta)$ existe un natural N tal que

$$\sigma(f(x), f_n(x)) < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{y} \quad \sigma(f(y), f_n(y)) < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \text{para todo } n \geq N.$$

Luego, de la ecuación (3.4), tenemos que

$$\sigma(f(x), f(y)) \leq \sigma(f(x), f_n(x)) + \sup_n \sigma(f_n(x), f_n(y)) + \sigma(f_n(y), f(y)) < \varepsilon$$

si $\rho(x,y) < \delta$. De donde se concluye la continuidad de f en X.

Finalmente, nos falta demostrar que la convergencia es uniforme en compactos. Sea K un compacto en X. Luego para cada $\delta > 0$ existen $x_1, x_2, \ldots, x_r \in K$ tales que

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{r} B(x_i, \delta/2) \subset \bigcup_{i=1}^{r} \overline{B(x_i, \delta/2)}.$$

Definamos $K_i := K \cap \overline{B(x_i, \delta/2)}$. Ahora sea $\varepsilon > 0$. Por el ejercicio anterior sabemos que la colección $\mathcal{F}$ es uniformemente equicontinua en K. Luego podemos elegir $\delta > 0$ de modo que $\sup_n \sigma(f_n(x), f_n(x_i)) < \varepsilon/3$ cuando $x \in K_i$. Además supondremos, ocupando la continuidad de f, que $\sigma(f(x), f(x_i)) < \varepsilon/3$ si $x \in K_i$ Por lo tanto, de la convergencia $f_n(x_i) \to f(x_i)$, vemos que para cada $x \in K_i$ existe un natural N_i (que depende sólo de i) tal que

$$\sigma(f_n(x), f(x)) \leq \sup_n \sigma(f_n(x), f_n(x_i)) + \sigma(f_n(x_i), f(x_i)) + \sigma(f(x_i), f(x)) < \varepsilon,$$

para cada $n \geq N_i$. Como $K = \bigcup_{i=1}^{r} K_i$ tendremos que para n suficientemente grande

$$\sup_{x \in K} \sigma(f_n(x), f(x)) = \max_{1 \leq i \leq r} \sup_{x \in K_i} \sigma(f_n(x), f(x)) < \varepsilon.$$

de donde se concluye la convergencia uniforme en compactos. □

Lema 3.17. *Sea D un conjunto numerable e (Y, σ) un espacio métrico. Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones de D en Y, tales que $\overline{\{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\}}$ es compacto en Y, para todo $x \in D$. Luego existe una subsucesión f_{n_k} tal que para cada $x \in D$, f_{n_k} converge.*

Demostración. Sea $D = \{x_k \,:\, k \in \mathbb{N}\}$. Como $\overline{\{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\}}$ es compacto, para cada $x \in D$, luego $f_n(x_1)$ tiene una subsucesión convergente $f_{n_{1,k}}(x_1)$. Para $f_{n_{1,k}}(x_2)$ existe una subsucesión convergente $f_{n_{2,k}}(x_2)$. Inductivamente $f_{n_{j-1,k}}(x_j)$ tiene una subsucesión convergente $f_{n_{j,k}}(x_j)$. Luego, para cada $x \in D$ la subsucesión $f_{n_{k,k}}$ converge. □

Teorema 3.18 (Arzela-Ascoli). *Sean (X, ρ) e (Y, σ) espacios métricos, con X separable e Y completo. Sea $\mathcal{F} \subset C(X, Y)$ una familia equicontinua en X. Además suponemos que para cada $x \in X$, la clausura de $\{f(x) : f \in \mathcal{F}\}$ es compacta en Y. Luego, toda sucesión $\{f_n\}$ en $\mathcal{F}$ tiene una subsucesión $\{f_{n_k}\}$ que converge puntualmente a una función $f \in C(X, Y)$ y la convergencia es uniforme en cada compacto de X.*

Demostración. Sea $\{f_n\}$ una sucesión en $\mathcal{F}$ y $D \subset X$ denso y numerable. Por el Lema 3.17 existe una subsucesión f_{n_k} que converge para cada $x \in D$. Luego, del Lema 3.16 tendremos que la sucesión f_{n_k} converge puntualmente en X a una función continua f, y uniformemente en compactos de X. □

Corolario 3.19. *Sean (X, ρ) e (Y, σ) espacios métricos, con X compacto e Y completo. Sea $\mathcal{F} \subset C(X, Y)$. Luego $\overline{\mathcal{F}}$ es compacto en $C(X, Y)$ si y sólo si se cumplen las siguientes condiciones:*

(i) $\mathcal{F}$ es equicontinua en X, y

(ii) para todo $x \in X$, $\overline{\{f(x) : f \in \mathcal{F}\}}$ es compacto en Y.

Demostración. Comenzaremos suponiendo que (i) y (ii) son ciertos. Para ello será necesario probar que $\overline{\mathcal{F}}$ es equicontinua y que $\overline{\{f(x) : f \in \mathcal{F}\}} = \overline{\{f(x) : f \in \overline{\mathcal{F}}\}}$, pues, de ser así, por el Teorema de Arzela-Ascoli tendremos inmediatamente que $\overline{\mathcal{F}}$ es compacto, considerando que X es compacto y separable. En pocas palabras, la compacidad de $\overline{\mathcal{F}}$ se debe a que si $\{f_n\}$ es una sucesión en $\overline{\mathcal{F}}$, luego existe una subsucesión $\{f_{n_k}\}$ que converge uniformemente en compactos de X a una función $f \in C(X, Y)$. Como X es compacto, entonces $f_{n_k} \to f$ uniformemente en X y tendremos que $f \in \overline{\mathcal{F}}$.
Sea $\varepsilon > 0$, entonces existe $\delta > 0$ tal que

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} \sigma(f(x), f(y)) < \varepsilon \quad \text{cuando} \quad \rho(x, y) < \delta$$

Sea $g \in \overline{\mathcal{F}}$, entonces existe una sucesión $\{g_n\}$ en $\mathcal{F}$ que converge uniformemente a g. Luego,

$$\sigma(g(x), g(y)) \leq 2 \sup_{x \in X} \sigma(g(x), g_n(x)) + \sup_{f \in \mathcal{F}} \sigma(f(x), f(y))$$

y haciendo tender n al infinito tendremos que

$$\sigma(g(x), g(y)) \leq \sup_{f \in \mathcal{F}} \sigma(f(x), f(y)) < \varepsilon \quad \text{cuando} \quad \rho(x, y) < \delta$$

de donde se concluye que $\overline{\mathcal{F}}$ es una familia equicontinua de funciones, si $\mathcal{F}$ lo es.
Ahora bien, es claro que $\overline{\{f(x) : f \in \mathcal{F}\}} \subset \overline{\{f(x) : f \in \overline{\mathcal{F}}\}}$. Sea $g \in \overline{\mathcal{F}}$ y $\{g_n\} \subset \mathcal{F}$ que converge uniformemente a g. Luego, para cada $x \in X$ tenemos que

$$\{g_n(x)\} \subset \overline{\{f(x) : f \in \mathcal{F}\}} \quad \Longrightarrow \quad g(x) \in \overline{\{f(x) : f \in \mathcal{F}\}}$$

de donde se obtiene la igualdad entre $\overline{\{f(x) : f \in \mathcal{F}\}}$ y $\overline{\{f(x) : f \in \overline{\mathcal{F}}\}}$. Por lo tanto, $\overline{\mathcal{F}}$ es un subconjunto compacto de $C(X,Y)$.

Recíprocamente, para cada $x \in X$ definamos $T_x : \overline{\mathcal{F}} \to Y$ dada por

$$T_x(f) = f(x)$$

podemos notar que para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ (que en este caso $\delta = \varepsilon$) tal que

$$\sigma(T_x(f), T_x(g)) < \varepsilon \quad \text{cuando} \quad \sup_{x\in X} \sigma(f(x), g(x)) < \delta$$

luego, para cada $x \in X$ la aplicación T_x es continua. Entonces,

$$T_x(\overline{\mathcal{F}}) = \{f(x) : f \in \overline{\mathcal{F}}\}$$

es compacto en Y, dada la continuidad de T_x. En particular tendremos que $\overline{\{f(x) : f \in \mathcal{F}\}}$ es compacto en Y, y tenemos probado (ii).
Finalmente, sea $\varepsilon > 0$, luego existen $f_1, f_2, \ldots, f_n \in \overline{\mathcal{F}}$ tales que

$$\overline{\mathcal{F}} \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(f_i, \tfrac{\varepsilon}{3})$$

y definamos los conjuntos compactos de $C(X,Y)$ dados por $K_i = \overline{\mathcal{F}} \cap \overline{B(f_i, \frac{\varepsilon}{3})}$. Claramente la unión de los K_i, $1 \le i \le n$, es todo $\overline{\mathcal{F}}$. Sea $x \in X$, luego para cada $f \in K_i$, $1 \le i \le n$, se tiene que

$$\sigma(f(x), f(y)) \le 2 \sup_{x\in X} \sigma(f(x), f_i(x)) + \sigma(f_i(x), f_i(y)) < \varepsilon \quad \text{cuando} \quad \rho(x,y) < \delta_i$$

dada la continuidad de las f_i, $1 \le i \le n$. Entonces, para obtener la equicontinuidad de la familia $\mathcal{F}$ notemos que

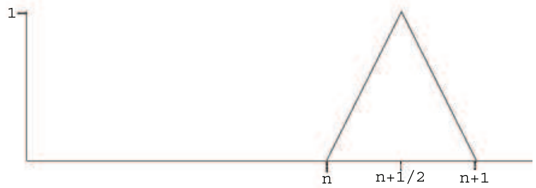
$$\sup_{f\in\mathcal{F}} \sigma(f(x), f(y)) \le \sup_{f\in\overline{\mathcal{F}}} \sigma(f(x), f(y)) = \max_{1\le i\le n} \sup_{f\in K_i} \sigma(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

cuando $\rho(x,y) < \delta$, con $\delta = \min_{1\le i\le n} \delta_i$. Por lo tanto, la familia $\mathcal{F}$ es equicontinua y concluimos la prueba de (i). $\square$

Ejemplo. El siguiente ejemplo muestra que la compacidad del espacio métrico X no es superflua en el corolario anterior. Sea $X = Y = \mathbb{R}$ con la métrica usual, y sea f_n una sucesión de funciones continuas dadas por

$$f_n(x) = \begin{cases} 2(x-n) & \text{si } x \in [n, n+\frac{1}{2}] \\ -2(x-(n+1)) & \text{si } x \in [n+\frac{1}{2}, n+1] \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Claramente la familia $\mathcal{F} = \{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una familia equicontinua tal que para cada $x \in \mathbb{R}$ el conjunto $\{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\}$ tiene clausura compacta. En general, para cada $x \in \mathbb{R}$ estos conjuntos constan de a lo más dos puntos, y por lo tanto su clausura es el mismo conjunto.



Podemos notar que para cada $x \in \mathbb{R}$ la sucesión $f_n(x) \to 0$, cuando $n \to \infty$, que es una función continua. Pero la convergencia con es uniforme, ya que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| = 1$$

En cambio si nos restringiéramos a conjuntos compactos de $\mathbb{R}$, por el Teorema de Arzela-Ascoli, la sucesión f_n convergería uniformemente a 0.

Finalizamos esta sección con el siguiente resultado existencial para ecuaciones diferenciales ordinarias.

Teorema 3.20. *(**Peano**). Sean $t_0, y_0 \in \mathbb{R}$ y a, b reales positivos. Considere una función real $f(t, y)$ continua y acotada en*

$$R := \{(t, x) \, : \, t_0 \leq t \leq t_0 + a, |y - y_0| \leq b\}.$$

Sea M una cota para $|f(t, y)|$ en R y $\alpha = \min\{a, b/M\}$. Luego la ecuación,

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

tiene una solución $y = y(t)$ en $[t_0, t_0, \alpha]$.

Demostración. Sea δ tal que $0 < \delta < b/M$. Ahora, consideremos la función definida en $[t_0 - \delta, t_0]$,

$$y_0(t) := y_0 + (t - t_0)f(t_0, y_0).$$

Notemos que ella satisface $y_0(t_0) = y_0$, $y_0'(t) = f(t_0, y_0)$, $|y_0'(t)| \leq M$ y $|y_0(t) - y_0| \leq b$. Recursivamente, definimos para cada ϵ tal que $0 < \epsilon < \delta$ la función $y_\epsilon(t)$ definida en $[t_0 - \delta, t_0 + \alpha]$ por $y_\epsilon(t) = y_0(t)$ en $[t_0 - \delta, t_0]$ y

$$y_\varepsilon(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y_\varepsilon(s - \varepsilon))ds,$$

para t en $[t_0, t_0 + \alpha]$. Notemos que $|y_\epsilon(t) - y_0| \leq b$ para $t \in [t_0, t_0 + \alpha]$. Ademas, para cada h, t tales que $[t, t + h] \subset [t_0, t_0 + \alpha]$ tenemos que

$$|y_\epsilon(t + h) - y_\epsilon(t)| \leq hM.$$

Por lo tanto, la colección de funciones $\{y_\epsilon(t) : 0 < \epsilon < \delta\}$ es una colección equicontinua definida en un compacto. Por el teorema de Arzela-Ascoli, la sucesión $y_n := y_{1/n}$ tiene una subsucesión y_{n_k} que converge uniformemente a alguna función y_∞ en $C[t_0, t_0 + \alpha]$. Por la uniformidad de la convergencia vemos fácilmente que la función y_∞ soluciona la ecuación.

$\square$