ANALISIS II

Prof. Alejandro Ramírez

Facultad de Matemáticas, PUC

7 de Septiembre, 2007

Solución de la Interrogación 1

1. **[1.00]pt**. Sea $\varepsilon > 0$. Por el teorema de Lusin, y el hecho que $\mathbf{R}$ es un espacio localmente compacto, sabemos que existe una función continua de soporte compacto g, que difiere de f en un conjunto de medida de Lebesgue menor que ε. Luego, por la desigualdad triangular

$$\int |f(x+\epsilon) - f(x)|dx \leq 2\int |f(x) - g(x)|dx + \int |g(x+\epsilon) - g(x)|dx.$$

La segunda integral del lado derecho tiende a 0 cuando ϵ tiende a 0 por la continuidad uniforme de g. Por otra parte, la primera integral está acotada por $2\int 1_{f\neq g}|f|dx$. La integrabilidad uniforme de la función $|f|$ nos permite concluír que este término tiende a 0 cuando ε tiende a 0.

2. **[1.10]pt**. Sea $A = \{x_n : n \geq 1\}$ un conjunto numerable. Para cada $\delta > 0$, y $\epsilon > 0$, la medida externa H_δ de A asociada a la función h está acotada por

$$\sum_{n=1}^{\infty} h(B(x_n; \epsilon_n)),$$

donde ϵ_n es tal que $h(2\epsilon_n) \leq \epsilon^n$ y $\epsilon_n < \delta$. Luego, $H_\delta(A) \leq \epsilon/(1-\epsilon)$. Como ϵ es arbitrario, esto prueba que $H_\delta(A) = 0$. Tomando el límite cuando $\delta \to 0$, vemos que la medida de Hausdorff asociada a la función h, es cero. Tomando $h(x) = x^\alpha$, vemos que la dimensión de Hausdorff del conjunto es cero.

3. **[1.30]pt**. Por el teorema de Ulam, sabemos que toda medida definida sobre los Borelianos en un espacio polaco es regular. Luego, si B es un Boreliano, para todo $\epsilon > 0$, existe un abierto O y un compacto K tales que $K \subset B \subset O$ y $\mu_1(O-K) \leq \epsilon$ y $\mu_2(O-K) \leq \epsilon$. Por el lema de Uryshon, sabemos que existe una función f uniformemente continua (porque $\rho(K, O^c) > 0$) que vale 1 en K, cero en O^c y tal que $0 \leq f \leq 1$. Como $\int f d\mu_1 = \int f d\mu_2$, concluímos que

$$|\mu_1(B) - \mu_2(B)| \leq \epsilon.$$

Como ϵ es arbitrario, vemos que $\mu_1(B) = \mu_2(B)$.

4. **[1.30]pt**.

5. Supongamos primero que $g \in C[0,1]$. Para $M > 0$ tenemos que,

$$\int_0^1 f_n g dx = \int_{|f_n|\leq M} f_n g dx + \int_{|f_n|>M} f_n g dx.$$

Como en la primera integral tenemos que $|f_n g| \leq M$, cuando $n \to \infty$, el primer término tiende a 0 por el teorema de la convergencia acotada. Para el segundo ocupamos la desigualdad de Hölder, obteniendo,

$$\int_{|f_n|>M} f_n g dx \leq ||g||_\infty ||f_n||_p \left(\int_{|f_n|>M} dm\right)^{1/q}$$

$$\leq ||g||_\infty ||f_n||_p ||f_n||_p^{1/q} \frac{1}{M^{p/q}} \leq \frac{||g||_\infty}{M^{p/q}}.$$

Luego, $\lim_{n\to\infty} \int f_n g dm = 0$ si $g \in C[0,1]$. Para $g \in L^q([0,1])$, notemos que para todo $\epsilon > 0$ existe una función continua g' tal que $||g - g'||_q \leq \epsilon$. Luego, por la desigualdad de Hölder,

$$\left|\int f_n g dm - \int f_n g' dm\right| \leq \epsilon.$$

Esto permite terminar la demostración.

6. **[1.30]pt**. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $h \geq 0$ y que $g \geq 0$. Sea $n \geq 1$. Consideremos las funciones $h_n(x) = h(x)1_{hn\geq 1}(x)$, $g_n(x) = g(x)1_{gn\geq 1}(x)$ y $f_n(x, y) = h_n(x)g_n(x)$. Notemos que el conjunto $A_n \times B_n$, donde $A_n = \{gn \geq 1\}$ y $B_n = \{hn \geq 1\}$, es un conjunto de medida finita. Por otra parte, si $\mathcal{M}_\backslash$ y μ_n son las restricciones de la σ-álgebra $\mathcal{M}$ y de la medida μ_n a A_n, y similarmente $\mathcal{N}_\backslash$ y ν_n, notemos que los espacios $(X, \mathcal{M}_\backslash, \mu_\backslash)$ y $(Y, \mathcal{N}_\backslash, \nu_\backslash)$ son completos y finitos. Luego, podemos aplicar el teorema de Tonelli para conlcuír que

$$\int_{A_n\times B_n} fd(\mu \times \nu) = \int_{A_n} hd\mu \int_{B_n} gd\nu.$$

Aplicando el teorema de la convergencia monótona al tomar el límite cuando $n \to \infty$, terminamos la prueba.

TIEMPO: 2 horas y 30 minutos.

La prueba es SIN apuntes. Se admiten consultas sólo durante los primeros 10 minutos.