ANALISIS II

Prof. Alejandro Ramírez

Facultad de Matemáticas, PUC

7 de Septiembre, 2007

Interrogación 1

1. **[1.00]pt**. Sea $f \in L^1(\mathbf{R})$. Demuestre que
$$\lim_{\epsilon \to 0} \int |f(x+\epsilon) - f(x)| dx = 0.$$
2. **[1.10]pt**. Considere un subconjunto numerable A de los reales. Sea $h : [0,\infty) \to [0,\infty)$ una función continua, estríctamente creciente, y tal que $h(0) = 0$. Calcule la dimensión de Hausdorff de A y su medida de Hausdorff respecto a la función h.
3. **[1.30]pt**. Sea (X, ρ) un espacio métrico completo y separable (polaco). Demuestre que el conjunto $C_u(X)$ de funciones reales uniformemente continuas y acotadas en X, separa las medidas. Es decir, si μ_1 y μ_2 son dos medidas definidas en los borelianos tales que
$$\int f d\mu_1 = \int f d\mu_2,$$
para toda $f \in C_u(X)$, entonces $\mu_1 = \mu_2$.
Sugerencia: recuerde que la distancia entre un compacto y un cerrado disjuntos es siempre estríctamente positiva
4. **[1.30]pt**. Sea $1 < p < \infty$ y f_n una sucesión en $L^p[0,1]$. Suponga que $\sup_n ||f_n||_p \le 1$ y que $\lim_{n\to\infty} f_n = 0$ c.s. Demuestre que para toda funcion $g \in L^q[0,1]$, donde q es el exponente conjugado de p, se tiene que $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n g dx = 0$.
Sugerencia: Separe la demostración en distintos casos.
5. **[1.30]pt**. Sean $(X, \mathcal{M}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{N}, \mu)$ espacios de medida completos. Sean $h \in L^1(\mu)$ y $g \in L^1(\nu)$ y $f(x,y) = h(x)g(y)$. Demuestre que $f \in L^1(\mu \times \nu)$ y que
$$\int f d(\mu \times \nu) = \int h d\mu \int g d\nu.$$
Comentario: no es necesario asumir que μ y ν son σ-finitas.

TIEMPO: 3 horas.

La prueba es SIN apuntes. Se admiten consultas sólo durante los primeros 10 minutos.