5.6. Teorema de extensión de Caratheodory

En el contexto de los números reales, la noción de medibilidad de un conjunto, corresponde al hecho que el ínfimo de la medida de los abiertos que lo contienen coincide con el supremo de la medida de los cerrados que contiene. Es decir, queremos que de alguna forma, la definición intuitiva de medida que la define como una aproximación por las medidas de abiertos, sea consistente en el sentido de que no dependa de si se usa el conjunto o su complemento.

Definición 5.52. Sea X un conjunto. Decimos que una función $\mu^\star : \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ es una **medida externa** si

(i) $\mu^\star(\varnothing) = 0$.

(ii) $\mu^\star(A) \leq \mu^\star(B)$ si $A \subset B$.

(iii) Si $A \subset \cup_{n=1}^{\infty} A_n$, luego
$$\mu^\star(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^\star(A_n).$$

Adenás, diremos que un conjunto $E \subset X$ es **$\mu^\star$-medible** si para todo $A \in \mathcal{P}(X)$,
$$\mu^\star(A) = \mu^\star(A \cap E) + \mu^\star(A \cap E^c).$$

A la colección de los conjuntos $\mu^\star$-medibles la denotaremos $\mathcal{M}_{\mu^\star}$.

Teorema 5.53. *La colección $\mathcal{M}_{\mu^\star}$ es una σ-álgebra. Además, la restricción $\overline{\mu}$ de $\mu^\star$ a esta colección, es una medida positiva y $\mathcal{M}_{\mu^*}$ es completa respecto a ella.*

Demostración. Primero probaremos que los conjuntos $\mu^\star$-medibles forman una σ-álgebra. Sea $E \in \mathcal{M}_{\mu^\star}$. Luego para cada $A \in \mathcal{P}(X)$
$$\mu^\star(A) = \mu^\star(A \cap E) + \mu^\star(A \cap E^c) = \mu^\star(A \cap E^c) + \mu^\star(A \cap (E^c)^c).$$

Por lo tanto $E^c \in \mathcal{M}_{\mu^\star}$. Sean $E_1, E_2 \in \mathcal{M}_{\mu^\star}$. Entonces es inmediato que
$$\mu^\star(A) \leq \mu^\star(A \cap (E_1 \cup E_2)) + \mu^\star(A \cap (E_1 \cup E_2)^c).$$

Por otro lado
$$\begin{aligned}\mu^\star(A) &= \mu^\star(A \cap E_1) + \mu^\star(A \cap E_1^c)\\ &= \mu^\star(A \cap E_1) + \mu^\star(A \cap E_1^c \cap E_2) + \mu^\star(A \cap (E_1 \cap E_2)^c).\end{aligned}$$

Pero $(A \cap E_1) \cup (A \cap E_1^c \cap E_2) = A \cap (E_1 \cup E_2)$. Luego
$$\mu^\star(A) \geq \mu^\star(A \cap (E_1 \cup E_2)) + \mu^\star(A \cap (E_1 \cap E_2)^c).$$

La sub-aditividad implica ahora que $E_1 \cap E_2 \in \mathcal{M}_{\mu^\star}$.

Sea $E = \coprod_{n=1}^{\infty} E_n$, $E_n \in \mathcal{M}_{\mu^\star}$. Definimos $G_n = \cup_{k=1}^{n} E_k$. Luego
$$\begin{aligned}\mu^\star(A) &= \mu^\star(A \cap G_n) + \mu^\star(A \cap G_n^c)\\ &\geq \mu^\star(A \cap G_n) + \mu^\star(A \cap E^c).\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}\mu^\star(A\cap G_n) &= \mu^\star(A\cap G_n\cap E_n)+\mu^\star(A\cap G_n\cap E_n^c)\\ &= \mu^\star(A\cap E_n)+\mu^\star(A\cap G_{n-1}).\end{aligned}$$

Por inducción en $n\geq 1$

$$\mu^\star(A\cap G_n)=\sum_{k=1}^{n}\mu^\star(A\cap E_k).$$

Luego

$$\lim_{n\to\infty}\mu^\star(A\cap G_n)=\sum_{k=1}^{\infty}\mu^\star(A\cap E_n)\geq\mu^\star(A\cap E).$$

Concluímos que $E\in\mathcal{M}_{\mu^\star}$.

Ahora probemos que $\overline{\mu}$ es una medida positiva sobre $\mathcal{M}_{\mu^\star}$. Probaremos que $\overline{\mu}$ es numerablemente aditiva y que existe $A\in\mathcal{M}_{\mu^\star}$ tal que $\overline{\mu}(A)<\infty$. Por definición de medida externa tenemos que $\overline{\mu}(\varnothing)=\mu^\star(\varnothing)=0$. Ahora, sean $E_1,E_2\in\mathcal{M}_{\mu^\star}$. Luego si E_1,E_2 son disjuntos

$$\begin{aligned}\overline{\mu}(E_1\cup E_2) &= \mu^\star((E_1\cup E_2)\cap E_2)+\mu^\star((E_1\cup E_2)\cap E_2^c)\\ &= \mu^\star(E_2)+\mu^\star(E_1)=\overline{\mu}(E_1)+\overline{\mu}(E_2).\end{aligned}$$

Además si $E=\coprod_{n=1}^{\infty}E_n$, $E_n\in\mathcal{M}_{\mu^\star}$ tenemos que

$$\overline{\mu}(E)=\mu^\star(E)\geq\mu^\star(\cup_{k=1}^{n}E_k)=\overline{\mu}(\amalg_{k=1}^{n}E_k)=\sum_{k=1}^{n}\overline{\mu}(E_k)=\sum_{k=1}^{n}\mu^\star(E_k).$$

Tomando el límite cuando n tiende a infinito vemos que

$$\mu^\star(E)=\overline{\mu}(E)\geq\sum_{k=1}^{\infty}\overline{\mu}(E_k)=\sum_{k=1}^{\infty}\mu^\star(E_k)\geq\mu^\star(E).$$

Luego $\overline{\mu}(E)=\sum_{k=1}^{\infty}(E_k)$. Por lo tanto, la restricción $\overline{\mu}$ de la medida externa $\mu^\star$ a los conjuntos medibles $\mathcal{M}_{\mu^\star}$, es una medida positiva. $\square$

Definición 5.54. Sea $\mathcal{C}$ una colección de subconjuntos de un conjunto X. Diremos que una función $\tau:\mathcal{C}\to[0,\infty]$ es una **premedida** si

(i) $\varnothing\in\mathcal{C}$,

(ii) $\tau(\varnothing)=0$.

Teorema 5.55. *Sea τ es una premedida definida en una colección $\mathcal{C}$ de subconjuntos de X. Para cada $E\subset X$, definimos*

$$\mu^\star(E):=\inf_{\substack{\{C_i\}\subset\mathcal{C}\\ E\subset\cup_i C_i}}\sum_{i=1}^{\infty}\tau(C_i).$$

Si no hay subcolección de $\mathcal{C}$ cuya unión contenga a E, entonces $\mu^\star(E)=\infty$. Luego $\mu^\star$ es una medida externa.

Demostración. Por definición de premedida, $\varnothing \in \mathcal{C}$ y $\tau(\varnothing) = 0$, luego $\mu^\star(\varnothing) = 0$. Por otra parte, si $A \subset B \subset X$, toda colección de conjuntos que cubre a B necesariamente cubre a A. Entonces $\mu^\star(A) \leq \mu^\star(B)$. Además, si $E \subset \cup_{n=1}^{\infty} E_n$ y $\varepsilon > 0$, para cada natural n existe una colección A_{nm} tal que

$$\sum_{m=1}^{\infty} \tau(A_{nm}) \leq \mu^\star(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}, \quad \varepsilon > 0.$$

Entonces

$$\mu^\star(E) \leq \sum_{n,m} \tau(A_{nm}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^\star(E_n) + \varepsilon.$$

La subaditividad es ahora una consecuencia del hecho que $\varepsilon > 0$ es arbitrario. □

Estamos ahora preparados para la siguiente definición.

Definición 5.56. (medida de Lebesgue). Consideremos el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales. Sean $\mathcal{T}$ los conjuntos abiertos en la topología Euclidiana de $\mathbb{R}$. Sea $A \in \mathcal{T}$ con $A = \amalg_{n=1}^{\infty} I_n$ y $\{I_n = (a_n, b_n)\}$ intervalos abiertos. Definimos la premedida τ en los abiertos por

$$\tau(A) := \sum_{n=1}^{\infty} |I_n|,$$

donde $|I_n| = b_n - a_n$ y $\tau(\phi) = 0$. Sea m^* la medida externa inducida por τ. Definimos la **medida de Lebesgue** $\bar{m}$ o símplemente m, como la restricción de m^* a los conjuntos m^*-medibles de $\mathbb{R}$ que llamaremos $\mathcal{M}_m$.

Finalizaremos esta sección con el teorema de extensión de Caratheodory. Necesitamos primero definir la siguiente noción.

Definición 5.57. Consideremos un álgebra $\mathcal{A}$ que contiene el vacío en un conjunto X. Decimos que una función $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ es una **medida positiva en el álgebra** $\mathcal{A}$ si

(i) $\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ para $A = \amalg_{n=1}^{\infty} A_n$, con $A, A_n \in \mathcal{A}$.

(ii) $\mu(\varnothing) = 0$.

Cuando existe una sucesión de conjuntos A_n en el álgebra $\mathcal{A}$ tales que $X = \cup A_n$ y $\mu(A_n) < \infty$, decimos que la medida μ en el álgebra $\mathcal{A}$ es **σ-finita**.

Lema 5.58. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra y μ una medida positiva definida en $\mathcal{A}$. Consideremos la medida externa μ^* inducida por μ. Luego todo $E \in \mathcal{A}$ es $\mu^\star$-medible.*

Demostración. Si $A \in \mathcal{P}(X)$ es tal que $\mu^\star(A) = \infty$ es trivial constatar que $\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)$. Supongamos entonces que $\mu^\star(A) < \infty$. Luego para cada $\varepsilon > 0$ existen $A_i \in \mathcal{A}$ tales que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \leq \mu^\star(A) + \varepsilon.$$

Pero por la aditividad de μ en $\mathcal{A}$, para cada natural i tenemos que

$$\mu(A_i) = \mu(A_i \cap E) + \mu(A_i \cap E^c).$$

Luego

$$\begin{aligned}\mu^\star(A) + \varepsilon \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) &\geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i \cap E) + \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i \cap E^c) \\ &\geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c).\end{aligned}$$

Como ε es arbitrario concluímos que E es μ^*-medible. □

Podemos ahora resumir lo que hemos demostrado en esta sección y en la anterior.

Teorema 5.59 (Extensión de Carathéodory). *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra que contiene el vacío y μ una medida en $\mathcal{A}$. Sea $\mu^\star$ la medida externa inducida por μ. Luego la restrición $\overline{\mu}$ de $\mu^\star$ a los conjuntos $\mu^\star$-medibles es una medida positiva que es una extensión de μ y los conjuntos medibles $\mathcal{M}_{\mu^*}$ forman una σ-álgebra completa respecto a $\bar{\mu}$. Además $\sigma(\mathcal{A}) \subset \mathcal{M}_{\mu^\star}$ y si μ es σ-finita luego $\overline{\mu}$ es fuértemente σ-finita y es la única extensión de μ en $\mathcal{A}$ a $\sigma(\mathcal{A})$.*

Ejercicio. Consideremos $X = \mathbb{R}$. Definimos la colección $\mathcal{A}$ como los conjuntes $A \subset X$ tales que

$$A = \coprod_{k=1}^{n} [a_k, b_k), \quad |a_k| < \infty, -\infty < b_k \leq \infty$$

o

$$A = (-\infty, b_0) \bigcup \left(\coprod_{k=1}^{n} [a_k, b_k) \right)$$

Pruebe que $\mathcal{A}$ es un álgebra. Además, si definimos μ sobre $\mathcal{A}$ tal que si $A \in \mathcal{A}$

$$\mu(A) = \sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k).$$

Por el teorema de extensión de Caratheodory esta medida en el álgebra μ tiene una extensión única a una medida definida en los conjuntos Lebesgue medibles que es una σ-álgebra que contiene a los borelianos. Esta es una construcción alternativa de la medida de Lebesgue cuyos detalles veremos más adelante.

Para algunas construcciones de medidas positivas, es más fácil comenzar por clases de conjuntos más sencillas que un álgebra.

Definición 5.60. Una colección $\mathcal{C}$ de conjuntos es una **semi-álgebra** si se satisfacen las siguientes propiedades.

(i) Para todo par de conjuntos $A, B \in \mathcal{C}$ tenemos que $A \cap B \in \mathcal{C}$.

(ii) Para todo conjunto $A \in \mathcal{C}$ existen conjuntos disjuntos $A_i \in \mathcal{C}$, $1 \leq i \leq n$ tales que $A^c = \amalg_{i=1}^n A_i$.

Lema 5.61. *Sea $\mathcal{C}$ una semi-álgebra. Luego la colección de conjuntos formados por el vacío y las uniones finitas disjuntas en $\mathcal{C}$, es un álgebra.*

Llamamos al álgebra del lema anterior, **el álgebra $\mathcal{A}(\mathcal{C})$ generada por la semi-álgebra** $\mathcal{C}$.

Demostración. Supongamos que $A \in \mathcal{A}(\mathcal{C})$. Si $A = \phi$, tenemos que probar que $X \in \mathcal{A}(\mathcal{C})$. Pero si tomamos cualquier conjunto $B \in \mathcal{C}$, por definición su complemento está en $\mathcal{A}(\mathcal{C})$. Por lo tanto $X \in \mathcal{A}(\mathcal{C})$. Ahora, si $A \neq \phi$, sabemos que se puede expresar como una unión finita de elementos disjuntos de $\mathcal{C}$

$$A = \amalg_i A_i.$$

Además $A_i^c = \amalg_j A_{i,j}$. Luego $A^c = \cap_i \amalg_j A_{i,j} = \amalg_j \cap_i A_{i,j} \in \mathcal{A}(\mathcal{C})$. Finalmente notemos que si $A, B \in \mathcal{A}(\mathcal{C})$, por un argumento análogo tenemos que la intersección $A \cap B$ está en el álgebra. □

Ejercicio. ¿Es posible quitar la condición " con el vacío" en el Lema anterior, para probar que $\mathcal{A}$ es un álgebra?

Proposición 5.62. *Sea $\mathcal{C}$ una semi-álgebra y $\mu : \mathcal{C} \to [0, \infty]$ una función tal que $\mu(\phi) = 0$ si $\phi \in \mathcal{C}$. Supongamos que las siguientes condiciones se satisfacen.*

(i) Si $C \in \mathcal{C}$ es un conjunto que se puede expresar como una unión disjunta finita $\amalg_{i=1}^n C_i$, con $C_i \in \mathcal{C}$, entonces

$$\mu(C) = \sum_{i=1}^n \mu(C_i).$$

(ii) Si $C \in \mathcal{C}$ se puede expresar como una unión numerable disjunta de miembros de $\mathcal{C}$, $C = \amalg_{i=1}^\infty C_i$, entonces

$$\mu(C) \leq \sum_{i=1}^\infty \mu(C_i).$$

Luego μ tiene una extensión única al álgebra $\mathcal{A}(\mathcal{C})$.

Demostración. Sea $A = \amalg_{i=1}^n A_i$ con $A_i \in \mathcal{C}$. Definamos

$$\mu(A) := \sum_{i=1}^n \mu(A_i) \tag{5.6}$$

Probemos que (5.6) está bien definida. Si $A = \amalg_{k=1}^m B_k$ con $B_k \in \mathcal{C}$, entonces como consecuencia de (i) tendremos que

$$\mu(A) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m \mu(A_i \cap B_k) = \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^n \mu(B_k \cap A_i) = \sum_{i=1}^n \mu(B_i) = \mu(A)$$

de donde concluimos que la definición de (5.6) es consistente. Ahora, consideremos conjuntos disjuntos A y B en el álgebra $\mathcal{A}$. Claramente $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ y por un argumento inductivo vemos que μ es finitamente aditiva. Además, si consideramos elementos C, D en $\mathcal{A}$ tales que $C \subset D$, entonces $D = C \cup (D \cap C^c)$ y $\mu(C) \leq \mu(D)$. Finalmente, supongamos que $A \in \mathcal{A}$ es una unión numerable y disjunta de conjuntos $A_k \in \mathcal{A}$. Por definición $A = \amalg_{j=1}^n C_j$ con $C_j \in \mathcal{C}$. Por lo tanto $C_j = \amalg_{k=1}^\infty (A_k \cap C_j)$. Además, para cada natural k, $A_k = \amalg_{i=1}^{p_k} C_{k,i}$ con $C_{k,i} \in \mathcal{C}$. Luego,

$$C_j = \amalg_{k=1}^\infty \amalg_{i=1}^{p_k} C_{k,i} \cap C_j.$$

Por la propiedad (ii) vemos que

$$\mu(C_j) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{p_k} \mu(C_{k,i} \cap C_j).$$

Luego

$$\mu(A) \leq \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{p_k} \sum_{j=1}^{n} \mu(C_{k,i} \cap C_j) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{p_k} \mu(C_{k,i} \cap A) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

Por otra parte

$$\sum_{k=1}^{N} \mu(A_k) = \mu(\cup_{k=1}^{N} A_k) \leq \mu(A).$$

□

Ejercicio. Pruebe la unicidad de μ definida en la Proposición anterior.

Ejemplo. La colección de intervalos semiabiertos de la forma $[a, b)$ o (a, ∞) en los reales es una semi-álgebra.

5.7. La integral de Lebesgue-Stieltjes

Veremos como se pueden aplicar los teoremas de extensión de la sección anterior para definir la integral de Lebesgue-Stieltjes, que generaliza la integral de Riemann-Stieltjes.

Definición 5.63. Decimos que una medida μ definida en los Borelianos de $\mathbf{R}$ es una medida de **Baire** si es finita para conjuntos acotados. A cada medida de Baire finita le asociamos la función F definida por

$$F(x) = \mu(-\infty, x],$$

llamada la **función de distribución cumulativa** de μ.

Lema 5.64. *Sea μ una medida de Baire finita. Luego su función de distribución cumulativa es real acotada, monótona creciente y continua por la derecha. Además,* $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ *y F es continua en x si y sólo si $\mu\{x\} = 0$.*

Demostración. Notemos que

$$\mu(a, b] = F(b) - F(a).$$

Luego, como $(a, b] = \cap_n (a, b + 1/n]$, tenemos que $\mu(a, b] = \lim_{n\to\infty} \mu(a, b+1/n]$ y luego $F(b) = \lim_{n\to\infty} F(b + 1/n)$ y por lo tanto F es continua por la derecha. Por otra parte,

$$\mu\{b\} = \lim_{n\to\infty} \mu(b - 1/n, b] = F(b) - \lim_{n\to\infty} F(b - 1/n).$$

Esto demuestra que F es continua en b si y sólo si la masa de $\{b\}$ es 0. Finalmente, como $\phi = \cap(-\infty, n]$, tenemos que $\lim_{n\to-\infty} F(n) = 0$. La monotonía de F implica que $\lim_{x\to\infty} F(x) = 0$. □

Podemos ahora considerar la contraparte del lema anterior.

Lema 5.65. *Sea F una función monótona creciente continua por la derecha. Luego existe una medida de Baire única μ tal que para todo par de reales $a \leq b$ se tiene*

$$\mu(a,b] = F(b) - F(a).$$

Además, si F es acotada y $F(-\infty) = 0$, entonces es la función de distribución cumulativa de una medida de Baire finita única.

DEMOSTRACIÓN. Primero probaremos que si $(a,b] \subset \cup_{i=1}^{\infty}(a_i, b_i]$, entonces

$$F(b) - F(a) \leq \sum_{i=1}^{\infty} F(b_i) - F(a_i). \tag{5.7}$$

Consideraremos el caso en el que $(a,b]$ es un intervalo acotado. Sea $\epsilon > 0$. Elegimos $\delta > 0$ de modo que $F(a+\delta) < F(a) + \epsilon$ y δ_i de modo que $F(b_i + \delta_i) < F(b_i) + \epsilon 2^{-i}$. Notemos que la colección de intervalos abiertos $(a_i, b_i + \delta_i), 1 \leq i < \infty$, forma un cubrimiento abierto del intervalo cerrado $[a+\delta, b]$. Por lo tanto, existe una cantidad finita de tales intervalos que lo cubre. Claramente tenemos

$$F(b) - F(a+\delta) \leq \sum_{j=1}^{n} F(b_{i_j} + \delta_{i_j}) - F(a_{i_j}) \leq \epsilon + \sum_{i=1}^{\infty} F(b_i) - F(a_i).$$

Tomando el límite cuando $\epsilon \to 0$ concluímos que la desigualdad (5.7) se satisface. El caso en el que $(a,b]$ no es acotado se deja al lector. Ahora, por la proposición 5.62, vemos que la función μ definida en la semi-álgebra de intervalos de la forma $(a,b]$ o (a,∞) por $\mu(a,b] = b - a$ tiene una extensión única al álgebra formada por las uniones finitas de intervalos de la forma anterior. Por el teorema de extensión de Carathéodory, esta medida tiene una extensión al algebra de conjuntos medibles que necesariamente contien a los Borelianos. Como X se puede expresar como la unión de intervalos $(n, n+1]$ cada uno de medida finita, la medida μ es σ-finita y la extensión es única. □

Definición 5.66. Integral de Lebesgue-Stieltjes. Sea F una función monótona creciente continua por la derecha. Para cada función no-negativa ϕ Borel medible definimos la integral de Lebesgue-Stieltjes de ϕ respecto a F por

$$\int \phi dF := \int \phi d\mu,$$

donde μ es la medida de Baire con función de distribución cumulativa F.

Concluímos con el siguiente lema.

Lema 5.67. *La medida de Baire asociada a la función $F(x) = x$ coincide con la medida de Lebesgue.*

5.8. Medidas de Hausdorff

Hemos visto que existen conjuntos "grandes" en **R**, como el conjunto ternario de Cantor, pero que tienen medida de Lebesgue 0. Queremos definir generalizaciones de la medida de Lebesgue, pero que asignen una medida no trivial a este tipo de conjuntos. Demostraremos primero varios resultados generales sobre medidas externas.