5.8. Medida y dimensión de Hausdorff

Hemos visto que existen conjuntos “grandes” en **R**, como el conjunto ternario de Cantor, pero que tienen medida de Lebesgue 0. Queremos definir generalizaciones de la medida de Lebesgue, pero que asignen una medida no trivial a este tipo de conjuntos. Esto nos permitirá definir la noción de dimensión de Hausdorff, introducida en 1918 por Felix Hausdorff. Demostraremos primero varios resultados generales sobre medidas externas.

Lema 5.68. *Sea I un conjunto arbitrario de índices. Supongamos que para cada $i \in I$, μ_i es una medida externa en un conjunto X. Luego*

$$\mu^\star(E) = \sup_{i\in I} \mu_i(E) \quad para\, E \subset X$$

también es una medida externa en X.

Demostración. Claramente $0 \leq \mu(E) \leq \infty$. Además,

$$\mu(\phi) = \sup \mu_i(\phi) = 0.$$

Si $E_1 \subset E_2$, tenemos que

$$\mu(E_1) = \sup \mu_i(E_1) \leq \sup \mu_i(E_2) = \mu(E_2).$$

Finalmente si $\{E_j\}$ es una sucesión de conjuntos en X

$$\mu_i(\cup_j E_j) \leq \sum_j \mu_i(E_j) \leq \sum_j \mu(E_j).$$

Tomando el supremo sobre el índice $i \in I$ obtenemos la σ-subaditividad. □

Ocuparemos el lema anterior para definir la noción de medida externa asociada a la medida de Hausdorff. Pero necesitaremos que los Borelianos estén contenidos en la clase de conjuntos medibles. Para establecer condiciones generales que implique esto introduciremos el siguiente concepto.

Definición 5.69. Medida externa de Carathéodory. Sea X un conjunto y ϕ una función real en X. Decimos que dos conjuntos de X son **separados por** ϕ si ϕ es existen reales $a > b$ tales que ϕ es mayor que a en un conjunto y menor que b en el otro. Consideremos una colección Γ de funciones reales en X. Decimos que una medida externa μ^* en X es una **medida externa de Carathéodory** con respecto a Γ, si cada vez que dos conjuntos A, B son separados por alguna función en Γ, entonces $\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B)$.

Decimos que una función real f es μ^*-medible si para cada a el conjunto $\{x : f(x) > a\}$ es μ^*-medible.

Lema 5.70. *Si μ^* es una medida externa de Carathéodory con respecto a Γ, entonces cada función en Γ es μ^*-medible.*

Demostración. Sea a real y $\phi \in \Gamma$. Probaremos que el conjunto

$$E := \{x : \phi(x) > a\},$$

satisface la desigualdad

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c),$$

para todo conjunto A. Sin pérdida de generalidad supondremos que $\mu^*(A) < \infty$. Definimos $B := E \cap A$, $C = E^c \cap A$ y

$$B_n = \{x : x \in B, \phi(x) > a + 1/n\}.$$

Además $R_n = B_n - B_{n-1}$. Luego $B = B_n \cup \{\cup_{k=n+1}^{\infty} R_k\}$. Pero en B_{n-2} tenemos $\phi > a+1/(n-2)$ y en R_n tenemos $\phi \leq a + 1/(n-1)$. Luego ϕ separa R_n de B_{n-2}. Por lo tanto también separa R_{2k} de $\cup_{j=1}^{k-1} R_{2j} \subset B_{2k-2}$ y

$$\mu^*(\cup_{j=1}^{k} R_{2j}) = \mu^*(R_{2k}) + \mu^*(\cup_{j=1}^{k-1} R_{2j}) = \sum_{j=1}^{k} \mu^*(R_{2j}).$$

Pero como $\cup_{j=1}^{k} R_{2j} \subset B \subset A$ tenemos que $\sum_{j=1}^{k} \mu^*(R_{2j}) \leq \mu^*(A)$ y luego $\sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(R_{2j})$ es convergente. Similarmente podemos ver que $\sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(R_{2j+1})$ es convergente y por lo tanto

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(R_j),$$

es convergente. Luego dado $\epsilon > 0$ existe un n tal que

$$\sum_{j=n}^{\infty} \mu^*(R_j) < \epsilon.$$

Por subaditividad,

$$\mu^*(B) \leq \mu^*(B_n) + \sum_{j=n+1}^{\infty} \mu^*(R_j) < \mu^*(B_n) + \epsilon.$$

O sea $\mu^*(B_n) > \mu^*(B) - \epsilon$. Pero como ϕ separa B_n de C tenemos que $\mu^*(A) \geq \mu^*(B_n \cup C) = \mu^*(B_n) + \mu^*(C)$. Luego,

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(B) + \mu^*(C) - \epsilon.$$

Como ϵ es arbitrario, $\mu^*(A) \geq \mu^*(B) + \mu^*(C)$. □

Corolario 5.71. *Sea (X, ρ) un espacio métrico y μ^* una medida externa en X con la propiedad $\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B)$ cuando $\rho(A, B) > 0$. Luego todo conjunto cerrado es μ^*-medible. En particular todo Boreliano es μ^*-medible.*

Demostración. Consideremos la colección Γ de funciones ϕ de la forma $\phi(x) = \rho(x, E)$. Mostraremos que μ^* es una medida externa de Carathéodory respecto a Γ. Basta probar que si A y B son conjuntos separados por alguna función en Γ, entonces $\rho(A; B) > 0$. En efecto, si $\rho(x, E)$ separa a A de B, entonces dadas dos sucesiones $x_n \in A$, $y_n \in B$, necesariamente $\liminf_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n) > 0$. Esto prueba que $\rho(A; B) > 0$. Por el lema anterior vemos que toda función en Γ es medible. En particular, si F es cerrado, el conjunto $F = \{x : \rho(F, x) \leq 0\}$ es medilbe. □

Teorema 5.72. *Consideremos un espacio métrico (X, ρ). Sea τ una premedida definida en una colección $\mathcal{C}$ se subconjuntos de X. Para cada $\delta > 0$ definimos*

$$\mu_\delta(E) := \inf_{\substack{E\subset \cup_i C_i \\ d(C_i)\leq \delta}} \sum_{i=1}^{\infty} \tau(C_i)$$

donde los $C_i \in \mathcal{C}$ y $d(C_i) = \sup_{x,y\in C_i} \rho(x, y)$. Luego

$$\mu^\star(E) := \lim_{\delta\to 0} \mu_\delta(E)$$

es una medida externa. Además, si $\mathcal{C}$ contiene los abiertos, entonces los Borelianos están en $\mathfrak{M}_{\mu^\star}$.

Demostración. Claramente, para cada $\delta > 0$, μ_δ es una medida externa. Ahora, para cada conjunto E

$$\lim_{\delta\to 0} \mu_\delta(E) = \sup_{\delta>0} \mu_\delta(E).$$

Luego, por el Lema 5.68 vemos que μ^* es una medida externa.

Para probar que los Borelianos son μ^*-medibles, por el lema anterior, basta probar que si A y B son conjuntos tales que $\rho(A, B) > 0$, entonces $\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B)$. Pero esto es una consecuencia del hecho que $\mathcal{C}$ contiene a los abiertos. □

Definición 5.73. Sea $\mathcal{A}$ la clase de funciones h definidas para $t \geq 0$, no-decrecientes, positivas y continuas por la derecha en $t \geq 0$, con valores en $[0, \infty]$. Si (Ω, ρ) es un espacio métrico y $h \in \mathcal{A}$, para G abierto definimos $h(G) := h(d(G))$, donde $d(G) = \sup_{x,y\in G} \rho(x, y)$, si $G \neq \varnothing$ y $h(G) = 0$ si $G = \varnothing$. Definimos la **medida de Hausdorff** correspondiente a la función h, como la restricción a los borelianos de la medida externa del Teorema 5.72, con $\tau = h$ y $\mathcal{C}$ la colección de conjuntos abiertos. Cuando $h = t^\alpha$ con $\alpha > 0$, llamamos a la medida de Hausdorff correspondiente, la **medida de Hausdorff en la dimensión** α y la denotamos por H^α y las aproximaciones correspondientes H^α_δ.

Notemos que si $F \subset \mathbf{R^n}$ y $F \subset \cup_i C_i$ con $d(C_i) \leq \delta$, luego para $t > s$ se tiene que

$$\sum_i |C_i|^t \leq \sum_i |C_i|^{t-s}|C_i|^s \leq \delta^{t-s} \sum_i |C_i|^s.$$

Luego $H^t_\delta(F) \leq \delta^{t-s} H^s_\delta(F)$. Esto nos motiva a efectuar la siguiente definición.

Definición 5.74. Dimensión de Hausdorff. Sea $F \subset \mathbb{R}^n$. Definimos la **dimensión de Hausdorff** de F como

$$\begin{aligned} \dim_H F &:= \inf\{\alpha > 0 \,:\, H^\alpha(F) = 0\} \\ &= \sup\{\alpha > 0 \,:\, H^\alpha(F) = \infty\} \end{aligned}$$

Ejercicio. Pruebe que las dos definiciones son equivalentes

Ejemplo. 1. Con probabilidad 1 una trayectoria browniana en $\mathbf{R^n}$, $n \geq 2$, tiene dimensión de Hausdorff 2.

2. Con probabilidad 1, el gráfico del movimiento browniano en dimensión $d = 1$ tiene dimensión de Hausdorff $3/2$.

3. El año 2005, Wendelin Werner probó que la frontera del movimiento Browniano en dimensión $d = 2$ tiene dimensión de Hausdorff $4/3$. La demostración de Werner reduce el problema a un cálculo de dimensión de Hausdorff de una versión de la llamada Ecuación de Loewner Estocástica (SLE). Este resultado es una de las razones por las que Werner obtuvo la medalla Fields el año 2006.

Para completar esta discusión, compararemos el concepto de dimensión de Hausdorff, con otra noción importante de dimensión.

Definición 5.75. Dimensión topológica. Sea $\mathcal{T}$ un espacio topológico. Llamamos **dimensión topológica**, al valor más pequeño de n, tal que todo cubrimiento abierto de $\mathcal{T}$ tiene un subcubrimiento tal que ningún punto del espacio está incluido en más de $n+1$ abiertos del subcubrimiento. La denotaremos por $\dim_T(\mathcal{T})$.

Teorema 5.76. *Sea X un espacio métrico separable no vacío. Leugo*

$$\dim_H(X) \geq \dim_T(X).$$

Además,

$$\inf_Y \dim_H(Y) = \dim_T(X),$$

donde el ínfimo se toma sobre todos los espacios topológicos Y que son homeomorfos a X.

Proseguiremos con el estudio de los conjuntos perfectos simétricos en los reales, calculando su dimensión de Hausdorff.

Definición 5.77. Conjunto Perfecto. Sea E un subconjunto de $\mathbb{R}$ y E' el conjunto de puntos límites de E. Si $E = E'$ diremos que E es perfecto.

Lema 5.78. *Todo subconjunto de los reales compacto y sin puntos aislados es perfecto.*

Observación. La afirmación conversa es falsa. En efecto $E = \mathbb{R}$ es perfecto, pero no es compacto.

Definición 5.79. (i) **Disección** $(2,\xi)$. Sea ξ un número real tal que $0 < \xi < 1/2$ y sea $[a,b]$ un intervalo cerrado de largo $l = b - a$. Consideremos la trisección del intervalo $[a,b]$ en tres intervalos sucesivos de largos $l\xi$, $l(1-2\xi)$ y $l\xi$. Llamamos disección de tipo $(2,\xi)$ de $[a,b]$ al conjunto E obtenido luego de unir el primer y el último intervalo cerrados.

(ii) **Conjunto perfecto simétrico**. Sea $\xi \in (0,1/2)$. Consideremos un intervalo cerrado $E_0 := [a,b]$. Sea E_1 la disección de tipo $(2,\xi)$ de $[a,b]$. Ahora llamemos E_2 a la unión de las disecciónes de tipo $(2,\xi)$ de los dos intervalos cerrados que conforman E_1 y en general E_{k+1} con $k \geq 3$ a la unión de las disecciónes de tipo $(2,\xi)$ de los 2^k intervalos cerrados que conforman E_k. Llamamos conjunto perfecto simétrico de tasa constante ξ al conjunto,

$$E := \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k.$$

Lema 5.80. *Un conjunto perfecto simétrico de tasa constante $\xi \in (0,1/2)$ tiene medida de Lebesgue nula.*

Lema 5.81. *Sean E_1 y E_2 dos conjuntos cerrados, acotados y disjuntos. Luego si H es la medida de Hausdorff asociada a una función creciente h, y $E = E_1 \cup E_2$, entonces*

$$H(E) = H(E_1) + H(E_2).$$

Demostración. Notemos que si ρ es menor que la distancia entre E_1 y E_2 entonces,

$$H_\rho(E) = H_\rho(E_1) + H_\rho(E_2).$$

Tomando el límite cuando ρ tiende a 0 obtenemos el resultado deseado. □

Definición 5.82. Conjuntos Homotéticos. Sea $\xi \geq 0$. Decimos que un conjunto real E' es homotético de un conjunto real E en la razón ξ si para algún $x \in R$,

$$E' = \xi E + x.$$

Lema 5.83. *Sea E un conjunto perfecto simétrico de tipo $(2,\xi)$. Sea H^α la medida de Hausdorff en la dimensión $\alpha \in (0,1]$. Luego, si $2\xi^\alpha \neq 1$ entonces $H^\alpha(E) = 0$ o bien $H^\alpha(E) = \infty$.*

Demostración. Sea E' un conjunto homotético a E en la razón ξ. Luego a todo recubrimiento $\{\Delta_i\}$ de E le corresponde un recubrimiento $\{\Delta_i'\}$ de E' con Δ_i' homotético a Δ_i en la razón ξ. Luego,

$$\sum_i |\Delta_i'|^\alpha = \xi^\alpha \sum_i |\Delta_i|^\alpha.$$

De aquí concluímos que,

$$H^\alpha(E') = \xi^\alpha H^\alpha(E).$$

Ahora, como E es un perfecto simétrico de tipo $(2, \xi)$ se le puede descomponer en 2 conjuntos E_1 y E_2 cada uno homotético a E en la razón ξ. Luego,

$$H^\alpha(E) = H^\alpha(E_1) + H^\alpha(E_2) = 2\xi^\alpha H^\alpha(E).$$

Lo que finaliza la prueba. □

Lema 5.84. *Sea E un conjunto perfecto simétrico de tipo $(2, \xi)$. Sea $\alpha \in (0, 1]$ tal que $2\xi^\alpha = 1$. Luego, para todo $\rho > 0$ se tiene que,*

$$H^\alpha(E) = H^\alpha_\rho(E).$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $\{\Delta_i\}$ un recubrimiento de E. Sean $\{\delta_{1,i}\}$ y $\{\delta_{2,i}\}$ recubrimientos de E donde hemos reemplazado cada Δ_i por el conjunto homotético correspondiente de E_1 y E_2 respectivamente. Luego,

$$|\Delta_i|^\alpha = 2(\xi|\Delta_i|)^\alpha = |\delta_{1,i}|^\alpha + |\delta_{2,i}|^\alpha.$$

Por lo tanto,

$$\sum_i |\Delta_i|^\alpha = \sum_i \sum_{j=1}^{2} |\delta_{j,i}|^\alpha.$$

Concluimos entonces que H^α_ρ no aumenta al reemplazar ρ por $\xi\rho$. Como esta cantidad es creciente en ρ vemos que es independiente de ρ lo que prueba el resultado. □

Corolario 5.85. *Sea E un conjunto perfecto simétrico de tipo $(2, \xi)$ y sea l el diámetro de E. Luego, si $\alpha \in (0, 1]$ es tal que $2\xi^\alpha = 1$ entonces $H^\alpha(E) \leq l^\alpha$.*

Proposición 5.86. *Sea E un conjunto perfecto simétrico de tipo $(2, \xi)$ y sea τ la distancia entre E_1 y E_2. Luego, si $\alpha \in (0, 1]$ es tal que $2\xi^\alpha = 1$ entonces $H^\alpha(E) \geq \tau^\alpha$.*

Teorema 5.87. *Sea E un conjunto perfecto simétrico de tipo ξ y sea $\alpha = \frac{\log 2}{\log \xi}$. Luego la medida de Hausdorff de E en la dimensión α es finita y no nula.*

Lema 5.88. *Sean α y β tales que $\alpha, \beta \in (0, 1]$ con $\alpha > \beta$. Sea E un conjunto cerrado y acotado. Luego,*

$$H^\alpha(E) = 0 \cdot H^\beta(E).$$

Por lo tanto $H_\alpha(E)$ es una función decreciente en α.

Corolario 5.89. *La dimensión de Hausdorff de un conjunto perfecto simétrico de tipo ξ es $\frac{\log 2}{\log \xi}$.*

Ejemplo. La dimensión de Hausdorff de el conjunto ternario de Cantor es $\frac{log 2}{\log 3} = 0{,}6309$.