5.9. Regularidad y el teorema de Lusin

Definición 5.90. Decimos que una medida externa $\mu^\star$ es **regular** si dado cualquier conjunto E de X y cualquier $\varepsilon > 0$, existe un conjunto $\mu^\star$-medible A tal que $E \subset A$ y

$$\mu^\star(A) \leq \mu^\star(E) + \varepsilon$$

Dada un álgebra $\mathcal{A}$, ocuparemos la notación $\mathcal{A}_\sigma$ para denotar aquellos conjuntos que son uniones numerables de conjuntos en $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}_{\sigma\delta}$ para denotar aquellos conjuntos que son intersecciones numerables de conjuntos en $\mathcal{A}_\sigma$.

Proposición 5.91. *Sea μ una medida definida en un álgebra $\mathcal{A}$, $\mu^\star$ la medida externa inducida y E un cualquier subconjunto. Luego para cada $\varepsilon > 0$ existe un $A \in \mathcal{A}_\sigma$ tal que $E \subset A$ y*

$$\mu^\star(A) \leq \mu^\star(E) + \varepsilon$$

En particular, μ^* es regular. Además, existe un $B \in \mathcal{A}_{\sigma\delta}$ tal que $\mu^\star(E) = \mu^\star(B)$.

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Por definición sabemos que existen $A_n \in \mathcal{A}$ tales que $E \cup_{n=1}^\infty A_n$ y

$$\sum_{n=1}^\infty \mu(A_n) \leq \mu^\star(E) + \varepsilon.$$

Definimos $A = \cup_n A_n$. Luego $\mu^*(A) \leq \sum \mu^*(A_n) = \sum \mu^*(A_n)$. Por otra parte, notemos que para cada natural n existe un $B_n \in \mathcal{A}_\sigma$ tal que $E \subset B_n$ y

$$\mu^\star(B_n) \leq \mu^\star(E) + \frac{1}{n}$$

Luego, si definimos $B = \cap_{n=1}^\infty B_n$, entonces

$$\mu^\star(B) \leq \mu^\star(B_n) \leq \mu^\star(E) + \frac{1}{n}.$$

Tomanod el límite cuando $n \to \infty$ vemos que $\mu^\star(B) \leq \mu^\star(E)$, con lo que concluimos la prueba. □

Proposición 5.92. *Sea μ una medida definida en un álgebra $\mathcal{A}$, que es σ-finita en $\mathcal{A}$, y $\mu^\star$ es la medida externa inducida. Luego un conjunto E es $\mu^\star$-medible si y sólo si E se puede expresar como $A - B$, donde $A \in \mathcal{A}_{\sigma\delta}$ y B es tal que $\mu^\star(B) = 0$. Además si $\mu^\star(B) = 0$ entonces existe un $C \in \mathcal{A}_{\sigma\delta}$, $B \subset C$, y $\mu^\star(C) = 0$.*

Demostración. Si $E = A - B$, con $A \in \mathcal{A}_{\sigma\delta}$ y $\mu^\star(B) = 0$. Notemos que como la medida inducida $\bar{\mu}$ por μ en la σ-álgebra de conjuntos medibles es completa, B es medible. Además claramente todo conjunto en $\mathcal{A}_{\sigma\delta}$ tiene que estar contenido en $\sigma(\mathcal{A})$ y por lo tanto es medible. Entonces $E = A - B = A \cap B^c$ es medible.

Ahora supongamos que E es medible. Como μ es σ-finita sabemos que $X = \amalg_{i=1}^\infty X_i$, con $X_i \in \mathcal{A}$ y $\mu^\star(X_i) < \infty$. Sea $E_i = X_i \cap E$. Luego para cada i y todo $n \in \mathbb{N}$ existe $A_{in} \in \mathcal{A}_\sigma$ tal que $E_i \subset A_{in}$ y

$$\mu^\star(A_{in}) \leq \mu^\star(E_i) + \frac{1}{2^i n}$$

Si $A_n = \cup_{i=1}^{\infty} A_{in}$, luego $A_n \in \mathcal{A}_\sigma$ y $A_n - E \subset \cup_{i=1}^{\infty}(A_{in} - E_i)$. Además

$$\mu^\star(A_n - E) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^\star(A_{in} - E_i) \leq \frac{1}{n}.$$

En efecto, como A_{in} son medibles

$$\mu^\star(A_{in}) = \mu^\star(A_{in} - E_i) + \mu^\star(A_{in} \cap E_i) = \mu^\star(A_{in} - E_i) + \mu^\star(E_i).$$

Luego, si $A = \cap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}_{\sigma\delta}$ entonces

$$\mu^\star(A - E) \leq \mu^\star(A_n - E) \leq \frac{1}{n}.$$

Tomando el límite cuando $n \to \infty$ vemos que basta definir $B = A - E$. □

Finalizamos esta sección definiendo el concepto asociado de regularidad de una medida.

Definición 5.93. Sea (X, ρ) un espacio métrico. Decimos que X es **localmente compacto en** $x \in X$ si existe un abierto que contiene a x cuya clausura es compacta. Si (X, ρ) es localmente compacto en todo punto, decimos que es **localmente compacto**.

Definición 5.94. Consideremos un espacio métrico (X, ρ). Sea $\mathcal{M}$ una σ-álgebra que contiene los Borelianos y μ una medida positiva definida en $(X; \mathcal{M})$. Decimos que $E \in \mathcal{M}$ es **regular externo**, si

$$\mu(E) = \inf\{\mu(V) : E \subset V, V \quad \text{abierto}\}.$$

En cambio si

$$\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \subset E, K \quad \text{compacto}\},$$

decimos que E es **regular interno**. Si un E es regular externo e interno, decimos que es **regular**. Si todo conjunto en $\mathcal{M}$ es regular, decimos que la medida μ es **regular**.

Lema 5.95. *Toda medida de Baire definida en un espacio compacto es regular.*

Lema 5.96. *Sea (X, ρ) un espacio métrico. Toda medida μ definida sobre los Borelianos es regular externa.*

Definición 5.97. Sea (X, ρ) un espacio métrico. Decimos que una función real f definida en X tiene **soporte compacto** si la clausura del conjunto

$$\{x \in X : f(x) \neq 0\},$$

es compacta. Al conjunto de funciones reales de soporte compacto en X lo llamaremos $C_c(X)$.

Notemos que la medida de Lebesgue es regular. Esta propiedad nos permite demostrar el teorema de Lusin en un intervalo compacto de los reales para la medida de Lebesgue.

Lema 5.98. *Consideremos una función Lebesgue medible f definida en $[a,b]$. Luego, para todo $\epsilon > 0$ existe una función continua g tal que*

$$m(x \in [a,b] : f(x) \neq g(x)) < \epsilon.$$

DEMOSTRACIÓN. Primero mostraremos que toda función simple se puede aproximar por una función continua. Sea

$$s(x) := \sum_{k=1}^{n} a_k 1_{A_k}(x),$$

donde los A_k son Borelianos. Sea $\epsilon > 0$. Por la regularidad de la medida μ, para cada k existe un compacto K_k y un abierto O_k tales que $K_k \subset A_k \subset O_k$ y $\mu(O_k - K_k) \leq \epsilon 2^{-k}$. Por el lema de Uryshon, existen funciones continuas h_k tales que $h_k(x) = 1$ si $x \in K_k$, $h_k(x) = 0$ si $x \notin O_k$ y $0 \leq h_k \leq 1$. Por lo tanto si definimos $h = \sum_{k=1}^{n} h_k$, vemos que h y s difieren en un conjunto $E = \cup O_k - K_k$ de medida menor o igual a ϵ y h es continua.

Ahora, sabemos que existe una sucesión de funciones simples $\{s_n\}$ medibles que converge puntualmente a f. Por el argumento anterior, para cada n existe una función continua h_n que difiere de s_n en un conjunto E_n de medida menor o igual a $1/n^2$. Luego, la medida del conjunto $E = \cap_{k=1}^{\infty} \cup_{n=k}^{\infty} E_n$ es cero. Por lo tanto la sucesión h_n converge a f c.s. Pero por el teorema de Egoroff, para cada $\epsilon > 0$ existe un conjunto E_ϵ medible de medida menor o igual a ϵ tal que la convergencia de h_n a f es uniforme en E_ϵ. Definimos g como el límite de h_n en E_ϵ. Es fácil ver que los conjuntos V_k y K_k se pueden elegir como una unión finita de intervalos abiertos y el complemento de una unión finita de intervalos abiertos respectivamente. Extendiendo g por interpolación lineal terminamos la prueba.

□

La generalización de este resultado requiere otro tipo de demostración.

Teorema 5.99. Lusin. *Sea (X,ρ) un espacio métrico y $\mathcal{M}$ una σ-álgebra que contiene los Borelianos. Sea μ una medida regular en $(X,\mathcal{M})$. Sea f una función real medible en X y $\epsilon > 0$.*

(i) Si para todo $\alpha > 0$ el conjunto $\{x : |f(x)| > \alpha\}$ tiene medida finita, entonces existe una función continua g tal que

$$\mu(x : f(x) = g(x)) < \epsilon, \tag{5.8}$$

y

$$\sup_{x \in X} |g(x)| \leq \sup_{x \in X} |f(x)|. \tag{5.9}$$

(ii) Si X es localmente compacto y además existe un conjunto medible A tal que $\mu(A) < \infty$ y $f(x) = 0$ si $x \notin A$, existe una función continua con soporte compacto g que satisface (5.8) y (5.9).

Demostración. Primero suponemos que f está acotada por 1. Para $n \geq 1$ y $0 \leq k \leq 2^n - 1$ definimos

$$A_{k,n} := \{x \in X : \frac{k}{2^n} \leq f(x) < \frac{(k+1)}{2^n}\},$$

y

$$s_n(x) := \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} k 1_{A_{k,n}}(x).$$

Ahora $A_{k,n} = A_{2k,n+1} \cup A_{2k+1,n+1}$, donde la unión es disjunta. Luego

$$s_n(x) = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{j=0}^{2^{n+1}-1} 2 \left[\frac{j}{2}\right] 1_{A_{j,n+1}}(x).$$

Por lo tanto

$$s_{n+1}(x) - s_n(x) = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{j=0}^{2^{n+1}-1} \left(j - 2\left[\frac{j}{2}\right]\right) 1_{A_{j,n+1}}(x).$$

Ahora, como $j - 2[j/2] = 0$ para j par $j - 2[j/2] = 1$ para j impar concluímos que

$$s_{n+1}(x) - s_n(x) = \frac{1}{2^{n+1}} 1_{A_{n+1}}(x),$$

donde

$$A_{n+1} = \cup_{j=0, j \text{ impar}}^{2^{n+1}-1} A_{j,n+1}.$$

Luego, definimos $t_1 = s_1$ y

$$t_n := s_n - s_{n+1}, \qquad n \geq 2.$$

Notemos que $2^n t_n$ es la función característica del conjunto A_n y que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} t_n(x).$$

Por la regularidad de la medida μ, para cada $n \geq 1$, existe un compacto K_n y un abierto V_n tales que $K_n \subset A_n \subset V_n$ y

$$\mu(V_n - K_n) < 2^{-n}\epsilon.$$

Por el lema de Uryshon, existen funciones continuas h_n tales que $h_n(x) = 1$ si $x \in K_n$ y $h_n = 0$ si $x \notin V_n$. Ahora definimos

$$g(x) := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} h_n(x).$$

Como la convergencia es uniforme, g es continua y además difiere de f en un conjunto de medida menor que ϵ. Si f es acotada y $R := \sup\{|f(x)| : x \in X\} < \infty$ y definimos $g_1(x) := \phi(g(x))$ con $\phi(x) = x$ para $|x| \leq R$ y $\phi(x) = Rx/|x|$ si $x > R$, entonces g_1 es continua y satisface (5.8) y (5.9). Si f no es acotada, definimos $B_n := \{x : |f(x)| > n\}$. Por hypótesis $\mu(B_n) \to 0$. Pero f coincide con la función $(1 - 1_{B_n})f$ excepto en B_n.

Notemos que si existe un conjunto A medible tal que $f(x) = 0$ si $x \notin A$, entonces existe un compacto K contenido en A tal que la medida de $A - K$ es arbitrariamente chica. Ahora construímos una función g continua que aproxima $f1_K$ en el sentido de (5.8). Por la compacidad local de X, podemos elegir un abierto V tal que $K \subset V \subset \bar{V}$ con $\bar{V}$ compacto. Además, la construcción de g se puede efectuar de modo que cada conjunto abierto $V_n \subset V$, lo que implica que el soporte de g está contenido en $\bar{V}$.

$\square$