5.10. Medidas producto

Sean X e Y dos conjuntos. A cualquier conjunto de la forma $A \times B$ con $A \subset X$ y $B \subset Y$ lo llamaremos un **rectángulo**.

Definición 5.99. Sean $(X, \mathcal{M})$ e $(Y, \mathcal{N})$ dos espacios de medida. Decimos que un rectángulo $A \times B$ es un **rectángulo medible**, si $A \in \mathcal{M}$ y $B \in \mathcal{N}$. Denotaremos por $\mathcal{R}$ a la colección de los rectángulos medibles. Definimos $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$ como la σ-álgebra más pequeña que contiene a los rectángulos medibles.

Lema 5.100. *La colección de los rectángulos medibles $\mathcal{R}$ es una semi-álgebra.*

Demostración. Si $A \times B$ y $C \times D$ son rectángulos medibles, entonces

$$(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$$

es un rectángulo medible. Por otra parte, notemos que

$$(A \times B)^c = (A^c \times B) \cup (A^c \times B^c) \cup (A \times B^c)$$

donde la unión es disjunta. Por lo tanto, $\mathcal{R}$ es una semi-álgebra. □

Lema 5.101. *Sean $(X, \mathcal{M}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ dos espacios de medida y $\mathcal{R}$ la colección de rectángulos medibles correspondientes. Definimos $\lambda(A \times B) := \mu(A)\nu(B)$ para $A \times B \in \mathcal{R}$. Sea $E \in \mathcal{R}$ tal que $E = \amalg_{n=1}^{\infty} E_n$ con $E_n \in \mathcal{R}$. Entonces,*

$$\lambda(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n)$$

Demostración. Si los rectángulos están dados por $E = A \times B$ y $E_n = A_n \times B_n$, luego

$$\lambda(E) = (\mu \times \nu)(E) = \mu(A)\nu(B) \quad \text{y} \quad \lambda(E_n) = (\mu \times \nu)(E_n) = \mu(A_n)\nu(B_n).$$

Sea $x \in A$, luego existe una subcolección $\{A_{n_k}\}$ de A_n, tal que $x \in A_{n_k}$. Como los E_n son disjuntos tenemos que $B = \amalg_{k=1}^{\infty} B_{n_k}$, y por lo tanto

$$\chi_A(x)\nu(B) = \sum_{k=1}^{\infty} \chi_{A_n}(x)\nu(B_n).$$

Por el Teorema de convergencia monótona tenemos que

$$\mu(A)\nu(B) = \int \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{A_n}(x)\nu(B_n)\, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int \chi_{A_n}(x)\, \nu(B_n) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)\nu(B_n),$$

con lo que concluimos la demostración. □

Corolario 5.102. *La función λ definida sobre la semi-álgebra $\mathcal{R}$ tiene una extensión única como una medida al álgebra $\mathcal{A}$ de las uniones finitas disjuntas de elementos en $\mathcal{R}$.*

Corolario 5.103. *La medida λ definida en el álgebra $\mathcal{A}$ del corolario anterior, puede extenderse como una medida positiva definida en la σ-álgebra de los conjuntos λ^*-medibles, donde λ^* es la medida externa inducida por λ.*

Definición 5.104. Consideremos dos espacios de medida $(X, \mathcal{M}, \mu)$ e $(Y, \mathfrak{M}, \nu)$. Llamamos **medida producto** a cualquier medida definida como en el corolario anterior, denotándola por $\mu \times \nu$.

Ejercicio. Demuestre que en general, la restricción de una medida producto $\mu \times \nu$ a $\mathcal{M} \times \mathfrak{M}$ no es una medida completa.

A continuación, nos encaminaremos en la prueba de los teoremas de Fubini y Tonelli. Estos teoremas nos permiten representar integrales de ciertas funciones medibles de dos variables, como dobles integrales, donde cada integral está definida en un dominio medible. Además, tendremos la posibilidad de intercambiar el orden de integración.

Definición 5.105. Dado $E \subset X \times Y$ y $x \in X$, definimos la x**-sección** de E como

$$E_x = \{y \in Y \,:\, (x, y) \in E\},$$

y dado $y \in Y$, definimos la y**-sección** de E como

$$E_y = \{x \in X \,:\, (x, y) \in E\}.$$

Lema 5.106. *Si $E \in \mathcal{M} \times \mathcal{N}$, entonces $E_x \in \mathcal{N}$ y $E_y \in \mathcal{M}$ para todo $x \in X$ e $y \in Y$.*

Demostración. Consideremos la colección de subconjuntos de $X \times Y$

$$\Omega = \{E \subset X \times Y \,:\, E_x \in \mathcal{N} \quad \text{para todo } x \in X\}.$$

Claramente los rectángulos medibles $\mathcal{R}$ están en Ω. Ahora probaremos que Ω es una σ-álgebra. Si $E \in \Omega$, notemos que para todo $x \in X$ se tiene que $(E^c)_x = (E_x)^c \in \mathcal{N}$. Ahora, consideremos $E = \cup_{n=1}^{\infty} E_n$, con $E_n \in \Omega$. Luego

$$E_x = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right)_x = \bigcup_{n=1}^{\infty} (E_n)_x \in \mathcal{N}.$$

Por lo tanto, Ω es una σ-álgebra que contiene a los rectángulos medibles $\mathcal{R}$. Necesariemante entonces, contiene la σ-álgebra $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$. $\square$

Corolario 5.107. *Si $E \in \mathcal{R}_{\sigma\delta}$, entonces $E_x \in \mathcal{N}$ y $E_y \in \mathcal{M}$ para todo $x \in X$ e $y \in Y$.*

Lema 5.108. *Sean $(X, \mathcal{A}, \mu)$ y $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ espacios de medida con μ y ν completas. Supongamos que $E \in \mathcal{R}_{\sigma\delta}$. Para cada $x \in X$ definimos*

$$g(x) = \nu(E_x).$$

Luego, si μ y ν son σ-finitas o si $(\mu \times \nu)(E) < \infty$, entonces g es medible en $(X, \mathcal{A})$ y

$$\int g \, d\mu = (\mu \times \nu)(E).$$

Demostración. Supongamos primero que $E \in \mathcal{R}$, con $E = A \times B$. Entonces $E_x = B$ si $x \in A$, mientras que $E_x = \phi$ si $x \notin A$. Luego

$$g(x) = \nu(E_x) = \chi_A(x)\nu(B),$$

que es una función medible en $(X, \mathcal{A})$ porque $A \in \mathcal{A}$. Luego,

$$\int g\,d\mu = \mu(A)\nu(B) = (\mu \times \nu)(E).$$

Si $E \in \mathcal{R}_\sigma$, luego existen $E_n \in \mathcal{R}$, disjuntos tales que $E = \amalg_{n=1}^\infty E_n$. Entonces, por el teorema de convergencia monótona

$$g(x) = \nu(E_x) = \sum_{n=1}^\infty \nu((E_n)_x) = \sum_{n=1}^\infty g_n(x).$$

Luego g es medible en $(X, \mathcal{A})$. Nuevamente, por el teorema de convergencia monótona

$$\int g\,d\mu = \int \sum_{n=1}^\infty g_n\,d\mu = \sum_{n=1}^\infty \int g_n\,d\mu = \sum_{n=1}^\infty (\mu \times \nu)(E_n) = (\mu \times \nu)(E).$$

Ahora, supongamos que tanto μ como ν son finitas y sea $E \in \mathcal{R}_{\sigma\delta}$. Luego existen $E_n \in \mathcal{R}_\sigma$ tales que $E_{n+1} \subset E_n$, para todo natural n, $(\mu \times \nu)(E_1) < \infty$ y $E = \cap_{n=1}^\infty E_n$ (en efecto, la intersección de dos conjuntos en $\mathcal{R}_\sigma$ sigue estando en $\mathcal{R}_\sigma$). Sea $g_n(x) = \nu((E_n)_x)$. Como $\int g_1 d\mu = \mu \times \nu(E_1) < \infty$, sabemos que el conjunto $B = \{x : g_1(x) < \infty\}$ es medible y que $\mu(B^c) = 0$. Si $x \in B$, $(E_n)_x$ es una sucesión decreciente de conjuntos medibles de medida finita con intersección E_x. Además, $E_x = \cap_n (E_n)_x$. Luego, para $x \in B$

$$g(x) = \nu(E_x) = \lim_{n\to\infty} \nu((E_n)_x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x).$$

Como μ es completa, esto implica que g es medible en $(X, \mathcal{A})$. Por otra parte, como $g_n(x) \leq g_1(x)$, μ-c.s., con $g_1 \in L^1(\mu)$, por el teorema de convergencia dominada

$$\int g\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int g_n\,d\mu = \lim_{n\to\infty} (\mu \times \nu)(E_n) = (\mu \times \nu)(E).$$

En el caso general, sabemos que existe una sucesión de rectángulos medibles R_n de medida finita, con $R_n \subset R_{n+1}$, tales que $X \times Y = \cup_n R_n$. Luego, si $E_n = E \cap R_n$ y $g_n(x) = \nu((E_n)_x)$, sabemos que g_n es una sucesión de funciones medibles y que

$$\int g_n d\mu = (\mu \times \nu)(E_n).$$

Si $g(x) = \nu(E_x)$, claramente $g(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x)$. Esto demuestra que g es medible. Por otra parte, el teorema de convergencia monótona implica que $\int g d\mu = (\mu \times \nu)(E)$. $\square$

Teorema 5.109. *Sean $(X, \mathcal{M}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ espacios medibles tales que μ y ν son medidas completas. Sea E un conjunto tal que $(\mu \times \nu)(E) = 0$. Luego μ-c.s. el conjunto E_x es medible. Además, si $g(x) = \nu(E_x)$, entonces $g(x) = 0$, μ-c.s. y por lo tanto $g(x)$ es medible.*

Demostración. Sabemos que existe $F \in \mathcal{R}_{\sigma\delta}$, tal que $E \subset F$ y $(\mu \times \nu)(F) = 0$. Es inmediato que $E_x \subset F_x$ y que $\nu(E_x) \leq \nu(F_x)$. Luego

$$\int \nu(F_x) d\mu = (\mu \times \nu)(F) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \nu(F_x) = 0 \ \mu\text{-c.s.}$$

Por lo tanto, podemos concluir que $\nu(E_x) = 0$ μ-c.s., y por lo tanto $\nu(E_x)$ es una función μ-medible por ser μ una medida completa. $\square$

Teorema 5.110. *Sean $(X, \mathcal{M}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ espacios medibles tales que μ y ν son medidas completas. Sea E un conjunto medible. Supongamos que μ y ν son σ-finitas o que E tiene medida finita. Luego, μ-c.s. E_x es medible y la función $g(x) = \nu(E_x)$ está μ-c.s. definida y por lo tanto se puede definir para todo x como una función medible. Además*

$$\int g\, d\mu = (\mu \times \nu)(E)$$

DEMOSTRACIÓN. Como E es medible, sabemos que podemos expresarlo como $E = F - G$, donde $F \in \mathcal{R}_{\sigma\delta}$ y G es tal que $\mu(G) = 0$. Por el Lema anterior tenemos que μ-c.s. G_x es un conjunto medible en Y, y por lo tanto μ-c.s. E_x es un conjunto medible en Y. Además $\nu(G_x) = 0$ μ-c.s. Luego

$$\nu(E_x) = \nu(F_x) \quad \mu\text{-c.s.}$$

Pero sabemos que $\nu(F_x)$ es medible. Por lo tanto, la completitud de μ implica que $g(x) = \nu(E_x)$ está μ-c.s. definida y es medible. Finalmente,

$$\int g\, d\mu = \int \nu(F_x)\, d\mu = (\mu \times \nu)(E),$$

con lo que concluimos la demostración del teorema. □

En lo que sigue, dada una función $f : X \times Y \to \mathbb{R}$, ocuparemos las notaciones $f_x(y) = f_y(x) = f(x, y)$ para referirnos a funciones desde X en $\mathbb{R}$ y desde Y en $\mathbb{R}$ respectivamente.

Teorema 5.111. *Sean $(X, \mathcal{M}, \mu)$ e $(Y, \mathfrak{M}, \nu)$ espacios medibles.*

(i) Si f es $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$-medible, entonces para todo $x \in X$, $f_x(y)$ es medible y para todo $y \in Y$, $f_y(x)$ es medible.

(ii) Si μ y ν son completas y σ-finitas, y f es medible, entonces μ-c.s. función $f_x(y)$ es medible y ν-c.s. $f_y(x)$ es medible.

DEMOSTRACIÓN. *Parte (i).* Supongamos que f es $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$ medible. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $f \geq 0$. Sabemos que entonces existe una sucesión de funciones simples que son $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$ medibles. Es evidente que todos términos de tal sucesión son $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$ medibles. *Parte (ii).* Si f es medible, por un argumento similar al anterior, concluímos que $f_x(y)$ es μ-c.s. medible y que $f_y(x)$ es ν-c.s. medible. □

Teorema 5.112 (Fubini). *Sean $(X, \mathcal{M}, \mu)$ e $(Y, \mathfrak{M}, \nu)$ espacios medibles y μ y ν medidas completas. Sea f una función medible definida en $X \times Y$ tal que $f \in L^1(\mu \times \nu)$.*

(i) La función $f_x(y) = f(x, y)$ es μ-c.s., $f_y = (f(x, y)$ es ν-c.s. medilbe y $\int f(x, y)\, d\nu$ y $\int f(x, y)\, d\mu$ son medibles.

(ii) $\int f(x, y)\, d(\mu \times \nu) = \int f(x, y)\, d\mu d\nu = \int f(x, y)\, d\nu d\mu$.

DEMOSTRACIÓN. *Parte (i).* Basta probar el teorema para f no negativa en $L_1(\mu \times \nu)$. Supongamos primero que $f = \chi_E$, con E medible de medida finita. Por el teorema 5.110, $f_x(y) = \chi_{E_x}(y)$, es μ-c.s. y medible y

$$g(x) = \int f(x, y)\, d\nu = \int \chi_{E_x}(y) d\nu,$$

también. Además,

$$\iint f(x,y)\,d\nu d\mu = \int g(x)\,d\mu = \int f(x,y)\,d(\mu\times\nu).$$

Ahora, sea f una función simple dada por

$$f(x,y) = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{E_k}(x,y),$$

donde los E_k son medibles y disjuntos de medida finita. Luego la función

$$f_x(y) = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{(E_k)_x}(y),$$

es μ-c.s. medible y

$$g(x) = \int f(x,y)\,d\nu = \sum_{k=1}^{n} a_k \int \chi_{(E_k)_x}(y)\,d\nu,$$

es una función medible. Integrando g respecto a μ concluimos que

$$\int\int f(x,y)\,d\nu d\mu = \sum_{k=1}^{n} a_k \int f_k(x)\,d\mu = \sum_{k=1}^{n} a_k(\mu\times\nu)(E_k) = \int f(x,y)\,d(\mu\times\nu).$$

Ahora, sea f una función medible en $L^1(\mu\times\nu)$ y φ_n una sucesión de funciones simples no negativas que aproximan monótona y puntualmente a f, de soporte de medida finita. Luego, como para cada n la función $(\varphi_n)_x(y)$ es μ-c.s. medible y

$$f_x(y) = \lim_{n\to\infty} (\varphi_n)_x(y) = \sup_n (\varphi_n)_x(y),$$

vemos que f_x es μ-c.s. medible. Integrando respecto a ν y utilizando el teorema de convergencia monótona, se tiene que μ-c.s.

$$g(x) = \int f_x(y)\,d\nu = \lim_{n\to\infty} \int (\varphi_n)_x(y) d\nu.$$

Entonces, por la completitud de μ, g es una función medible. Por el teorema de convergencia monótona vemos que al integrar g respecto a μ,

$$\iint f(x,y)\,d\nu d\mu = \lim_{n\to\infty} \iint \varphi_n(x,y)\,d\nu d\mu = \lim_{n\to\infty} \int \varphi_n(x,y)\,d(\mu\times\nu) = \int f(x,y)\,d(\mu\times\nu).$$

□

El siguiente teorema es una aplicación del Teorema de Fubini y se deja como ejercicio para el lector.

Teorema 5.113 (Tonelli). *Sean $(X,\mathcal{M},\mu)$ e $(Y,\mathfrak{M},\nu)$ espacios medibles completos y σ-finitos. Sea f una función medible no negativa en $X\times Y$, luego las afirmaciones del Teorema de Fubini se satisfacen.*

Ejemplo. Aquí presentamos un ejemplo de una función que no es integrable en el espacio producto y que tampoco es positiva, y no es posible permutar el orden de integración. Sean $X = Y = \mathbb{N}$, $\mathcal{M} = \mathcal{N} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ y $\mu = \nu$ la medida que asigna a cada conjunto su cardinalidad. Sea

$$f(x,y) = \begin{cases} 2 - 2^{-x} & x = y \\ -2 + 2^{-x} & x = y + 1 \\ 0 & x \neq y, y+1 \end{cases}$$

Luego f no pertenece al espacio $L^(\mu \times \nu)$. Además

$$\sum_{x=1}^{\infty} f(x,y) = 2 - 2^{-y} - 2 + 2^{-(y+1)} = -2^{-y} + 2^{-(y+1)},$$

$$\sum_{y=1}^{\infty}\sum_{x=1}^{\infty} f(x,y) = 2 - 2^{-y} - 2 + 2^{-(y+1)} = -2^{-y} + 2^{-(y+1)} = -1 + 1/2 = -1/2,$$

y

$$\sum_{y=1}^{\infty} f(x,y) = 2 - 2^{-x} - 2 + 2^{-x} = 0.$$