Capítulo 6

Espacios L^p

6.1. La desigualdad de Jensen

Demostraremos la desigualdad de Jensen, discutiendo primero algunas propiedades de las funciones convexas.

Definición 6.1. Decimos que una función real $\varphi(x)$ definida en (a,b), con $-\infty \leq a < b \leq \infty$, es *convexa* en (a,b) si

$$\varphi(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda\varphi(x) + (1-\lambda)\varphi(y)$$

para todo $a < x < b$, $a < y < b$ y $0 \leq \lambda \leq 1$.

Observación.

1. En $\mathbb{R}$, toda función super-harmónica es convexa. Es decir, si f es dos veces diferenciable y

$$\frac{d^2 f}{dx^2} \leq 0,$$

entonces f es convexa.

2. Las funciones convexas juegan un rol muy importante en el cálculo de pequeñas probabilidades o *grandes desvíos*. El teorema de Cramer establece que la probabilidad que el promedio de n variables aleatorias independientes de la misma ley, tales que $E(e^{\lambda X}) < \infty$ para todo λ real, se desvíe de la esperanza E por un número mayor que $\epsilon > 0$, decrece exponencialmente rápido como $e^{-nI(\epsilon)}$, donde $I(x)$ es la llamada *función de tasa*, que entre otras propiedades es convexa. En el año 2007, al matemático S.R.S. Varadhan se le otorgó el premio Abel, entre otras razones por su contribución al desarrollo de la llamada teoría de los grandes desvíos.

Lema 6.2. *Una función φ es convexa en (a,b) si y sólo si para todo real s,t,u tales que $a < s < t < u < b$ se tiene que*

$$\frac{\varphi(t)-\varphi(s)}{t-s} \leq \frac{\varphi(u)-\varphi(t)}{u-t}.$$

Demostración. Supongamos que φ es convexa en (a,b). Notemos que $t = \lambda u + (1-\lambda)s$ para $\lambda = (t-s)/(u-s)$. Luego

$$\varphi(t) \leq \left(\frac{t-s}{u-s}\right)\varphi(u) + \left(1 - \frac{t-s}{u-s}\right)\varphi(s).$$

Por lo tanto,

$$(u-t)(\varphi(t)-\varphi(s)) \leq (t-s)(\varphi(u)-\varphi(t)). \tag{6.1}$$

Por el mismo argumento, vemos que si φ satisface la desigualdad del lema, entonces es convexa. □

El siguiente lema es una aplicación directa del resulta anterior y se deja como ejercicio para el lector. Recordamos que una función es Lipschitz continua en un intervalo si existe una constante $k > 0$ tal que para todo par de puntos x, y en tal intervalo

$$|\varphi(x)-\varphi(y)| \leq k|x-y|.$$

Lema 6.3. *Sea φ una función convexa en (a, b).*

(i) En todo intervalo cerrado y acotado, φ es Lipshitz continua y por lo tanto de variación acotada. En particular, ϕ es continua en (a, b).

(ii) Salvo por una cantidad numerable de puntos, φ es diferenciable en (a, b). Además, en todo (a, b), las derivadas por la derecha e izquierda de φ existen y son monótonas crecientes.

(iii) La segunda derivada de φ existe m-c.s.

Ejemplo. Las siguientes funciones son convexas.

(i) e^x, en todo los reales.

(ii) x^n, $n \geq 1$, en $(0, \infty)$

(iii) $x \log(x)$ en $(0, \infty)$

Teorema 6.4 (Desigualdad de Jensen). *Sea μ una medida positiva en $(X, \mathcal{M})$ tal que $\mu(X) = 1$. Sea $f \in L^1(\mu)$ tal que $a < f(x) < b$. Luego, para toda toda función convexa φ en (a, b) es cierto que*

$$\varphi\left(\int f \, d\mu\right) \leq \int \varphi(f) \, d\mu.$$

Demostración. Definimos $t = \int f \, d\mu$. Claramente $a < t < b$. Además, por el Lema 6.2, si definimos $\beta \in \mathbb{R}$ como el supremos sobre s del miembro izquierdo de la desigualdad (6.2), vemos que para todo $a < s \leq t \leq u < b$ se satisface

$$\frac{\varphi(t)-\varphi(s)}{t-s} \leq \beta \leq \frac{\varphi(u)-\varphi(t)}{u-t}.$$

Por lo tanto para $a < s < b$

$$\varphi(s) \geq \varphi(t) + \beta(s-t), \tag{6.2}$$

y

$$\varphi(f(x)) - \varphi(t) - \beta(f(x)-t) \geq 0,$$

para todo $x \in X$. Como φ es continua, sabemos que $\varphi(f(x))$ es medible, y podemos integrar esta desigualdad para concluír la prueba. □

Ejemplo. A continuación exponemos algunos aplicaciones de la desigualdad de Jensen en el contexto de un espacio medible $(X, \mathcal{M}, \mu)$ tal que $\mu(X) = 1$.

(i) Consideremos la función convexa x^p. Luego para $p \geq 1$

$$\left(\int |f| d\mu\right)^p \leq \int |f|^p d\mu.$$

Similarmente, para $0 < q \leq p$ se tiene que

$$\left(\int |f|^q d\mu\right)^{1/q} \leq \left(\int |f|^p d\mu\right)^{1/p}.$$

(ii) Tomemos la función convexa $\varphi(x) = e^x$. Luego

$$e^{\int f\, d\mu} \leq \int e^f \, d\mu.$$

Ahora sea $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ y $f(x_i) = y_i$, $1 \leq i \leq n$, además $\mu(x_i) = 1/n$. Luego,

$$e^{\frac{1}{n}(y_1 + \cdots + y_n)} \leq \frac{1}{n}\left(e^{y_1} + \cdots + e^{y_n}\right).$$

Si definimos $w_i = e^{y_i}$ tenemos que

$$(w_1 \cdots w_n)^{1/n} \leq \frac{1}{n}(w_1 + \cdots + w_n). \tag{6.3}$$

En el caso $\mu(x_i) = \alpha_i \geq 0$, con $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$, la desigualdad (6.3) queda dada por

$$w_1^{\alpha_1} w_2^{\alpha_2} \cdots w_n^{\alpha_n} \leq \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \cdots + \alpha_n w_n.$$

6.2. Desigualdades de Hölder y Minkowski

Definición 6.5. Si p y q son dos números en $(1, \infty)$ que satisfacen

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \tag{6.4}$$

decimos que son **exponentes conjugados**.

Teorema 6.6. *Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio medible, p y q exponentes conjugados y f, g funciones medibles con valores en $[0, \infty]$. Luego las siguientes desigualdades se satisfacen.*

(i) ***(Desigualdad de Hölder)***

$$\int f\, g\, d\mu \leq \left(\int f^p \, d\mu\right)^{1/p} \left(\int g^q \, d\mu\right)^{1/q}.$$

(ii) ***(Desigualdad de Minkowski)***

$$\left(\int (f+g)^p \, d\mu\right)^{1/p} \leq \left(\int f^p \, d\mu\right)^{1/p} + \left(\int g^p \, d\mu\right)^{1/p}.$$

Demostración. Definimos

$$F(x) := \frac{f(x)}{A}, \quad G(x) := \frac{g(x)}{B},$$

con $A = \left(\int f^p \, d\mu\right)^{1/p}$ y $B = \left(\int g^q \, d\mu\right)^{1/q}$. Sin pérdida de generalidad suponemos que $0 < A,\, B < \infty$, siendo los otros casos triviales. Ahora, consideremos la función $-\log$ que es convexa. Luego, si p y q son exponentes conjugados se tiene que

$$-\log\left(\frac{F(x)^p}{p} + \frac{G(x)^q}{q}\right) \leq -\frac{\log(F(x)^p)}{p} - \frac{\log(G(x)^q)}{q} = -\log(F(x)G(x)).$$

Por lo tanto

$$F(x)G(x) \leq \frac{F(x)^p}{p} + \frac{G(x)^q}{q}.$$

Integrando esta desigualdad respecto a μ se obtiene la desigualdad de Hölder.

Ahora, notemos que

$$(f+g)^p \leq 2^{p-1}(f^p + g^p).$$

Luego, si A y B son finitas, el lado izquierdo de la desigualdad de Minkowski también es finito. Por otra parte

$$(f+g)^p = f\,(f+g)^{p-1} + g\,(f+g)^{p-1}.$$

Luego si $q = p/(p-1)$, p y q son exponentes conjugados, por la desigualdad de Hölder tenemos que

$$\int (f+g)^p \, d\mu \leq \left(\int (f+g)^p \, d\mu\right)^{1/q} \left[\left(\int f^p \, d\mu\right)^{1/p} + \left(\int g^p \, d\mu\right)^{1/p}\right].$$

$\square$