6.3. Espacios L^p

Definición 6.7. Dado un espacio de medida $(X, \mathcal{M}, \mu)$ y una función medible f, definimos para $1 \leq p < \infty$,

$$\|f\|_p = \left(\int |f|^p \, d\mu \right)^{1/p},$$

llamada la **norma** L^p de f. Decimos que f y g son **equivalentes** si $f = g$, μ-c.s., escribiendo $f \sim g$. Al conjunto de clases de equivalencia de funciones con norma L^p finita lo denotaremos por $L^p(\mu)$. Si f es una función real medible, definimos el **supremo esencial** de f como

$$\|f\|_\infty = \inf\{\alpha > 0 \,:\, \mu(x \,:\, |f(x)| > \alpha) = 0\}.$$

Al conjunto de clases de equivalencia de funciones con norma supremo esencial finito lo denotaremos por $L^\infty(\mu)$.

Observación. Para $1 \leq p \leq \infty$ si $f \sim g$, entonces $\|f\|_p = \|g\|_p$.

Cuando μ es la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^k$, ocuparemos también la notación $L^p(\mathbb{R}^k)$ en vez de $L^p(\mu)$. En el caso en el que μ es la medida conteo en los naturales, el espacio $L^p(\mu)$ es igual al conjunto de sucesiones reales $a = \{a_n : n \geq 0\}$ tales que $\sum_{n=0}^\infty a_n^p < \infty$ y se denota por l^p. Además $||a||_p = (\sum_{n=0}^\infty a_n^p)^{1/p}$.

Lema 6.8. *Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida finita. Sea $f \in L^\infty(\mu)$, entonces para todo $1 \leq p \leq \infty$ se tiene que $f \in L^p(\mu)$ y*

$$\lim_{p \to \infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty.$$

Demostración. Notemos que para cada $a > 0$

$$\int |f|^p \, d\mu = \int_{\{|f|>a\}} f \, d\mu + \int_{\{|f|\leq a\}} f \, d\mu$$

Pero para $a = \|f\|_\infty$, $\mu(|f| > a) = \lim_{n\to\infty} \mu(|f| > a + 1/n) = 0$. Luego $\int |f|^p \, d\mu \leq a^p \mu(X)$ y

$$\limsup_{p\to\infty} \|f\|_p \leq a.$$

Con lo que probamos que $f \in L^p(\mu)$ para todo $1 \leq p \leq \infty$. Sea $\varepsilon > 0$, luego

$$\int |f|^p \, d\mu \geq \int_{\{|f|>a-\varepsilon\}} f \, d\mu \geq (a - \varepsilon)^p \mu(|f| > a - \varepsilon).$$

Por lo tanto $\liminf_{p\to\infty} \|f\|_p \geq a - \varepsilon$. Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario vemos que

$$\liminf_{p\to\infty} \|f\|_p \geq a.$$

□

Observación. Los espacios L^p son espacios vectoriales normados sobre el cuerpo de los números reales, con la norma $\|\cdot\|_p$, para todo $1 \leq p \leq \infty$. Para validar esta afirmación utilizaremos las desigualdades de Hölder y Minkowski.

(i) Si p y q son exponentes conjugados

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

En el caso que $p = \infty$,

$$|fg| \leq \|f\|_\infty |g|, \quad \mu\text{-c.s.}$$

y

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_\infty \|g\|_1.$$

(ii) Para $1 < p < \infty$, tenemos que

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Por otra parte, como $|f+g| \leq |f| + |g|$, μ-c.s., tenemos que

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p,$$

para $1 \leq p \leq \infty$.

Uno de los teoremas más importantes de este capítulo es el que nos permite afirmar que los espacios $L^p(\mu)$ son completos.

Teorema 6.9 (Riesz-Fisher). *Para todo $1 \leq p \leq \infty$ el espacio vectorial $L^p(\mu)$ es de Banach.*

Demostración. Sea $\{f_n\} \subset L^p(\mu)$ una sucesión de Cauchy. Luego existe una sucesión f_{n_k} tal que

$$\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p < \frac{1}{2^k}.$$

Sean $g_N(x) = \sum_{k=1}^N |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)|$. Por monotonía esta sucesión converge a

$$g(x) = \sum_{k=1}^\infty |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)|.$$

Luego, por el Teorema de convergencia monótona

$$\|g\|_p = \lim_{N\to\infty} \|g_N\|_p < \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{2^k} = 1.$$

Luego $g \in L^p(\mu)$. Ahora, como $\sum_{k=1}^{l-1}(f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)) + f_{n_1}(x) = f_{n_l}(x)$, vemos que μ-c.s.

$$f(x) = \lim_{l\to\infty} f_{n_l}(x).$$

Claramente esta función es medible. Sea $\varepsilon > 0$. Existe un N tal que

$$\|f_n - f_m\|_p < \varepsilon \quad \text{si } n, m \geq N.$$

Entonces, por el Lema de Fatou, para $m \geq N$,

$$\|f - f_m\|_p \leq \liminf_{k\to\infty} \|f_{n_k} - f_m\| < \varepsilon.$$

Esto muestra que $f \in L^p(\mu)$ y que $\lim_{n\to\infty} ||f - f_n||_p = 0$. □