6.4. Separabilidad y las funciones continuas

En esta sección estudiaremos la separabilidad de los espacios L^p. Antes de enunciar un resultado general, daremos algunas condiciones bajo las cuales las funciones continuas, y funciones continuas de soporte compacto, son densas en tales espacios. El siguiente lema muestra que no existe absolutamente ninguna posibilidad de ocupar fuciones de soporte compacto para aproximar funciones en espacios que no son localmente compactos en ningún punto.

Lema 6.10. *Consideremos un espacio métrico (X, ρ) que no es localmente compacto en ningún punto $x \in X$. Luego, la única función continua de soporte compacto es la función idénticamente nula.*

Demostración. Supongamos que existe una función f que es continua de soporte compacto, pero que no es idénticamente nula. Luego, existe un $x \in X$, un $\epsilon > 0$ y una vecindad $B(x;\epsilon)$ tal que

$$f(y) \geq \epsilon,$$

si $y \in B(x;\epsilon)$. Luego, si K es el soporte de f, entonces K es de interior no vacío, que contradice el hecho que el espacio no es localmente compacto en ningún punto. □

Por otra parte, el siguiente teorema muestra que el conjunto de funciones continuas sobre un compacto es separable.

Teorema 6.11. *Sea (X, ρ) un espacio métrico compacto. Luego el conjunto de funciones continuas $C(X)$ es separable.*

Demostración. Como X es compacto, existe un subconjunto D denso y numerable en X. Definimos la colección de funciones

$$\mathcal{C} := \{f_x(y) = \rho(x, y) : x \in D\}.$$

Consideremos ahora el álgebra de funciones $\mathcal{A}$ cuyos elementos son sumas por coeficientes racionales de productos de funciones en $\mathcal{C}$. Notemos que $\mathcal{A}$ es un conjunto numerable. Además $\mathcal{A}$ es un álgebra que es nunca nula. Por otra parte, si $a, b \in X$ con $a \neq b$ y $x \in X$, tenemos que

$$f_x(a) - f_x(b) = \rho(x, a) - \rho(x, b).$$

Además, $\rho(a, b) \leq \rho(a, x) + \rho(b, x)$. Luego,

$$\rho(a, b) - \rho(b, x) \leq \rho(a, x) \leq \rho(a, b) + \rho(b, x).$$

Por lo tanto

$$\rho(a, b) - 2\rho(b, x) \leq \rho(a, x) - \rho(b, x) \leq \rho(a, b).$$

Eligiendo x de modo que $\rho(b, x) < \rho(a, b)/2$, concluímos que

$$0 < f_x(a) - f_x(b).$$

Esto demuestre que el álgebra $\mathcal{A}$ separa puntos. Por el teorema de Stone-Weierstrass su clausura es $C(X)$. □

Teorema 6.12. *Sea S el conjunto de funciones simples con soporte de medida finita. Luego, si $1 \le p < \infty$, S es denso en $L^p(\mu)$.*

Demostración. Sea $f \in L^p(\mu)$, no negativa, y s_n una sucesión de funciones simples no negativas que convergen puntual y monótonamente a f. Es decir $s_n \le s_{n+1} \le f$ y $s_n(x) \to f(x)$ para todo x. Luego, para todo natural n, $s_n \in L^p(\mu)$, de donde se tiene que $s_n \in S$. Además, $s_n(x) \to f(x)$. Entonces, por el Teorema de convergencia dominada

$$\lim_{n\to\infty} \|s_n - f\|_p = 0.$$

□

Teorema 6.13. *Sea (X, ρ) un espacio métrico y μ una medida positiva regular definida en $(X, \mathcal{M})$, donde $\mathcal{M}$ es una σ-álgebra que contiene los Borelianos. Sea $1 \le p < \infty$.*

(i) El conjunto $C(X) \cap L^p(\mu)$ de las funciones continuas en $L^p(\mu)$ es denso en $L^p(\mu)$.

(ii) Si (X, ρ) es localmente compacto, el conjunto $C_c(X)$ de las funciones continuas de soporte compacto es denso en $L^p(\mu)$.

Demostración. Probaremos sólo la parte (i), siendo la demostración de (ii) similar. Basta probar que toda función $s \in S$, se puede aproximar por funciones de $C(X)$. Sea $s \in S$ y $\varepsilon > 0$. Por el Teorema de Lusin sabemos que existe $f \in C(X)$ tal que

(i) $\mu(\{x : f(x) \neq s(x)\}) < \varepsilon$

(ii) $\sup_{x\in X} |f(x)| \le \sup_{x\in X} |s(x)|$

Como s es una función simple de soporte finito, $\sup_{x\in X} |s(x)| < \infty$. Además notemos que $f \in L^p(\mu)$. En efecto, $\int |f|^p d\mu < \int |s|^p d\mu + \epsilon \sup_{x\in X} |s(x)|$. Además,

$$\|f - s\|_p = \left(\int_{\{f\neq s\}} |f - s|^p \, d\mu \right)^{1/p} \le 2 \sup_{x\in X} |s(x)| \cdot \mu(\{f \neq s\})^{1/p} < \varepsilon^{1/p} \cdot 2 \sup_{x\in X} |s(x)|.$$

□

Continuamos con un resultado básico de topología en espacios métricos, que nos permitirá demostrar que todo espacio L^p sobre un espacio métrico separable es separable.

Lema 6.14. *Sea $(X; \rho)$ un espacio métrico separable. Supongamos que existe un subconjunto denso y numerable D de X. Luego, si $\mathcal{C}$ es la colección de todas las bolas abiertas con centros en D y radios racionales, entonces todo abierto se puede expresar como una unión numerable de elementos de $\mathcal{C}$.*

Demostración. Sea G un abierto en X. Para cada $x \in G \cap D$, definimos $r_x = dist(x, G^c)$. Notemos que $B(x; r_x) \subset G$. Afirmamos que

$$G = \cup_{x\in G\cap D} B(x; r_x).$$

En efecto, si $y \in G$, sabemos que existe una bola $B(y; r)$ tal que $B(y; r) \subset G$. Eligiendo $x \in D$ suficiéntemente cerca de y, vemos que $y \in B(x; r_x)$. Ahora, sea $\{r_{n,x} : n \ge 1\}$ una sucesión creciente de racionales que converge a r_x. Claramente

$$G = \cup_{x\in G\cap D} \cup_n B(x; r_{n,x}).$$

□

Teorema 6.15. *Sea (X, ρ) un espacio métrico separable. Sea μ una medida positiva definida en $(X, \mathcal{M})$ que es regular externa, donde $\mathcal{M}$ es una σ-álgebra que contiene los Borelianos y $1 \leq p < \infty$. Luego, $L^p(\mu)$ es separable.*

DEMOSTRACIÓN. Sea D un subconjunto denso y numerable de X. Sea $\mathcal{C}$ la colección de bolas abiertas con centro en D y de radio racional. Mostraremos primero que la función indicatriz de todo abierto se puede aproximar por combinaciones lineales de productos de funciones $\mathcal{C}$, que llamaremos $\mathcal{F}$. Notemos que $\mathcal{F}$ es numerable. Ahora, notemos que si A y B son dos conjuntos, entonces $1_{A \cup B} = 1_A + 1_B - 1_A 1_B$. Por inducción, esto muestra que la función indicatriz de una unión finita de conjuntos en $\mathcal{C}$, está en $\mathcal{F}$. Por la σ-aditividad de la medida μ, y el lema anterior, vemos que si G es abierto, $\mu(G) = \lim_{n\to\infty} \mu(G_n)$, donde G_n es una unión finita de conjuntos en $\mathcal{C}$ tal que $G = \cup_n G_n$. Ahora, como la medida es regular externa, vemos que la afirmación anterior sigue siendo válida para los Borelianos. Claramente entonces, toda función simple con soporte de medida finita se puede aproximar por funciones en $\mathcal{F}$. Luego, el espacio $L^p(\mu)$ es separable. □

Terminamos esta sección con el siguiente resultado que es contraparte del teorema 6.15.

Teorema 6.16. *Consideremos un espacio de medida $(X, \mathcal{M}, \mu)$. Supongamos que existe una subcolección $\mathcal{M}_1$ no numerable de conjuntos en $\mathcal{M}$, tales que para todo par $A, B \in \mathcal{M}_1$ se tiene que $\mu(A \cap B) > 0$. Luego $L^\infty(\mu)$ no es separable.*

DEMOSTRACIÓN. Basta probar que eexiste un conjunto no numerable y discreto en $L^\infty(\mu)$. Pero, el conjunto de funciones indicatrices de los elementos de $\mathcal{M}_1$ tiene tales propiedades. □

Corolario 6.17. *El espacio $L^\infty(\mathbb{R})$ no es separable.*