6.5. Convolución de funciones definidas en $\mathbb{R}^d$

Para $d \geq 1$, consideremos la medida de Lebesgue m_d en $(\mathbb{R}^d, \mathcal{M}_d)$, donde $\mathcal{M}_d$ es la σ-álgebra completa de conjuntos medibles. Denotaremos por $\mathcal{M}_d \times \mathcal{M}_d$ la σ-álgebra producto en $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$.

Notemos que para todo $x \in \mathbb{R}^d$ real, si f y g son funciones medibles en $(\mathbb{R}^d, \mathcal{M}_d)$, entonces $f(x-y)g(y)$ es medible en $(\mathbb{R}^{2d}, \mathcal{M}_{2d})$. Además, ocuparemos la notación x-c.s. para referirnos a la medibilidad de una función respecto al primer factor del espacio $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$, e y-c.s. respecto al segundo factor.

Definición 6.19. Si f y g son dos funciones medibles en $\mathbb{R}^d$, tales que x-c.s. $f(x-y)g(y) \in L^1(\mathbb{R}^d)$, llamamos a la expresión

$$f * g(x) := \int f(x-y)g(y)dy,$$

la **convolución** de f con g y diremos que la convolución de f con g está bien definida.

Es fácil notar que cuando la convolución de dos funciones f y g está bien definida, entonces $\int f(x-y)g(y)dy = \int f(y)g(x-y)dy$.

Teorema 6.20. *Sean $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Luego x-c.s. la función $f(x-y)g(y)$ está en $L^1(\mathbb{R}^d)$. Además,*

$$||f * g||_1 \leq ||f||_1 ||g||_1.$$

Demostración. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $f \geq 0$ y $g \geq 0$. Por el teorema de Tonelli, notemos que

$$\int |f * g(x)|dx = \int \left(\int |f(x-y)||g(y)|dy \right) dx = \int \int |f(x-y)||g(y)|dxdy = ||f||_1 ||g||_1.$$

□

La convolución tiene la propiedad de *regularizar* las funciones.

Teorema 6.21. *Sean $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$, con $1 < p, q < \infty$, exponentes conjugados. Luego para todo x la función $f(x-y)g(y)$ está en $L^1(\mathbb{R}^d)$ y la convolución $\int f(x-y)g(y)dy$ es uniformente continua.*

Demostración. Sea $x \in \mathbb{R}^d$. Sin pérdida de generalidad suponemos que $f \geq 0$ y $g \geq 0$. Por la desigualdad de Hölder notemos que

$$f * g(x) := \int |f(x-y)g(y)|dy \leq ||f||_p ||g||_q,$$

lo que prueba que para todo x la convolución está definida. Además,

$$\begin{aligned} |f * g(x+\epsilon) - f * g(x)| &= \left| \int (f(x+\epsilon-y) - f(x-y))g(y)dy \right| \\ &\leq \left(\int |f(x+\epsilon-y) - f(x-y)|^p dy \right)^{1/p} \left(\int |g(y)|^q dy \right)^{1/q}. \end{aligned}$$

Pero el primer factor del lado derecho de la última desigualdad converge a cero cuando ϵ tiende a 0. □

Teorema 6.22. (Desigualdad de Young). *Si $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $1 \leq p \leq \infty$ y $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$, entonces la convolución $f * g$ está definida y está en $L^p(\mathbb{R}^d)$. Además*

$$||f * g||_p \leq ||f||_p ||g||_1.$$

Demostración. Notemos que

$$\begin{aligned}\int |f * g(x)|^p dx &\leq \int \int |f(x-y)|^p |g(y)| dy \left(\int |g(y)| dy\right)^{p/q} dx \\ &= ||g||_1^{p/q} \int \int |f(x-y)|^p |g(y)| dx dy = ||g||_1^{p/q+1} ||f||_p^p.\end{aligned}$$

□

Finalizamos esta sección con aproximaciones de la identidad.

Teorema 6.23. *Sea ϕ una función real en $\mathbb{R}^d$ tal que $\phi \geq 0$, $\phi \in L^1(\mathbb{R}^d)$ y $\int \phi(x) dx = 1$. Sea $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, con $1 \leq p < \infty$. Luego, si $\phi_\epsilon(x) := \epsilon^{-1}\phi(x/\epsilon)$, entonces*

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} ||f * \phi_\epsilon - f||_p = 0.$$

Demostración. Por la desigualdad de Jensen,

$$||f * \phi_\epsilon - f||_p^p \leq \int ||f(x - \epsilon y) - f(x)||_p^p \phi(y) dy.$$

Ahora,$||f(x - \epsilon y) - f(x)||_p$ converge a 0 uniformemente para $|y| \leq R$, y todo $R > 0$. Pero

$$\int ||f(x-\epsilon y) - f(x)||_p^p \phi(y) dy \leq \int_{|y| \leq R} ||f(x - \epsilon y) - f(x)||_p^p \phi(y) dy + 2^p ||f||^p \int_{|y|>R} \phi(y) dy.$$

Tomando el límite cuando $\epsilon \to 0$ vemos que el lado derecho es tan pequeño como se quiera eligiendo R suficiéntemente grande. □

Ocuparemos el resultado anterior para probar que las funciones suaves aproximan a las funciones en $L^p(\mathbb{R})$.

Lema 6.24. *Sea $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de soporte compacto y $\phi \in C^1(\mathbb{R})$. Sea $f \in L^p(\mathbb{R})$ con $1 \leq p < \infty$. Luego $f * \phi_\epsilon \in C^\infty$.*

Demostración. Para todo $\delta > 0$ tenemos que

$$\frac{\phi * f(x+\delta) - \phi * f(x)}{\delta} = \int \frac{\phi(x+\delta-y) - \phi(x-y)}{\delta} f(y) dy.$$

Pero para cada x, la integración es sobre un conjunto de medida finita, donde f es integrable por estar en $L^p(\mathbb{R})$. Además, por le teorema del valor medio y la continuidad de la derivada de ϕ, vemos que para cada x existe una número C_x tal que

$$\frac{\phi(x+\delta-y) - \phi(x-y)}{\delta} \leq C_x,$$

si $\delta < 1$. Por el teorema de la convergencia dominada concluímos la prueba. □

Tenemos entonces el siguiente corolario. Recordemos que $C^\infty(\mathbb{R})$ son las funciones infinitamente diferenciables y $C_0^\infty(\mathbb{R})$ las funciones infinitamente diferenciables de soporte compacto.

Corolario 6.25. *Sea $f \in L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p < \infty$ y $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Luego $f * \phi_\epsilon \in C^\infty$.*

Corolario 6.26. *Para todo $1 \leq p < \infty$, $C^\infty(\mathbb{R}) \cap L^p(\mathbb{R})$ es denso en $L^p(\mathbb{R})$.*

6.6. Criterios de compacidad

Consideraremos criterios de compacidad análogos al teorema de Arzela-Ascoli, para los espacios $L^p(\Omega)$, donde ω es un subconjunto de $\mathbb{R}^d$, y para $\lessdot^p$.

Dado un espacio métrico (X, ρ), denotaremos por $\mathcal{M}(X)_1$ al conjunto de medidas de probabilidad definidas en los borelianos de X.

Definición 6.27. Tensión. Sea (X, ρ) un espacio métrico. Sea $\{\mu_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ una familia de medidas de probabilidad definidas en los borelianos de X. Decimos que tal familia es **tensa**, si para todo $\epsilon > 0$ existe un compacto C tal que

$$\inf_\alpha \mu_\alpha(C) \geq 1 - \epsilon.$$

Definición 6.28. Sea (X, ρ) un espacio métrico. Decimos que una sucesión $\{\mu_n : n \geq 1\}$ en $\mathcal{M}(X)_1$ **converge débilmente** a $\mu \in \mathcal{M}(X)_1$, si para toda $f \in C(X)$ se tiene que

$$\lim_{n \to \infty} \int f d\mu_n = \int f d\mu.$$

Observación. La noción de convergencia débil define una topología metrizable en $\mathcal{M}(X)_1$. Además, la convergencia débil de medidas de probabilidad coincide con la noción de convergencia en distribución de las funciones de distribuci 'on cumulativas correspondientes en el caso en el que $X = \mathbb{R}$.

Continuamos con el siguiente resultado, cuya demostración postergamos, que indica la importancia de la noción de tensión, y su relación con compacidad.

Teorema 6.29. Prokhorov. *Sea (X, ρ) un espacio métrico y $K = \{\mu_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\} \subset \mathcal{M}(X)_1$. Luego, si K es tenso, entonces $\bar{K}$ es compacto. Por otra parte, si (X, ρ) es completo y separable y $\bar{K}$ compacto, entonces K es tenso.*

Caracterizaremos la compacidad en los espacios $L^p(\mathbb{R})$ por un criterio de tensión y otro de equicontinuidad en la norma correspondiente. Los siguientes ejemplos muestran la importancia de ambas nociones. Sea f una función continua no-negativa de soporte compacto no vacío en $\mathbb{R}$. Luego la familia de funciones

$$\{f(x + n) : n \geq 1\},$$

no puede tener sucesiones convergentes en ningún espacio $L^p(\mathbb{R}^d)$. En efecto, la distancia entre cualquier par de tales funciones está acotada inferiormente por $||f(x + 1) - f(x)||_p > 0$. La exigencia de que se satisfaga un criterio de tensión, elimina la posibilidad de que esto ocurra, porque evita que el *escape a infinito de la masa.*

Teorema 6.30. *Sea $1 \leq p < \infty$ y K un subconjunto acotado de l^p. Luego, $\bar{K}$ es compacto si y sólo si*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in K} \sum_{k=n}^{\infty} |x_k|^p = 0. \tag{6.5}$$

Demostración. Supongamos que $\bar{K}$ es compacto. Sea $\epsilon > 0$. Como el conjunto de sucesiones con una cantidad finita de términos distintos de cero es denso en l^p y K es compacto, vemos que existe un conjunto finito F de tales sucesiones con la propiedad que la unión de las bolas abiertas de radio ϵ y con centros en F contiene a K. Es decir, si $x \in K$, existe un $y \in F$ tal que $||x - y||_p \leq \epsilon$. Por otra parte, existe un N tal que $y_k = 0$ si $k \geq N$ y $y \in F$. Luego,

$$\sup_{x\in K} \sum_{k=N}^{\infty} |x_k|^p \leq \epsilon^p.$$

Esto prueba que (6.5) se satisface. Ahora supongamos que (6.5) se satisface. Como K es acotado, si $\{x_n\}$ es una sucesión en K, podemos elegir una subsucesión $\{x_{n_k}\}$ que converge en l^∞ a $x \in l^\infty$. Probaremos que $x \in l^p$ y que la convergencia ocurre también en l^p. En efecto, notemos que la condición (6.5) implica que

$$A := \sup_n ||x_{n_k}||_p < \infty.$$

Luego, para todo N natural

$$\sum_{i=1}^{N} |x_i|^p = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{N} |x_i^{n_k}|^p < A.$$

Esto prueba que $x \in l^p$. Por otra parte,

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i^{n_k} - x_i|^p \leq \sum_{i=1}^{N} |x_i^{n_k} - x_i|^p + \sum_{i=N+1}^{\infty} |x_i^{n_k}|^p + \sum_{i=N+1}^{\infty} |x_i|^p.$$

Tomando el límite cuando $k \to \infty$ y luego cuando $N \to \infty$ terminamos la demostración. □

Teorema 6.31. *Sea $1 \leq p < \infty$ y K un subconjunto acotado de $L^p(\mathbb{R}^d)$. Luego, $\bar{K}$ es compacto si y sólo si se satisfacen las siguientes condiciones.*

(i) **Equicontinuidad**.

$$\lim_{|h|\to 0} \sup_{f\in K} ||f(x+h) - f(x)||_p = 0.$$

(ii) **Tensión**. *Para todo $\epsilon > 0$ existe un conjunto compacto G en $\mathbb{R}^d$ tal que*

$$\sup_{f\in K} \int_{\mathbb{R}^d - G} |f(x)|^p dm_d < \epsilon^p.$$

Demostración. Supongamos primero que $\bar{K}$ es compacto. Como $C_c(\mathbb{R}^d)$ es denso en $L^p(\mathbb{R}^d)$, sabemos que existe un conjunto finito F de funciones en $C_c(\mathbb{R}^d)$, tales que $K \subset \cup_{g\in F} B(g;\epsilon)$. Además, existe un $r>0$ tal que para toda funcíon $g \in C_c(\mathbb{R}^d)$, el soporte de g estás contenido en la bola centrada en 0 de radio r. Definiendo G como tal bola, vemos que (i) se satisface. Por otra parte, como F es finito, vemos que

$$\lim_{|h|\to 0} \int |g(x+h)-g(x)|^p dm_d = 0,$$

uniformemente en $g \in F$. Luego, si $f \in K$, si $g \in F$ es tal que $||f-g||_p \leq \epsilon/3$, vemos que

$$\lim_{|h|\to 0} \int |f(x+h)-f(x)|^p dm_d \leq \epsilon^p.$$

Como ϵ es arbitrario, esto demuestra (ii). Ahora suponemos que (i) y (ii) se satisfacen. Sea ϕ una función mayor o igual a 0 de soporte compacto tal que $\int \phi dm_d = 1$. Notemos que

$$||\phi_\epsilon * f - f||_p \leq \sup_{h\in B(0;\epsilon)} ||f(x+h)-f(x)||_p.$$

Por hipótesis podemos entonces concluír que

$$\lim_{\epsilon\to 0} \sup_{f\in K} ||\phi_\epsilon * f - f||_p = 0.$$

Sea $\varepsilon > 0$. Elegimos ϵ de modo que

$$\int_G |\phi_\epsilon f - f|^p dm_d \leq \varepsilon/(3\cdot 2^p).$$

Notemos que

$$|\phi_\epsilon * f(x)| \leq ||f||_p.$$

Luego la familia de funciones $\{\phi_\epsilon * f : f \in K\}$ está uniformemente acotada. Por otra parte

$$|\phi_\epsilon * f(x+h) - \phi_\epsilon * f(x)| \leq ||f(x+h)-f(x)||_p,$$

lo que muestra que $\{\phi_\epsilon * f : f \in K\}$ es uniformemente equicontinua. Por el teorema de Arzela-Ascoli vemos que su clausura es compacta en $C(G)$, y por lo tanto existe un conjunto finito $\{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$ de funciones en $C(G)$ tales que si $u \in K$, existe algún j, $1 \leq j \leq n$, tal que para todo $x \in G$,

$$|\psi_j(x) - \phi_\epsilon * f(x)|^p \leq \frac{\varepsilon}{3\cdot 2^p |G|}.$$

Extendiendo ψ_j a 0 fuera de G vemos que

$$\int |u - \bar{\psi}_j|^p dm_d \leq \varepsilon.$$

Esto prueba que $\bar{K}$ es totalmente acotado. Luego es compacto.

□

Finalizamos con el siguiente corolario.

Teorema 6.32. *Sea $1 \leq p < \infty$ y $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ y K un subconjunto acotado de $L^p(\Omega)$. Luego, $\bar{K}$ es compacto si y sólo si se satisfacen las siguientes condiciones.*

(i) Si $\bar{f}$ es la extensión de f fuera de Ω por 0, entonces

$$\lim_{|h|\to 0} \sup_{f\in K} \int_{\omega} |\bar{f}(x+h) - \bar{f}(x)|^p dm_d = 0.$$

(ii) Para todo $\epsilon > 0$ existe un conjunto compacto G en Ω tal que

$$\sup_{f\in K} \int_{\Omega - G} |f(x)|^p dm_d < \epsilon^p.$$