Capítulo 7

Espacios de Banach, Hilbert y dualidad

7.1. Teoremas de extensión

Consideremos un espacio vectorial normado X, Y un subespacio de X que es denso y l un funcional lineal continuo definido en Y. Es fácil constatar que l tiene una extensión única como un funcional lineal definido en todo X. El teorema de Hahn-Banach, muestra que sorprendéntemente, bajo condiciones mínimas, es posible extender funcionales lineales definidos en subespacios de un espacio vectorial.

Teorema 7.1 (Hahn-Banach). *Sea X un espacio vectorial real y $p : X \to \mathbb{R}$ una función que satisface las siguientes propiedades.*

(a) **Subaditividad**. *Para todo $x, y \in X$*

$$p(x + y) \leq p(x) + p(y).$$

(b) **Homogeneidad positiva**. *Para todo $x \in X$ y $a > 0$,*

$$p(ax) = ap(x).$$

Sea Y un subespacio vectorial de X donde está definida una función lineal $l : Y \to \mathbb{R}$, con la propiedad $l(y) \leq p(y)$, para todo $y \in Y$. Luego, l se puede extender a todo X como un funcional lineal que satisface pra todo $x \in X$,

$$l(x) \leq p(x). \tag{7.1}$$

Demostración. Si $Y = X$ no hay nada que demostrar, así que supondremos que $Y \neq X$. Sea $z \in X \setminus Y$. Queremos definir l sobre los elementos de la forma $y + az$ con $y \in Y$, $a \in \mathbb{R}$, de modo que se satisfaga

$$l(y + az) \leq p(y + az). \tag{7.2}$$

Notemos que esta desigualdad se satisface para $a = 0$. Por otra parte, por la homogeneidad positiva de p, basta considerar los casos $a = 1$ y $a = -1$. Es decir, tenemos que definir $l(z)$ de modo que

$$l(y) + l(z) \leq p(y + z), \qquad l(y') - l(z) \leq p(y' - z),$$

para todo $y, y' \in Y$. Es decir, para todo $y, y' \in Y$

$$l(y') - p(y' - z) \leq l(z) \leq p(y + z) - l(y).$$

Por lo tanto, para que $l(z)$ exista es necesario y suficiente que para todo par y, y'

$$l(y') - p(y' - z) \leq p(y + z) - l(y), \tag{7.3}$$

lo que es equivalente a

$$l(y' + y) \leq p(y' - z) + p(y + z).$$

Pero $l(y + y') \leq p(y + y') \leq p(y' - z) + p(y + z)$, lo que demuestra tal desiguadad. Por lo tanto, l se puede extender con la propiedad (7.1) al subespacio generado por Y y $\{z\}$.

Ahora, consideremos todas las extensiones l a subespacios Y_α que contienen Y y que satisfacen (7.1). Las denotaremos por (l_α, Y_α). Definimos en el conjunto de tales extensiones el siguiente orden parcial,

$$(l_\alpha, Y_\alpha) \preceq (l_\beta, Y_\beta) \quad \Longleftrightarrow \quad Y_\alpha \subset Y_\beta \text{ y } l_\alpha(x) = l_\beta(x), \forall\, x \in Y_\alpha.$$

Consideremos una cadena totalmente ordenada $\{(l_\beta, Y_\beta) : \beta \in \mathcal{B})\}$ de tales extensiones. Definimos el subespacio $Z = \bigcup_{\beta \in \mathcal{B}} Y_\beta$ y definimos l en Z como

$$l(y) = l_\gamma(y), \text{ si } y \in Y_\gamma.$$

Luego (l, Z) es una extensión que satisface (7.1) y es una cota superior para la cadena anterior. Por el lema de Zorn, existe una extensión maximal. Claramente, tal extensión debe ser a todo el espacio X. □

El siguiente resultado de R.P. Agnew y A.P. Morse geeraliza el teorema anterior.

Teorema 7.2 (Agnew-Morse). *Sea X un espacio vectorial y $\mathcal{A}$ un conjunto de transformaciones lineales de X en X que conmutan entre sí. Es decir,*

$$ABx = BAx, \ \forall\, x \in X, \ \forall\, A, B \in \mathcal{A}.$$

Sea $p : X \to \mathbb{R}$ subaditiva, homogénea positiva y tal que

$$p(Ax) = p(x), \ \forall\, x \in X, \forall\, A \in \mathcal{A}.$$

Sea Y un subespacio vectorial de X y $l : Y \to \mathbb{R}$ una función lineal, que satisfacen las siguientes propiedades.

(a) Para todo $y \in Y$, $l(y) \leq p(y)$.

(b) Para toda $A \in \mathcal{A}$, $AY \subset Y$.

(c) Para todo $y \in Y$ y toda $A \in \mathcal{A}$, $l(Ay) = l(y)$.

Luego, l se puede extender a X de modo que

$$l(x) \leq p(x) \ \forall\, x \in X \text{ y } l(Ax) = l(x), \ \forall\, x \in X, \forall\, A \in \mathcal{A}.$$

Demostración. Primero notemos que podemos suponer sin pérdida de generalidad que la colección de transformaciones lineales del teorema forma un semigrupo bajo multiplicación (es decir, el producto de dos transformaciones sigue estando en la colección, y la identidad está en la colección). Ahora definimos la funcion $g : X \to \mathbb{R}$

$$g(x) = \inf\{p(Cx) \,:\, C \,\text{combinación convexa de elementos de}\, \mathcal{A}\}.$$

Es decir

$$C = \sum_{k=1}^{n} a_k A_k, \quad \text{con} \ \sum_{k=1}^{n} a_k = 1, a_k > 0$$

y $A_k \in \mathcal{A}$. Notemos que para toda combinacion convexa C de elementos de A se tiene que

$$g(x) \leq p(Cx) \leq \sum_{k=1}^{n} a_k p(A_k x) = p(x).$$

Notemos que además que g es homogenea positiva. Sean $y, y' \in Y$ y $\varepsilon > 0$. Luego existen combinaciones convexas C y D, de elementos de $\mathcal{A}$, tales que

$$p(Cy) < g(y) + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{y} \quad p(Dy') < g(y') + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por lo tanto

$$g(y + y') \leq p(CD(y + y')) \leq p(DCy) + p(CDy') \leq p(Cy) + p(Dy') < g(y) + g(y') + \varepsilon.$$

Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, vemos que g es subaditiva. Sea D una combinación convexa D de elementos de $\mathcal{A}$, entonces

$$l(y) = \sum_{k=1}^{n} a_k l(A_k y) = l(Dy) \leq p(Dy), \ \ y \in Y.$$

Luego, tomando el ínfimo sobre todas las combinaciones convexas D de elementos de $\mathcal{A}$, vemos que $l(y) \leq g(y)$. Por lo tanto, por el teorema de Hahn-Banach, l se puede extender como una funcón lineal en X con la propiedad $l(x) \leq g(x)$, para todo $x \in X$.

Finalmente, tenemos que probar que $l(Ax) = l(x)$ para toda $A \in \mathcal{A}$ y todo $x \in X$. Para ello consideremos $A \in \mathcal{A}$ y la combinacion convexa C_n definida por

$$C_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} A^n.$$

Luego, para cada $x \in X$ se tiene que

$$g(x - Ax) \leq p(C_n(x - Ax)) = \frac{1}{n} p(Ax - A^{n+1}x) \leq \frac{p(x) + p(-x)}{n}. \tag{7.4}$$

Por lo tanto $g(x - Ax) \leq \frac{p(x)+p(-x)}{n}$. Tomando el límite cuando n tiende al infinito vemos que $g(x - Ax) \leq 0$. Esto implica que $l(x) \leq l(Ax)$. Cambiando x por $-x$ vemos que $l(-x) \leq l(-Ax)$.

□

7.2. Límites de Banach

Consideremos el conjunto B de sucesiones reales acotadas $x := \{x_n : n \geq 1\}$. B es un espacio vectorial normado sobre los reales. Ahora, definimos en B la función

$$p(x) := \limsup_{n\to\infty} x_n.$$

p es homogenea positiva y subaditiva. Sea A la transformación lineal

$$Ax := \{x_{n+1} : n \geq 1\}.$$

Notemos que $p(Ax) = p(x)$ para $x \in B$. Sea Y el subconjunto de B de sucesiones convergentes.Claramente es un subespacio de B. En Y definimos el funcional lineal

$$l(y) = \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Tenemos que $l(y) = p(y)$ para $y \in Y$. Ademas $AY \subset A$. Luego, por el teorema de Agnew-Morse, l tiene una extensión a todo el espacio B, que sigue siendo lineal, invariante bajo la acción de A y dominada por p.

Teorema 7.3. *Sea B el conjunto de sucesiones reales acotadas e Y el conjunto de sucesiones reales acotadas convergentes. Luego, a toda sucesión $x \in B$ podemos asociarle un número real*

$$\text{LIM } x_n,$$

que satisface las siguientes propiedades.

(i) *Si $y \in Y$, LIM $y_n = \lim_{n\to\infty} y_n$.*

(ii) *Para todo para $x, y \in B$*

$$\text{LIM } (x_n + y_n) = \text{LIM } x_n + \text{LIM } y_n.$$

(iii) *Para todo $x \in B$ y k natural*

$$\text{LIM } x_{n+k} = \text{LIM } x_n.$$

(iv) *Para todo $x \in B$*

$$\liminf_{n\to\infty} x_n \leq \text{LIM } x_n \leq \limsup_{n\to\infty} x_n.$$

Ejercicio. Muestre que se puede definir un límite de Banach que coincida con el límite de Cesaro para las sucesiones Cesaro-convergentes; esto es, las sucesiones para las cuales

$$c(x) := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} x_n$$

existe.

7.3. Promediabilidad y descomposiciones paradójicas

El año 1924, Banach y Tarski establecen que es posible dividir una bola euclidiana en una cantidad finita de pedazos que al ser rearmados forman dos bolas disjuntas idénticas a la original. Anteriormente, Hausdorff había establecido una versión débil de tal resultado, motivado por el problema de existencia de medidas definidas en la potencia de un conjunto. En esta sección mostraremos el lazo estrecho que existe entre la no existencia de medidas finitamente aditivas definidas en la potencia de un conjunto, la posibilidad de que un conjunto tenga una descomposición paradójica en el sentido del trabajo de Banach y Tarski, y el teorema de extensión de Hahn-Banach.

Decimos que un grupo G actúa sobre un conjunto X si a cada $g \in G$ le corresponde una función de X en X denotada tambén por g, de modo que si $g, h \in G$ entonces $g(h(x)) = (gh)(x)$ y $1(x) = x$.

Definición 7.4. Conjuntos paradójicos. Sea G un grupo actuando sobre un conjunto X y sea $E \subset X$. Decimos que E es G-paradójico (o paradójico respecto a G) si existen enteros positivos n, m y subconjuntos $A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_m$ en E y $g_1, \ldots, g_n, h_1, \ldots, h_m \in G$ tales que $E = \cup g_i(A_i) = h_j(B_j)$. Si $E = X = G$, la acción de G se reduce a multiplicación por la izquierda, y E es G-paradójico, decimos simplemente que el grupo G es paradójico.

Como lo estableció Galileo, sabemos que el conjunto de números naturales es paradójico respecto a su grupo de permutaciones. En general, cualquier conjunto de cardinalidad infinita es paradójico respecto a su grupo de permutaciones. Lo sorprendente de la paradoja de Banach-Tarski, es que establece la existencia de conjuntos paradójicos respecto al grupo de isometrías.

El siguiente lema constituye una observación fundamental en la demostración de la paradoja de Banach-Tarski.

Lema 7.5. *Todo grupo libre con dos generadores es paradójico.*

Demostración. Sean a y b dos generadores del grupo libre G. Denotaremos por $W(a), W(b)$, $W(a^{-1}), W(b^{-1})$ a los conjuntos de palabras reducidas que comienzan por a, b, a^{-1}, b^{-1} respectivamente. Notemos que $G = \{1\} \cup \{W(a)\} \cup \{W(b)\} \cup \{W(a^{-1})\} \cup \{W(b^{-1})\}$, donde la unión es disjunta. Pero $G = W(a) \cup aW(a^{-1})$ y $G = W(b) \cup bW(b^{-1})$. $\square$

Es posible mostrar que la descomposición paradójica del lema anterior se puede fectuar con subconjuntos disjuntos cuya unión sea todo el grupo libre G.

Teorema 7.6. Paradoja de Banach-Tarski. *Toda bola en $\mathbb{R}^3$ es paradójica respecto al grupo de isometrías de $\mathbb{R}^3$.*

Notemos que los subconjuntos de la descomposición paradójica de la bola euclidiana en $\mathbb{R}^3$ necesariamente no pueden ser Lebesgue medibles. En efecto, si lo fueran, existirían subconjuntos $A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_m$ de la bola de volumen unitario con la propiedad $2 = \sum m_3(A_i) + \sum m_3(B_j) \leq 1$, donde m_3 es la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^3$. Esta observación nos indica también que la medida de Lebesgue no se puede extender a todos los subconjuntos de la bola tridimensional, aunque sólo le exigamos a tal extensión ser finitamente aditiva. Esta observación nos motiva a introducir el concepto de promediabilidad.

Definición 7.7. Grupos promediables. Decimos que un grupo G es promediable, si existe una medida finitamente aditiva μ definida en G que es invariante bajo la acción de G por la izquierda y tal que $\mu(G) = 1$. Es decir, existe una función $\mu : \mathcal{P}(G) \to [0, 1]$ tal que, $\mu(G) = 1$, $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ para A y B subconjuntos disjuntos de G, y además $\mu(gA) = \mu(A)$ para todo subconjunto A de G y $g \in G$. Llamamos a μ una medida promediable.

El siguiente lema es evidente.

Lema 7.8. *Si G es un grupo promediable, entonces no es paradójico.*

Teorema 7.9. *SO_2 es promediable*

DEMOSTRACIÓN. Sea B el conjunto de todas las funciones reales acotadas definidas en S^1. Sea Y el conjunto de las funciones Lebesgue medibles en S^1. Definimos para $y \in Y$

$$l(y) = \int ydm,$$

donde m es la medida de Lebesgue. Sea $\mathcal{A}$ el grupo de isometrías o rotaciones de S^1. Notemos que $AY \subset Y$ y $l(Ay) = l(y)$ para todo $A \in \mathcal{A}$ e $y \in Y$. Definimos para $x \in B$

$$p(x) = \inf\{l(y) : x \leq y\}.$$

Notemos que el ínfimo en esta definición siempre toma valores finitos. En efecto, si y_0 es la función idénticamente igual a 1, y $x \in B$ es tal que $|x| \leq c$, entonces $-cy_0 \leq x \leq cy_0$. Notemos que p es homogeneo positivo, subaditivo e invariante bajo rotaciones. Luego, por el teorema de Agnew-Morse, l se puede extender a B de modo que sea lineal, invariante bajo rotaciones y dominado por p. Ahora definimos $m(A) = l(1_A)$, donde $A \subset S^1$. Es fácil constatar que $m(A)$ es una medida promediable. □

Como S^1 es una representación de su grupo de isometrías, este resultado muestra que existe una medida finitamente aditiva, invariante bajo rotaciones, definida en S^1.

Corolario 7.10. *S^1 no es SO_2-paradójico.*

Es interesante notar que sin embargo el siguiente resultado se satiasface.

Teorema 7.11. *S^1 es numerablemente SO_2-paradójico.*

DEMOSTRACIÓN. Decimos que dos puntos de S^1 son equivalentes si podemos pasar de uno al otro por una rotación que es un múltiplo racional de 2π. Para cada clase de equivalencia definida con esta relación, elegimos un representante ocupando el axioma de elección. Llamamos M al conjunto de tales elementos. Sea $\{\rho_i : i \geq 1\}$ el conjunto de rotaciones que son un múltiplo racional de 2π y $M_i = \rho_i M$. Luego los conjuntos $\{M_i\}$ forman una partición de S_1. Por otra parte la colección de tales conjuntos con índices pares pueden ser rotados individualmente para cubrir todo el círculo. Lo mismo se puede afirmar sobre la colección con índices impares. □

Corolario 7.12. *(i) No existe ninguna medida positiva finita no trivial definida en $(S^1, \mathcal{P}(S^1))$.*

(ii) No existe ninguna medida positiva no trivial finita en $[0,1]^n$ que sea invariante por traslaciones definida en $(\mathbb{R}^n, \mathcal{P}(\mathbb{R}^n))$.

Teorema 7.13. *El grupo $\mathbb{Z}$ es promediable.*

DEMOSTRACIÓN. Sea l el límite de Banach definido en las sucesiones acotadas. Sea $A \subset \mathbb{Z}$. Definimos la sucesión $x = \{x_n : n \geq 1\}$ como $x_n = 1$ si $n \in A$ y $x_n = 0$ si $n \notin A$. Luego definimos $\mu(A) = l(x)$. Como l coincide con el límite usual cuando existe, es obvio que $\mu(\mathbb{Z}) = 1$. Por otra parte, es fácil constatar que μ es finitamente aditiva. □

Corolario 7.14. *$\mathbb{Z}$ no es paradójico respecto al grupo de traslaciones. Por lo tanto no es paradójico respecto a su grupo de isometrías.*

Nuestro objetivo ahora es demostrar el siguiente teorema.

Teorema 7.15. Hausdorff, 1914. *Existe un subconjunto denso D de S^2 tal que S^2/D es SO_3-paradójico.*

Para ello, primero demostramos la siguiente proposición que muestra como trasladar desde un grupo a un conjunto donde actúa la propiedad de ser paradójico. Decimos que un grupo actúa en un conjunto sin puntos fijos no triviales, si los únicos puntos fijos son aquellos fijados por la identidad.

Proposición 7.16. *Si G es un grupo paradójico que actúa sobre un conjunto X sin puntos fijos no triviales, entonces X es G-paradójico. Por lo tanto si F es un grupo libre de rango 2 actuando sobre X, entonces X es F-paradójico.*

Demostración. Sea $A_i, B_j \in G$ y $g_i, h_j \in G$ una realización de una descomposición paradójica de G. Por el axioma de elección existe un conjunto M que contiene exactamente un elemento de cada órbita en X generada por G. Como no existen puntos fijos no triviales, el conjunto $\{g(M) : g \in G\}$ forma una partición de X. Sea $\bar{A}_i = \cup\{g(M) : g \in A_i\}$ y $\bar{B}_j = \cup\{g(M) : g \in B_j\}$. La colección de conjuntos $\{\bar{A}_i\}$ y $\{\bar{B}_j\}$, es disjunta de a pares y claramente $X = \cup g_i\bar{A}_i = \cup h_j\bar{B}_j$. □

Ahora, el teorema de Hausdorff, es una consecuencia directa del siguiente lema.

Lema 7.17. *El grupo SO_3, tiene un subgrupo libre de rango 2.*

Existe una relación interesante entre el concepto de promediabilidad y el de crecimiento de un grupo, que introducimos a continuación.

Definición 7.18. Función de crecimiento. Si S es un subconjunto finito de un grupo G, definimos la función de crecimiento $\gamma_S(n)\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, como el número de elementos de G que se pueden representar como palabras reducidas de longitud a lo más n ocupando elementos de $S \cup S^{-1}$.

Notemos que γ_S es creciente. Además $\gamma_S(0) = 1$ y $\gamma_S(1) = |\{1\} \cup S \cup S^{-1}|$.

Lema 7.19. *Sea G un grupo y S un subconjunto finito de G. Luego las siguientes afirmaciones son verdaderas.*

(i) *$\gamma_S(n)$ está acotada por una función de crecimiento exponencial.*

(ii) *Si G contiene un subgrupo libre de rango 2, y S contiene a dos generadores de tal grupo libre, entonces $\gamma_S(n) \geq 2^n$.*

(iii) *Si G es abeliano, γ_S está acotada por un polinomio de grado $|S| + 1$.*

Demostración. Para probar (i) notemos que $\gamma_S(n+m) \leq \gamma_S(n)\gamma_S(m)$. Luego $\gamma_S(n) \leq \gamma_S(1)^n$. La parte (ii) es evidente. Para probar (iii) notemos que si $S = \{g_1, \ldots, g_r\}$, emtonces toda palabra reducida que ocupe elementos de $S \cup S^{-1}$, es necesariamente de la forma $g_1^{m_1} \cdots g_r^{m_r}$. Luego, el conjunto de palabras reducidas de largo n tiene a lo más $(2n+1)^r$ elementos. Por lo tanto $\gamma_S(n) \leq n(2n+1)^r$. □

Definición 7.20. Grupos exponencialmente acotados y de crecimiento exponencial. Decimos que un grupo G es exponencialmente acotado si para todo $S \subset G$ finito y $b > 1$ existe un n_0 natural tal que $\gamma_S(n) < b^n$ para $n \geq n_0$. Si G no es exponencialmente acotado, decimos que es de crecimiento exponencial.

El siguiente resultado, que no demostraremos, muestra la importancia del concepto de grupos exponencialmente acotados.

Teorema 7.21. *Si G es finitamente generado y exponencialmente acotado, entonces es promediable.*

Milnor y Wolf conjecturaron que todo grupo finitamente generado y exponencialmente acotado es de crecimiento polinomial. Esta conjetura se concoció como la conjetura de Wolf-Milnor. El siguiente resultado de Grigorchuck, mostró que tal conjetura es falsa, estableciendo la existencia de los llamados grupos de crecimiento intermedio.

Teorema 7.22. Grigorchuck, 1984. *Existen grupos finitamente generados y exponencialmente acotados que no son de crecimiento polinomial.*