7.4. Duales de espacios normados

Definición 7.23. Duales de espacios normados. Consideremos un espacio vectorial normado X sobre los reales o los complejos. Llamamos el **dual** de X al conjunto de todos los funcionales reales continuos X' definidos en X.

Recordemos el siguiente resultado demostrado en el capítulo 2.

Teorema 7.24. *El dual X' de todo espacio vectorial normado real o complejo, es un espacio de Banach bajo la norma*

$$|l| = \sup_{x\neq 0} \frac{|l(x)|}{|x|}.$$

El siguiente corolario del teorema de Hahn-Banach, permite construír funcionales lineales.

Teorema 7.25. *Sea X un espacio vectorial real, Y un subespacio y l un funcional lineal definido en Y acotado en Y. Luego l se puede extender a X como un funcional lineal de modo que su cota en X coincide con su cota en Y.*

Corolario 7.26. *Sean $y_1, \ldots, y_n$ un conjunto de n elementos linealmente independientes en un espacio vectorial normado real X. Sean $a_1, \ldots, a_n$ números complejos. Luego existe un funcional lineal l acotado tal que*

$$l(y_i) = a_i,$$

para $1 \leq i \leq n$.

Demostración. Sea Y el subespacio generado por $y_1, \ldots, y_n$. Todo elemento $y \in Y$ se puede represntar en forma única como

$$y = \sum_{i=1}^{n} b_i y_i.$$

Definimos

$$l(y) = \sum_{i=1}^{n} b_i a_i.$$

Claramente l es lineal y acotado en Y y satisface $l(y_i) = a_i$. Por el toerema anterior se puede extender a todo X como un funcional lineal acotado. □

El siguiente tereoma es también un corolario del teorema 7.25.

Teorema 7.27. *Sea x un elemento de un espacio vectorial real X. Luego*

$$||x|| = \sup\{|l(x)| : l \in X', ||l|| \leq 1\}.$$

Demostración. El caso $x = 0$ es obvio. Luego suponemos que $x \neq 0$. Como $|l(x)| \leq ||l||||x|| \leq ||x||$ para l con $||l|| \leq 1$, tenemos que $||x|| \geq \sup\{|l(x)| : l \in X', ||l|| \leq 1\}$. Ahora, sea l_0 un funcional lineal definido en el subespacio generado por x como $l_0(ax) = a||x||$ para a real. Por el teorema 7.25, l_0 tiene una extensión a X como un funcional lineal acotado con norma $||l_0|| = ||x||$. Por lo tanto $||x|| = \sup\{|l(x)| : l \in X', ||l|| \leq 1\}$. □

Teorema 7.28. *Sea Y un subespacio lineal de un espacio vectorial normado real X y $x_0 \in Y$. Luego x_0 está en la clausura de Y si y sólo si no existe un funcional lineal continuo f en X tal que $f(x) = 0$ para todo $x \in Y$ y $f(x_0) \neq 0$.*

Demostración. Supongamos que $x_0 \notin \bar{Y}$. Luego $\inf_{x \in M} |x - x_0| > \delta$ para algún $\delta > 0$. Definimos en Y', el subespacio generado por Y y x_0 el funcional lineal

$$f(x + \lambda x_0) = \lambda,$$

para $x \in Y$, λ real. Pero

$$\delta|\lambda| \leq |\lambda||x_0 + \lambda^{-1}x| = |\lambda x_0 + x|.$$

Luego f tiene una norma acotada por δ^{-1}. Por el teorema anterior, podemos extender f a todo el espacio X. □

Consideremos una función continua $w(t) : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ que decae exponencialmente cuando $|t| \to \infty$. Es decir

$$0 < w(t) < ae^{-c|t|},$$

para $c > 0$. Consideremos el espacio $C_0(\mathbb{R})$ de funciones continuas en $\mathbb{R}$ que tienden a 0 en infinito. Es decir, funciones continuas f tales que para todo $\epsilon > 0$, existe un compacto K tal que $|f(x)| < \epsilon$ si $x \notin K$. Este es un espacio de Banach con la norma del supremo. El teorema 7.28 tiene la siguiente aplicación.

Teorema 7.29. *Sea w una función continua que decae exponencialmente. Luego toda función en $C_0(\mathbb{R})$ se puede aproximar uniformemente por combinaciones lineales de funciones del conjunto $\{t^n w(t) : n \geq 0\}$.*

En un espacio de Banach de dimensión infinita, las bolas cerradas no son compactas. Por esa razón introduciremos otras topologías en los espacios de Banach.

Lema 7.30. *Sea Y un subespacio propio, cerrado de un espacio vectorial normado X. Luego existe un $x \in X$ tal que $|x| = 1$ y $|x - y| > 1/2$ para todo $y \in Y$.*

Demostración. Sea $x' \in X$ tal que $x' \notin Y$ y $\inf_{y \in Y} |y - x'| := d > 0$. Ahora sea $y_0 \in Y$ tal que

$$|x' - y_0| < 2d.$$

Definimos $y' = x' - y_0$. Entonces

$$|y'| < 2d.$$

Además

$$|y' - y| \geq d,$$

para todo $y \in Y$. Definimos $x = x/|x|$.

□

Corolario 7.31. *Sea X un espacio vecotrial normado de dimensión infinita. Luego, la bola unitaria cerrada $B_1 := \{x : |x| \leq 1\}$ no es compacta.*

Demostración. Por el lema anterior es fácil construír una sucesión $\{y_n\}$ tal que la deistancia entre cualquier par de sus elementos sea mayor o igual a $1/2$. $\square$

Introduciremos ahora la topologías débil y la topología débil-*. Necesitamos primero discutir algunas nociones generales de topología.

Definición 7.32. Topología débil determinada por una familia de funciones. Sea X un conjunto, Y un espacio topológico y $\mathcal{F}$ una familia de funciones de X en Y. Consideremos la colección de subconjuntos $\mathcal{S}$ de X de la forma

$$\{x \in X : f^{-1}(U)\},$$

indexados por $f \in \mathcal{F}$ y U abierto en Y. Definimos la **topología débil en** X **determinada por** $\mathcal{F}$, como los conjuntos que son uniones arbitrarias de intersecciones finitas de elementos de $\mathcal{S}$.

Dejamos al lector la demostración del siguiente resultado.

Lema 7.33. *La colección de conjuntos que son uniones finitas de los elementos de $\mathcal{S}$ forman una base.*

Lema 7.34. *Sea X un conjunto, Y un espacio topológico y $\mathcal{F}$ una familia de funciones de X en Y. Luego la topología débil en X determinada por $\mathcal{F}$ es la más pequeña tal que las funciones $\mathcal{F}$ son continuas.*

Demostración. Es fácil ver que si X tiene la topología débil determinada por $\mathcal{F}$, entonces todas las funciones en $\mathcal{F}$ son continuas. En efecto, basta observar que todo conjunto de la forma $f^{-1}(G)$ con $f \in \mathcal{F}$ y G abierto se puede expresar como una unión de elementos de la base. Por otra parte, si A es un abierto en la topología débil de X, por definición A es una unión de intersecciones finitas de conjuntos de la forma $f^{-1}(G)$ con $f \in \mathcal{F}$ y G abierto en Y. $\square$

Una función $f : X \to Y$, donde X e Y son espacios topológicos se llama **secuencialmente continua**, si cada vez que una sucesión $\{x_n\}$ en X converge a $x \in X$, entonces $f(x_n)$ converge a $f(x)$. En un espacio topológico, toda función continua es secuencialmente continua. Luego tenemos el siguiente corolario.

Corolario 7.35. *Sea X un conjunto, Y un espacio topológico y $\mathcal{F}$ una familia de funciones de X en Y. Si X tiene la topología débil determinada por $\mathcal{F}$, entonces toda función $f \in \mathcal{F}$ es secuencialmente continua. Más aún, si $\{x_n\}$ es una sucesión en X y $x \in X$, entonces x_n converge a x ssi $f(x_n)$ converge a $f(x)$ para toda función $f \in \mathcal{F}$.*

Ahora introducimos el concepto de topología débil en el contexto de espacios de Banach.

Definición 7.36. Topología débil. Sea X un espacio de Banach y X' su dual. Definimos la topología débil en X como la topología débil determinada por X'.

Dado un espacio vectorial normado real X, denotamos el dual del dual X' por X''. Dado $x \in X$, definimos la función q_x desde X' en los reales por $q_x(l) = l(x)$. Es obvio que q_x es un funcional lineal en X'. Además, por el teorema ??

$$\sup\{|q_x(l)| : l \in X', ||l|| \leq 1\} = ||x||.$$

Luego $||q_x|| = ||x||$ y q_x es un funcional lineal acotado en X'. Definimos el **mapeo natural** $q : X \to X''$ como q_x. Claramente el mapeo natural es lineal y un isomorfismo isométrico.

Lema 7.37. *Sea X un espacio vectorial normado real y sea $q_x(l) = l(x)$ para $x \in X$ y $l \in X'$. Luego $q_x \in X''$ para todo $x \in X$. Además $q : X \to X''$ definido por $q(x) = q_x$ define una isometría entre X y $q(X)$.*

Definición 7.38. Espacios reflexivos. Un espacio vectorial normado real X se llama **reflexivo** si el mapeo natural de X en X'' es sobre.

Notemos que tenemos el siguiente resultado inmediato.

Teorema 7.39. *Todo espacio vectorial normado real reflexivo es de Banach.*

Podemos ahora además definir la llamada topología débil-$*$.

Definición 7.40. Topología débil-$*$. Sea X un espacio vectorial normado real y q el mapeo natural de X en X''. Definimos en X' la topología débil-$*$ como la topología débil en X' determinada por $q(X)$.

Además tenemos el siguiente resultado.

Teorema 7.41. *Sea X un espacio vectorial normado reflexivo. Luego su dual X' es reflexivo.*

Demostración. Sea $w \in X'''$. Basta probar que existe un $l \in X'$ tal que $w(d) = d(l)$ para todo $d \in X''$. Pero en efecto, pra todo $d \in X''$ existe un $x \in X$ tal que $d(l) = l(x)$. Luego definimos $l \in X''$ como
$$l(x) = w(d).$$
Claramente l es un funcional lineal. Además, $|l(x)| = |w(d)| \leq |w||d| = |w||x|$. Esto muestra que l es acotado. □

Nuestro siguiente obejetivo es probar que en un espacio vectorial normado reflexivo, la bola unitaria cerrada es débilmente secuencialmente compacta.

Teorema 7.42. *Sea Y un espacio vectorial cerrado de un espacio de Banach reflexivo. Luego Y es reflexivo.*

Demostración. Notemos que la restricción de todo funcional lineal avcotado l en X a Y es un funcional lineal acotado en Y. Lo denotaremos por l_0. Por el teorema de Hahn-Banach sabemos que la restricción $l \to l_0$, desde X' en Y' es sobre. Ahora, para cada $\eta \in Y''$ definimos $\zeta \in X''$ por
$$\zeta(l) = \eta(l_0),$$
para cada $l \in X'$. Como X es reflexivo, podemos identificar a ζ con un elemento $z \in X$ de modo que $\zeta(l) = l(z)$. Luego,
$$l(z) = \eta(l_0).$$
Ahora, si l es cero en Y, entonces $l_0 = 0$ y luego $l(z) = 0$. Por el teorema ??, concluímos que $z \in \bar{Y}$. Como Y es cerrado, vemos que $z \in Y$. Luego
$$l_0(z) = \eta(l_0).$$
Como todo funcional lineal acotado de Y es de la forma l_0, esta ecuación muestra que podemos identificar todo $\eta \in Y''$ con algún elemnto $z \in Y$.

□

Teorema 7.43. *Sea X un espacio vectorial normado. Si X' es separable, entonces X también lo es.*

Demostración. Sea $\{l_n\}$ un conjunto denso y numerable en X'. Por definición, para cada n existe un $x_n \in X$ tal que $|x_n| = 1$ y $|l_n(x_n)| > |l_n|/2$. Probaremos que el conjunto numerable $\{x_n\}$ genera un subespacio cuya clausura es X. Sea entonces l un funcional lineal tal que $l(x_n) = 0$ para todo n. Supongamos además que $|l| = 1$. Por la densidad de $\{l_n\}$ podemos encontrar un l_n tal que

$$|l - l_n| < 1/3.$$

Luego

$$|l_n| > 2/3.$$

Por lo tanto

$$\frac{1}{3} > |(l - l_n)(x_n)| = |l_n(x_n)| > \frac{1}{2}|l_n|,$$

lo que es una contradicción. Luego, las combinaciones lineales finitas de los elemntos de $\{x_n\}$ con coeficientes racionales, son densas en X. □

Teorema 7.44. *Sea X un espacio vectorial normado. Supongamos que $\{x_n\}$ es una sucesión que es uniformemente acotada, es decir $\sup_n |x_n| < \infty$, y tal que $\lim_{n\to\infty} l(x_n) = l(x)$ para un $l \in A$, donde A es un subconjunto denso en X'. Luego $w - \lim_{n\to\infty} x_n = x$.*

Demostración. Sea $l \in X'$. Luego, para todo $\epsilon > 0$ existe un $l' \in A$ tal que $|l - l'| < \epsilon$. Por lo tanto

$$|l(x_n) - l(x)| \leq \limsup_{n\to\infty} \left(|l(x_n) - l'(x_n)| + |l'(x_n) - l'(x)| + |l'(x) - l(x)|\right) \tag{7.5}$$

$$\leq \epsilon(c + |x|). \tag{7.6}$$

Como $\epsilon > 0$ es arbitrario, esto prueba la convergencia débil. □

Ahora, notemos que la sigueinte afirmación conversa es cierta.

Lema 7.45. *Sea $\{x_n\}$ una sucesión débilmente convergente en un espacio vectorial normado. Entonces $\sup_n |x_n| < \infty$.*

Demostración. Consideremos la colección de funcionales lineales $\{q_x : x \in X\}$ de X'' definidos por $q_x(l) = l(x)$ para cada $l \in X'$. Como $l(x_n)$ es convergente a $l(x)$ para todo $l \in X'$, tenemos que

$$\sup_n |q_{x_n}(l)| < \infty.$$

Como X' es un espacio de Banach, por el teorema de Banach-Steinhaus vemos que

$$\sup_n |x_n| = \sup_n |q_{x_n}| < \infty.$$

□

Teorema 7.46. *Si X es un espacio de Banach reflexivo, entonces la bola unitaria cerrada es débilmente secuencialmente compacta.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\{x_n\}$ una sucesión de puntos en la bola unitaria. Llamamos Y a la clausura del subespacio generado por $\{x_n\}$. Notemos que Y es separable. Como X es reflexivo, por el teorema 7.39, Y es reflexivo. Luego Y es isométrico a Y'', y por lo tanto Y'' es separable. Por el teorema 7.43, Y' es separable. Sea $\{l_j\}$ un subconjunto denso y numerable dde Y'. Por diagonalización, existe una subsucesión $\{y_n\}$ de $\{x_n\}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} l_j(y_n),$$

existe para todo j. Como $|y_n| \leq 1$ y $\{l_j\}$ son densos en Y', por el teorema 7.44, para todo $l \in Y'$, $l(y_n)$ tiende a un límite cuando n tiende a infinito. Definimos entonces el funcional lineal $L \in Y''$ como

$$L(l) := \lim_{n\to\infty} l(y_n).$$

Ahora, $|l(y_n)| \leq |l|$. Luego $|L| \leq 1$. Como Y es reflexivo, existe un $y \in Y$ tal que $L(l) = l(y)$, con $|y| \leq 1$. Por lo tanto $l(y_n)$ converge a $l(y)$ para todo $l \in Y'$. Pero todo $l \in X'$ tiene una restricción a Y que define un $l \in Y'$. Luego y_n converge débilmente a y. □

Es posbile demostrar el siguiente resultado.

Teorema 7.47. *Sea X un espacio de Banach. Luego, la topología débil de X es metrizable ssi X tiene dimensión finita.*

A pesar de lo anterior, Eberlain y Smulian probaron que los conceptos de compacidad de punto límite, compacidad secuencial y compacidad, coinciden para los subconjuntos de un espacio vectorial normado con la topología débil.

Finalmente, demostramos el siguiente resultado para la topología débil-*.

Teorema 7.48. Banach-Alaoglu. *Sea X un espacio vectorial normado. Luego la bola cerrada $\{l \in X' : ||l|| \leq 1\}$ es débilmente $*$-compacta.*

DEMOSTRACIÓN. Sea B la bola cerrada en X'. Sea

$$\Omega := \prod_{x\in X} [-|x|, |x|].$$

Asociamos la colección de números $\{l(x) : x \in X\}$ a cada $l \in B$. Como $|l| \leq 1$, tenemos que $|l(x)| \leq |x|$. Luego, esto define una función inyectiva I que incrusta B en Ω. Definimos en Ω la topología producto como la topología débil determinada por la colección de proyecciones naturales $\pi_x : \Omega \to \mathbb{R}$ definidas por $\pi_x(w) = w(x)$. Por definición, la topología débil-* de B coincide con la topología de B definida por $I(B)$ como subespacio de Ω con la topología producto. Ahora, por el teorema de Tychonov, Ω es compacto. Luego basta probar que $I(B)$ es cerrado en Ω. Sea m un punto en la clausura de $I(B)$. Notemos que m define una función en X cuyo valor en $x \in X$ es $m(x)$. Tenemos que probar que esta función es lineal y está en B. Ahora, sabemos que existe una sucesión $\{m_n\}$ en B tal que para cada $x \in X$, $m_n(x)$ converge a $m(x)$. Pero m_n son lineales. Esto prueba que m es lineal. Es obvio que m tiene una norma acotada por 1. □

Corolario 7.49. *Sea X un espacio vectorial normado reflexivo. Luego, la bola unitaria cerrada es débilmente compacta.*

Demostración. Como X es reflexivo, X' es reflexivo. Luego, la topología debil de X'' coincide con su topología débil-*. Por lo tanto, por el teorema de Banach-Alaoglu, la bola unitaria en X'' es débilmente compacta. Pero como X es relfexivo, esto implica que la bola unitaria en X es débilmente compacta. $\square$