

ANALISIS II

Prof. Alejandro Ramírez

Facultad de Matemáticas, PUC

Tarea 1

1. **Medida de Lebesgue.** Demuestre que la medida de Lebesgue de un intervalo coincide con su longitud.
2. **Medida de Baire y Lebesgue.** Considere una función de distribución acumulativa y su medida de Baire ν . Suponga que F es continua. Sea E un Boreliano contenido en el rango de F . Demuestre que $m(E) = \nu(F^{-1}(E))$, donde m es la medida de Lebesgue.
3. **Funciones de distribución cumulativas.** Sea F una función monótona creciente y defina

$$F^*(x) = \lim_{y \rightarrow x^+} F(y).$$

Demuestre que F^* es monótona creciente continua por la derecha y que coincide con F en todos los puntos donde F es continua por la derecha. Además, si F y G son monótonas crecientes que coinciden en todos los puntos donde ambas son continuas, demuestre que $F^* = G^*$.

4. **Dimensión de Hausdorff del conjunto ternario de Cantor.** Demuestre que la dimensión de Hausdorff del conjunto ternario de Cantor es $(\log 2)/(\log 3)$.
5. **Definición de la dimensión de Hausdorff.** Pruebe que

$$\inf\{\alpha > 0 : \mu^\alpha(F) = 0\} = \sup\{\alpha > 0 : \mu^\alpha(F) = \infty\}.$$

6. **Conjuntos cerrados perfectos.** Dado un intervalo cerrado $E_0 := [a, b]$ de largo $l = b - a$, definimos la disección de tipo $(3, 1/5)$: dividimos el intervalo en cinco intervalos disjuntos de largo $l/5$ cada uno. Luego, la disección de tipo $(3, 1/5)$ de tal intervalo es la clausura de la unión del primer, tercer y último segmento de tal descomposición. Es decir $E_0 = E_{1,1} \cup E_{1,2} \cup E_{1,3}$, donde cada $E_{1,i}$, $1 \leq i \leq 3$, es un intervalo cerrado de largo $l/5$. A continuación definimos E_1 como la unión de las disecciones de tipo $(3, 1/5)$ de cada uno de los tres intervalos disjuntos que componen E_0 . En general, para $k \geq 1$ definimos E_{k+1} como la unión de las disecciones de tipo $(3, 1/5)$ de los intervalos disjuntos que componen E_k . Ahora definimos,

$$E := \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k.$$

- (i) Para $0 < \alpha \leq 1$, calcule la medida de Hausdorff en la dimensión α de E .
- (ii) Calcule la dimensión de Hausdorff de E .