ANALISIS II

Prof. Alejandro Ramírez

Facultad de Matemáticas, PUC

Tarea 2

1. **Medibilidad**. Sea μ una medida finita en un álgebra $\mathcal{A}$y μ^* la medida externa inducida. Muestre que un conjunto E es medible si y sólo si para cada $\epsilon > 0$ existe un conjunto $A \in \mathcal{A}_\delta$, $A \subset E$, tal que $\mu^*(E - A) < \epsilon$.
2. **Teorema de Luzin en un intervalo**. Considere $(\mathbf{R}, \mathcal{M}, \mu)$ donde μ es la medida de Lebesgue y $\mathcal{M}$ los conjuntos medibles. Sea f una función medible real en $[a, b]$. Demuestre que dado $\delta > 0$ existe una función continua ϕ en $[a, b]$ tal que $\mu(x : f(x) \neq \phi(x)) < \delta$.
3. **Unicidad**. Sea X el conjunto de números racionales y $\mathcal{A}$ el álgebra de uniones finitas de intervalos de la forma $(a, b]$ con $\mu(a, b] = \infty$ y $\mu\phi = 0$. Demuestre que la extensión de μ a la σ-álgebra más pequeña conteniendo $\mathcal{A}$ no es única.
4. **Medibilidad de abiertos**. Sea $X = Y = [0, 1]$, y $\mu = \nu$ la medida de Lebesgue. Muestre que todo abierto en $X \times Y$ es λ^*-medible (donde $\lambda = \mu \times \nu$), y por lo tanto todo Boreliano en $X \times Y$ es medible.
5. **Tensión.** Consideremos un espacio métrico (X, ρ) con su σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}$. Decimos que una medida μ en $(X, \mathcal{B})$ es de probabilidad si $\mu(X) = 1$. Decimos que tal medida es *tensa* si para todo $\epsilon > 0$ existe un compacto K tal que $\mu(K) \geq 1 - \epsilon$. Demuestre que si X es separable y completo entonces toda medida de probabilidad en $(X, \mathcal{B})$ es tensa.
6. **Funciones Borel-medibles**. Sea f una función Lebesgue medible en $\mathbf{R}^\mathbf{k}$. Pruebe que existen funciones Borel-medibles g y h tales que $g = h$ c.s. y $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ para todo $x \in \mathbf{R}^\mathbf{k}$.
7. **Fubini para la medida conteo**. Sea $X = Y$ el conjunto de los números naturales, con $\mathcal{M} = \mathcal{N} = \mathcal{P}(\mathcal{X})$. Sean $\mu = \nu$ las medidas que le asocian la cardinalidad a cada conjunto. Enuncie los teoremas de Fubini y Tonelli explícitamente en este caso.
8. **Caso en el que Fubini y Tonelli no se satisface**. Sea $X = Y = [0, 1]$ con $\mathcal{M} = \mathcal{N}$ los Borelianos, μ la medida de Lebesgue y ν la medida conteo. Muestre que el conjunto $\Delta = \{(x, y) \in X \times Y : x = y\}$ está en $\mathcal{R}_{\sigma\delta}$, pero que su función característica no satisface las igualdades

$$\int f d(\mu \times \nu) = \int \int f d\mu d\nu = \int \int f d\nu d\mu.$$