ANALISIS II

Prof. Alejandro Ramírez

Facultad de Matemáticas, PUC

Tarea 3

1. **Una métrica en los conjuntos medibles**. Sea μ una medida externa en un conjunto Ω y $\mathcal{M}$ la colección de conjuntos μ-medibles. Sea $\phi : [0, \infty] \to [0, \infty)$ una función acotada cóncava y continua tal que $\phi(x) = 0$ si y sólo si $x = 0$. Definimos en $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$ la función real d por
$$d(A, B) = \phi(\mu(A\Delta B)),$$
donde $A\Delta B$ es la diferencia simétrica entre A y B. Consideremos ahora la colección de clases de equivalencia $\bar{\mathcal{M}}$ de conjuntos de $\mathcal{M}$, bajo la relación $A \sim B$ si $A\Delta B$ tiene medida cero. Demuestre que d es una métrica en $\bar{\mathcal{M}}$, y que el espacio métrico $(\bar{\mathcal{M}}, d)$ es completo.
2. **No compacidad de los conjuntos medibles**. Sea $\Omega = [0, 1]$, $\mathcal{M}$ la σ-álgebra de Borel de Ω y μ la medida conteo en $\mathcal{M}$. Demuestre que el espacio métrico $(\bar{\mathcal{M}}, d)$ no es compacto.
3. **Separabilidad de** $L^p(\mu)$. Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio medible y $1 \leq p < \infty$. Demuestre que $L^p(\mu)$ es separable si y sólo si la medida μ es separable (es decir, si el espacio métrico $(\mathcal{M}, \lceil)$ es separable).
4. **Espacios de Orlicz y grandes desvíos**. Sea $\phi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ una función continua creciente tal que $\lim_{x\to\infty} \phi(x)/x = +\infty$ y $\lim_{x\to 0} \phi(x)/x = 0$. La función complementaria de ϕ, llamada ψ, se define en $[0, \infty)$ por
$$\psi(y) = \sup\{x \geq 0 : xy - \phi(x)\}.$$
Demuestre que ψ es una función convexa tal que $\psi(0) = 0$ y $\lim_{y\to\infty} \psi(y) = +\infty$. Concluya que ψ es continua. Si $\bar{\psi}$ es la función complementari de ψ, ocupando las desigualdades $xy \leq \phi(x) + \psi(y)$ y $xy \leq \psi(x) + \bar{\psi}(y)$, muestre que $\bar{\psi}(x) \leq \phi(x)$. Concluya que $\bar{\psi}$ es el más grande minorante convexo de ϕ. Verifique que si $\phi(x) = x^p/p$ entonces $\psi(y) = y^q/q$, donde $p > 1$ y q son exponentes conjugados.
5. **Asociatividad**. Sea $\phi(t) = 1 - \cos t$ si 0π, $\phi(t) = 0$ para los otros valores reales de t. Para $-\infty < x < \infty$ defina $f(x) = 1, g(x) = \phi'(x)$ y $h(x) = \int_{-\infty}^{x} \phi(t)dt$. Demuestre que $(f * g)(x) = 0$ para todo x y que $(g * h)(x) = (\phi * \phi)(x) > 0$ en $(0, 4\pi)$. Pruebe además que $(f * g) * h = 0$ y que $f * (g * h)$ es una constante positiva.
6. **Separabilidad de funciones continuas en localmente compactos**. Sea (X, ρ) un espacio métrico separable y localmente compacto. Sea $C_0(X)$ el álgebra de funciones continuas que tienden a cero en infinito (es decir, si $f \in C_0(X)$, entonces para todo $\epsilon > 0$ existe un compacto K tal que $|f(x)| < \epsilon$ si $x \notin K$). Demuestre que $C_c(X)$ (funciones continuas de soporte compacto) es denso en $C_0(X)$. Demuestre que $C_0(X)$ es separable.
7. **Clausura de funciones continuas de soporte compacto**. Sea (X, ρ) un espacio métrico. Demuestre que $C_c(X)$ con la norma del supremo no es completo y que su completación es

$C_0(X)$.

8. **Espacios no separables**. Demuestre que l^∞ no es separable. Demuestre que $C(\mathbf{R})$ no es separable.

9. **La ecuación del calor**. Sea $u_0 : \mathbf{R} \to [\mathbf{0}, \infty)$ una función en $L^2(\mathbf{R})$. Suponga que para cada $\epsilon > 0$, la ecuación
$$\frac{\partial u_\epsilon}{\partial t} = \Delta_\epsilon u_\epsilon,$$
con la condición inicial $u_\epsilon(0,x) = u_0(x)$ tiene una solución u_ϵ, donde Δ_ϵ es el Laplaciano discreto. Demuestre que $u_\epsilon \in L^2([0,T] \times \mathbf{R})$. Pruebe además que la colección de funciones $\{u_\epsilon(t,x) : 0 \leq \epsilon \leq 1\}$ es tiene una clausura compacta en $L^2([0,T] \times \mathbf{R})$.