

# A Métrica de Hilbert e Aplicações

Paulo Orenstein

Trabalho de Iniciação Científica  
Orientador: Jairo Bochi  
Departamento de Matemática, PUC-Rio  
26 de agosto de 2009

## 1 Preliminares

### 1.1 Espaços métricos completos

**Definição 1.1.** Uma *métrica* num conjunto  $X$  é uma função  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$  que satisfaz as seguintes condições:

1.  $d(x, y) = 0$  se, e somente se,  $x = y$ ;
2.  $d(x, y) = d(y, x)$  para todo  $x, y \in X$ ;
3.  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$  para todo  $x, y, z \in X$ .

**Definição 1.2.** A bola de centro  $a$  e raio  $r$  num espaço métrico  $(X, d)$  é o conjunto  $B(a, r) = \{x \in X; d(a, x) \leq r\}$ .

**Definição 1.3.** O *diâmetro* de um espaço subconjunto limitado não-vazio  $A$  de um espaço métrico  $(X, d)$  é dado por  $\text{diam } A = \sup\{d(x, y); x, y \in A\}$ .

**Definição 1.4.** Um *espaço métrico* é um conjunto munido de uma métrica.

**Definição 1.5.** Seja  $(X, d)$  um espaço métrico e  $A \subset X$  um subconjunto deste espaço. Chamamos de *fecho* de  $A$  o conjunto  $\bar{A}$  dos pontos  $x \in X$  tais que,  $\forall r > 0$ ,  $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$ .

**Definição 1.6.** A *fronteira* de um conjunto  $X$  é a parte comum ao fecho de  $A$  e seu complementar, *ie.*  $Fr(A) = \bar{A} - A$ . Também denotamos a fronteira de um conjunto  $A$  por  $\partial A$ .

**Definição 1.7.** Dado uma sequência de pontos  $\{x_n\}$ , dizemos que  $x_n$  converge para  $x$  se, dado qualquer  $\epsilon > 0$ , existe um  $N$  tal que se  $n > N$  então  $|x_n - x| < \epsilon$ .

**Definição 1.8.** Uma sequência de pontos  $x_1, x_2, x_3, \dots$  em um espaço métrico é dita *de Cauchy* se, dado qualquer número real  $\epsilon > 0$ , existe um inteiro positivo  $N$  tal que  $d(p_n, p_m) < \epsilon$  para quaisquer  $m, n > N$ .

**Definição 1.9.** Um espaço métrico  $(X, d)$  é dito *completo* se toda sequência de Cauchy de pontos de  $X$  converge para um ponto de  $X$ .

## 1.2 Contrações

**Definição 1.10.** Dado um espaço métrico  $(X, d)$ , uma função  $T : X \rightarrow X$  é chamada uma *contração* se existe um  $\lambda$  com  $0 < \lambda < 1$  tal que

$$d(T(x), T(y)) \leq \lambda d(x, y).$$

**Teorema 1** (Teorema do Ponto Fixo de Banach). *Se  $X$  é um espaço métrico compacto e  $T : X \rightarrow X$  é uma contração, então  $T$  tem um único ponto fixo,  $\bar{x}$ . Além disso, para qualquer  $x_0 \in X$ , a sequência  $(x_n)$  definida indutivamente por  $x_{n+1} = T(x_n)$  converge para  $\bar{x}$ .*

*Demonstração.* A prova é simples e pode ser encontrada em qualquer livro de espaços métricos.  $\square$

## 1.3 Convexidade

**Definição 1.11.** Um conjunto  $X \subset \mathbb{R}^n$  é dito *convexo* se, para todo  $x, y \in X$  e para qualquer  $t \in [0, 1]$ , o ponto  $(1 - t)x + ty$  está em  $X$ .

**Definição 1.12.** Um conjunto não-vazio  $C \subset \mathbb{R}^n$  é chamado um *bom convexo* se possui as seguintes propriedades:

1.  $C$  é convexo.
2.  $C$  é limitado.
3. Existe um subespaço afim  $H \subset \mathbb{R}^n$  contendo  $C$  tal que  $C$  é aberto relativamente a  $H$ .

*Observação 1.13.* Seja  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma bijeção afim. Se  $C$  é um bom convexo, então  $T(C)$  é um bom convexo.

# 2 A Métrica de Hilbert

## 2.1 Dimensão 1

Lembramos que a função tangente hiperbólica, dada por

$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

é uma bijeção contínua de  $\mathbb{R}$  sobre o intervalo  $(-1, 1)$ , com inversa

$$\operatorname{arctanh} y = \frac{1}{2} \log \frac{1+y}{1-y}, \quad y \in (-1, 1).$$

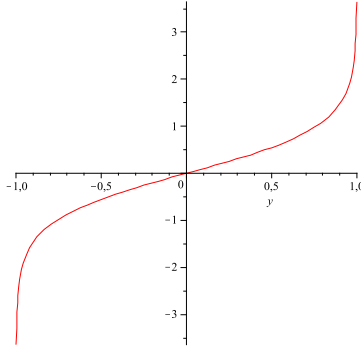


Figura 1: A função arco-tangente hiperbólica.

**Definição 2.1.** Seja  $I \subset \mathbb{R}$  um intervalo aberto limitado, e seja  $f$  a única bijeção afim crescente de  $I$  para  $(-1, 1)$ . A *métrica de Hilbert*  $d_I$  em  $I$  é definida por:

$$d_I(x, y) = 2|\operatorname{arctanh} f(x) - \operatorname{arctanh} f(y)|.$$

Evidentemente as condições da definição 1.1 são satisfeitas.

Vamos achar uma fórmula mais simples para  $d_I$ : Consideramos  $I = (a, b)$  um intervalo aberto limitado qualquer. Seja  $f(z) = \alpha z + \beta$ , e escolhemos  $\alpha$  e  $\beta$  para ter  $f(a) = -1$  e  $f(b) = 1$ , isto é,

$$\alpha = \frac{2}{b-a} \quad e \quad \beta = \frac{a+b}{a-b}$$

Portanto,  $f$  é uma (e, de fato, a única) bijeção afim crescente de  $I$  para  $(-1, 1)$ . Temos que:

$$d_I(x, y) = 2|\operatorname{arctanh} f(y) - \operatorname{arctanh} f(x)|$$

Portanto:

$$\begin{aligned} d_{(a,b)}(x, y) &= 2 \left| \operatorname{arctanh} \left( \frac{2y - a - b}{b - a} \right) - \operatorname{arctanh} \left( \frac{2x - a - b}{b - a} \right) \right| \\ &= \left| \log \left( \frac{2y - 2a}{2b - 2y} \cdot \frac{2b - 2x}{2x - 2a} \right) \right| \end{aligned}$$

Finalmente, supomos sem perda que  $a < x < y < b$ ,

$$d_{(a,b)}(x, y) = \log \left( \frac{y-a}{x-a} \cdot \frac{b-x}{b-y} \right)$$

*Observação 2.2.* A expressão entre parênteses é chamada o *cross ratio* dos pontos  $a, x, y, b$ .

*Observação 2.3.* Note que esta quantidade é decrescente como função de  $a$  ou de  $x$ , e crescente como função de  $b$  ou de  $y$ .

*Observação 2.4.* Dado um segmento de reta  $I$  no espaço  $\mathbb{R}^n$ , também podemos definir a métrica de Hilbert em  $I$ : basta usar uma parametrização afim do segmento.

## 2.2 Princípio do Observador

**Teorema 2.** *Considere dois segmentos  $(a, b)$  e  $(a', b')$  no plano. Fixe um ponto  $O$  fora das retas que contêm esses segmentos. Seja  $x, y \in (a, b)$  e  $x', y' \in (a', b')$  tais que  $O, x, x'$  são colineares e  $O, y, y'$  são colineares (vide figura 1). Então:*

$$d_{(a,b)}(x, y) = d_{(a',b')}(x', y')$$

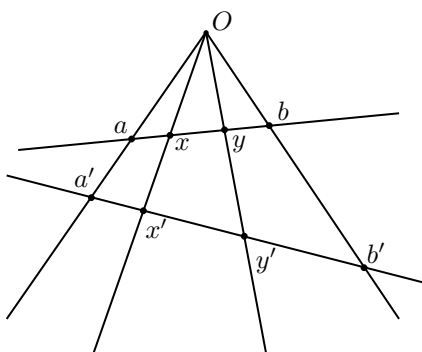


Figura 2: Invariância da Métrica de Hilbert:  $d_{(a,b)}(x, y) = d_{(a',b')}(x', y')$ .

*Demonstração.* Seja  $h$  como na figura 3. A área do triângulo  $Oax$  pode ser expressa como:

$$\frac{1}{2} \cdot \|x - a\| \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \sin \angle(Ox, Oa) \cdot \|Ox\| \cdot \|Oa\|$$

Sabemos que:

$$\exp d_{(a,b)}(x, y) = \frac{\|y - a\|}{\|x - a\|} \cdot \frac{\|b - x\|}{\|b - y\|}$$

Portanto,

$$\exp d_{(a,b)}(x, y) = \frac{\sin \angle(Oy, Oa) \cdot \|Oy\| \cdot \|Oa\|}{\sin \angle(Ox, Oa) \cdot \|Ox\| \cdot \|Oa\|} \cdot \frac{\sin \angle(Ox, Ob) \cdot \|Ox\| \cdot \|Ob\|}{\sin \angle(Oy, Ob) \cdot \|Oy\| \cdot \|Ob\|}$$

Donde segue que:

$$d_{(a,b)}(x, y) = \log \left( \frac{\sin \angle(Oy, Oa)}{\sin \angle(Ox, Oa)} \cdot \frac{\sin \angle(Ox, Ob)}{\sin \angle(Oy, Ob)} \right)$$

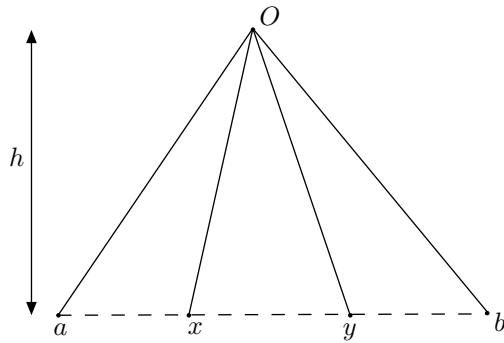


Figura 3: Invariância da Métrica de Hilbert.

Logo, a distância pode ser calculada através dos ângulos, apenas. Como estes ângulos não se alteram substituindo-se  $a, x, y, b$  por  $a', x', y', b'$  concluímos que vale o teorema.  $\square$

**Adendo 3.** Na situação da figura 4, continua valendo a fórmula  $d_{(a,b)}(x, y) = d_{(a',b')}(x', y')$ . Esta propriedade pode ser obtida do teorema 2 fazendo o ponto  $O$  tender a infinito.

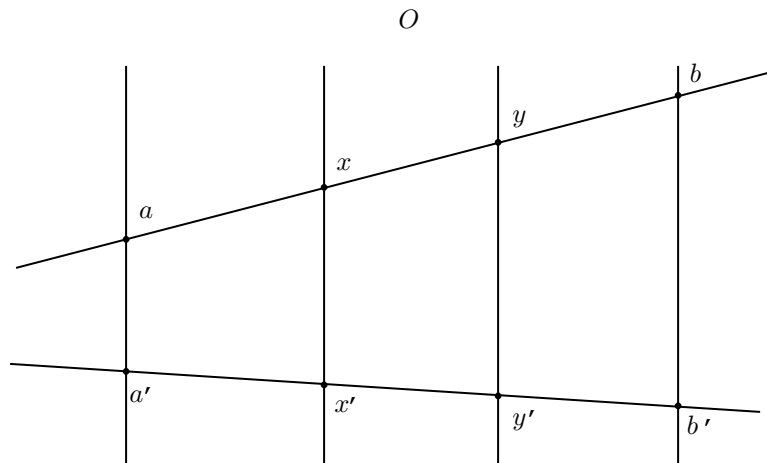


Figura 4: O Caso do Observador no Infinito.

*Observação 2.5.* O teorema expressa a invariância da métrica de Hilbert por transformações projetivas.

### 2.3 Dimensão $n$

**Definição 2.6.** Considere um bom convexo  $C \in \mathbb{R}^n$ . Vamos definir  $d_C$ , a métrica de Hilbert em  $C$ . Trace a reta  $r$  em  $\mathbb{R}^n$  que passa por dois pontos  $x, y \in C$  e chame de  $a$  e  $b$  os pontos pertencentes à fronteira de  $C$  tal que  $a, b \in C \cap r$ , como na figura 5.

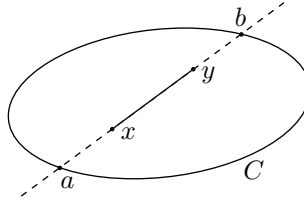


Figura 5: Dimensão  $n$ .

Então a distância entre  $x$  e  $y$  dada pela métrica de Hilbert se reduz ao caso unidimensional, e é definida por

$$d_C(x, y) = d_{(a,b)}(x, y)$$

É claro que as condições 1 e 2 da definição 1.1 são satisfeitas; porém a condição 3 não é trivial e necessita de uma prova. Antes disso, fazemos duas observações.

*Observação 2.7.* Repare que se  $x, y, z \in C$  estão alinhados e  $y$  está entre  $x$  e  $z$  (como mostra a figura 6), então vale a *propriedade da retidão*, ie.:

$$d(x, z) = d(x, y) + d(y, z)$$

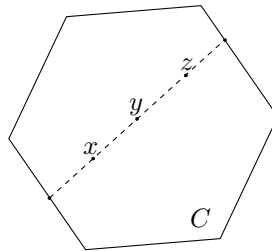


Figura 6: Propriedade da Retidão

*Observação 2.8.* Pelas propriedades da métrica de Hilbert, é fácil deduzir que:

$$y \rightarrow \partial C \implies d_C(x, y) \rightarrow \infty$$

**Teorema 4** (Desigualdade Triangular). *Dado um bom convexo  $C \subset \mathbb{R}^n$  e três pontos  $x, y, z \in C$  quaisquer, vale que:*

$$d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$$

*Demonstração.* Fixe três pontos  $x, y, z$  em  $C$ . Podemos supor que não são colineares. Seja  $(a, b)$ , respectivamente  $(c, d)$ ,  $(h, g)$ , o maior segmento contido em  $C$  contendo  $(x, y)$ , respectivamente  $(y, z)$ ,  $(x, z)$ . Considere as retas que contêm os segmentos  $(a, c)$  e  $(b, d)$ . Suponha que essas retas se intersectam em um ponto  $O$  (o caso de retas paralelas é análogo, usando o adendo 3). Sejam os pontos  $w, e, f$  e o quadrilátero  $L$  como na figura 7.

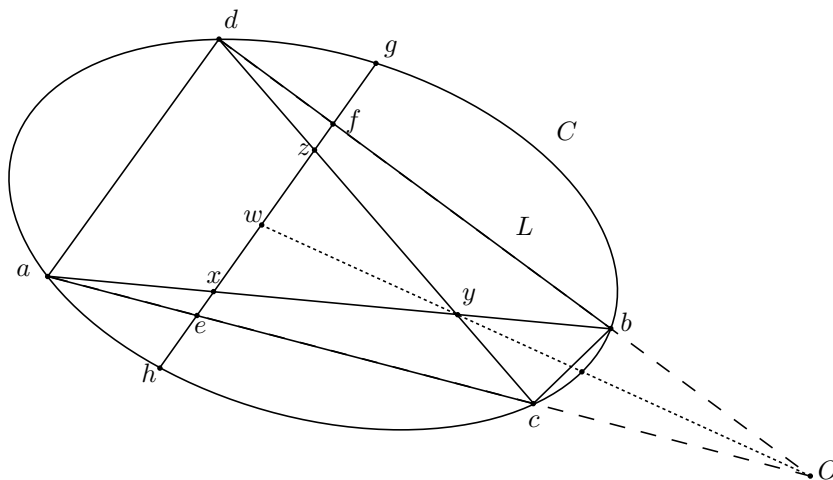


Figura 7: Desigualdade Triangular

Pelo teorema 2,

$$d_C(x, y) = d_{(a,b)}(x, y) = d_{(e,f)}(x, w)$$

Analogamente,

$$d_C(y, z) = d_{(e,f)}(w, z)$$

Pela propriedade da retidão:

$$d_C(x, y) + d_C(y, z) = d_{(e,f)}(x, w) + d_{(e,f)}(w, z) = d_{e,f}(x, z) = d_L(x, z)$$

Como  $(h, g) \supset (e, f)$ , temos que, pela definição da métrica de Hilbert e pela observação 2.3,  $d_L(x, z) \geq d_C(x, z)$ . Disso segue, finalmente, que:

$$d_C(x, y) + d_C(y, z) = d_L(x, z) \geq d_C(x, z). \quad \square$$

## 2.4 Completude

**Teorema 5.** *Se  $C \subset \mathbb{R}^n$  é um bom convexo então o espaço métrico  $(C, d_C)$  é completo.*

*Demonstração.* Para mostrar que um espaço métrico é completo, é suficiente mostrar que toda sequência de Cauchy possui uma subsequência que converge.

Seja  $C$  um bom convexo. Tome uma sequência  $x_1, x_2, \dots$  em  $C$  que é de Cauchy em relação à métrica  $d_C$ . Seja  $z$  um ponto de acumulação desta sequência em relação à métrica euclidiana. Então  $z \in \bar{C}$ .

Vejamus que necessariamente  $z \in C$ , isto é,  $z$  não pode estar na fronteira de  $C$ . Fixando  $\epsilon = 1$  na definição de sequência de Cauchy, obtemos que  $\exists N$  tal que  $x_n \in B(x_N, 1) \forall n > N$ . O fecho euclidiano de qualquer bola na métrica  $d_C$  não intersecta a fronteira de  $C$ . Assim, vale  $z \notin Fr(C)$ , como tínhamos afirmado.

Se  $x_{n_1}, x_{n_2}, \dots$  é uma sequência que converge na métrica euclidiana a  $z \in C$ , então também vale convergência na métrica de Hilbert; isso é consequência da fórmula para  $d_C$ .  $\square$

## 2.5 Invariância por Transformações Afins

**Teorema 6.** *Seja  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma bijeção afim, isto é, uma bijeção da forma  $T(x) = L(x) + b$  onde  $L$  é linear. Seja  $C \subset \mathbb{R}^n$  um bom convexo. Então*

$$d_C(x, y) = d_{T(C)}(T(x), T(y)) \quad \forall x, y \in C.$$

*Demonstração.* Suponha um bom convexo  $C$ , e os pontos  $a, x, y, b \in C$  (como na figura 8). Considere também a transformação afim  $T$ , com os respectivos pontos  $T(a), T(x), T(y), T(b) \in T(C)$ . Tome como  $f$  a função afim que leva pontos de  $(a, b)$  em  $(-1, 1)$  e a função  $g$  que leva os pontos de  $T((a, b))$  em  $(-1, 1)$ .

Então  $g \circ T = f$ . Disso segue que:

$$\begin{aligned} d_{T(C)}(T(x), T(y)) &= d_{(T(a), T(b))}(T(x), T(y)) \\ &= 2|\operatorname{arctanh} g(T(x)) - \operatorname{arctanh} g(T(y))| \\ &= 2|\operatorname{arctanh} f(x) - \operatorname{arctanh} f(y)| \\ &= d_{(a,b)}(x, y) \\ &= d_C(x, y). \end{aligned} \quad \square$$

## 3 Desigualdade de Birkhoff

**Teorema 7.** *Sejam  $C$  e  $D$  bons convexos. Se  $\bar{C} \subset D$ , então*

$$d_D(x, y) \leq \lambda d_C(x, y) \quad \forall x, y \in C$$

onde  $\lambda = \tanh \frac{1}{4} \operatorname{diam}_{d_D} C < 1$ .



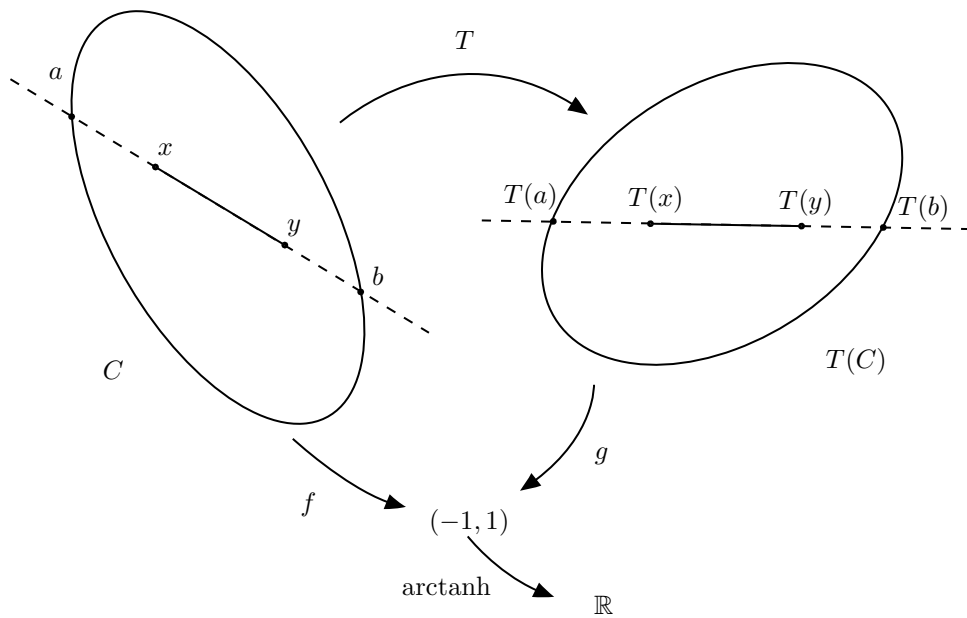


Figura 8: Invariância por Transformações Lineares.

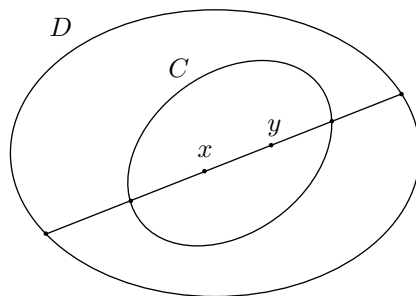


Figura 9: Desigualdade de Birkhoff.

*Demonstração.* Provaremos o teorema por casos. Primeiramente provaremos que o teorema vale para intervalos centrados. Em seguida provaremos para intervalos quaisquer. Finalmente, provaremos o caso geral.

**1º caso.** Suponha que os bons convexos  $C \in D$  são segmentos de mesmo centro euclidiano. Podemos aplicar uma transformação afim nos conjuntos de forma a levar  $D$  no intervalo  $(-1, 1)$  e  $C$  no intervalo  $(-a, a)$  com  $0 < a < 1$ . Por simplicidade, escreveremos  $D = (-1, 1)$  e  $C = (-a, a)$ . Seja  $x, y \in (-a, a)$ , com  $x < y$ . Então para  $D$  temos que:

$$d_{(-1,1)}(x, y) = 2|\operatorname{arctanh} y - \operatorname{arctanh} x|$$

Lembrando que  $\frac{d}{dx}(\operatorname{arctanh} x) = \frac{1}{1-x^2}$ , temos que

$$2|\operatorname{arctanh} y - \operatorname{arctanh} x| = 2 \cdot \int_x^y \frac{1}{1-z^2} dz$$

Chamemos de  $h(z)$  a função  $\frac{1}{1-z^2}$ .

Agora para  $C$  temos:

$$d_{(-a,a)}(x, y) = 2|\operatorname{arctanh} f(y) - \operatorname{arctanh} f(x)|$$

onde  $f(z) = \frac{z}{a}$ , pela definição 2.1. Portanto,

$$2|\operatorname{arctanh} f(y) - \operatorname{arctanh} f(x)| = 2 \cdot \int_{a^{-1}x}^{a^{-1}y} \frac{1}{1-w^2} dw = 2 \cdot \int_x^y \frac{a^{-1}}{1-z^2 a^{-2}} dz$$

Chamemos de  $g(z)$  a função  $\frac{a^{-1}}{1-z^2 a^{-2}}$ .

Note que:

$$p(z) = \frac{h(z)}{g(z)} = \frac{1-z^2 a^{-2}}{a^{-1}(1-z^2)} = a \cdot \left( \frac{1-\frac{z^2}{a^2}}{1-z^2} \right)$$

E como  $0 < a < 1$ , segue que  $\max p(z) = p(0) = a$  e, portanto,

$$h(z) \leq a g(z).$$

Integrando de  $x$  a  $y$  obtemos  $d_D(x, y) \leq a \cdot d_C(x, y)$ .

*Observação 3.1.* Repare que, neste caso, o  $\lambda$  da fórmula de Birkhoff vale  $a$ , pois  $\operatorname{diam}_{d_D} C = 2(\operatorname{arctanh}(a) - \operatorname{arctanh}(-a)) = 4 \operatorname{arctanh}(a)$ .

**2º caso.** Consideramos um caso mais geral onde os bons convexos  $D$  e  $C$  são segmentos *quaisquer*, com  $\overline{C} \subset D$ . Vamos reduzir este caso ao anterior usando o Princípio do Observador, (ie. teorema 2).

Sejam  $a$  e  $b$  os pontos extremos do intervalo  $D$ , e sejam  $a'$  e  $b'$  os pontos extremos do intervalo  $C$ , como mostra a figura 10. Chame de  $z$  o ponto central

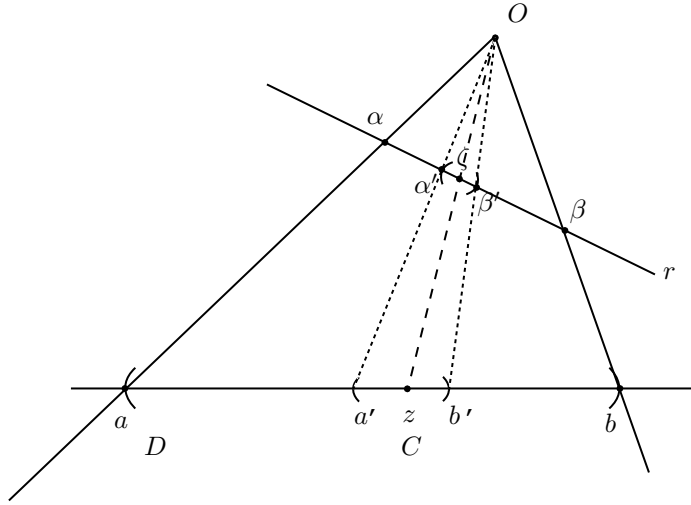


Figura 10: 2º Caso da Desigualdade de Birkhoff.

do intervalo  $C$  em relação à métrica  $d_D$ , ie.  $d_D(a', z) = d_D(z, b')$ , e seja  $O$  um ponto fora da reta que contém  $D$  tal que  $\angle(Oa, Oz) = \angle(Oz, Ob)$ .

Seja  $r$  uma reta que corta a reta  $Oz$  ortogonalmente em um ponto  $\zeta$ . Seja  $\alpha$  (respectivamente  $\alpha', \beta', \beta$ ) a interseção da reta  $r$  com a reta  $Oa$  (respectivamente  $Oa', Ob', Ob$ ). Então os segmentos  $(\alpha, \beta)$  e  $(\alpha', \beta')$  têm o mesmo centro euclidiano, a saber  $\zeta$ . Como o caso para intervalos centrados já foi provado, provamos, por conseguinte, sua generalização.

**3º caso.** Para provar o caso geral, tome dois bons convexos  $D$  e  $C$ , com  $\overline{C} \subset D$ . Considere dois pontos  $x, y \in C$ , e a interseção da reta passando por esses pontos com  $\partial C$  e  $\partial D$ , que chamaremos de  $a, b$  e  $\alpha, \beta$  respectivamente (como na figura 11).

Então basta notar que:

$$\begin{aligned}
 d_D(x, y) &= d_{(\alpha, \beta)}(x, y) && \text{(por definição)} \\
 &\leq \left[ \tanh \frac{1}{4} \text{diam}_{d_{(\alpha, \beta)}}(a, b) \right] d_{(a, b)}(x, y) && \text{(pelo 2º caso)} \\
 &\leq \left[ \tanh \frac{1}{4} \text{diam}_{d_{(\alpha, \beta)}}(a, b) \right] d_C(x, y) && \text{(por definição)} \\
 &\leq \left[ \tanh \frac{1}{4} \text{diam}_{d_D} C \right] d_C(x, y)
 \end{aligned}$$

O último passo se justifica pois  $\text{diam}_{d_D} C$  é dado pelo supremo da distância entre dois pontos quaisquer em  $C$ , não necessariamente em  $(a, b)$ . Isto fica ilustrado na figura 11 pelo segmento de reta pontilhado.

□

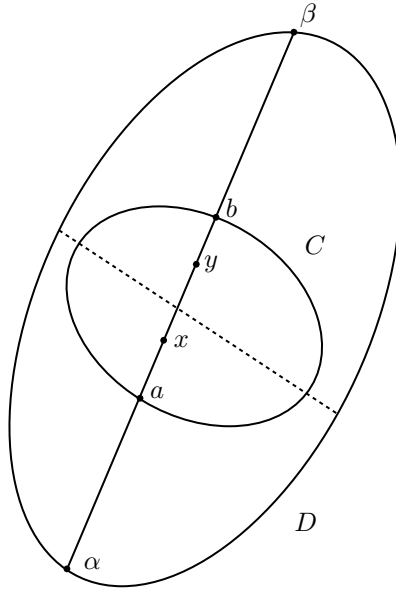


Figura 11: 3º Caso da Desigualdade de Birkhoff.

**Teorema 8** (Propriedade da Contração por Transformações Lineares). *Sejam  $C \subset \mathbb{R}^n$  e  $D \subset \mathbb{R}^m$  bons convexos. Seja  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  uma transformação linear tal que  $\overline{T(C)} \subset D$ . Então existe  $\lambda < 1$  tal que  $d_D(T(x), T(y)) \leq \lambda d_C(x, y), \forall x, y \in C$ .*

*Observação 3.2.* No caso em que  $D = C$ , a restrição de  $T$  a  $C$  define uma contração na métrica  $d_C$ .

*Demonstração.* Seja  $\lambda$  dado pela Fórmula de Birkhoff para o par de convexos  $D \supset \overline{T(C)}$ . Então  $\forall x, y \in C$ ,

$$d_D(T(x), T(y)) \leq \lambda d_{T(C)}(T(x), T(y))$$

Pela invariância para transformações lineares (teorema 6),

$$d_{T(C)}(T(x), T(y)) = d_C(x, y)$$

Isso prova o teorema. □

## 4 Teorema de Perron-Frobenius e Aplicações

Nesta seção iremos desenvolver os raciocínios teóricos de maneira mais informal, tendo em vista algumas aplicações.

## 4.1 Passeios Aleatórios

Vamos tratar, inicialmente, de um passeio aleatório em um ambiente finito. Se um indivíduo está na célula  $j$  no tempo  $t$ , então ele pula (no tempo  $t + 1$ ) para uma das células  $1, 2, \dots, n$ , sendo que a probabilidade do indivíduo pular para a célula  $i$  é dada por  $p_{ij}$ .

**Definição 4.1.** Uma matriz é dita *matriz coluna-estocástica* se:

1.  $p_{ij} \geq 0$ ;
2.  $\sum_{i=1}^n p_{ij} = 1$ ;

**Definição 4.2.** Chamamos de *simplexo standard*  $(n - 1)$  dimensional aberto o conjunto  $\Delta = \{(x_1, \dots, x_n); x_i > 0 \forall i; \sum_{i=1}^n p_{ij} = 1\}$ .

**Definição 4.3.** Chamamos de *simplexo standard*  $(n - 1)$  dimensional fechado o conjunto  $\bar{\Delta} = \{(x_1, \dots, x_n); x_i \geq 0 \forall i; \sum_{i=1}^n p_{ij} = 1\}$ .

**Proposição 4.4.** O *simplexo standard* fechado é invariante por qualquer matriz coluna-estocástica, ie.  $M(\bar{\Delta}) \subseteq \bar{\Delta}$ .

*Demonstração.* Queremos provar que, se aplicarmos  $M$  a um vetor, o vetor resultante estará dentro do simplexo standard fechado. Assim, se  $M(x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_n)$ , queremos mostrar que  $(y_1, \dots, y_n) \in \bar{\Delta}$ .

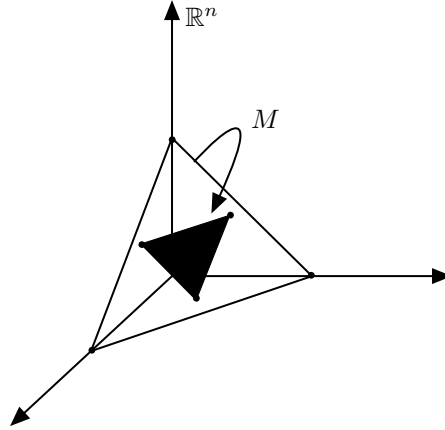


Figura 12: O simplexo standard fechado é invariante por  $M$ .

Considere um ponto  $(x_1, \dots, x_n) \in \bar{\Delta}$ . Para mostrar que  $y$  estará dentro do simplexo, precisamos atender às duas condições da definição 4.3. A primeira é trivial pois, como  $p_{ij}$  e  $x_j$  são não-negativos, segue que:

$$y_i = \sum_{j=1}^n p_{ij} x_j \geq 0$$

Para provar a segunda condição, reparamos que:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n y_i &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_{ij} x_j \\ &= \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^n p_{ij} \right) x_j \\ &= \sum_{j=1}^n x_j = 1\end{aligned}$$

Logo,  $\mathbf{y} = M\mathbf{x} \in \bar{\Delta}$ . □

Agora será possível entender como funcionará o caminho do indivíduo não só no tempo  $t = 1$ , mas também quando  $t = 2, t = 3, \dots$ . Para tanto, precisaremos calcular a matriz  $M$  multiplicada por si mesma várias vezes.

*Observação 4.5.* Indicaremos  $M^k$  por  $(p_{ij}^{(k)})$ .

Dessa forma,  $p_{ij}^{(k)}$  é a probabilidade do indivíduo estar na célula  $i$  no tempo  $k$ , dado que ele estava na célula  $j$  no tempo 0.

## 4.2 Matrizes Irredutíveis

**Definição 4.6.** Uma matriz coluna-estocástica  $M = (p_{ij})$  é chamada *irredutível* se  $\exists k \geq 1$  tal que  $p_{ij}^{(k)} > 0 \forall i, j$ .

*Observação 4.7.* Usaremos matrizes irredutíveis para garantir que, depois do tempo  $k$ , o indivíduo possa estar em qualquer lugar.

## 4.3 Teorema de Perron-Frobenius para matrizes coluna-estocásticas

**Teorema 9.** Se  $M$  é coluna-estocástica irredutível, então existe um único  $v_* \in \Delta$  tal que  $M(v_*) = v_*$  (ou seja, um ponto fixo). Além disso,  $\lim_{n \rightarrow \infty} M^n(v) = v_*$  para qualquer  $v \in \Delta$  (ou seja, o ponto fixo é atrator).

*Observação 4.8.*  $v_*$  é autovetor de  $M$  com autovalor 1.

*Demonstração.* Se  $k = 1$ , o teorema sai direto da Propriedade da Contração para Transformações Lineares (teorema 6).

Para  $k$  qualquer, seja  $v_*$  o único vetor em  $\Delta$  tal que  $M^k(v_*) = v_*$ . Sabemos que  $M^{kn}(v) \rightarrow v_* \forall v \in \Delta$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Então

$$\begin{aligned}
M^{kn+1}(v) &= M^{kn}(Mv) \rightarrow v_* \\
M^{kn+2}(v) &= M^{kn}(M^2v) \rightarrow v_* \\
&\vdots \\
M^{kn+(n-1)}(v) &= M^{kn}(M^{n-1}v) \rightarrow v_*
\end{aligned}$$

Logo,  $M^N(v) \rightarrow v_*$  quando  $N \rightarrow \infty$ . E, por continuidade,

$$M(v_*) = M(\lim M^n v) = \lim M^{n+1} v = v_*$$

Portanto,  $v_*$  é ponto fixo. □

#### 4.4 Google e o PageRank

O Google é um site de buscas criado em 1998 por Sergei Brin e Lawrence Page. É atualmente a página mais visitada em toda a rede, atingindo até 300 milhões de buscas diárias. Nesta seção investigamos como funciona o algoritmo básico por trás do Google, chamado de PageRank, que ordena os resultados das buscas.

O Google guarda uma matriz coluna-estocástica que contém as probabilidades de um surfista aleatório, estando num site  $j$ , pular para um site  $i$  (através de um link). O ponto fixo desta matriz de probabilidades constitui o vetor do PageRank.

As componentes desta matriz são dadas pela seguinte fórmula:

$$p_{ij} = \frac{1 - \delta}{n} + \delta \cdot \frac{\epsilon_{ij}}{k_j}$$

onde  $n$  é o número de sites da internet,  $k_j$  é o número de links no site  $j$ ,  $\epsilon_{ij}$  é uma função que vale 1 se  $j$  apontar para  $i$  e 0 caso contrário, e  $\delta$  é o chamado "damping factor", que mede a chance de um indivíduo pular do site  $j$  para qualquer outro site da internet (que não necessariamente tem alguma relação). No caso do Google, eles usualmente colocam  $\delta = 0.85$ .

*Observação 4.9.* A matriz  $M$  composta por componentes  $p_{ij}$  é irredutível, já que, por conta do "damping factor",  $p_{ij} > 0$ , i.e. o surfista tem chance de visitar qualquer site, mesmo que não haja links apontando para ele.

*Observação 4.10.* A matriz  $M$  é coluna-estocástica, pois

$$\sum_{i=1}^n p_{ij} = (1 - \delta) + \delta \cdot \frac{1}{k_j} \cdot \sum_{i=1}^n \epsilon_{ij} = 1 - \delta + \delta = 1$$

Desta forma, o Google compõe uma matriz  $M$ , com as propriedades que estudamos em seções anteriores. Do teorema 9, segue que  $\exists v_* \in \Delta$  tal que  $Mv_* = v_*$ . Este  $v_*$  representa o vetor PageRank, que possui todas as suas  $n$

coordenadas entre 0 e 1. Quando qualquer pesquisa é efetuada, o Google organiza os resultados de acordo com os valores das coordenadas correspondentes de cada site.

Atualmente, o mecanismo do Google tornou-se muito mais complexo, levando em conta mais de 200 sinais para ordenar suas buscas – muitos dos quais são secretos<sup>1</sup>. Descrevemos acima o funcionamento do melhor destes sinais, o PageRank. E, apesar da maior sofisticação hoje, em 1998 era justamente assim que o Google funcionava.

## Referências

- [1] BIRKHOFF, Garrett. Extensions of Jentzsch's theorem. Trans. Amer. Math. Soc., v.85, p. 219-227, 1957.
- [2] BRIN, Sergey; PAGE, Lawrence. The anatomy of a large-scale hypertextual Web search engine. Computer Networks and ISDN Systems, v. 30, p. 107-117, 1998.
- [3] BUSEMANN, Herbert,; KELLY, Paul Joseph. Projective geometry and projective metrics. New York: Academic Press, 1953.
- [4] HILBERT, David. Neue Begründung der Bolyai-Lobatschefskijschen Geometrie. Math. Ann. 57, 137-150 (1903).

---

<sup>1</sup>Veja [www.google.com/corporate/tech.html](http://www.google.com/corporate/tech.html)