Médias Aritméticas Disfarçadas

Jairo Bochi

VII Oktobermat

PUC–Rio

30/10/2009

Médias aritméticas disfarçadas

Média aritmética $M_A(x, y) = (x + y)/2$.
Média geométrica $M_G(x, y) = \sqrt{xy}$ (definida em $\mathbb{R}^+$.)
A média geométrica é uma média aritmética disfarçada:

$$\log \sqrt{xy} = \frac{\log x + \log y}{2} \; .$$

Médias aritméticas disfarçadas

Média aritmética $M_A(x,y) = (x+y)/2$.
Média geométrica $M_G(x,y) = \sqrt{xy}$ (definida em $\mathbb{R}^+$.)
A média geométrica é uma média aritmética disfarçada:

$$\log M_G(x,y) = M_A(\log x, \log y)\,.$$

Médias aritméticas disfarçadas

Média aritmética $M_A(x, y) = (x + y)/2$.
Média geométrica $M_G(x, y) = \sqrt{xy}$ (definida em $\mathbb{R}^+$.)
A média geométrica é uma média aritmética disfarçada:

$$M_G(x, y) = \exp\left(M_A(\log x, \log y)\right).$$

Médias aritméticas disfarçadas

Média aritmética $M_A(x,y) = (x+y)/2$.
Média geométrica $M_G(x,y) = \sqrt{xy}$ (definida em $\mathbb{R}^+$.)
A média geométrica é uma média aritmética disfarçada:

$$M_G(x,y) = \exp\big(M_A(\log x, \log y)\big)\,.$$

Ou seja, M_G difere de M_A por uma mudança de coordenadas.

Médias aritméticas disfarçadas

Média aritmética $M_A(x, y) = (x + y)/2$.
Média geométrica $M_G(x, y) = \sqrt{xy}$ (definida em $\mathbb{R}^+$.)
A média geométrica é uma média aritmética disfarçada:

$$M_G(x, y) = \exp\big(M_A(\log x, \log y)\big)\,.$$

Dizemos que uma função $M : I \times I \to I$ é uma *média aritmética disfarçada* (ou uma *média quase-aritmética*) no intervalo $I \subset \mathbb{R}$ se

$$M(x, y) = h^{-1}\big(M_A(h(x), h(y))\big),$$

onde $h : I \to \mathbb{R}$ é uma função contínua estritamente monótona (chamada *conjugação*).

Objetivo

A pergunta central da palestra é:

Quando uma função é uma MAD?

Mais exemplos?

A *média harmônica* também é MAD, via $h(x) = 1/x$.

Mais exemplos?

Outra média famosa é a *média aritmético-geométrica*:

$$M_{AG}(x_0, y_0) = \lim x_n = \lim y_n \quad \text{onde}$$

$$x_{n+1} = M_G(x_n, y_n), \quad y_{n+1} = M_A(x_n, y_n)\,.$$

Mais exemplos?

Outra média famosa é a *média aritmético-geométrica*:

$$M_{AG}(x_0, y_0) = \lim x_n = \lim y_n \quad \text{onde}$$

$$x_{n+1} = M_G(x_n, y_n), \quad y_{n+1} = M_A(x_n, y_n)\,.$$

Exemplo:
$x_0 = 1$, $y_0 = 2$.

Mais exemplos?

Outra média famosa é a *média aritmético-geométrica*:

$$M_{AG}(x_0, y_0) = \lim x_n = \lim y_n \quad \text{onde}$$

$$x_{n+1} = M_G(x_n, y_n), \quad y_{n+1} = M_A(x_n, y_n)\,.$$

Exemplo:
$x_0 = 1$, $y_0 = 2$; $x_1 = 1.414$; $y_1 = 1.5$.

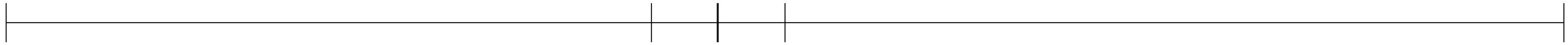
Mais exemplos?

Outra média famosa é a *média aritmético-geométrica*:

$$M_{AG}(x_0, y_0) = \lim x_n = \lim y_n \quad \text{onde}$$

$$x_{n+1} = M_G(x_n, y_n), \quad y_{n+1} = M_A(x_n, y_n)\,.$$

Exemplo:
$x_0 = 1$, $y_0 = 2$; $x_1 = 1.414$; $y_1 = 1.5$; $x_2 = 1.456$, $y_2 = 1.457$.



Mais exemplos?

Outra média famosa é a *média aritmético-geométrica*:

$$M_{AG}(x_0, y_0) = \lim x_n = \lim y_n \quad \text{onde}$$

$$x_{n+1} = M_G(x_n, y_n), \quad y_{n+1} = M_A(x_n, y_n)\,.$$

Seria essa uma MAD?

Mais exemplos?

Outra média famosa é a *média aritmético-geométrica*:

$$M_{AG}(x_0, y_0) = \lim x_n = \lim y_n \quad \text{onde}$$

$$x_{n+1} = M_G(x_n, y_n), \quad y_{n+1} = M_A(x_n, y_n)\,.$$

Obs (irrelevante p/ a palestra): Gauss relacionou M_{AG} com integrais elípticas (isso era útil para calcular as tais integrais):

$$M_{AG}(x, y) = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{x + y}{K\left((x - y)^2 (x + y)^{-2}\right)}$$

$$K(\lambda) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1 - t^2)(1 - \lambda^2 t^2)}}\,.$$

M_{AG} **não é MAD**

Veremos 3 explicações para M_{AG} não ser uma MAD:

M_{AG} **não é MAD**

Veremos 3 explicações para M_{AG} não ser uma MAD:

(1ª) Se fosse, Gauss teria descoberto.

M_{AG} **não é MAD**

Veremos 3 explicações para M_{AG} não ser uma MAD:

(2ª) Uma função $f(x,y)$ é chamada *homogênea* se $f(tx,ty) = tf(x,y)$.

Teorema (Nagumo 1930, de Finetti 1931). *Toda MAD homogênea é da forma:*

$$M_p(x,y) = \left(\frac{x^p + y^p}{2}\right)^{1/p}, \quad p \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ ou}$$

$$M_0(x,y) = M_G(x,y)$$

(Ver [HLP].)

M_{AG} **não é MAD**

Veremos 3 explicações para M_{AG} não ser uma MAD:

A 3ª explicação é a mais simples, não depende do fato de M_{AG} ser homogênea, e será dada mais tarde.

Mais variáveis

Analogamente, podemos definir uma MAD de n variáveis.

Mais variáveis

Pergunta: Dada uma sequência de funções $M_2(x_1, x_2)$, . . . , $M_n(x_1, \ldots, x_n)$, . . . , quando é que elas são todas MADs via a *mesma* conjugação h?

Mais variáveis

Pergunta: Dada uma sequência de funções $M_2(x_1, x_2)$, . . . , $M_n(x_1, \ldots, x_n)$, . . . , quando é que elas são todas MADs via a *mesma* conjugação h?

Uma resposta foi encontrada por Kolmogorov e Nagumo (independentemente) em 1930: É necessário e suficiente que a família $\{M_n\}$ satisfaça:

1. Cada M_n é contínua, estritamente crescente em cada variável, e simétrica.
2. $M_n(x, \ldots, x) = x$.
3. $M_n(x_1, \ldots, x_n) = M_n(x, \ldots, x, x_{k+1}, \ldots, x_n)$ onde $x = M_k(x_1, \ldots, x_k)$ e $k < n$.

Condições necessárias para ser MAD

A prova do Kolmogorov–Nagumo é fácil. Poder tirar a média de um número arbitrário de variáveis simplifica as coisas.

De agora em diante, consideraremos apenas funções de duas variáveis.

Condições necessárias para ser MAD

Dizemos que $M : I \times I \to I$ é uma *média* no intervalo $I \subset \mathbb{R}$ se

1. M é contínua;
2. M é estritamente crescente em cada variável;
3. M e simétrica: $M(x, y) = M(y, x)$;
4. $M(x, x) = x$.

Obviamente, toda MAD é uma média. A recíproca é falsa.

Webs

Vejamos um problema clássico de natureza semelhante ao nosso.

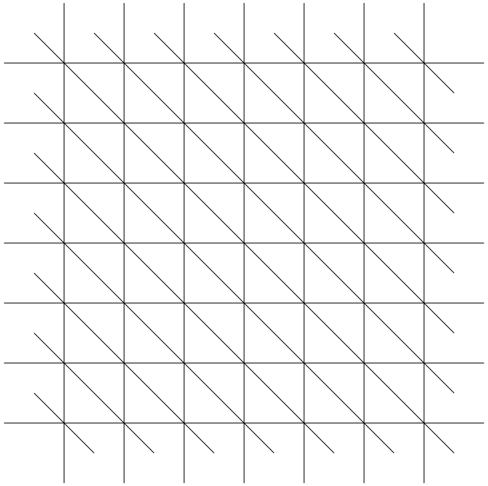
Webs

Vejamos um problema clássico de natureza semelhante ao nosso.

Definição: Uma k-*web* é formada por k folheações duas-a-duas transversais.

Exemplo: A 3-web do plano formada pelas curvas de nível das funções x, y, $(x+y)/2$.

Esta 3-web é chamada *trivial*.



Trivialidade de Webs

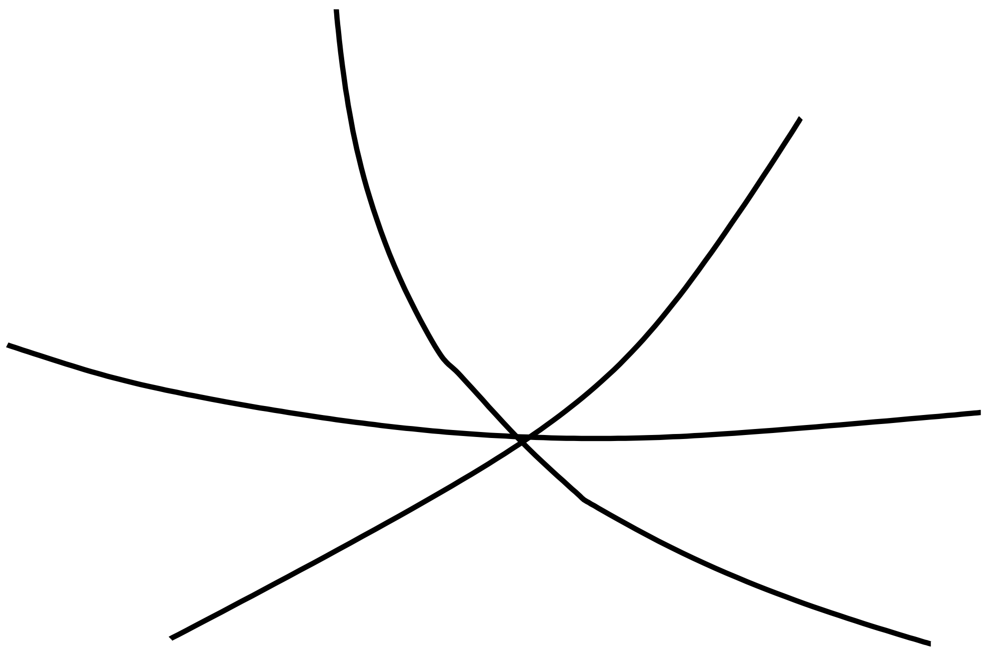
Todas as 2-webs no plano são equivalentes entre si, via mudanças locais de coodenadas.

Isso não é verdade para 3-webs:

Trivialidade de Webs

Todas as 2-webs no plano são equivalentes entre si, via mudanças locais de coodenadas.

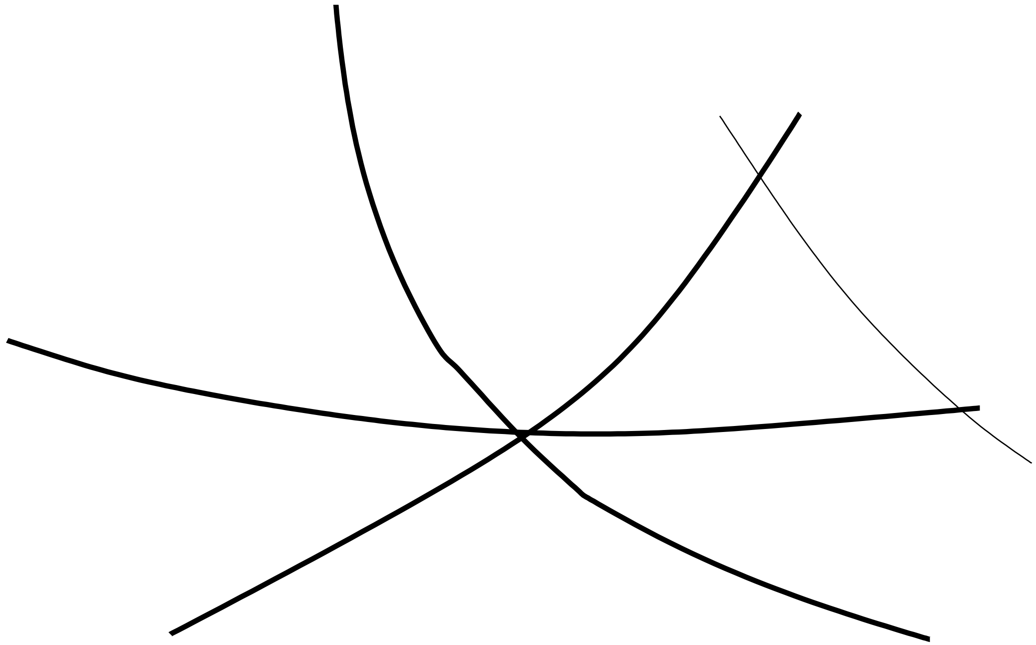
Isso não é verdade para 3-webs:



Trivialidade de Webs

Todas as 2-webs no plano são equivalentes entre si, via mudanças locais de coodenadas.

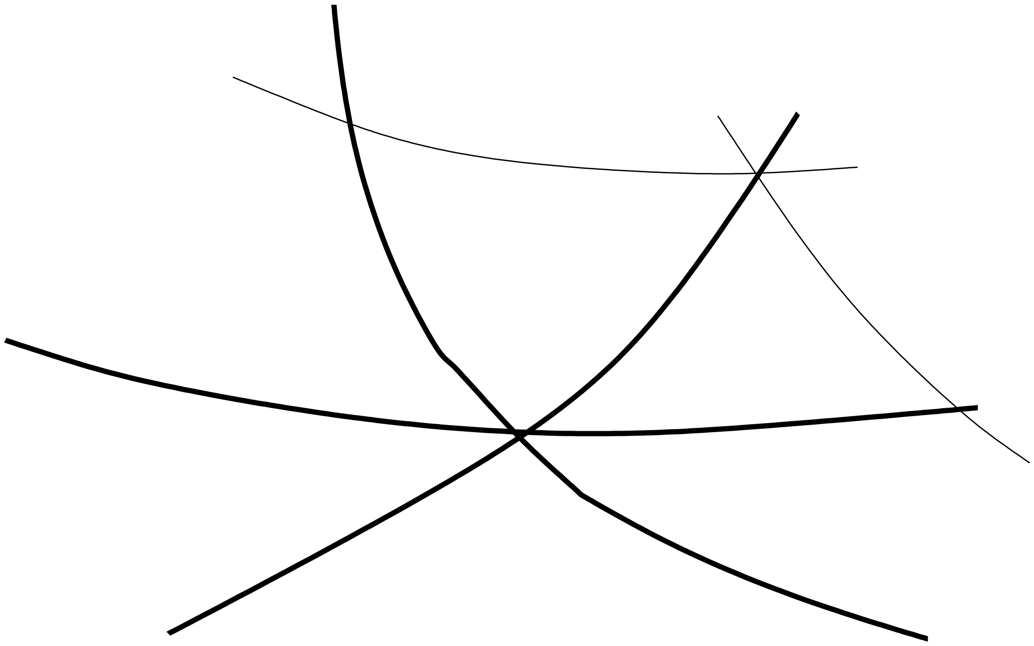
Isso não é verdade para 3-webs:



Trivialidade de Webs

Todas as 2-webs no plano são equivalentes entre si, via mudanças locais de coodenadas.

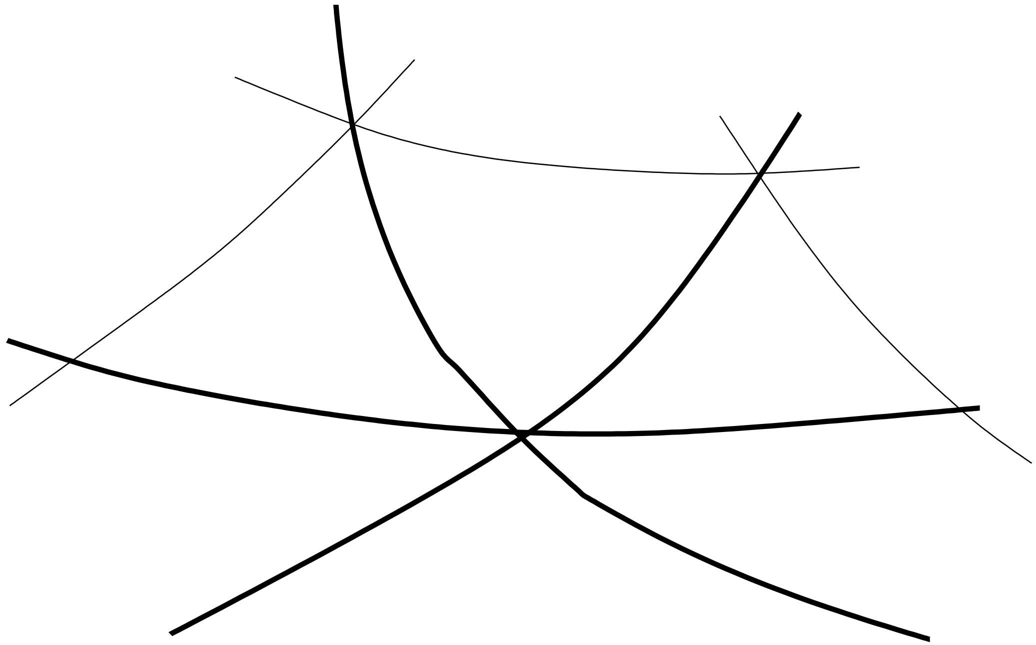
Isso não é verdade para 3-webs:



Trivialidade de Webs

Todas as 2-webs no plano são equivalentes entre si, via mudanças locais de coodenadas.

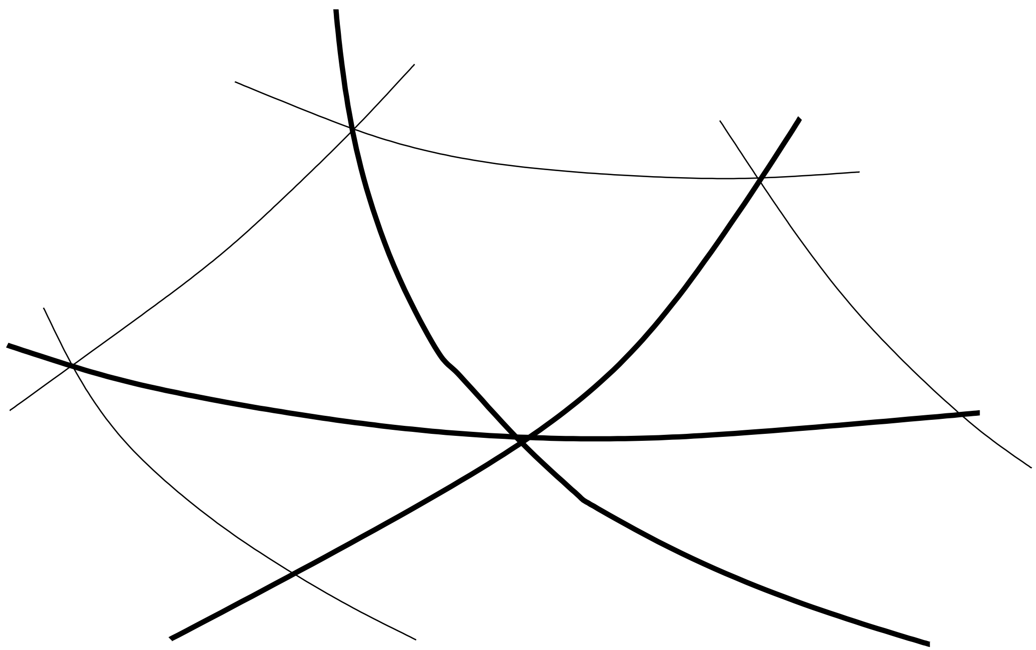
Isso não é verdade para 3-webs:



Trivialidade de Webs

Todas as 2-webs no plano são equivalentes entre si, via mudanças locais de coodenadas.

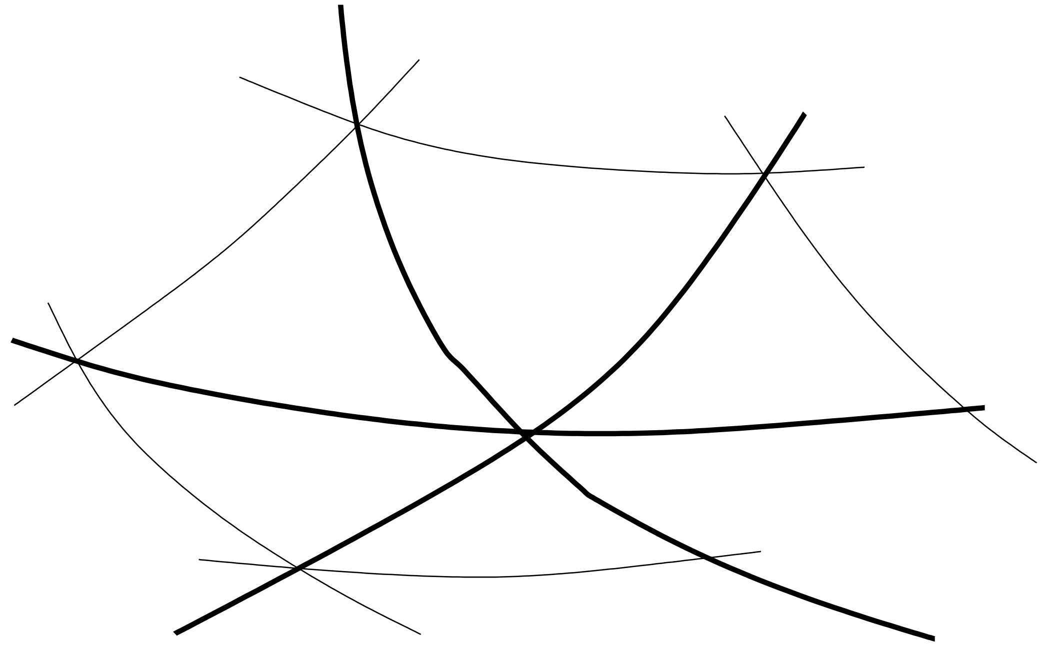
Isso não é verdade para 3-webs:



Trivialidade de Webs

Todas as 2-webs no plano são equivalentes entre si, via mudanças locais de coodenadas.

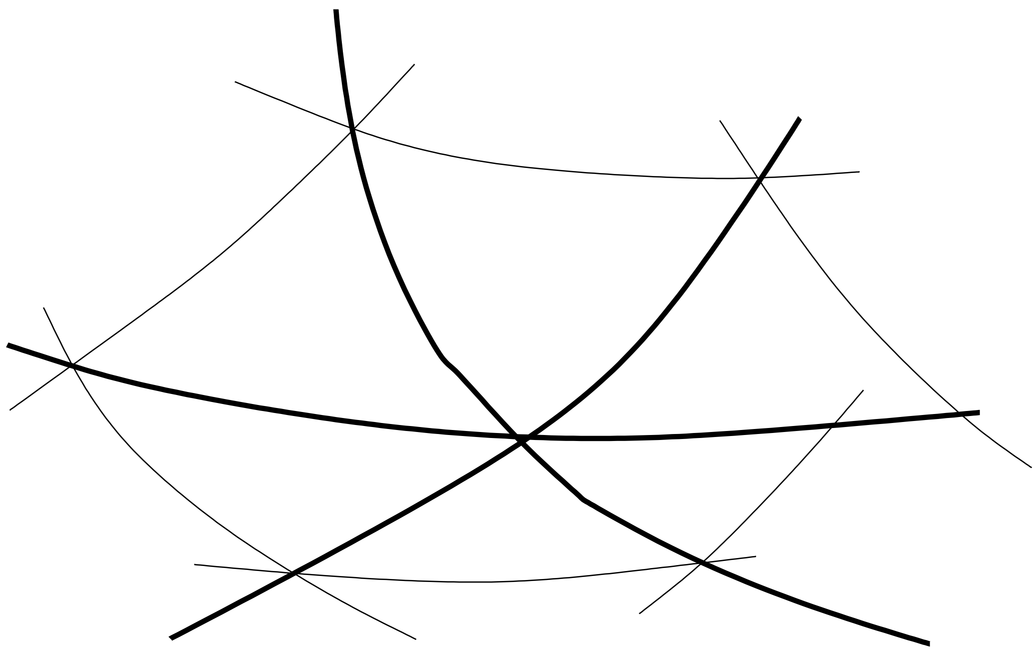
Isso não é verdade para 3-webs:



Trivialidade de Webs

Todas as 2-webs no plano são equivalentes entre si, via mudanças locais de coodenadas.

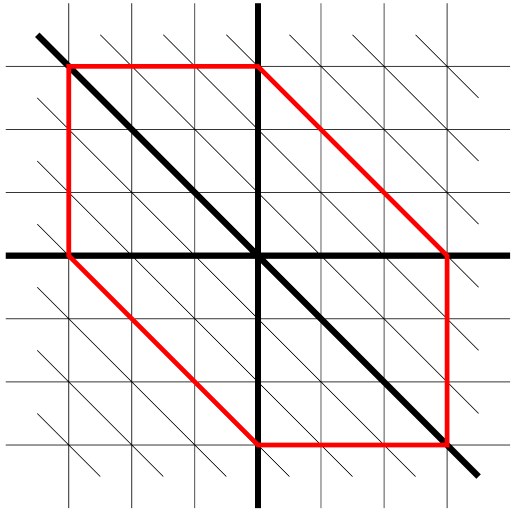
Isso não é verdade para 3-webs:



Trivialidade de Webs

Todas as 2-webs no plano são equivalentes entre si, via mudanças locais de coodenadas.

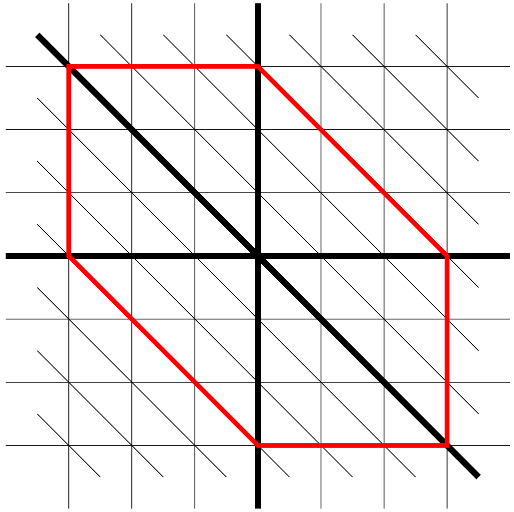
Isso não é verdade para 3-webs:



Trivialidade de Webs

Todas as 2-webs no plano são equivalentes entre si, via mudanças locais de coodenadas.

Isso não é verdade para 3-webs:



Teorema (Thomsen 1927). *Uma 3-web no plano é equivalente à trivial (via mudança de coordenadas) se e só se é hexagonal.*

Relações entre os dois problemas

Se M é MAD então a 3-web formada pelas curvas de nível de x, y, $M(x, y)$ é hexagonal.

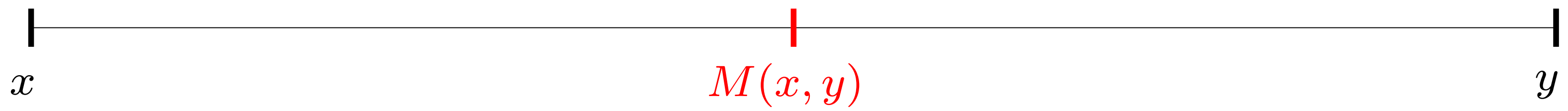
Mas não é claro que a recíproca seja verdadeira. (Eu não sei.)

Deixemos as webs de lado...

Obs: $\exists$ livro do Colóquio 2009 sobre webs [J. V. Pereira, L. Pirio].

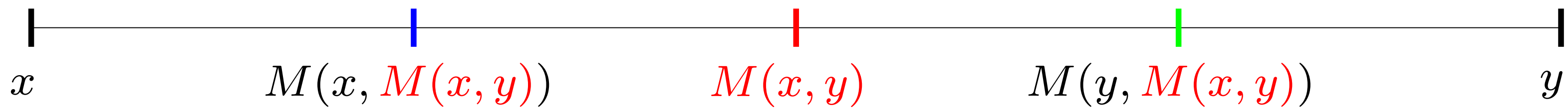
Mais uma condição necessária para ser MAD

Seja M a média aritmética, e x, y dois pontos.



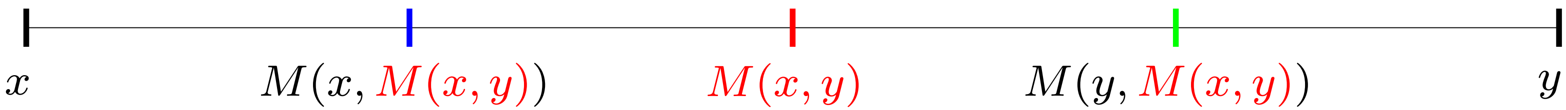
Mais uma condição necessária para ser MAD

Seja M a média aritmética, e x, y dois pontos.



Mais uma condição necessária para ser MAD

Seja M a média aritmética, e x, y dois pontos.

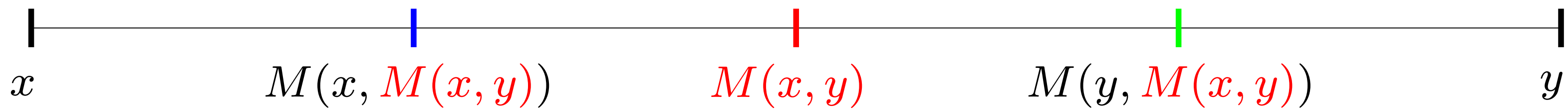


Temos:

$$\boxed{M\big(M(x, M(x,y)), M(y, M(x,y))\big) = M(x,y)}$$

Mais uma condição necessária para ser MAD

Seja M a média aritmética, e x, y dois pontos.



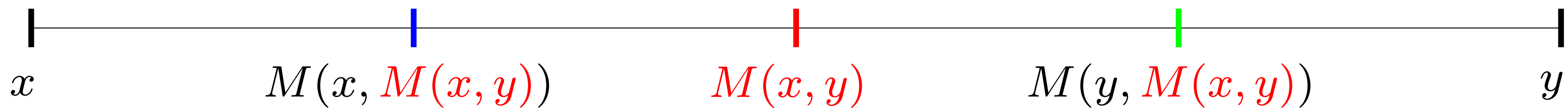
Temos:

$$\boxed{M\big(M(x, M(x,y)), M(y, M(x,y))\big) = M(x,y)}$$

Esta equação vale identicamente para qualquer média aritmética disfarçada M.

Mais uma condição necessária para ser MAD

Seja M a média aritmética, e x, y dois pontos.



Temos:

$$\boxed{M\big(M(x, M(x,y)), M(y, M(x,y))\big) = M(x,y)}$$

Esta equação vale identicamente para qualquer média aritmética disfarçada M.

Esta equação funcional será chamada *condição de balanceamento*.

3ª explicação (a mais simples) para M_{AG} não ser MAD

Fazemos um teste para ver se M_{AG} é balanceada:

$$
\begin{aligned}
x &= 1 \\
y &= 2 \\
M(x, y) &= 1.456791 \\
M(x, M(x, y)) &= 1.217662 \\
M(y, M(x, y)) &= 1.717642 \\
M\big(M(x, M(x, y)), M(y, M(x, y))\big) &= 1.456909
\end{aligned}
$$

A resposta é *não*.

A condição é suficiente?

Será que toda média balanceada é aritmética disfarçada?

Literatura

Vamos escrever $M(x,y) = x \circ y$.

Condição de *medialidade*:

$$(x \circ y) \circ (z \circ w) = (x \circ z) \circ (y \circ w). \tag{1}$$

Teorema (Aczél 1948). *Uma média é aritmética disfaçada se e só se vale (1).*

Literatura

Vamos escrever $M(x,y) = x \circ y$.

Condição de *medialidade*:

$$(x \circ y) \circ (z \circ w) = (x \circ z) \circ (y \circ w). \tag{1}$$

Teorema (Aczél 1948). *Uma média é aritmética disfaçada se e só se vale (1).*

Colocando $w = z$ em (1), obtemos uma condição mais fraca, chamada *auto-distributividade* (braids...):

$$(x \circ y) \circ z = (x \circ z) \circ (y \circ z). \tag{2}$$

Teorema (Knaster, Ryll-Nardzewski 1949). *Uma média é aritmética disfaçada se e só se vale (2).*

Relações entre as 3 condições

Obs: Se mostra "abstratamente" que as condições (1) e (2) são equivalentes (sob a hipótese de que $\circ$ é média).

Substituindo $z = x \circ y$ na condição de auto-distributividade

$$(x \circ y) \circ z = (x \circ z) \circ (y \circ z) \tag{2}$$

obtemos a condição de balanceamento:

$$x \circ y = \big(x \circ (x \circ y)\big) \circ \big(y \circ (x \circ y)\big) \tag{3}$$

Relações entre as 3 condições

Obs: Se mostra “abstratamente” que as condições (1) e (2) são equivalentes (sob a hipótese de que $\circ$ é média).

Substituindo $z = x \circ y$ na condição de auto-distributividade

$$(x \circ y) \circ z = (x \circ z) \circ (y \circ z) \tag{2}$$

obtemos a condição de balanceamento:

$$x \circ y = \big(x \circ (x \circ y)\big) \circ \big(y \circ (x \circ y)\big) \tag{3}$$

Suficiência da condição (1)

A prova do Teorema de Aczél é fácil e natural:

Suficiência da condição (1)

A prova do Teorema de Aczél é fácil e natural:
Escolha dois pontos $a_0 < a_1$ no domínio de M.
Corte o intervalo $[a_0, a_1]$ no ponto $a_{1/2} := M(a_0, a_1)$.

Suficiência da condição (1)

A prova do Teorema de Aczél é fácil e natural:
Escolha dois pontos $a_0 < a_1$ no domínio de M.
Corte o intervalo $[a_0, a_1]$ no ponto $a_{1/2} := M(a_0, a_1)$.
Corte o intervalo $[a_0, a_{1/2}]$ no ponto $a_{1/4} := M(a_0, a_{1/2})$,
e o intervalo $[a_{1/2}, a_1]$ no ponto $a_{3/4} := M(a_{1/2}, a_1)$.

Suficiência da condição (1)

A prova do Teorema de Aczél é fácil e natural:
Escolha dois pontos $a_0 < a_1$ no domínio de M.
Corte o intervalo $[a_0, a_1]$ no ponto $a_{1/2} := M(a_0, a_1)$.
Corte o intervalo $[a_0, a_{1/2}]$ no ponto $a_{1/4} := M(a_0, a_{1/2})$,
e o intervalo $[a_{1/2}, a_1]$ no ponto $a_{3/4} := M(a_{1/2}, a_1)$.
Continuando assim, definimos a_r para todo racional diádico $r \in [0, 1]$.

Suficiência da condição (1)

A prova do Teorema de Aczél é fácil e natural:
Escolha dois pontos $a_0 < a_1$ no domínio de M.
Corte o intervalo $[a_0, a_1]$ no ponto $a_{1/2} := M(a_0, a_1)$.
Corte o intervalo $[a_0, a_{1/2}]$ no ponto $a_{1/4} := M(a_0, a_{1/2})$,
e o intervalo $[a_{1/2}, a_1]$ no ponto $a_{3/4} := M(a_{1/2}, a_1)$.
Continuando assim, definimos a_r para todo racional diádico $r \in [0, 1]$.
Usando a hipótese (1), mostramos que
$M(a_r, a_s) = a_{(r+s)/2}$, $\forall\, r$, s diádicos.

Suficiência da condição (1)

A prova do Teorema de Aczél é fácil e natural:
Escolha dois pontos $a_0 < a_1$ no domínio de M.
Corte o intervalo $[a_0, a_1]$ no ponto $a_{1/2} := M(a_0, a_1)$.
Corte o intervalo $[a_0, a_{1/2}]$ no ponto $a_{1/4} := M(a_0, a_{1/2})$,
e o intervalo $[a_{1/2}, a_1]$ no ponto $a_{3/4} := M(a_{1/2}, a_1)$.
Continuando assim, definimos a_r para todo racional diádico $r \in [0, 1]$.
Usando a hipótese (1), mostramos que
$M(a_r, a_s) = a_{(r+s)/2}$, $\forall\, r$, s diádicos.
Usando que M é média, mostramos que a função
$h : r \mapsto a_r$ se estende a um homeomorfismo
$h : [a_0, a_1] \to [0, 1]$.
Esta é a conjugação procurada. "$\square$"

E com a condição de balancemanto (3)?

Podemos tentar a mesma prova:

1ª etapa: Escolhemos a_0, a_1, calculamos $a_{1/2}$.

E com a condição de balancemanto (3)?

Podemos tentar a mesma prova:

1ª etapa: Escolhemos a_0, a_1, calculamos $a_{1/2}$.

2ª etapa: Calculamos $a_{1/4}$, $a_{3/4}$.
Por (3), $M(a_{1/4}, a_{3/4}) = a_{1/2}$.

E com a condição de balancemanto (3)?

Podemos tentar a mesma prova:

1ª etapa: Escolhemos a_0, a_1, calculamos $a_{1/2}$.

2ª etapa: Calculamos $a_{1/4}$, $a_{3/4}$.
Por (3), $M(a_{1/4}, a_{3/4}) = a_{1/2}$.

3ª etapa: Calculamos $a_{1/8}$, $a_{3/8}$, $a_{5/8}$, $a_{7/8}$.
É possivel mostrar p.ex. que $M(a_{1/8}, a_{5/8}) = a_{3/8}$.

Mas não consigo mostrar que $\boxed{M(a_{1/8}, a_{7/8}) \stackrel{?}{=} a_{1/2}}$.

E com a condição de balancemanto (3)?

Podemos tentar a mesma prova:

1ª etapa: Escolhemos a_0, a_1, calculamos $a_{1/2}$.

2ª etapa: Calculamos $a_{1/4}$, $a_{3/4}$.
Por (3), $M(a_{1/4}, a_{3/4}) = a_{1/2}$.

3ª etapa: Calculamos $a_{1/8}$, $a_{3/8}$, $a_{5/8}$, $a_{7/8}$.
É possivel mostrar p.ex. que $M(a_{1/8}, a_{5/8}) = a_{3/8}$.

Mas não consigo mostrar que $\boxed{M(a_{1/8}, a_{7/8}) \stackrel{?}{=} a_{1/2}}$.

Com algum esforço, consigo mostrar que
$M(a_r, a_s) = a_{(r+s)/2}$ desde que $\boxed{|r - s| = 2^{-n},\ n \in \mathbb{Z}}$, mas
não mais do que isso...

Contra-exemplo

Teorema I (Aumann 1937). *Existe uma média balanceada que não é aritmética disfarçada.*

- Vollkommene Funktionalmittel und gewisse Kegelschnitteigenschaften. *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelle)* 176 (1937), 49–55.

Contra-exemplo

Teorema I (Aumann 1937). *Existe uma média balanceada que não é aritmética disfarçada.*

- Vollkommene Funktionalmittel und gewisse Kegelschnitteigenschaften. *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelle)* 176 (1937), 49–55.

Será que isso quer dizer que a condição de balanceamento é menos interessante?

Funções mais regulares

Teorema II (Aumann 1935). *Toda média balanceada analítica é aritmética disfarçada.*

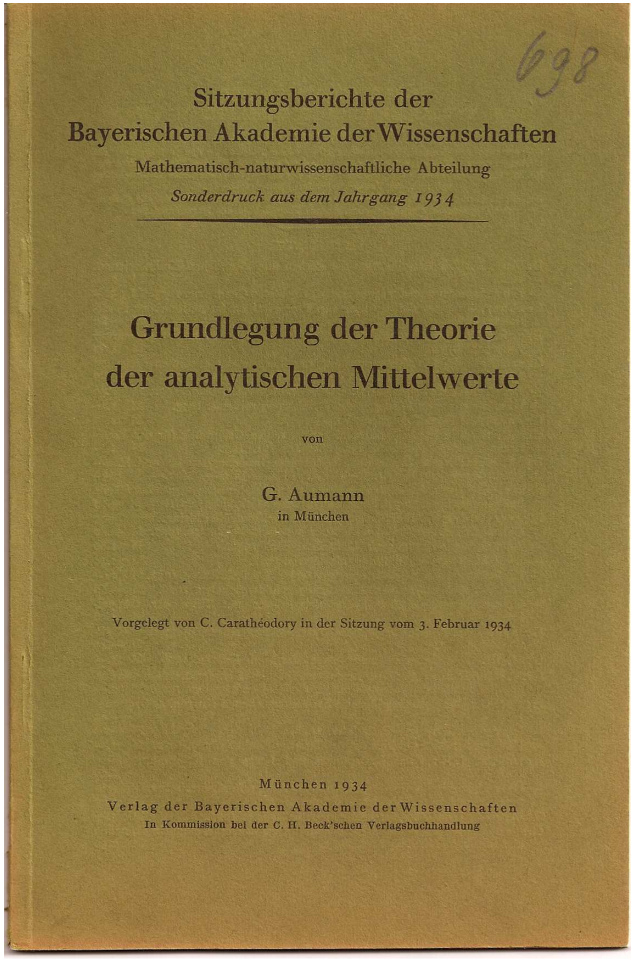
Funções mais regulares

Teorema II (Aumann 1935). *Toda média balanceada analítica é aritmética disfarçada.*

- Aufbau von Mittelwerten mehrerer Argumente. I. *Mathematische Annalen* 109 (1933), 235–253. (Habilitationsschrift)
- Grundlegung der Theorie der analytischen Analytische Mittelwerte. *Sitzungsberichte der Bayerischen Akademie der Wissenschaften* (1934), 45–81.
- Über die Struktur der analytischen Konvexitäten. *Sitzungsberichte der Bayerischen Akademie der Wissenschaften* (1935), 71–80.
- Aufbau von Mittelwerten mehrerer Argumente. II. (Analytische Mittelwerte) *Mathematische Annalen* 111 (1935), 713–730.

Funções mais regulares

Teorema II (Aumann 1935). *Toda média balanceada* *analítica* *é aritmética disfarçada.*


Sitzungsberichte der
Bayerischen Akademie der Wissenschaften
Mathematisch-naturwissenschaftliche Abteilung
Sonderdruck aus dem Jahrgang 1934

Grundlegung der Theorie
der analytischen Mittelwerte

von

G. Aumann
in München

Vorgelegt von C. Carathéodory in der Sitzung vom 3. Februar 1934

München 1934
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung

Prova do Teorema Analítico?

M média analítica $\Rightarrow$

$$M(x,y) = \frac{x+y}{2} + P(x,y) + \text{h.o.t.}$$

$P(x,y)$ é um polinômio homogêneo simétrico de grau n ($\lfloor n/2 \rfloor$ graus de liberdade).

Prova do Teorema Analítico?

$$\blacklozenge = M(x,y) = \frac{x+y}{2} + P(x,y) + \text{h.o.t.}$$

$$\clubsuit = M(x,\blacklozenge) = \frac{3x+y}{4} + \frac{1}{2}P(x,y) + P\left(x, \frac{x+y}{2}\right) + \text{h.o.t.}$$

$$\spadesuit = M(y,\blacklozenge) = \frac{x+3y}{4} + \frac{1}{2}P(x,y) + P\left(y, \frac{x+y}{2}\right) + \text{h.o.t.}$$

$$M(\clubsuit,\spadesuit) = \frac{x+y}{2} + \frac{1}{2}P(x,y) + \frac{1}{2}P\left(x, \frac{x+y}{2}\right) + \frac{1}{2}P\left(y, \frac{x+y}{2}\right) + P\left(\frac{3x+y}{4}, \frac{x+3y}{4}\right) + \text{h.o.t.}$$

Prova do Teorema Analítico?

Impondo a condição de balanceamento $\blacklozenge = M(\clubsuit, \spadesuit)$, caímos em um *sistema linear* para os coeficientes do polinômio $P(x, y)$.

Prova do Teorema Analítico?

Impondo a condição de balanceamento $\blacklozenge = M(\clubsuit, \spadesuit)$, caímos em um *sistema linear* para os coeficientes do polinômio $P(x, y)$.

Contas $\Rightarrow$ o espaço de soluções é unidimensional:

$$P(x,y) = c\left[\frac{x^n}{2} - \left(\frac{x+y}{2}\right)^n + \frac{y^n}{2}\right]$$

Prova do Teorema Analítico?

Impondo a condição de balanceamento $\blacklozenge = M(\clubsuit, \spadesuit)$, caímos em um *sistema linear* para os coeficientes do polinômio $P(x, y)$.

Contas $\Rightarrow$ o espaço de soluções é unidimensional:

$$P(x, y) = {\color{blue}c} \left[\frac{x^n}{2} - \left(\frac{x+y}{2} \right)^n + \frac{y^n}{2} \right]$$

Mudando de coordenadas via o difeomorfismo local $h_n(x) = x + {\color{blue}c}x^n$, matamos os termos de grau n.

Prova do Teorema Analítico?

Impondo a condição de balanceamento $\blacklozenge = M(\clubsuit, \spadesuit)$, caímos em um *sistema linear* para os coeficientes do polinômio $P(x,y)$.

Contas $\Rightarrow$ o espaço de soluções é unidimensional:

$$P(x,y) = c\left[\frac{x^n}{2} - \left(\frac{x+y}{2}\right)^n + \frac{y^n}{2}\right]$$

Mudando de coordenadas via o difeomorfismo local $h_n(x) = x + cx^n$, matamos os termos de grau n. Repetindo isso sucessivamente para os graus $n = 2, 3, \ldots$, encontramos uma *série formal* $h = \lim h_2 \circ h_3 \circ \cdots \circ h_n$ que conjuga M com a média aritmética. (Os coeficientes de cada grau fixado estabilizam.)

Formal não é legal

É possivel provar o Teorema II achando uma (outra) sequência de conjugações sucessivas que tal que $h_2 \circ h_3 \circ \cdots \circ h_n$ de fato converge para uma função analítica, usando o método **KAM** (Kolmogorov–Arnold–Moser, 1954–. . .).

Formal não é legal

É possivel provar o Teorema II achando uma (outra) sequência de conjugações sucessivas que tal que $h_2 \circ h_3 \circ \cdots \circ h_n$ de fato converge para uma função analítica, usando o método **KAM** (Kolmogorov–Arnold–Moser, 1954–. . .).

Porém Aumman tem uma maneira muito mais simples.

Truque de Aumann

Idéia: Conjugar para fazer M ficar tangente em 2ª ordem a M_A em *toda* a diagonal $\Delta = \{(x,x)\}$.

$$M(x,y) \text{ simétrica} \Rightarrow K_M(x) := \left.\frac{\partial^2 M}{\partial x^2}\right|_{y=x}$$

Truque de Aumann

Idéia: Conjugar para fazer M ficar tangente em 2ª ordem a M_A em *toda* a diagonal $\Delta = \{(x,x)\}$.

$$M(x,y) \text{ simétrica} \Rightarrow K_M(x) := \left.\frac{\partial^2 M}{\partial x^2}\right|_{y=x}$$

Como K se transforma por mudança de coordenadas?

$$N(\xi,\eta) = h\left(M(h^{-1}(\xi), h^{-1}(\eta))\right) \Rightarrow$$

$$h'(x)\underbrace{K_N(h(x))}_{\text{quero } =0} = -\frac{1}{4}\cdot \underbrace{\frac{h''(x)}{h'(x)}}_{\frac{d}{dx}\log h'(x)} + K_M(x)$$

Truque de Aumann

Impondo $K_N \equiv 0$, obtemos a equação diferencial

$$\frac{d}{dx}\log h'(x) = 4K_M(x), \quad \text{cuja solução geral é}$$

$$h(x) = \int_{x_0}^{x} \exp\left[4\int_{x_1}^{t} K_M(u)\,du\right]\,dt$$

Obs: O efeito de alterar x_0, x_1 é substituir h por afim $\circ\, h$ (como esperado).

Portanto podemos supor $\boxed{K_M = \left.\frac{\partial^2 M}{\partial x^2}\right|_{y=x} \equiv 0}$.

Aumann chama tal M de *entzerrt* (alisada?).

Fim da Prova do Teorema Analítico

Vimos que M analítica balanceada $\Rightarrow$

$$M(x,y) = \frac{x+y}{2} + c\left[\frac{x^n}{2} - \left(\frac{x+y}{2}\right)^n + \frac{y^n}{2}\right] + \text{h.o.t.}$$

Supondo M já alisada:

$$0 \equiv K_M = \left.\frac{\partial^2 M}{\partial x^2}\right|_{y=x} = c \cdot \frac{n(n-1)x^{n-2}}{4}$$

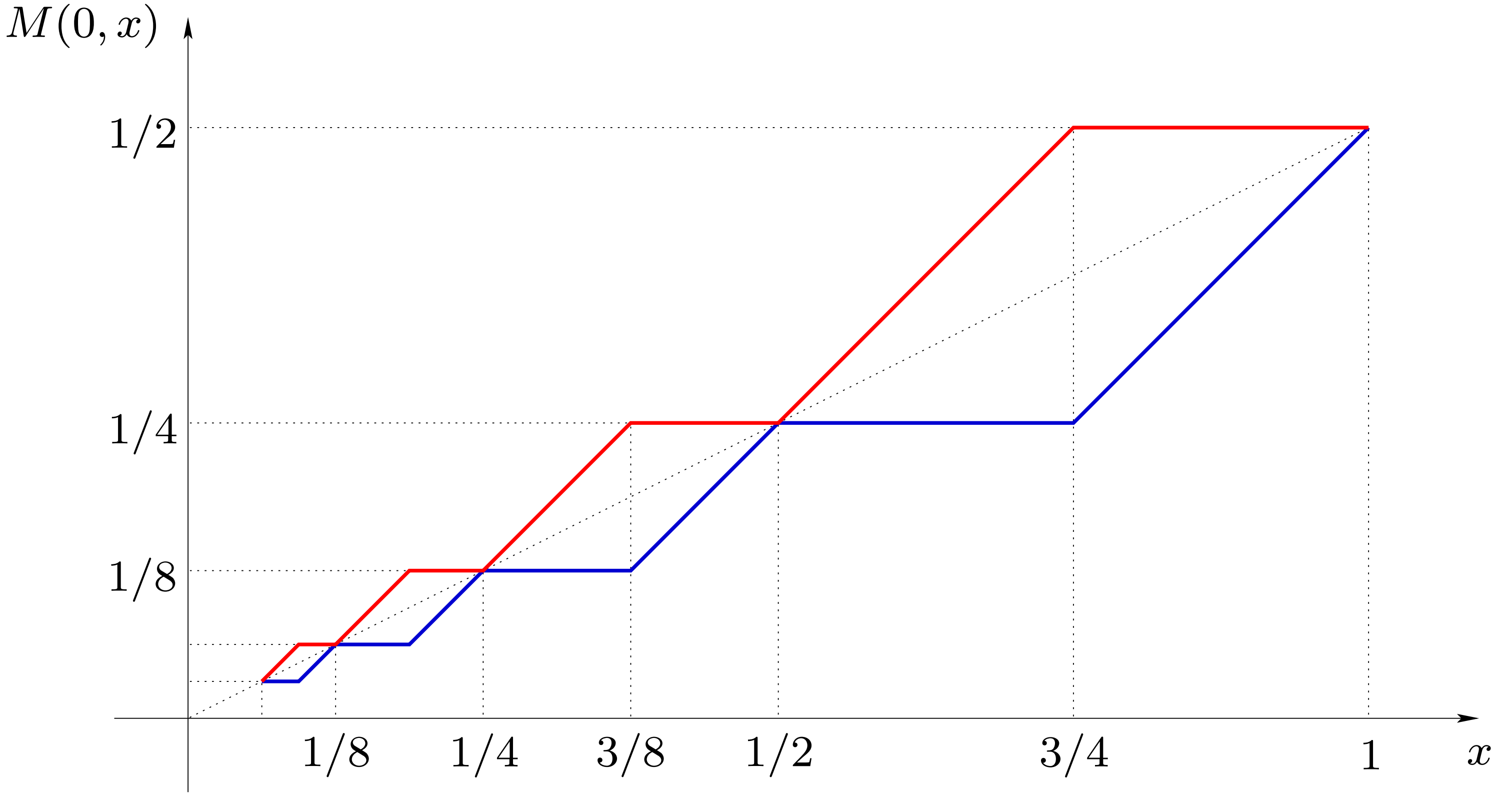
Logo $c = 0$ e

$$M(x,y) \equiv \frac{x+y}{2}$$

Contra-exemplos (não-analíticos)?

Agora vejamos o Teorema I: balanceada $\not\Rightarrow$ MAD.

Obs: Existem quase-contra-exemplos explícitos que não são estritamente monótonos:



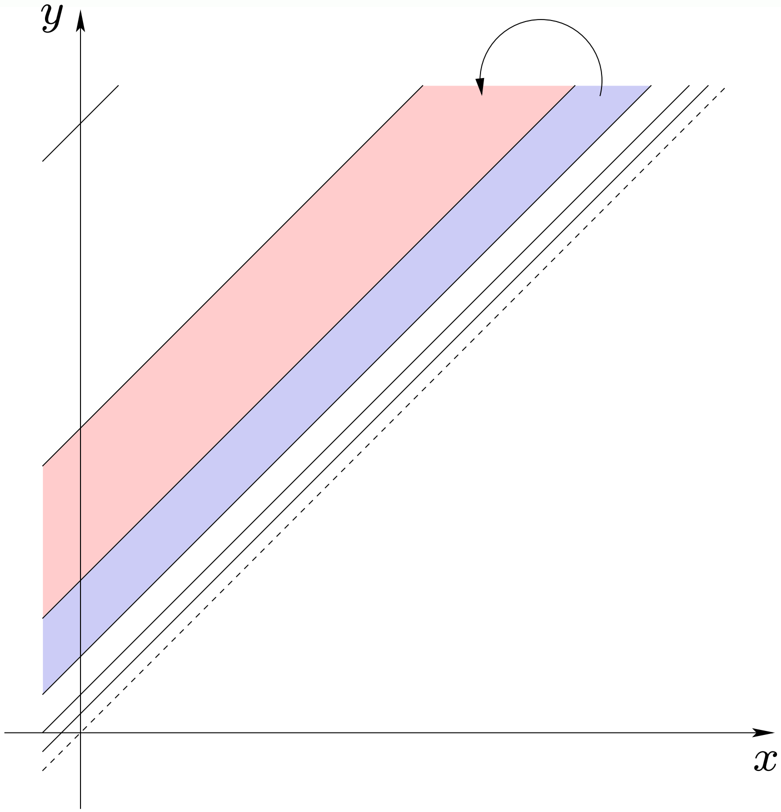
M e M são invariantes por translações.

Idéia da construção de contra-ex

Buscamos exemplos satis-fazendo

$$M(x,y) = \frac{x+y}{2}$$

se $|x-y| = 2^n$, $n \in \mathbb{Z}$.

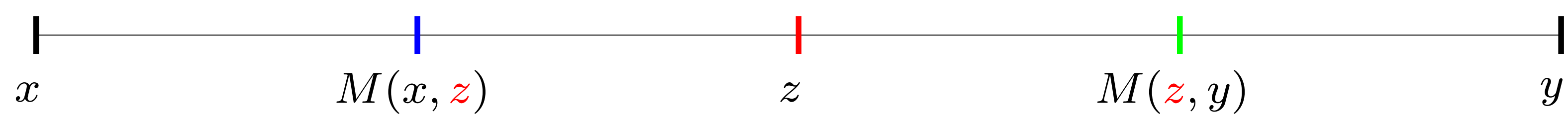


Idéia: Suponha $M(x,y)$ conhecida na faixa $\frac{1}{4} < y - x < \frac{1}{2}$. Sob certas condições ($M$ C^1-próxima de $(x+y)/2$), isso determina unicamente $M(x,y)$ na faixa $\frac{1}{2} < y - x < 1$.

Como subir de faixa?

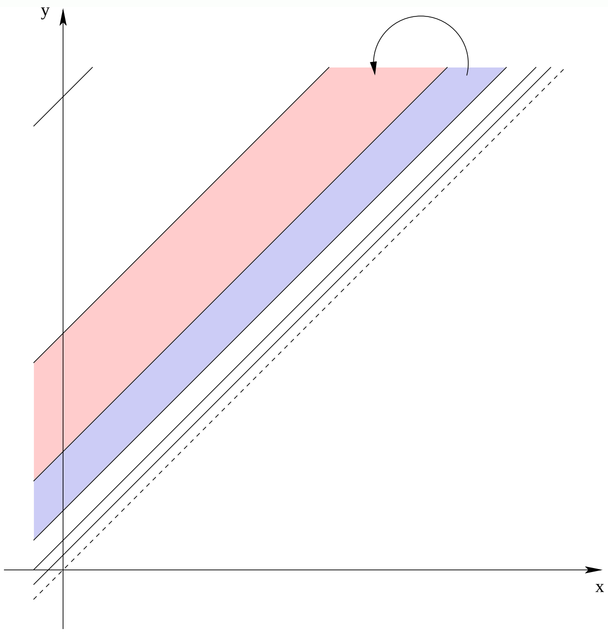
Se $M(x, y)$ é conhecida na faixa $\frac{1}{4} < y - x < \frac{1}{2}$ e é C^1-próxima de $(x + y)/2$, então dados (x, y) na faixa $\frac{1}{2} < y - x < 1$, determinamos unicamente $z = M(x, y)$ resolvendo a *equação implícita*

$$M\big(M(x, z), M(z, y)\big) = z.$$



Achando o contra-exemplo

Apeser de não sabermos se a operação “subir de faixa” é invertível, é possivel mostra que $\exists$ órbita bi-infinita que não a trivial (M_A). Assim mostramos que existe uma média balanceada não-MAD M.



Além disso:

- M é Lipschitz (limite C^0 (controlado) de funções C^1);
- M não é C^3;
- M é invariante por translações (ou homogênea, se quiser).

Perguntas

1ª. Em que classe de diferenciabilidade está a fronteira entre os dois fenômenos? Talvez C^2?

Perguntas

1ª. Em que classe de diferenciabilidade está a fronteira entre os dois fenômenos? Talvez C^2?

2ª. Alguém sabe alemão?

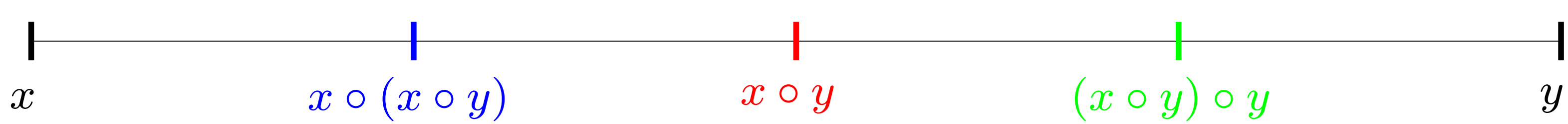
Perguntas

1ª. Em que classe de diferenciabilidade está a fronteira entre os dois fenômenos? Talvez C^2?

2ª. Alguém sabe alemão?

3ª. Podemos tratar outras equações funcionais?
Exemplo: Qualquer MAD $M(x,y) = x \circ y$ satisfaz:

$$x \circ \big((x \circ y) \circ y\big) = \big(x \circ (x \circ y)\big) \circ (x \circ y)$$



Provar o teorema analítico correspondente é um problema de álgebra linear.

Fim

Obrigado!