



Pedro Henrique Milet Pinheiro Pereira

Curvas de Peano e Campos de Direções

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Matemática Pura do Departamento de Matemática da PUC-Rio

Orientador: Prof. Jairo da Silva Bochi

Rio de Janeiro
Fevereiro de 2011



Pedro Henrique Milet Pinheiro Pereira

Curvas de Peano e Campos de Direções

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Matemática Pura do Departamento de Matemática do Centro Técnico Científico da PUC-Rio. Aprovada pela comissão examinadora abaixo assinada.

Prof. Jairo da Silva Bochi

Orientador

Departamento de Matemática — PUC-Rio

Prof. Carlos Tomei

Departamento de Matemática — PUC-Rio

Prof. Martin Andersson

Instituto de Matemática — UFF

Prof. Nicolau Corção Saldanha

Departamento de Matemática — PUC-Rio

Prof. Ricardo Sá Earp

Departamento de Matemática — PUC-Rio

Prof. José Eugênio Leal

Coordenador Setorial do Centro Técnico Científico — PUC-Rio

Rio de Janeiro, 21 de Fevereiro de 2011

Todos os direitos reservados. Proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

Pedro Henrique Milet Pinheiro Pereira

Graduou-se em Matemática Pura na Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro em janeiro de 2009.

Ficha Catalográfica

Pereira, Pedro Henrique Milet Pinheiro

Curvas de Peano e Campos de Direções / Pedro Henrique Milet Pinheiro Pereira; orientador: Jairo da Silva Bochi. — Rio de Janeiro : PUC–Rio, Departamento de Matemática, 2011.

v., 39 f: il. ; 29,7 cm

1. Dissertação (Mestrado em Matemática Pura) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática.

Inclui referências bibliográficas.

1. Matemática – Tese. 2. Curvas de Peano. 3. Campos de Direções. 4. Convexidade. I. Bochi, Jairo da Silva. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Matemática. III. Título.

CDD: 510

Agradecimentos

Ao meu orientador, Professor Jairo da Silva Bochi, por me apoiar e indicar os melhores caminhos para a realização deste trabalho.

Ao CNPq, à FAPERJ e à PUC-Rio, em particular o Departamento de Matemática, por me possibilitarem a concretização desta obra.

Aos meus pais, pelo apoio em todos os momentos.

Ao pessoal do Departamento de Matemática, em especial à Creuza, pela eficiência na solução de vários problemas.

Resumo

Pereira, Pedro Henrique Milet Pinheiro; Bochi, Jairo da Silva.
Curvas de Peano e Campos de Direções. Rio de Janeiro, 2011.
39p. Dissertação de Mestrado — Departamento de Matemática,
Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

M. Mihalik e A. Wieczorek perguntaram se é possível encontrar uma curva $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ de Peano com a propriedade adicional de que $\gamma([a, b])$ é um subconjunto convexo do quadrado unitário para todo $0 \leq a \leq b \leq 1$. Esse problema se mostrou bastante complexo, mas outras perguntas semelhantes puderam ser respondidas. Esta dissertação mostra um processo de construção de uma curva de Peano $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que os conjuntos $K_t = \gamma([0, t])$ são compactos convexos cujo bordo é C^∞ e tangente a um campo de direções contínuo (exceto em $\gamma(0)$). Finalmente, discute-se se em algum sentido é possível dizer que a curva de Peano é tangente ao campo de direções.

Palavras-chave

Curvas de Peano. Campos de Direções. Convexidade.

Abstract

Pereira, Pedro Henrique Milet Pinheiro; Bochi, Jairo da Silva. **Peano Curves and Line Fields**. Rio de Janeiro, 2011. 39p. Dissertação de Mestrado — Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

M. Mihalik e A. Wieczorek asked if it is possible to find a Peano curve $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ such that $\gamma([a, b])$ is a convex subset of the unit square for all $0 \leq a \leq b \leq 1$. The problem itself seems to be quite complex, but some similar problems could be solved. This dissertation shows a way of constructing a Peano curve $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ such that the sets $K_t = \gamma([0, t])$ are convex, compact and their boundaries ∂K_t are C^∞ and tangent to a continuous line field (except in $\gamma(0)$). Lastly, we discuss whether one can say that the Peano curve itself is tangent to the line field.

Keywords

Peano Curves. Line Fields. Convexity.

Sumário

0	Introdução	8
1	O Processo Básico de Construção	11
1.1	Luas e suas partições	11
1.2	Definição da família de luas	14
1.3	Construção do conjunto de Cantor K	17
1.4	Definição da família de funções-teto	17
1.5	Definição do campo de direções	19
1.6	Definição da sequência de curvas	20
2	Adicionando as Propriedades de Convexidade	25
3	Discussões sobre Tangência	29
3.1	A razão entre altura e largura	29
3.2	Uma espécie de derivada direcional da altura	31
3.3	Ângulos tendendo a zero	32
3.4	Limite uniforme de curvas C^∞ tangentes a X	33
4	Observações Finais e Perguntas	35
4.1	Fazendo K_t ser quase um disco	35
4.2	Refazendo a construção sem os gaps	35
4.3	Fazendo γ ser Hölder	37
4.4	Outras ideias	37

0

Introdução

Georg Cantor introduziu em 1878 o conceito de cardinalidade. Seus estudos mostraram, em particular, que existe uma bijeção entre o intervalo $[0, 1]$ e o quadrado $[0, 1]^2$, o que motivou quase que imediatamente a pergunta de se essa bijeção poderia de alguma forma ser contínua. No entanto, em 1879, E. Netto mostrou que tal bijeção é necessariamente descontínua, conforme relata Sagan em (S94).

Deixando de lado a hipótese da bijetividade, G. Peano construiu em 1890 uma função contínua e sobrejetiva de $[0, 1]$ em $[0, 1]^2$, isto é, uma curva que preenche o quadrado. Desde então, curvas que passam por todos os pontos de uma região bidimensional de interior não-vazio são chamadas de *curvas de Peano*.

Foi David Hilbert, no entanto, que primeiro descobriu um procedimento geométrico que permitia a construção de toda uma classe de curvas de Peano. O procedimento de Hilbert é hoje bem conhecido e se baseia em subdivisões simultâneas de um quadrado e de um intervalo, bem demonstrado pela figura 1. A figura aponta as relações entre os subintervalos e os subquadrados no três primeiros passos da construção de Hilbert. Se um intervalo I é mapeado em um quadrado Q , seus subintervalos, gerados no passo seguinte serão mapeados nos subquadrados de Q que foram gerados no mesmo passo. Hilbert observou que é sempre possível arranjar os subquadrados de forma que a subintervalos adjacentes correspondam subquadrados com uma aresta em comum.

A seguinte pergunta é atribuída por J. Pach e C.A. Rogers em (PR83) a M. Mihalik e A. Wierczonek do Instytut Podrtaw Informatyki da Academia Polonesa de Ciências, e também é citada como problema em aberto por (CFG91, problem A.37).

Problema 1 *Existe uma curva $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ de Peano com a propriedade adicional de que $\gamma([a, b])$ é um subconjunto convexo do quadrado, para todo $0 \leq a \leq b \leq 1$?*

Pach e Rogers não conseguiram solucionar o problema, mas construíram em (PR83) uma curva γ de Peano tal que $\gamma([0, b])$ é convexo para todo b .

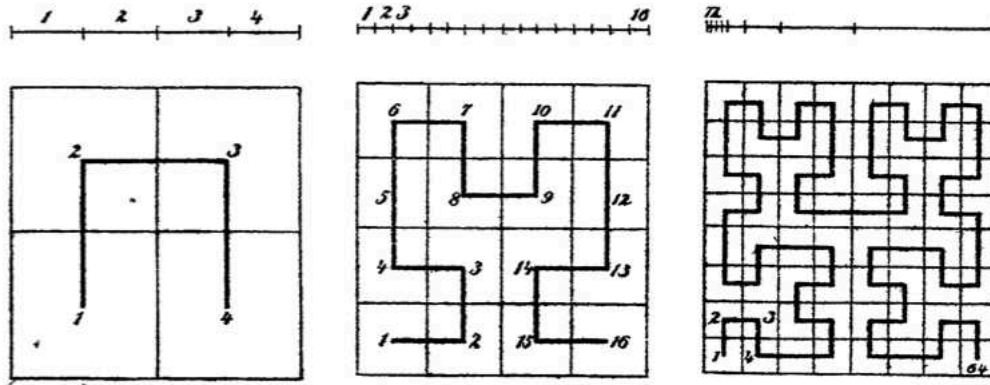


Figura 1: Esta é uma reprodução da figura original de Hilbert (Hi91).

Independentemente, Andrew Vince e David C. Wilson obtiveram em (VW86) o mesmo resultado através de uma construção um pouco similar.

Vale observar que Pach e Rogers também mostraram que uma versão discretizada do problema tem resposta positiva: veja (VPR88). No Capítulo 6 da tese de doutorado (U06) são estabelecidas diversas propriedades das “curvas de Peano convexas”, mas não sua existência.

O resultado principal desta dissertação é o seguinte:

Teorema 0.1 *Existe uma curva $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ e existe um campo contínuo de direções X em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ tal que γ é curva de Peano, e para todo $t > 0$, o conjunto $K_t = \gamma([0, t])$ é convexo com bordo C^∞ , tangente ao campo em cada ponto, e com curvatura afastada de zero (por uma constante que não depende de t). Além disso, $\gamma(t) \in Fr(K_t) \forall t$.*

Isto melhora o resultado de (PR83, VW86). A informação nova mais relevante é o campo de direções X . Em algum sentido, a curva γ parece ser tangente ao campo X . Tentamos dar sentido preciso a esta afirmação analisando diversos conceitos de tangência. No entanto, não conseguimos encontrar um conceito de tangência que fosse satisfeito pela nossa curva e que ao mesmo tempo respeitasse alguns critérios básicos – ver discussão no capítulo 3.

A construção da curva γ é inspirada em (PR83) e (VW86), mas é feita de maneira mais “flexível”. Por exemplo, enquanto Pach e Rogers definem o objeto *lune* como a região entre um arco de parábola e uma curva que é seccionalmente arco de parábola, a nossa lua é simplesmente a região entre duas funções C^∞ . Esta maior flexibilidade de fato simplifica a construção e permite ajustes convenientes na curva.

Vamos relembrar alguns resultados clássicos respeito de curvas tangentes a campos de direções. Um teorema do próprio Peano (veja por exemplo (Ho76,

p. 148)) assegura que todo campo contínuo tem curvas tangentes. Porém pode existir mais de uma curva tangente ao campo passando por um ponto dado. De fato, existem equações diferenciais para as quais não vale a unicidade de soluções: $dy/dt = |y|^{1/2}$ é um exemplo. Um exemplo bastante natural e interessante de um campo de direções contínuo que não é unicamente integrável é descrito em (B03, p. 12–14). Nestes exemplos, os pontos de “bifurcação” formam uma curva. Já o campo do Teorema 0.1 possui um conjunto denso de pontos de bifurcação. Outros exemplos de campos com muitas bifurcações são construídos em (BF04).

Por outro lado, podemos dizer que a não-unicidade é um fenômeno patológico: Campos contínuos genéricos (no sentido do Teorema de Baire) são unicamente integráveis: veja (Ho76, p. 151). Além disso, o clássico Teorema de Cauchy–Picard garante a unicidade no caso de campos suficientemente regulares (Lipschitz). Isso é usualmente demonstrado utilizando o Teorema de Ponto Fixo para Contrações (veja por exemplo (Ho76, p. 57)). Outra demonstração (que obtém o Teorema de Existência de Peano ao longo do caminho) é apresentada em (AAN09).

Esta dissertação está assim organizada: O Capítulo 1 contém a construção de curvas de Peano e campos de direções com todas as propriedades mencionadas no Teorema 0.1, exceto a convexidade. No Capítulo 2 usamos estes resultados e, tomando cuidados para garantir a convexidade, demonstramos o Teorema 0.1. No Capítulo 3, exploramos algumas definições de tangência de uma curva (apenas contínua) a um campo contínuo de direções. Investigamos algumas propriedades destas definições, como por exemplo se uma curva de Peano pode ser tangente a um campo.

1

O Processo Básico de Construção

O objetivo deste capítulo é demonstrar a proposição 1.3, além de definir objetos e provar fatos que serão relevantes para a construção do próximo capítulo. Primeiro, duas definições:

Definição 1.1 *Seja $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva diferenciável e $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo de direções. α é dita tangente a X em todo ponto se $\alpha'(t) \parallel X(\alpha(t))$ para todo $t \in [0, 1]$.*

Aqui é necessário admitir a possibilidade de $\alpha'(t) = 0$ em um conjunto finito de t 's. Isso permite que nós façamos completo uso da diferença entre campos de direções e campos de vetores, pois a curva pode parar e voltar no sentido contrário.

Definição 1.2 (Curva de Peano) *Uma curva $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ é dita curva de Peano se $\gamma([0, 1])$ tem interior não-vazio.*

Proposição 1.3 *Existe uma curva $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ e existe um campo contínuo de direções X em \mathbb{R}^2 tal que γ é curva de Peano e γ é limite uniforme de curvas C^∞ γ_n tangentes ao campo em cada ponto.*

1.1

Luas e suas partições

Definição 1.4 *Sejam $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funções C^∞ satisfazendo:*

1. *f e g têm contato de ordem infinita em a e b , isto é, $f^{(i)}(a) = g^{(i)}(a)$, $f^{(i)}(b) = g^{(i)}(b)$, $\forall i \in \mathbb{N}$*
2. *$f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in [a, b]$*

A região $L = L(f, g) = \{(x, y) | x \in [a, b], f(x) \leq y \leq g(x)\}$ é chamada lua.

As luas com as quais nós trabalharemos serão sempre definidas em $[0, 1]$.

Mais algumas definições são convenientes:

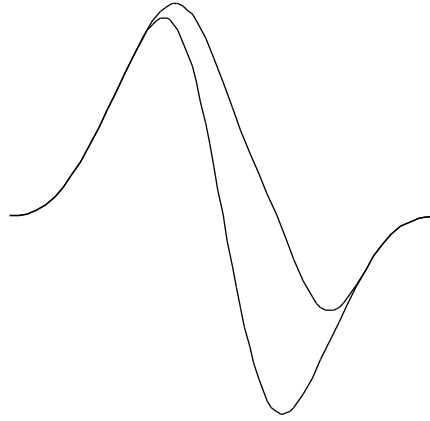


Figura 1.1: Lua típica da construção

Definição 1.5 Para uma lua $L = L(f, g)$, definimos o seu suporte como $S_L = \{x \in [a, b] \mid f(x) < g(x)\}$. Além disso, L é dita aberta se S_L é um intervalo.

É tecnicamente conveniente termos que a lua é definida em $[0, 1]$. No entanto, a maioria das luas com as quais nós iremos trabalhar tem intervalos em que $f = g$, como ilustra a Figura 1.1. Gostaríamos de pensar que a lua de fato está definida em seu suporte, ideia esta que será capturada mais tarde na Definição 1.14.

Notação 1 Para uma função C^∞ $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, denotamos

$$\|F\|_0 = \sup_{x \in [a, b]} |F(x)| \text{ e } \|F\|_k = \max(\|F\|_0, \|F'\|_0, \dots, \|F^{(k)}\|_0), k \in \mathbb{N}$$

Para $L = L(f, g)$, definimos $\|L\|_k = \|g - f\|_k$.

Fixemos $\phi : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ uma função C^∞ tal que $\phi^{-1}(0) = (-\infty, 1/3]$, $\phi^{-1}(1) = [2/3, +\infty)$.

Definimos para $a < b$

$$\phi_{a,b}(x) = \phi\left(\frac{x-a}{b-a}\right)$$

É claro que $\phi_{0,1} = \phi$, e $\phi_{a,b}^{-1}(0) = (-\infty, \frac{2a+b}{3}]$, $\phi_{a,b}^{-1}(1) = [\frac{a+2b}{3}, +\infty)$. Note também que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |\phi_{a,b}^{(k)}(x)| = \sup_{x \in [a, b]} |\phi_{a,b}^{(k)}(x)|,$$

logo podemos definir $\|\phi_{a,b}\|_k$ da maneira usual considerando ϕ restrita a $[a, b]$.

Nota 1 Como

$$\phi_{a,b}^{(k)}(x) = \frac{1}{(b-a)^k} \cdot \phi^{(k)}\left(\frac{x-a}{b-a}\right),$$

temos que

$$\|\phi_{a,b}\|_k = \max_{i \leq k} \frac{\|\phi^{(i)}\|_0}{(b-a)^i}$$

Definição 1.6 Seja $L = L(f, g)$ uma lua aberta definida em $[0, 1]$ com suporte $S_L = (a, b)$. Defina $h(x) = (1 - \phi_{a,b}(x))g(x) + \phi_{a,b}(x)f(x)$. Claramente h é C^∞ e $L_1 = L(f, h)$ e $L_2 = L(h, g)$ são luas abertas definidas em $[0, 1]$. $L = L_1 \cup L_2$ é chamada a bipartição de L .

Lema 1.7 Podemos observar que as luas L_1 e L_2 geradas na bipartição de L têm mais duas propriedades importantes:

1. $S_{L_1} = (a, \frac{a+2b}{3})$, $S_{L_2} = (\frac{2a+b}{3}, b)$
2. $\max(\|L_1\|_k, \|L_2\|_k) \leq 2^k \|\phi_{a,b}\|_k \|L\|_k, \forall k \in \mathbb{N}$.

Prova. O item (1) segue diretamente da construção.

Para o item (2), note que dado $k \in \mathbb{N}$,

$$h^{(k)}(x) = g^{(k)}(x) + \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \phi_{a,b}^{(k-i)}(x) (f-g)^{(i)}(x)$$

Portanto

$$\|h^{(k)} - g^{(k)}\|_0 \leq 2^k \|\phi_{a,b}\|_k \|f - g\|_k$$

e assim

$$\|L_2\|_k \leq \max_{i \leq k} (2^i \|\phi_{a,b}\|_i \|L\|_i) = 2^k \|\phi_{a,b}\|_k \|L\|_k$$

Da mesma forma, uma vez que $h - f = (1 - \phi_{a,b})(g - f)$ temos que

$$\|h^{(k)} - f^{(k)}\|_0 \leq 2^k \|1 - \phi_{a,b}\|_k \|g - f\|_k$$

Como $\|1 - \phi_{a,b}\|_k = \|\phi_{a,b}\|_k$, a prova está completa. ■

Definição 1.8 Seja $L = L(f, g)$ uma lua aberta de suporte S_L , e $n \in \mathbb{N}$. Para $i = 0, 1, \dots, n$ defina $h_i = (1 - \frac{i}{n})f + \frac{i}{n}g$. Então para $i = 0, \dots, n-1$, $L_i = L(h_i, h_{i+1})$ é uma lua aberta de suporte S_L e

$$L = L_0 \cup L_1 \cup \dots \cup L_{n-1}$$

é chamado o n -fatiamento de L .

Lema 1.9 Dado um n -fatiamento $L = L_0 \cup \dots \cup L_{n-1}$, vale $\forall i, \forall k$:

$$\|L_i\|_k \leq \frac{1}{n} \|L\|_k$$

Prova.

Como

$$|h_{i+1}^{(k)}(x) - h_i^{(k)}(x)| = \frac{1}{n} |g^{(k)}(x) - f^{(k)}(x)|,$$

temos

$$\|h_{i+1} - h_i\|_k \leq \frac{1}{n} \|L\|_k$$

■

1.2

Definição da família de luas

Começamos com uma lua aberta L definida em $[0, 1]$ e com suporte $S_L = (0, 1)$. Fixe também uma sequência $\{\epsilon_k\}_{k \geq 2}$ somável.

- Escolha n_1 suficientemente grande para que as luas geradas do n_1 -fatiamento de L , $L = L_0^* \cup \dots \cup L_{(n_1-1)}^*$ satisfaçam

$$\|L_i^*\|_2 < \frac{\epsilon_2}{4\|\phi_{0,1}\|_2}, i = 0, \dots, n_1 - 1$$

- Para cada $i \in \{0, \dots, n_1 - 1\}$, seja $L_i^* = L_{(2i)} \cup L_{(2i+1)}$ a bipartição de L_i^* .
- Se $L_i = L(f_i, g_i)$ e $m_1 = 2n_1$ então valem:

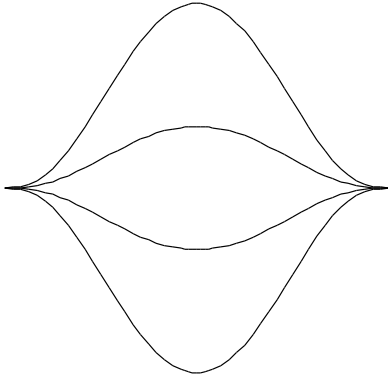
1.

$$f_0 = f, g_{(m_1-1)} = g, f_{(i+1)} = g_i$$

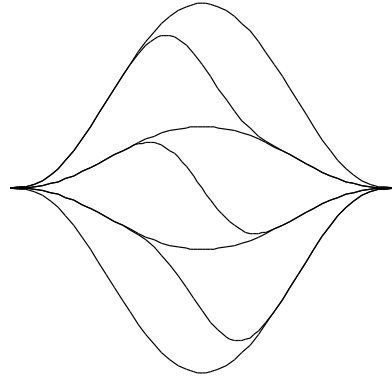
2. Pelo Lema 1.7,

$$\|L_i\|_2 < \epsilon_2, 0 \leq i \leq m_1 - 1$$

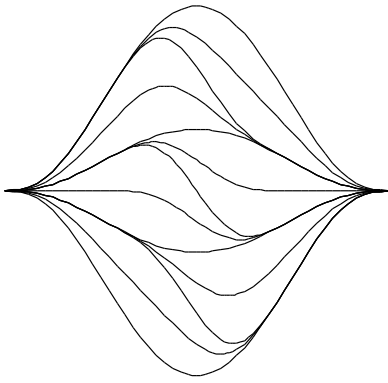
- Agora o passo indutivo. Suponha que nós temos m_1, m_2, \dots, m_{l-1} e para cada $\omega = i_1 i_2 \dots i_{l-1}$ com $0 \leq i_j \leq m_j - 1$ está definida a lua $L_\omega = L(f_\omega, g_\omega)$, de suporte (a, b) . Escolha n_ω suficientemente grande para que as luas geradas no n_ω -fatiamento de L_ω , $L_\omega = L_{\omega 0}^* \cup \dots \cup L_{\omega(n_\omega-1)}^*$ satisfaçam



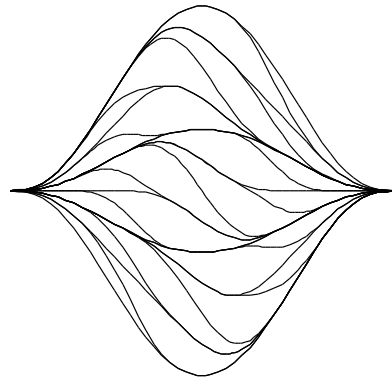
1.2(a): Lua 3-fatiada



1.2(b): Depois bipartida



1.2(c): A figura anterior é 2-fatiada



1.2(d): E mais uma vez bipartida

Figura 1.2: Exemplo mostrando dois passos indutivos (fatiamento seguido de bipartição)

$$\|L_{\omega_i}^*\|_{l+1} < \frac{\epsilon_{l+1}}{2^{l+1} \|\phi_{a,b}\|_{l+1}}, i = 0, \dots, n_\omega - 1$$

- Defina $n_l = \max\{n_\omega : \omega = i_1 i_2 \dots i_{l-1}, 0 \leq i_j \leq m_j - 1\}$ Claramente as luas geradas no n_l -fatiamento de cada L_ω continuam satisfazendo a desigualdade acima.
- Para cada $i \in \{0, \dots, n_l - 1\}$, seja $L_{\omega_i}^* = L_{\omega(2i)} \cup L_{\omega(2i+1)}$ a bipartição de $L_{\omega_i}^*$.
- Se $L_{\omega_i} = L(f_{\omega_i}, g_{\omega_i})$ e $m_l = 2n_l$ então valem:

1.

$$f_{\omega_0} = f_\omega, g_{\omega(m_l-1)} = g_\omega, f_{\omega(i+1)} = g_{\omega_i}$$

2. Pelo Lema 1.7,

$$\|L_{\omega_i}\|_{l+1} < \epsilon_{l+1}, 0 \leq i \leq m_1 - 1$$

Definição 1.10 *Definimos*

$$\Omega = \{\omega = i_1 i_2 \dots i_n | i_j \in \{0, 1, \dots, m_j - 1\}, j = 1 \dots n\},$$

o conjunto das palavras finitas que vão indexar cada lua que aparece na construção, e $\Omega^* = \{\omega = i_1 \dots i_n \in \Omega | i_n < m_n - 1\}$.

O comprimento da palavra $\omega = i_1 i_2 \dots i_n$ é $|\omega| = n$.

Além disso, dado $\omega = i_1 \dots i_n \in \Omega^*$ definimos o seu sucessor $\omega^+ \in \Omega$ como $\omega^+ = i_1 \dots i_{n-1}(i_n + 1)$.

Assim, a cada palavra finita $\omega \in \Omega$ associamos a lua L_ω definida na construção. Além disso, no passo indutivo fica claro que se $|\omega| = l$ então

$$\|L_\omega\|_{l+1} < \epsilon_{l+1}$$

O lema a seguir garante mais uma propriedade da construção:

Lema 1.11 *Se $f''(x), g''(x) < -\alpha < 0$ e $S_L = (a, b)$, é possível fazer a construção acima mantendo $f''(x), g''(x) < -\alpha$, para todo $\omega = i_1 \dots i_k \in \Omega$.*

Prova. Basta mostrar que essa propriedade pode ser mantida no primeiro passo, uma vez que todos os outros passos são divisões idênticas das luas menores.

De $L = L(f, g)$ obtemos uma n_1 -partição $L_i^* = L(h_i, h_{i+1})$ com $\|L_i^*\|_2 < \delta$ arbitrariamente pequeno (nos passos seguintes essa afirmação permanece verdade, uma vez que $\|\cdot\|_2 \leq \|\cdot\|_k$). Além disso, pela construção é fácil ver que $h_i''(x) < -\alpha$ (h_i é combinação convexa de f e g)

Em seguida cada L_i^* é bipartida em L_{2i} e L_{2i+1} , com

$$\|L_{2i}\|_2, \|L_{2i+1}\|_2 \leq 4\|\phi_{a,b}\|_2 \|L_i^*\|_2 < 4\delta\|\phi_{a,b}\|_2,$$

portanto mantendo a notação $L_i = L(f_i, g_i)$:

$$\|g_i'' - f_i''\|_0 \leq \|L_i\|_2 < 4\delta\|\phi_{a,b}\|_2$$

Como um dos dois, f_i'' ou g_i'' , é igual a um dos $h_j'' < -\alpha$, segue que é possível fazer δ suficientemente pequeno para que o outro permaneça menor que $-\alpha$. ■

Figura 1.3: Ilustração da construção de K

1.3

Construção do conjunto de Cantor K

Vamos agora construir um conjunto de Cantor K associado ao conjunto Ω :

Definiremos famílias de intervalos $\{J_\omega\}_{\omega \in \Omega}$, $\{G_\omega\}_{\omega \in \Omega^*}$ tais que $J_\omega, G_\omega \subset [0, 1]$, sendo os J_ω 's fechados e os G_ω 's abertos. A definição é por indução em $|\omega|$:

- Os intervalos $J_0, G_0, J_1, G_1, \dots, J_{m_1-2}, G_{m_1-2}, J_{m_1-1}$ têm o mesmo comprimento, são disjuntos, se sucedem na ordem acima, e sua união é o intervalo $[0, 1]$.
- Para cada palavra $\omega \in \Omega$ com comprimento $n - 1 \geq 1$, os intervalos $J_{\omega 0}, G_{\omega 0}, J_{\omega 1}, G_{\omega 1}, \dots, G_{\omega(m_n-2)}, J_{\omega(m_n-1)}$ têm o mesmo comprimento, são disjuntos, ordenados como acima, e sua união é o intervalo J_ω .

Seja

$$K = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{\omega \in \Omega; |\omega|=n} J_\omega$$

Então K é um conjunto de Cantor, e $[0, 1] \setminus K = \bigcup_{\omega \in \Omega^*} G_\omega$.

Queremos pensar nos G_ω como “gaps”, como ilustra a Figura 1.3. O sentido principal da construção deste conjunto de Cantor é o seguinte: a curva que vamos construir vai percorrer, no intervalo J_ω , toda a lua essencial de L_ω (ver Definição 1.14). No entanto, quase sempre o ponto final de uma lua essencial não é o ponto inicial da seguinte, logo usamos o intervalo G_ω para andar do final de uma lua para o início da próxima.

1.4

Definição da família de funções-teto

Fixado $t \in K$ existe uma única palavra infinita $i_1 i_2 \dots$ tal que $t \in J_{i_1 \dots i_n}, \forall n \geq 1$. Seja $\omega_n = i_1 \dots i_n$. Queremos definir

$$F_t = \lim_{n \rightarrow \infty} f_{\omega_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} g_{\omega_n}.$$

Mostremos a validade das convergências e igualdades acima. Por construção,

$$\|g_{\omega_n} - f_{\omega_n}\|_{n+1} = \|L_{\omega_n}\|_{n+1} < \epsilon_{n+1}$$

Estamos na etapa n da divisão, e queremos olhar para a etapa seguinte. A lua L_{ω_n} é dividida em $L_{\omega_n 0}, \dots, L_{\omega_n(m_{n+1}-1)}$, sendo que $L_{\omega_n(2i)} \cup L_{\omega_n(2i+1)}$ é uma lua do fatiamento. Note também que $f_{\omega_n} = f_{\omega_n 0}$. Logo

$$\|f_{\omega_{n+1}} - f_{\omega_n}\|_{n+1} = \|f_{\omega_n i_{n+1}} - f_{\omega_n 0}\|_{n+1}$$

- Se i_{n+1} é par, então $f_{\omega_n i_{n+1}}$ veio do fatiamento, portanto é uma combinação convexa de f_{ω_n} e g_{ω_n} e assim $\|f_{\omega_n i_{n+1}} - f_{\omega_n 0}\|_{n+1} \leq \|L_{\omega_n}\|_{n+1} < \epsilon_{n+1}$
- Se é ímpar,

$$\begin{aligned} \|f_{\omega_n i_{n+1}} - f_{\omega_n 0}\|_{n+1} &\leq \|f_{\omega_n i_{n+1}} - f_{\omega_n(i_{n+1}-1)}\|_{n+1} + \|f_{\omega_n(i_{n+1}-1)} - f_{\omega_n 0}\|_{n+1} \\ &< \|L_{\omega_n(i_{n+1}-1)}\|_{n+1} + \epsilon_{n+1} \\ &\leq \|L_{\omega_n(i_{n+1}-1)}\|_{n+2} + \epsilon_{n+1} \\ &< \epsilon_{n+2} + \epsilon_{n+1} \end{aligned}$$

Em qualquer caso, $\|f_{\omega_{n+1}} - f_{\omega_n}\|_{n+1} < \epsilon_{n+2} + \epsilon_{n+1}$.

Mais geralmente, se $m > n$ temos que

$$\begin{aligned} \|f_{\omega_m} - f_{\omega_n}\|_{n+1} &\leq \sum_{j=n}^{m-1} \|f_{\omega_{j+1}} - f_{\omega_j}\|_{n+1} \\ &\leq \sum_{j=n}^{m-1} \|f_{\omega_{j+1}} - f_{\omega_j}\|_{j+1} < 2 \sum_{j=n}^m \epsilon_{j+1} \end{aligned}$$

Em particular, dado k qualquer e lembrando que $k \leq N \Rightarrow \|\cdot\|_k \leq \|\cdot\|_N$, temos que

$$\|f_{\omega_m} - f_{\omega_n}\|_k < 2 \sum_{j=n}^{\infty} \epsilon_{j+1}, \forall n \geq k \quad (1-1)$$

Como ϵ_j é sequência somável, f_{ω_n} e g_{ω_n} são sequências de Cauchy em C^k . Portanto existe $\lim f_{\omega_n} = \lim g_{\omega_n} =: F_t$, que é C^∞ (já que é C^k para todo k) e satisfaz $\lim f_{\omega_n}^{(k)} = \lim g_{\omega_n}^{(k)} = F_t^{(k)}$. Note ainda que $t \leq s \Rightarrow F_t \leq F_s$ (decorre do fato de que $f_{\omega^+} = g_{\omega}$, logo f_{ω} e g_{ω} crescem “lexicograficamente” em ω).

Lema 1.12 Para cada k , a aplicação $t \in K \mapsto F_t \in C^k$ é contínua.

Prova. Seja $\varepsilon > 0$. Escolha $n > k$ tal que

$$4 \sum_{j=n}^{\infty} \epsilon_{j+1} < \varepsilon.$$

Se δ_n é o tamanho de J_ω para $|\omega| = n$, temos que $s, t \in K$ e $|s - t| < \delta_n$ implicam que $s, t \in J_\omega$, para algum ω de tamanho n . Portanto, F_s e F_t são limites de seqüências cujo termo de “tamanho” n é f_ω . Fazendo $m \rightarrow \infty$ na equação (1-1), temos que

$$\|F_s - f_\omega\|_k \leq 2 \sum_{j=n}^{\infty} \epsilon_{j+1}, \quad \|F_t - f_\omega\|_k \leq 2 \sum_{j=n}^{\infty} \epsilon_{j+1}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} |s - t| < \delta_n &\Rightarrow \|F_s - F_t\|_k \leq \|F_s - f_\omega\|_k + \|f_\omega - F_t\|_k \\ &\leq 4 \sum_{j=n}^{\infty} \epsilon_{j+1} < \varepsilon, \end{aligned}$$

completando a prova. ■

Vamos agora estender essa função para todo o intervalo $[0, 1]$. De fato, basta estender para cada $G_\omega = (\beta, \alpha)$, em que $\alpha, \beta \in K$.

$$F_\beta = \lim_{n \rightarrow \infty} f_{\omega(m_k-1) \dots (m_n-1)}, \text{ em que } k-1 = |\omega|$$

Como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_{\omega(m_k-1) \dots (m_n-1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} g_{\omega(m_k-1) \dots (m_n-1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} f_{\omega+0 \dots 0} = F_\alpha,$$

temos $F_\beta = F_\alpha$ e podemos definir $F_t = F_\beta$ para todo $t \in G_\omega$.

A extensão é claramente contínua: para $t \notin K$, a função é constante numa vizinhança de t ; para $t \in K$, fixo $\varepsilon > 0$ basta tomar o mesmo $\delta = \delta_n$ do Lema 1.12, já que em um intervalo qualquer não se criam novas imagens (por construção).

1.5

Definição do campo de direções

Para $x \in [0, 1]$, $f(x) \leq y \leq g(x)$ seja t tal que $F_t(x) = y$. Defina $\psi(x, y) = F_t'(x)$.

Lema 1.13 $\psi(x, y)$ é uma função bem definida e contínua em $L = \{(x, y) | x \in [0, 1], f(x) \leq y \leq g(x)\}$.

Prova. Para ver que é bem definida, sejam $(x, y) \in L$ e $t_1 \leq t_2$ tais que $y = F_{t_1}(x) = F_{t_2}(x)$. Como $F_{t_2} - F_{t_1} \geq 0$, segue que x é um mínimo local de $F_{t_2} - F_{t_1}$ e portanto $F'_{t_2}(x) = F'_{t_1}(x)$.

Para a continuidade, suponha que $(x_n, y_n) \rightarrow (x, y)$, todos em A . Em particular $y_n = F_{t_n}(x_n) \rightarrow y = F_t(x)$.

Passemos a uma subsequência convergente de $\{t_n\}$, $t_{*n} \rightarrow t_*$. Pelo lema 1.12, $s \mapsto F_s$ é contínua em C^k , logo $F_{t_{*n}} \rightarrow F_{t_*}$, $F'_{t_{*n}} \rightarrow F'_{t_*}$. Assim,

$$|F_{t_{*n}}(x_n) - F_{t_*}(x)| \leq |F_{t_{*n}}(x_n) - F_{t_*}(x_n)| + |F_{t_*}(x_n) - F_{t_*}(x)| \rightarrow 0,$$

logo $F_{t_{*n}}(x_n) \rightarrow F_{t_*}(x)$, e como $y_n \rightarrow y$ vale $F_t(x) = F_{t_*}(x)$. Como ψ é bem definida vale também $F'_{t_{*n}}(x) = F'_t(x)$, portanto um argumento similar mostra que $F'_{t_{*n}}(x_n) \rightarrow F'_t(x)$.

Se $F'_{t_n}(x_n) \not\rightarrow F'_t(x)$, então existe uma subsequência $\{t_{*n}\}$ de $\{t_n\}$ tal que $|F'_{t_{*n}}(x_n) - F'_t(x)| \geq \varepsilon > 0$. Passando a uma subsequência convergente de t_{*n} (que em particular é subsequência convergente de t_n), isso contradiz o resultado obtido no parágrafo anterior.

Portanto $F'_{t_n}(x_n) \rightarrow F'_t(x)$, ie, $\psi(x_n, y_n) \rightarrow \psi(x, y)$. ■

1.6

Definição da sequência de curvas

A idéia agora é conseguir uma sequência de curvas γ_n em \mathbb{R}^2 tangentes ao campo de direções contínuo $(1, \psi(x, y))$, e que convergem a uma curva de Peano γ .

Para isso, voltamos à divisão da lua. Uma vez que, para cada n fixado vale

$$\bigcup_{|\omega|=n} L_\omega = L,$$

podemos pensar nessas L_ω como estando num mesmo desenho de L com “cortes adicionais” (cada n ganha seu próprio desenho, e γ_n vai ser uma curva nesse desenho). A imagem de γ_n está contida em $\bigcup_{|\omega|=n} Fr(L_\omega)$, e fica progressivamente mais densa em L .

Para facilitar a construção, escrevemos $S_{L_\omega} = (a(\omega), b(\omega))$. Assim, no eixo- x da Figura 1.4 há quatro pontos importantes:

$$a = a(0) = a(2) = a(4), b = b(1) = b(3) = b(5),$$

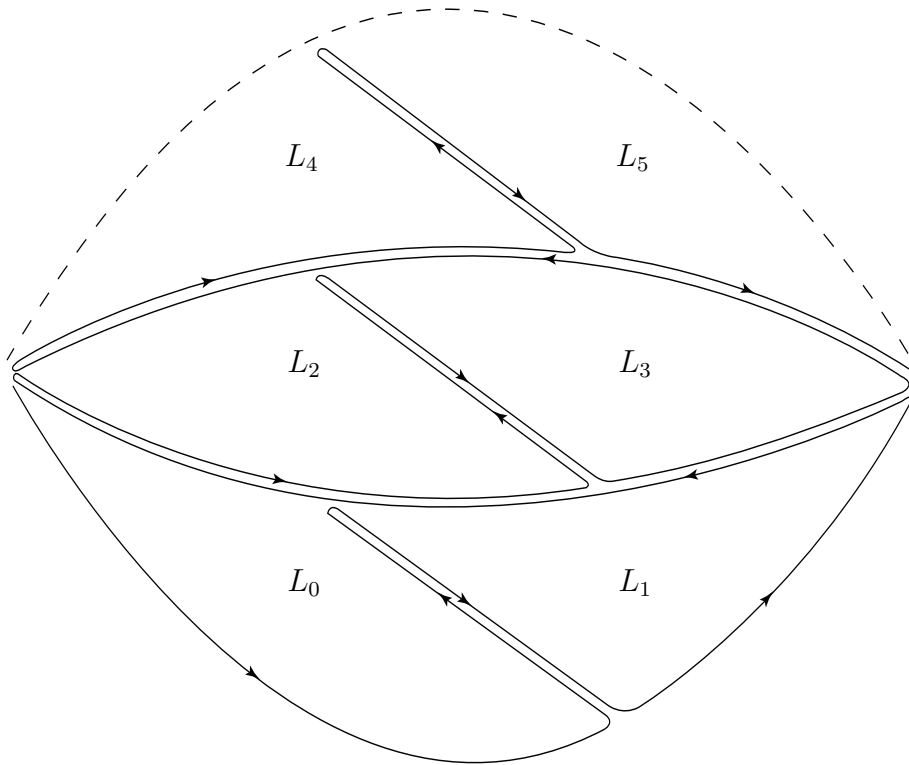


Figura 1.4: Ilustração esquemática da curva γ_1 .

$$a(1) = a(3) = a(5) = \frac{2a + b}{3}, b(0) = b(2) = b(4) = \frac{a + 2b}{3},$$

e de fato isso é um caso geral (novos pontos de suporte só são gerados na bipartição, então esse vai ser o esquema sempre que uma lua L_ω for fatiada e em seguida bipartida).

Para a construção da curva, precisaremos de uma função auxiliar. Dado um intervalo fechado $I \subset \mathbb{R}$ e $a \neq b$ seja $\psi_I(\cdot, a, b) : I \rightarrow \mathbb{R}$ monótona, C^∞ tal que se $I = [\alpha, \beta]$:

1. $\psi_I(\cdot, a, b)$ tem derivada de todas as ordens igual a 0 em α e β .
2. $\psi_I(\alpha, a, b) = a, \quad \psi_I(\beta, a, b) = b$.

Além disso, dada uma função qualquer $h : I \rightarrow \mathbb{R}$ definimos $\hat{h} : I \rightarrow \mathbb{R}^2 : t \rightarrow (t, h(t))$.

Definimos para $i = 0, \dots, m_1 - 1$:

$$\gamma_1(t) = \begin{cases} \hat{f}_i(\psi_{J_i}(t, a(i), b(i))), & t \in J_i \\ \hat{g}_i(\psi_{G_i}(t, b(i), a(i+1))), & t \in G_i, i < m_1 - 1 \end{cases}$$

A expressão acima percorre a lua na maneira indicada pela Figura 1.4.

E indutivamente, dada γ_{n-1} construímos γ_n fazendo $\gamma_n = \gamma_{n-1}$ em $\bigcup_{\omega \in \Omega^*, |\omega| < n} G_\omega$ e definindo para cada ω de comprimento n :

$$\gamma_n(t) = \begin{cases} \hat{f}_\omega(\psi_{J_\omega, a(\omega), b(\omega)}(t)), & t \in J_\omega \\ \hat{g}_\omega(\psi_{G_\omega, b(\omega), a(\omega^+)}(t)), & t \in G_\omega, \omega \in \Omega^* \end{cases}$$

Para $t \notin K$, é claro que $\gamma_n(t) \rightarrow \gamma(t)$, já que fica constante a partir de um certo ponto. Para $t \in K$, vamos precisar de um lema.

Definição 1.14 *Seja $L = L(f, g)$ uma lua aberta. A lua essencial de L é $L^{ess} = \overline{\text{int}(L)}$, o fecho do interior de L . Alternativamente, podemos usar a notação $L^{ess}(f, g)$ para indicar a lua essencial da lua formada por f e g .*

Lema 1.15 *Seja $L = L(f, g)$ uma lua aberta com suporte $S_L = (a, b)$, $|S_L| = b - a$. Então o diâmetro D de L^{ess} satisfaz $D^2 \leq |S_L|^2 + (\|L\|_0 + |S_L| \cdot \|f\|_1)^2$.*

Prova. Sejam $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in L^{ess}$, e suponha $y_1 \leq y_2$. Então $a \leq x_2 \leq b$ e $f(x_1) \leq y_1 \leq y_2 \leq g(x_2)$. Assim,

$$\begin{aligned} \text{dist}((x_1, y_1), (x_2, y_2))^2 &= (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 \\ &\leq (b - a)^2 + (g(x_2) - f(x_1))^2 \\ &\leq |S_L|^2 + (g(x_2) - f(x_2) + f(x_2) - f(x_1))^2 \\ &\leq |S_L|^2 + \left(\|L\|_0 + \int_a^b |f'(t)| dt \right)^2 \\ &\leq |S_L|^2 + (\|L\|_0 + |S_L| \cdot \|f\|_1)^2 \end{aligned}$$

■

Dado $t \in K$, seja $\omega_n = i_1 \dots i_n$ a sequência de palavras satisfazendo $t \in J_{\omega_n} \forall n, w_{n+1} = w_n i_{n+1}$. Por construção, $\gamma_n(t) \in L_{\omega_n}^{ess}$, cujo diâmetro D_{ω_n} satisfaz

$$(D_{\omega_n})^2 \leq |S_{L_{\omega_n}}|^2 + (\|L_{\omega_n}\|_0 + |S_{L_{\omega_n}}| \cdot \|f_\omega\|_1)^2$$

Como $t \mapsto F_t \in C^1$ é contínua, $\sup_t \|F_t\|_1 = M < \infty$ e portanto

$$(D_{\omega_n})^2 \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{2n} + \left(\epsilon_{n+1} + M \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)^2 \rightarrow 0.$$

Logo $\gamma_n(t) \in L_{\omega_n}^{ess}$ é sequência em compacto com diâmetros tendendo a zero, logo converge ao único ponto $\gamma(t) \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} L_{\omega_n}^{ess}$.

De fato, com a argumentação acima fica fácil ver que a convergência é uniforme: seja $\varepsilon > 0$ e n tal que

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{2n} + \left(\epsilon_{n+1} + M \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)^2 < \varepsilon^2$$

Se $t \in \bigcup_{\omega \in \Omega^*, |\omega| \leq n} G_\omega$, então $\gamma_m(t) = \gamma(t)$ para todo $m \geq n$.

Se $t \in J_\omega$ para algum ω com $|\omega| = n$, temos que $\gamma_m(t), \gamma(t) \in L_\omega^{ess}$ para todo $m \geq n$, então

$$dist(\gamma_m(t), \gamma(t)) \leq D_\omega \leq \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^{2n} + \left(\epsilon_{n+1} + M \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)^2} < \varepsilon,$$

portanto a convergência é uniforme.

Note também que $\gamma = \lim \gamma_n$ satisfaz $\gamma([0, 1]) = L$. Isso prova a Proposição 1.3.

Lema 1.16 *Vale $\gamma([0, t]) = L^{ess}(f, F_t), \forall t \in [0, 1]$.*

Prova. Primeiramente observamos que $\gamma(J_\omega) = L_\omega^{ess}$. De fato $\gamma(J_\omega) \subseteq L_\omega^{ess}$ por construção; para a outra direção considere $(x, y) \in L_\omega^{ess}$ e uma sequência $L_{\omega_n}^{ess}$ tal que $(x, y) \in L_{\omega_n}^{ess}, |\omega_n| = n$ (claro que essa sequência existe, pois a união das luas essenciais da divisão seguinte é a própria lua essencial que foi dividida). Considere os intervalos J_{ω_n} relacionados às luas $L_{\omega_n}^{ess}$. São intervalos fechados encaixados com comprimento convergindo a zero, logo $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} J_{\omega_n} = \{s\}$, para algum $s \in K$. Assim,

$$\gamma(s) \subseteq \gamma\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} J_{\omega_n}\right) \subseteq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} L_{\omega_n}^{ess} = \{(x, y)\},$$

e $\gamma(s) = (x, y)$.

Agora mostremos que o lema vale para t da forma $t = \beta_\omega$, em que $J_\omega = [\alpha_\omega, \beta_\omega]$. Para isso, seja \leq a “ordem lexicográfica” em Ω . Assim, vale para t da forma acima a igualdade

$$L^{ess}(f, F_t) = \bigcup_{\omega^* \leq \omega; |\omega^*| = |\omega|} L_{\omega^*}^{ess}, \quad (1-2)$$

notando ainda que $F_t = F_{\beta_\omega} = g_\omega$. Para ver a igualdade basta observar que os conjuntos $\{(x, y) : f(x) < F_t(x) = g_\omega(x), y \in [f(x), F_t(x)]\}$ e $\{(x, y) : \text{ao menos uma das desigualdades } f_{00\dots 0}(x) \leq f_{00\dots 1}(x) \leq \dots \leq f_\omega(x) \leq g_\omega(x) \text{ é estrita e } y \in [f_{\omega^*}(x), g_{\omega^*}(x)], \text{ intervalo não-degenerado}\}$ são iguais. Passando aos fechos dos conjuntos acima, temos a igualdade 1-2.

Como $\bigcup_{\omega^* \leq \omega; |\omega^*| = |\omega|} J_{\omega^*} \subset [0, t]$, o exposto acima prova que $L^{ess}(f, F_t) \subseteq \gamma([0, t])$. Para a outra direção, se $\omega^* < \omega$ vemos na construção explícita que $\gamma(G_{\omega^*})$ anda por \hat{g}_{ω^*} (e $g_{\omega^*} \leq g_{\omega}$) e que se iguala a \hat{f} em no máximo um ponto. Portanto $\gamma(G_{\omega^*}) \subset L^{ess}(f, F_t)$ e vale o lema para $t = \beta_{\omega}$.

Para $t \notin K$, seja $t^* = \max\{s \in K : s < t\} = \beta_{\omega}$. Então $t \in G_{\omega}$ e $F_t = F_{t^*}$. Já vimos que $\gamma([0, t^*]) = L^{ess}(f, F_{t^*}) = L^{ess}(f, F_t)$. Já $\gamma((t^*, t]) \subset \gamma(G_{\omega}) \subset L^{ess}(f, F_t)$, pelo mesmo argumento do parágrafo anterior.

Finalmente, dado $t \in K$, existem $\beta_{\omega_n} \searrow t$. Sabemos que vale $\gamma([0, \beta_{\omega_n}] = L^{ess}(f, F_{\beta_{\omega_n}})$, e por continuidade temos que

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \gamma([0, \beta_{\omega_n}] = \gamma([0, t]).$$

Falta mostrar que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} L^{ess}(f, F_{\beta_{\omega_n}}) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} L^{ess}(f, g_{\omega_n}) = L^{ess}(f, F_t)$.

Note que o comprimento do intervalo em que $g_{\omega_n} \neq F_t$ é menor que $|S_{L_{\omega_n}}| \leq (2/3)^n$. Se $(x, y) \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} L^{ess}(f, g_{\omega_n})$, então existem (x_n, y_n) tais que $f(x_n) < g_{\omega_n}(x_n)$, $f(x_n) \leq y_n \leq g_{\omega_n}(x_n)$ e $(x_n, y_n) \rightarrow (x, y)$.

Se $F_t(x) > f(x)$, temos que $(x, y) \in L^{ess}(f, F_t)$. Caso $F_t(x) = f(x)$ então para cada ϵ existe $x_{\epsilon} \in (x - \epsilon, x + \epsilon)$ tal que para n suficientemente grande $g_{\omega_n}(x_{\epsilon}) = F_t(x_{\epsilon}) > f(x_{\epsilon})$. Escolhendo $y_{\epsilon} = f(x_{\epsilon})$ (por exemplo), obtemos que (x, y) é limite de pontos de $L^{ess}(f, F_t)$, o que prova que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} L^{ess}(f, g_{\omega_n}) \subseteq L^{ess}(f, F_t)$.

Para a outra direção, o conjunto $\{(x, y) : f(x) < F_t(x), f(x) \leq y \leq F_t(x)\}$ está contido em $\{(x, y) : f(x) < g_{\omega_n}(x), f(x) \leq y \leq g_{\omega_n}(x)\}$ para todo n , pois $g_{\omega_n} \geq F_t$. Passando aos fechos, a prova está concluída. ■

2

Adicionando as Propriedades de Convexidade

Neste capítulo nós vamos refinar o processo do capítulo anterior para obter a propriedade da convexidade citada na introdução.

Fixemos $0 < \lambda < 1$ (λ deve ser próximo de 1, como será visto mais adiante).

Fixemos $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ crescente e C^∞ tal que $\psi^{-1}(-1) = (-\infty, 0]$ e $\psi^{-1}(1) = [1, +\infty)$. Considere a curva descrita em coordenadas polares por

$$r = f(\theta) = \frac{1 + \lambda}{2} + \frac{1 - \lambda}{2} \psi(\cos(3\theta))$$

Lema 2.1 *Se λ é suficientemente próximo de 1 então a curvatura da curva $r = f(\theta)$ será afastada de zero.*

Prova. A fórmula da curvatura em coordenadas polares é

$$K = \frac{|r^2 + 2(r')^2 - rr''|}{(r^2 + (r')^2)^{3/2}}.$$

Note que K não se anula se $r'' < r$. Como

$$r''(\theta) = 9 \frac{1 - \lambda}{2} (\psi''(\cos(3\theta)) \sin^2(3\theta) - \psi'(\cos(3\theta)) \sin(3\theta) \cos(3\theta)),$$

$|r''| < 9(1 - \lambda) \|\psi\|_2 = C(1 - \lambda)$. Assim, visto que $r \geq \lambda$ é suficiente que

$$\begin{aligned} C(1 - \lambda) < \lambda &\Leftrightarrow 1 < (1 + C^{-1})\lambda \\ &\Leftrightarrow \lambda > \frac{1}{1 + C^{-1}} \end{aligned}$$

■

É fácil ver que os traços das curvas $r = f(\theta)$, $r = 1$ e $r = \lambda$ ($\theta \in \mathbb{R}$) formam seis luas “rotacionadas”. A Figura 2.1 mostra esta situação¹ entre os

¹Na verdade, a Figura 2.1 é esquemática. Os plots com λ suficientemente grandes tornam as curvas próximas demais, e a figura deixa de ser esclarecedora.

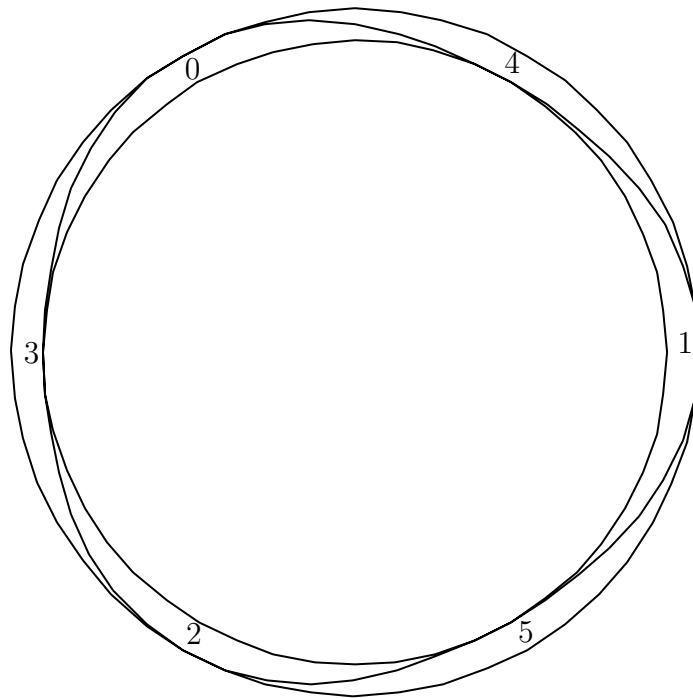


Figura 2.1: Figura esquemática mostrando os gráficos das três curvas $r = 1$, $r = \lambda$, $r = f(\theta)$

discos de raio 1 e λ . De fato, os outros casos são exatamente a mesma figura reduzida por um fator λ^n .

Naturalmente, em cada uma dessas luas podemos usar o processo do capítulo anterior, a menos de uma rotação, para obter a curva γ_i e o campo X_i que, satisfazem o enunciado da Proposição 1.3 na lua L_i , para cada $i = 0, 1, \dots, 5$. Queremos definir uma curva γ e um campo X na coroa circular $\{r \leq 1\} \setminus \{r \leq \lambda\}$.

O campo X é definido simplesmente como $X|_{L_i} = X_i$. Essa definição certamente gera um campo contínuo, pois os campos X_i são tangentes às luas, que coincidem C^∞ nas suas fronteiras.

A tentativa de “juntar” as curvas uma após a outra funciona bem, porque em quase todos os casos γ_i termina exatamente onde γ_{i+1} começa. A única situação que exige atenção é a passagem da última lua interior, 2, para a primeira exterior, 3, em que se faz necessário que a curva volte pela lua 2 até chegar no início da 3.

Definimos primeiro as funções auxiliares $h_i(t) = 8 \cdot \frac{t - (\lambda + \frac{i}{8}(1-\lambda))}{(1-\lambda)}$, $i = 0 \dots 7$

e $\Theta(t) = \pi(1 - t) + \frac{4\pi t}{3}$ (assumindo que, exatamente como no desenho, a lua 2 termina em $\theta = \pi$). Também vale a pena definir os intervalos $J_i = [\lambda + \frac{i}{8}(1 - \lambda), \lambda + \frac{i+1}{8}(1 - \lambda)]$, $i = 0 \dots 7$. Note que h_i leva J_i em $[0, 1]$, enquanto Θ leva $[0, 1]$ em $[\pi, \frac{4\pi}{3}]$.

Seja então $\gamma : [\lambda, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$:

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_i(h_i(t)), & 0 \leq i \leq 2 \text{ e } t \in J_i \\ (f(\Theta(h_3(t))), \Theta(h_3(t))), & t \in J_3 \\ \gamma_i(h_{i+1}(t)), & 2 < i \leq 5 \text{ e } t \in J_{i+1} \\ (1, \Theta(1 - h_7(t))), & t \in J_7 \end{cases}$$

Note que a segunda e a quarta linhas estão em coordenadas polares. A quarta linha percorre o círculo maior de $4\pi/3$ (final da lua L_5) a π (início da lua L_0).

Com isso, nós obtivemos uma curva que preenche a coroa circular. Precisamos agora ver que $K_t := \gamma([\lambda, t]) \cup \{r \leq \lambda\}$ é convexo para todo $t \in [\lambda, 1]$. Por (C05, p.480, obs. 4), basta ver que a fronteira de K_t é uma curva convexa. Além disso, por (C05, p.478, Prop. 1), basta ver que a curvatura de $Fr(K_t)$ não muda de sinal.

Se $t \in J_0$, $\gamma([\lambda, t]) = \gamma_0([0, h_0(t)]) \subset L_0$ e pelo Lema 1.16, coincide com $L^{ess}(f_{(0)}, F_{h_0(t)})$, em que $f_{(0)}$ é a menor função que forma L_0 . Assim, a fronteira de K_t é o traço de $F_{h_0(t)}$ em L_0 e um segmento de círculo de raio λ em L_1 e L_2 . Como tanto o círculo quanto $F_{h_0(t)}$ têm curvatura afastada de zero (ver Lemas 1.11 e 2.1), segue que K_t é um conjunto convexo.

Da mesma forma, se $t \in J_1$, temos que $\gamma[\lambda, t] = L_0^{ess} \cup \gamma_1([0, h_1(t)])$ e por um argumento completamente análogo, K_t é convexo. Mesmo vale para $t \in J_2$ e também $t \in J_3$, já que $\gamma(J_3) \subset \gamma(J_0 \cup J_1 \cup J_2)$.

Se $t \in J_4$, $\gamma([\lambda, t]) = L_0^{ess} \cup L_1^{ess} \cup L_2^{ess} \cup \gamma_3([0, h_4(t)])$. Nesse caso a fronteira de K_t é o traço de $F_{h_4(t)}$ em L_3 e um segmento da curva $r = f_0(\theta)$. Como a curva $r = f(\theta)$ tem curvatura afastada de zero, mais uma vez segue que K_t é convexo. Para J_5 e J_6 é completamente análogo, e $\gamma(J_7) \subset \gamma(\bigcup_{0 \leq i \leq 6} J_i)$ portanto obtivemos que γ tem a propriedade desejada.

Passemos então à coroa entre os círculos de raio λ e λ^2 . Em $[\lambda^2, \lambda]$ defina $\gamma(t) = \lambda\gamma(t/\lambda)$. Note que esta contração não diminui a curvatura da fronteira de K_t . Além disso, $\gamma(\lambda)$ coincide com a definição anterior (graças à “correção” que é feita em J_7), logo definimos uma curva contínua satisfazendo, para todo $t \in [\lambda^2, 1]$, que $K_t = \gamma([\lambda^2, t]) \cup \{r \leq \lambda^2\}$ é um conjunto convexo.

Da mesma forma, podemos definir γ em $[\lambda^{n+1}, \lambda^n]$ fazendo $\gamma(t) = \lambda^n\gamma(t/\lambda^n)$ mantendo a propriedade de que $K_t = \gamma([\lambda^{n+1}, t]) \cup \{r \leq \lambda^{n+1}\}$ é convexo. Fazendo $\gamma(0) = (0, 0)$, temos que γ é uma curva contínua que satisfaz

o enunciado do Teorema 0.1, o que conclui sua prova.

3

Discussões sobre Tangência

Surge, nesse ponto, uma pergunta natural: será que em algum sentido a curva γ pode ser dita tangente ao campo X ? Existiria uma definição satisfatória do conceito de tangência que torna isso possível?

Mais precisamente, gostaríamos de encontrar um conceito de tangência de uma curva contínua a um campo contínuo de direções com as seguintes propriedades:

1. O conceito deve ser “natural”; em particular, deve coincidir com o conceito usual para curvas diferenciáveis.
2. O conceito deve ser satisfeito no caso da nossa curva, ou pelo menos no de uma curva com propriedades análogas.
3. Suponha que um campo X é unicamente integrável no sentido usual, isto é, para todo p existe uma única (módulo reparametrizações) curva α_p diferenciável com velocidade não-nula tangente a X passando por p . Então o campo deve permanecer unicamente integrável com a nova definição, isto é, fixo p , qualquer curva tangente (no novo conceito) a X passando por p tem seu traço contido no traço de α_p .

Analisamos abaixo quatro conceitos “naturais”. Porém, cada um deles falha ou no item 2 (forte demais) ou no item 3 (fraco demais).

3.1

A razão entre altura e largura

Primeiramente, dada uma curva γ no plano e um campo de direções contínuo X , defina

$$h_X(t, s) = \frac{|\langle \gamma(s) - \gamma(t), X^\perp(\gamma(t)) \rangle|}{\|X^\perp(\gamma(t))\|^2}.$$

Uma primeira ideia de “tangência” poderia ser tentar a seguinte definição:

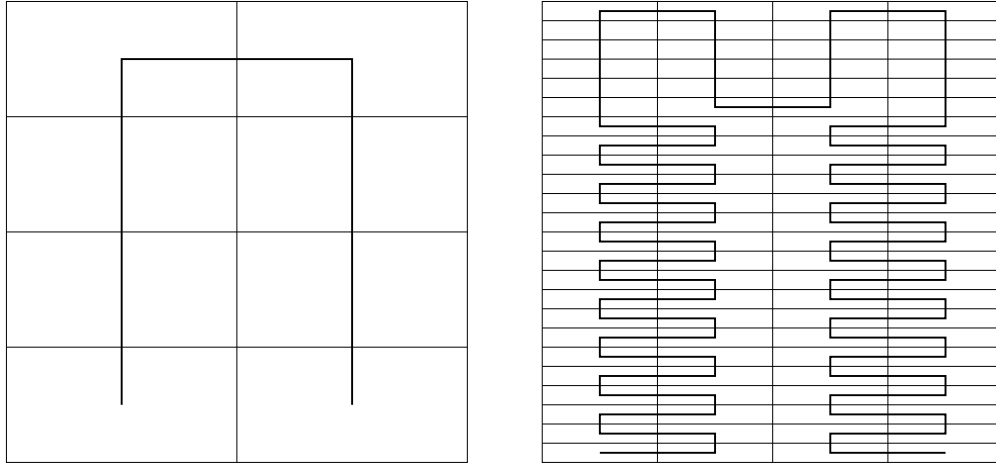


Figura 3.1: Os dois primeiros passos da construção da curva na prova da Proposição 3.2, com $n_1 = 4$ e $n_2 = 6$. São mostradas γ_1 e γ_2 .

Definição 3.1 Uma curva γ é dita *R-tangente* a um campo de direções X se para todo t ,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{M_X(t, \delta)}{M_{X^\perp}(t, \delta)} = 0,$$

em que $M_X(t, \delta) = \sup\{h_X(t, s); |s - t| < \delta\}$.

No entanto, esse conceito se mostrou fraco demais, pois verificamos que podíamos ter curvas de Peano R-tangentes a um campo horizontal.

Proposição 3.2 Existe uma curva de Peano definida no quadrado unitário que é R-tangente a $X = (1, 0)$.

Prova. Seja $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$ uma sequência estritamente crescente de números pares. Considere o procedimento usual de Hilbert para encontrar uma curva de Peano; mas em vez de dividirmos o quadrado em quatro quadrados menores, vamos dividi-lo em $2n_1$ retângulos de tamanho $1/n_1 \times 1/2$ traçando uma reta vertical e n_1 retas horizontais. A cada passo dividimos cada um dos retângulos em $2n_k$ retângulos menores, como mostra a figura 3.1.

Depois, construímos uma sequência $\gamma_1, \gamma_2, \dots$ tal que cada γ_k percorre os retângulos de ordem k , respeitando a ordem que γ_{k-1} percorre os retângulos de ordem $k - 1$; veja novamente a figura 3.1.

Esta sequência converge a uma curva de Peano γ tal que $\gamma\left(\left[\frac{i}{2^k n_1 \dots n_k}, \frac{i+1}{2^k n_1 \dots n_k}\right]\right)$ é o i -ésimo retângulo da k -ésima divisão.

Vamos mostrar que essa curva γ é R-tangente ao campo horizontal $X = (1, 0)$. Fixe $t \in [0, 1]$. Para cada $\delta > 0$ existe k tal que $\frac{1}{2^k n_1 \dots n_k} < \delta \leq \frac{1}{2^{k-1} n_1 \dots n_{k-1}}$. Tome i tal que $t \in \left[\frac{i}{2^k n_1 \dots n_k}, \frac{i+1}{2^k n_1 \dots n_k}\right]$. Note que existe s neste

mesmo intervalo tal que

$$h_{X^\perp}(t, s) \geq \frac{1}{2^{k+1}}.$$

Como $(t - \delta, t + \delta) \supset [\frac{i}{2^k n_1 \dots n_k}, \frac{i+1}{2^k n_1 \dots n_k}]$, concluímos que $M_{X^\perp}(t, \delta) \geq \frac{1}{2^{k+1}}$. Além disso $M_X(t, \delta) \leq \frac{1}{n_1 \dots n_{k-1}}$. Dessa forma,

$$\frac{M_X(t, \delta)}{M_{X^\perp}(t, \delta)} \leq \frac{2^{k+1}}{n_1 \dots n_{k-1}},$$

que tende a 0 quando $k \rightarrow \infty$, isto é, quando $\delta \rightarrow 0$. ■

É possível mostrar que a curva γ do Teorema 0.1 é R-tangente ao campo X do mesmo teorema.

3.2

Uma espécie de derivada direcional da altura

Outra idéia foi pensar numa espécie de derivada direcional da componente altura, definida como no item anterior:

Definição 3.3 *Uma curva γ é dita D-tangente a um campo contínuo X se para todo t*

$$\lim_{s \rightarrow t} \frac{h_X(t, s)}{s - t} = 0$$

Ou seja, a derivada direcional na componente altura é zero em todo ponto.

A boa notícia é que a “fraqueza” do item anterior não acontece mais:

Proposição 3.4 *Se γ é D-tangente a $X = (1, 0)$ então γ é horizontal e, em particular, não é curva de Peano.*

Prova. Se $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ então $h_X(t, s) = y(s) - y(t)$, de modo que

$$\lim_{s \rightarrow t} \frac{h_X(t, s)}{s - t} = y'(t).$$

Assim, $y' \equiv 0$, o que implica que $y \equiv$ constante. ■

No entanto, o conceito se mostrou forte demais, pois se γ é D-tangente a um campo contínuo, então $\gamma([0, 1])$ tem área zero, e em particular não pode ser curva de Peano.

Proposição 3.5 *Se γ é D-tangente a um campo contínuo X , então $\gamma([0, 1])$ tem área zero.*

Prova. Fixe $\epsilon > 0$. Para cada t , existe intervalo I_t contendo t tal que

$$s \in I_t \setminus \{t\} \Rightarrow \left| \frac{h_X(t, s)}{s - t} \right| < \epsilon$$

Além disso, I_t pode ser escolhido suficientemente pequeno para que $h_{X^\perp}(t, s) \leq 1$ para todo $s \in I_t$ (continuidade de γ).

Portanto $\gamma(I_t)$ está contido num retângulo de altura $\epsilon|I_t|$ e largura 1 (com os lados na direção de $X(\gamma(t))$ e $X^\perp(\gamma(t))$), de modo que $\text{área}(\gamma(I_t)) \leq \epsilon|I_t|$.

Naturalmente a união dos I_t 's cobre $[0, 1]$, então considere uma subcobertura finita I_{t_1}, \dots, I_{t_k} de modo que nenhum ponto em $[0, 1]$ pertença a mais de dois intervalos (se necessário for, podemos reduzir o tamanho de alguns I_{t_j} 's sem perda). Assim,

$$\begin{aligned} \text{área}(\gamma([0, 1])) &\leq \sum_{j=1}^k \text{área}(\gamma(I_{t_j})) \\ &\leq \epsilon \sum_{j=1}^k |I_{t_j}| \\ &\leq 2\epsilon, \end{aligned}$$

o que completa a prova. ■

3.3

Ângulos tendendo a zero

Seja $0 \leq \angle(X, Y) \leq \pi/2$ o ângulo entre duas direções representadas pelos vetores não-nulos X e Y de \mathbb{R}^2 .

Definição 3.6 *Uma curva γ é dita A -tangente a um campo contínuo X se para todo t ,*

$$\lim_{s \rightarrow t} \angle(\gamma(s) - \gamma(t), X(\gamma(t))) = 0,$$

ou, equivalentemente,

$$\lim_{s \rightarrow t} \frac{h_X(t, s)}{h_{X^\perp}(t, s)} = 0,$$

onde os limites acima são tomados apenas nos s em que $\gamma(s) \neq \gamma(t)$.

Esta definição também se mostrou forte demais, devido ao seguinte resultado:

Proposição 3.7 *Seja γ uma curva A -tangente a um campo contínuo X . Se Σ é um segmento de curva sem auto-interseção e transversal ao campo X , então $\gamma([0, 1]) \cap \Sigma$ é enumerável. Em particular, γ não é curva de Peano.*

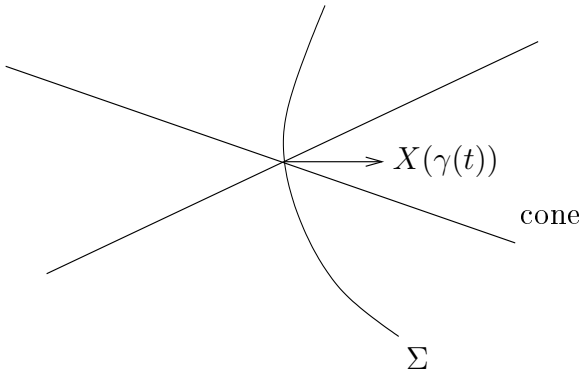


Figura 3.2: Prova da Proposição 3.7.

Prova. Seja $\gamma(t) \in \gamma([0, 1]) \cap \Sigma$. Como Σ é transversal a X , segue que existe $\delta > 0$ tal que se $I_t = (t - \delta, t + \delta)$, $\gamma(I_t) \cap \sigma = \emptyset$. Isso é verdade pois podemos fazer δ suficientemente pequeno para que para todo $s \in I_t$ valha $\angle(\gamma(s) - \gamma(t), X(\gamma(t))) \leq \epsilon$, portanto $\gamma(I_t)$ está num certo “cone” (como mostra a figura 3.2) e, assim, para δ suficientemente pequeno $\gamma(I_t)$ está afastado de Σ .

Assim, os pontos de $\gamma([0, 1]) \cap \Sigma$ estão isolados, logo é enumerável. ■

3.4

Limite uniforme de curvas C^∞ tangentes a X

Este conceito de tangência é satisfeito para a curva do Teorema 0.1 por construção, mas ele se mostrou fraco demais.

Definição 3.8 *Uma curva γ é dita S -tangente a um campo contínuo X se é limite uniforme de curvas C^∞ que são tangentes (no sentido usual) a X .*

Proposição 3.9 *Seja X o campo e γ a curva construídos na prova da Proposição 1.3. Então qualquer curva contínua σ cuja imagem está contida na imagem de γ é S -tangente ao campo X .*

Daremos aqui um esboço da prova.

Prova. Para cada n natural, considere a família de luas L_ω com $|\omega| = n$, definida no Capítulo 1. Seja G_n a união das fronteiras destas luas. Podemos munir o conjunto G_n de uma estrutura de grafo óbvia, onde os vértices são pontos iniciais ou finais das luas essenciais. Uma aresta ligando dois vértices é uma curva que faz parte da fronteira de uma das luas L_ω .

Observamos as seguintes propriedades da família de grafos: Dado qualquer $\epsilon > 0$ existem $\delta > 0$ e $n \in \mathbb{N}$ tais que:

1. O conjunto dos vértices de G_n é $(\delta/3)$ -denso na lua $L = \gamma([0, 1])$.
2. Se v, w são vértices de G_n com distância euclidiana menor que δ então existe um caminho de arestas ligando v a w que está completamente contido em $B(v, \epsilon)$, a bola euclidiana de centro v e raio ϵ .

Note que $\delta < \epsilon$.

Agora, considere uma curva contínua $\sigma : [0, 1] \rightarrow L$. Fixe também $\epsilon > 0$. Vamos encontrar uma curva C^∞ tangente a X que é 2ϵ -próxima de σ , seguindo os seguintes passos:

Primeiro, sejam δ e $n \in \mathbb{N}$ como acima. Seja $m \in \mathbb{N}$ tal que para todo $j = 0, 1, \dots, m-1$, existe um vértice v_j do grafo G_n tal que $\sigma([j/m, (j+1)/m]) \subset B(v_j, \delta/2)$. Em particular, a distância entre v_j e v_{j+1} é menor que δ . Portanto existe um caminho de arestas ligando v_j a v_{j+1} contido em $B(v_j, \epsilon)$. Justapondo estes caminhos, obtemos uma curva C^∞ por pedaços tangente ao campo X , que é $(\epsilon + \delta/2)$ -próxima a σ .

Como $\epsilon + \delta/2 < 2\epsilon$, podemos reparametrizar esta curva de modo a obter uma curva C^∞ que tem velocidade zero nos vértices v_0, \dots, v_m , e é 2ϵ -próxima de σ . ■

4

Observações Finais e Perguntas

Por ocasião da defesa desta dissertação, a banca fez diversas observações e perguntas interessantes, que deram origem a este capítulo.

4.1

Fazendo K_t ser quase um disco

No capítulo 2, nós construímos a curva γ que prova o Teorema 0.1. A curva deveria ter curvatura afastada de zero, e para isso escolhemos o λ suficientemente próximo de 1.

No entanto, para $\lambda = 1$ a curva $r = f(\theta)$ é exatamente um círculo, de modo que é natural pensar que é possível escolher $\lambda < 1$ tal que a curvatura do bordo de K_t seja, em algum sentido, arbitrariamente próxima de uma constante.

Precisamente, a pergunta é a seguinte:

Problema 2 *Dado $\tau > 1$, é possível construir γ de modo que para cada $t > 0$ vale*

$$\frac{K_{MAX}(\partial K_t)}{K_{MIN}(\partial K_t)} < \tau,$$

em que K_{MAX} e K_{MIN} são as curvaturas máxima e mínima, respectivamente?

Acreditamos que a resposta é sim, e que basta refazer a construção com um pouco de cuidado; no entanto, não faremos os detalhes aqui.

4.2

Refazendo a construção sem os gaps

O nosso processo de construção envolveu o uso dos intervalos G_ω , intervalos esses que têm uma função diferente dos J_ω . Esses intervalos servem para “corrigir” a curva do final de uma lua para o início da próxima.

Em comparação, o processo de Hilbert não necessitava desses “gaps”, e assim a subdivisão dos intervalos não só é mais simples como tem certas propriedades interessantes, que discutimos aqui:

4.2.1

O push-forward da medida de Lebesgue unidimensional é a medida de Lebesgue bidimensional

Pela definição da curva de Hilbert, é bem simples observar que se $J \subset [0, 1]$ é um intervalo de medida (de Lebesgue, em dimensão 1) μ , sua imagem é um subconjunto do quadrado com medida (de Lebesgue, em dimensão 2) igual a μ . Portanto, as medidas γ_*Leb_1 e Leb_2 coincidem em toda a σ -álgebra dos borelianos.

Na nossa construção essa propriedade claramente não vale. Será que é possível refazê-la para que a curva tenha esta propriedade?

4.2.2

O push-forward da medida de Lebesgue unidimensional é uma medida absolutamente contínua (em relação a Leb_2)

Na nossa construção, é bem evidente que os intervalos G_ω têm a propriedade de que $Leb_2(\gamma(G_\omega)) = 0$.

Problema 3 *É possível refazer a construção de modo que se $Leb_2(\gamma(J)) = 0$ então $Leb_1(J) = 0$, para todo intervalo $J \subset [0, 1]$?*

4.2.3

 γ Hölder-1/2

Definição 4.1 *Uma função $f : X \rightarrow Y$ entre dois espaços normados X e Y satisfaz uma condição Hölder (ou é Hölder-contínua) quando existem constantes não-negativas C, α tais que*

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\alpha,$$

para todos $x, y \in X$.

Nesse caso, f é chamada Hölder- α (ou α -Hölder).

A construção de Hilbert é uma curva Hölder-1/2. De fato, isso é o melhor que se pode obter, já que nenhuma curva de Peano pode ser Hölder- α para $\alpha > 1/2$ (ver (Bu96)).

4.3

Fazendo γ ser Hölder

Pela natureza da nossa construção (que percorre luas cada vez mais achatadas em tempos menores), é bastante provável que ela não seja Hölder- α para nenhum α . No entanto, pode ser possível refazer a construção com mais cuidado para ganharmos essa propriedade.

Uma outra ideia seria tirar as condições C^∞ das luas e da construção da sequência de curvas e substituir por C^k . Isso pode reduzir o número de fatiamentos necessários, permitindo que a construção tenha alguma propriedade Hölder.

Problema 4 *Permitindo que o bordo seja C^k (e não mais C^∞), é possível construir uma curva com as propriedades da nossa que seja Hölder-contínua?*

4.4

Outras ideias

Dois sugestões (talvez relacionadas) de outros possíveis conceitos de tangência de uma curva contínua a um campo contínuo de direções são as seguintes:

- Buscar definir tangência em um sentido de *distribuições* (ou correntes) à la Schwartz.
- Dadas uma curva contínua $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ e uma 1-forma ω no plano que depende apenas continuamente do ponto, buscar definir um *trabalho* $W(\gamma, \omega)$. Deseja-se que esta definição seja invariante por reparametrizações positivas da curva, e que coincida no caso diferenciável com a definição usual $W(\omega, \gamma) = \int_\gamma \omega$. Então podemos definir γ como tangente ao campo de direções X se $W(\gamma, \omega) = 0$ para toda 1-forma ω que se anule sobre X (isto é, tal que $\omega_p(v) = 0$ se $v \in X(p)$).

Fica como pergunta se seguindo estas ideias é possível encontrar um conceito de tangência satisfatório no sentido expressado no Capítulo 3.

Referências Bibliográficas

- [AAN09] Abrantes, L.F.F., Amaral, J.C., Neves, A.G.M. Euler e Riemann visitam Picard. *Matemática Universitária* 46 (2009), 42–49.
- [B03] Berger, Marcel. *A panoramic view of Riemannian geometry*. Springer, 2003.
- [BF04] Bonatti, C.; Franks, J. A Hölder continuous vector field tangent to many foliations. *Modern dynamical systems and applications*, 299–306, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2004.
- [Bu96] Buckley, S. Space-filling curves and related functions. *Irish Math. Soc. Bull.* 36 (1996), 9–18.
- [CFG91] Croft, H.T.; Falconer, K.J.; Guy, R.K. *Unsolved problems in geometry*. Springer, 1991.
- [Hi91] Hilbert, David. Ueber die stetige Abbildung einer Linie auf ein Flächenstück. *Math. Ann.* 38 (1891), no. 3, 459–460.
- [Ho76] Hönig, C.S. *Aplicações da topologia à análise*. Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1976.
- [C05] Carmo, Manfredo P. do. *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*. Sociedade Brasileira de Matemática, 2005.
- [PR83] Pach, J.; Rogers, C.A. Partly convex Peano curves. *Bull. London Math. Soc.* 15 (1983), no. 4, 321–328.
- [S94] Sagan, H. *Space-filling curves*. Springer, 1994.
- [U06] Úbeda García, José Ignacio. *Aspectos geométricos y topológicos de las curvas α -densas* Tese. Universidad de Alicante, 2006.
- [VPR88] Vince, Andrew; Pach, J.; Rogers, C. A. Problems and Solutions: Solutions of Elementary Problems: E3139. *Amer. Math. Monthly* 95 (1988), no. 8, 765–767.

- [VW86] Vince, A. ; Wilson, D.C. A convexity preserving Peano curve. *Houston Journal of Mathematics*, Volume 12, No.2, 1986, 295–304.