

Uma introdução aos teoremas ergódicos não-comutativos

Matinê EDAI
15 de março de 2013

Jairo Bochi

Departamento de Matemática, PUC-Rio

OBJETIVOS

Teorema de Birkhoff

Contexto:

- (Ω, μ) = espaço de probabilidade.
- $T : \Omega \rightarrow \Omega$ transformação ergódica (preservando μ).

Dada $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, definimos as **somas de Birkhoff**

$$f_n(\omega) := f(\omega) + f(T\omega) + \cdots + f(T^{n-1}\omega).$$

Teorema Ergódico de Birkhoff (1931)

Se $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é integrável então

$$\text{para } \mu\text{-q.t.p. } \omega, \quad \frac{f_n(\omega)}{n} \rightarrow \int f \, d\mu \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

Ou seja, as médias “temporais” de Birkhoff convergem à média “espacial”.

Teorema Ergódico Subaditivo

Uma sequência de funções (mensuráveis) $f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada **subaditiva** se

$$f_{n+m}(\omega) \leq f_n(\omega) + f_m(T^m\omega)$$

Exemplo: As médias de Birkhoff de uma função f (neste caso, vale igualdade).

Teorema Ergódico Subaditivo de Kingman (1968)

Seja $\{f_n\}$ é sequência subaditiva e f_1^+ é integrável então

$$\text{para } \mu\text{-q.t.p. } \omega, \quad \frac{f_n(\omega)}{n} \rightarrow c \quad \text{quando } n \rightarrow \infty,$$

onde

$$c = \inf_n \frac{1}{n} \int f_n d\mu.$$

Versão não-comutativa do Birkhoff?

Voltando ao Birkhoff, queremos substituir $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ por $g : \Omega \rightarrow G$, onde G é um **grupo** (ou semigrupo) – em geral, não comutativo.

g será chamado **cociclo**.

Há duas possibilidades para os “**produtos de Birkhoff**”:

$$\overleftarrow{g}_n(\omega) := g(T^{n-1}\omega) \cdots g(T\omega)g(\omega)$$

$$\overrightarrow{g}_n(\omega) := g(\omega)g(T\omega) \cdots g(T^{n-1}\omega)$$

“**Identities de cociclo**”:

$$\overleftarrow{g}_{n+m}(\omega) = \overleftarrow{g}_m(T^n\omega) \cdot \overleftarrow{g}_n(\omega)$$

$$\overrightarrow{g}_{n+m}(\omega) = \overrightarrow{g}_n(\omega) \cdot \overrightarrow{g}_m(T^n\omega)$$

Assintótica dos produtos de Birkhoff?

Problema: obter informação “assintótica” sobre os produtos $\vec{g}_n(\omega)$, $\overleftarrow{g}_n(\omega)$, para q.t.p. ω .

Evidentemente, o problema não está bem-posto...

Vamos colocar mais estrutura:

Em muitos casos, o (semi)grupo G age (digamos, à esquerda) de maneira natural em algum espaço H “mais simples”. Ou seja, há uma aplicação

$$\begin{aligned} G \times H &\rightarrow H \\ (g, p) &\mapsto gp \end{aligned}$$

com as propriedades $\mathbb{1}p = p$, $(g_1g_2)p = g_1(g_2p)$.

Produtos de Birkhoff agindo em um outro espaço

Em vez de tentar descrever a “assintótica” das sequências $(\vec{g}_n(\omega))$ ou $(\overleftarrow{g}_n(\omega))$ em G , faremos o seguinte: Fixamos um ponto qualquer $p_0 \in H$, e consideramos as sequências em H :

$$(\overleftarrow{g}_n(\omega) \cdot p_0) \quad \text{e} \quad (\vec{g}_n(\omega) \cdot p_0).$$

Então tentaremos obter informação “assintótica” (de pelo menos uma) dessas sequências, em termos da estrutura (linear, geométrica, ...) do espaço H .

Obs.: A 1ª sequência pode parecer mais natural (pois pode ser vista em termos de um skew-product). Porém veremos situações onde a 2ª é mais natural...

Duas situações

Consideraremos duas situações concretas:

- 1 **Situação de Oseledets:** $G =$ grupo de matrizes inversíveis $d \times d$, agindo em $H = \mathbb{R}^d$ (por transformações lineares).
- 2 **Situação de Karlsson–Margulis:** $G =$ grupo (ou semigrupo) agindo por isometrias (ou semicontrações) em certos espaços H .

Na 1ª situação usaremos produtos do tipo \overleftarrow{g}_n , enquanto na 2ª usaremos \overrightarrow{g}_n .

Veremos ainda como relacionar as duas situações. (A idéia vem de Kaimanovich 1989).

Obs.: Existem diversos outros “teoremas ergódicos não-comutativos”, inclusive alguns resultados bem recentes.

COCICLOS DE ISOMETRIAS E O DRIFT

Cociclos de isometrias / semicontrações

Seja (H, d) um espaço métrico.

Suponha que G é grupo (resp. semigrupo) agindo em H por **isometrias** (resp. **semicontrações**), i.e.,

$$\left. \begin{array}{l} p, q \in H \\ g \in G \end{array} \right\} \Rightarrow d(gp, gq) = (\text{resp. } \leq) d(p, q)$$

Dadas aplicações $T : (\Omega, \mu) \curvearrowright$ e $g : \Omega \rightarrow G$, temos um **cociclo de isometrias** (resp. **semicontrações**).

(Na situação de Birkhoff, $G = \mathbb{R}$ age por isometrias em $H = \mathbb{R}$ por $p \cdot g := p + g$.)

Estudaremos propriedades assintóticas de sequências $(\vec{g}_n(\omega)p_0)$, onde $p_0 \in H$.

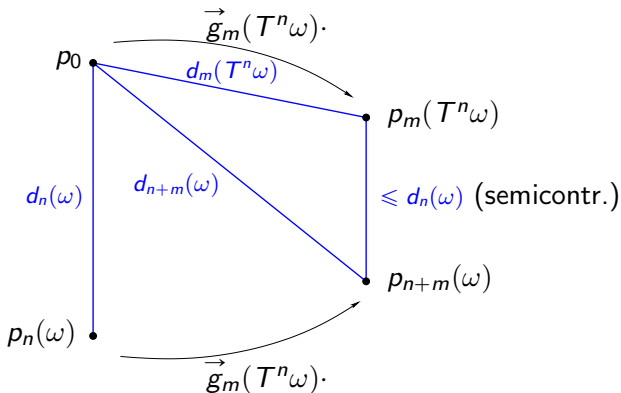
Distância ao ponto de partida

Fixado $p_0 \in H$ e $\omega \in \Omega$, seja, para $n = 0, 1, \dots$,

$$p_n(\omega) := \vec{g}_n(\omega)p_0 = g(\omega)g(T\omega)\dots g(T^{n-1}\omega)p_0,$$

$$d_n(\omega) := d(p_n(\omega), p_0).$$

Então a sequência (d_n) é subaditiva, i.e., $d_{n+m} \leq d_n + d_m \circ T^n$.



Impomos a **hipótese de integrabilidade**:

$$\int_{\Omega} d(p_0, p_0 \cdot g(\omega)) d\mu(\omega) < \infty.$$

Aplicando o Teorema Ergódico Subaditivo de Kingman, obtemos $\alpha \geq 0$ tal que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d(p_n(\omega), p_0)}{n} = \alpha \quad \text{para } \mu\text{-q.t.p. } \omega \in \Omega.$$

Esse α é chamado o **drift** do cociclo de isometrias/semicontrações.

Obs.: Tanto a hipótese de integrabilidade como o valor do drift não dependem da escolha do ponto-base p_0 . (Exercício fácil.)

Um exemplo

$G =$ grupo livre em 2 geradores a, b .

$H =$ grafo de Cayley de G , com a distância natural

G age (à esquerda) em H por isometrias

$$\Omega = \{a, a^{-1}, b, b^{-1}\}^{\mathbb{Z}}$$

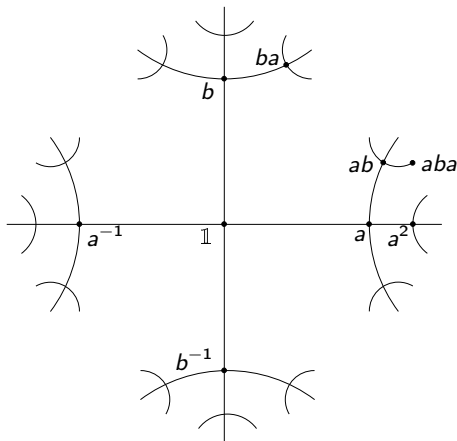
$\mu =$ Bernoulli com pesos $1/4$

$T =$ shift

$$p_0 = \mathbb{1}$$

Então a sequência $p_n(\omega)$ é a trajetória de um passeio aleatório...

Drift $\alpha = 1/2$



ESCOLTA SUBLINEAR

Teorema de Karlsson e Margulis (1999)

Seja $T : (\Omega, \mu) \curvearrowright$ ergódica.

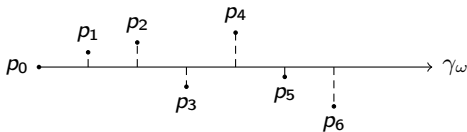
Seja H um espaço métrico **uniformemente convexo com curvatura não-positiva no sentido de Busemann**.

Considere um cociclo $g : \Omega \rightarrow G$, onde G é o semigrupo de semicontrações de H . Dado $p_0 \in H$, seja $p_n(\omega) := \overrightarrow{g}_n(\omega)p_0$.

Então para q.t.p. $\omega \in \Omega$ existe uma **geodésica** $\gamma_\omega : [0, \infty) \rightarrow H$ de velocidade α partindo de p_0 tal que

$$d(\gamma_\omega(n), p_n(\omega)) = o(n).$$

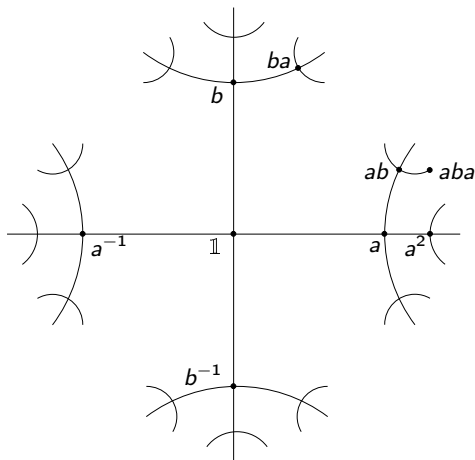
Ou seja, a geodésica γ_ω “escolta sublinearmente” a sequência $p_n(\omega)$:



Se $\alpha = 0$ então a “geodésica” $\gamma_\omega(\cdot)$ é constante igual a p_0 .

Exemplo

No exemplo acima onde $H = \text{árvore}$ e $\{p_n(\omega)\}_n = \text{realização de um passeio aleatório}$, a geodésica $\gamma_\omega : [0, \infty) \rightarrow H$ é simplesmente um caminho *injetivo* partindo de $\mathbb{1}$ que percorre $\alpha = \text{meia aresta por unidade de tempo}$.



EXPLICANDO OS CONCEITOS GEOMÉTRICOS DO ENUNCIADO DO TEOREMA DE K & M

Curvatura em espaços métricos?

Vamos definir um conceito “sintético” de “curvatura não-positiva” em certos espaços métricos, sem definir uma curvatura numérica. Esta definição será mais geral que a situação clássica de Geometria Diferencial (p.ex. Riemanniana.).

Situação análoga: Convexidade de uma função $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

- Definição **sintética**: $f((1-t)p + tq) \leq (1-t)f(p) + tf(q)$,
 $\forall p, q \in I, t \in [0, 1]$.
- Definição **analítica**: $f''(p) \geq 0, \forall p \in I$.

Cada ponto de vista tem as suas vantagens.

Espaços geodésicos

Seja (H, d) espaço métrico completo e separável.

Uma **geodésica** de velocidade c é uma curva $\gamma : I \rightarrow H$ (onde $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo)

$$d(\gamma(t), \gamma(s)) = c|t - s|, \quad \forall t, s \in I.$$

H é chamado **espaço [unicamente] geodésico** se quaisquer dois pontos distintos podem ser ligados por uma [único] segmento geodésico de velocidade unitária.

Exemplo: \mathbb{R}^2 com a distância da soma (“Manhattan”) é espaço geodésico, mas não é unicamente geodésico.

Obs.: Todo espaço unicamente geodésico é contrátil, e em particular, simplesmente conexo.

Ponto médio

Suponha que H é unicamente geodésico. Então dados dois pontos $p, q \in H$, existe um único *ponto médio* m_{pq} tal que

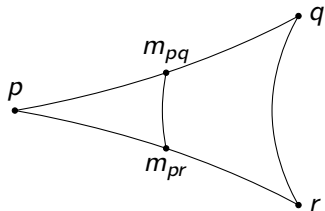
$$d(m_{pq}, p) = d(m_{pq}, q) = \frac{1}{2}d(p, q).$$

Afastamento de geodésicas

Suponha que H é separável, completo, e unicamente geodésico.

Dizemos que H tem *curvatura não-positiva* (no sentido de Busemann global) se para todos $p, q, r \in H$ vale:

$$d(m_{pq}, m_{pr}) \leq \frac{1}{2}d(q, r)$$



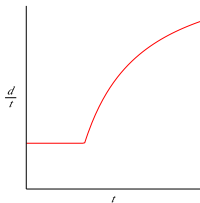
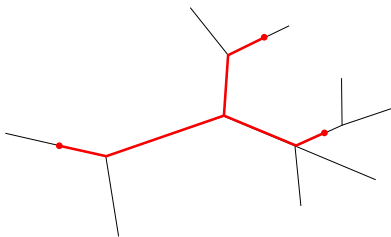
Equivalentemente, dadas duas geodésicas $\gamma_1, \gamma_2 : [0, +\infty) \rightarrow H$ (não necessariamente unitárias) partindo de um mesmo ponto p , a função

$$t \in [0, +\infty) \rightarrow \frac{1}{t}d(\gamma_1(t), \gamma_2(t))$$

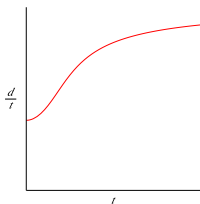
é não-decrescente.

Exemplos de espaços Busemann NPC

1) Uma árvore:



2) Plano hiperbólico

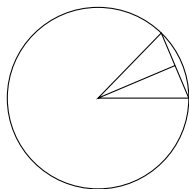


Obs.: Supondo que H seja uma variedade Riemanniana completa e simplesmente conexa, então H é Busemann NPC se e somente se a curvatura seccional é ≤ 0 em todo ponto e em todo plano.

Convexidade uniforme

Um espaço de Banach é chamado **uniformemente convexo** se

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ t.q. } \left. \begin{array}{l} \|x\| = \|y\| = 1 \\ \|x - y\| \geq \epsilon \end{array} \right\} \Rightarrow \left\| \frac{x + y}{2} \right\| \leq 1 - \delta.$$

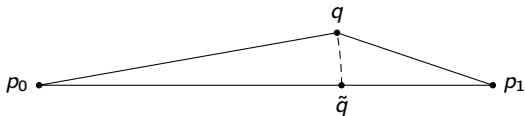


Há uma definição de convexidade uniforme para espaços métricos unicamente geodésicos; porém, por ser mais técnica, não vamos enunciá-la.

Obs.: Vale essa tal propriedade se H é $CAT(0)$ ou, em particular, variedade Riemanniana completa simplesmente conexa de curvatura ≤ 0 .

Consequência da convexidade uniforme

Se um triângulo é “fininho”, quer dizer, a desigualdade triangular é quase uma igualdade, então um de seus vértices está próximo de um lado:



Lema geométrico

Para todo $\epsilon > 0$ podemos associar $\delta = \delta(\epsilon)$ de modo que $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \delta = 0$ e vale o seguinte: Suponha p_0, p_1, q tais que

$$0 \leq d(p_0, q) + d(p_1, q) - d(p_0, p_1) \leq \epsilon d(p_0, q).$$

Seja \tilde{q} o ponto no raio geodésico $\overrightarrow{p_0 p_1}$ tal que $d(\tilde{q}, p_0) = d(q, p_0)$. Então:

$$d(\tilde{q}, q) \leq \delta d(p_0, q).$$

ESBOÇO DA PROVA DO TEOREMA K & M

Lema de Pliss tradicional

O seguinte resultado é bastante usado em dinâmica não-uniformemente hiperbólica:

Lema de Pliss (1972)

Dados $B \geq \alpha > \alpha - \epsilon$, existe $\theta > 0$ com as seguintes propriedades:

Dada uma sequência finita $a(0) = 0, a(1), a(2), \dots, a(N)$ tal que

$$a(j+1) - a(j) \leq B \quad \forall j \quad \text{e} \quad \frac{a(N)}{N} \geq \alpha,$$

existe $\ell > \theta N$ e existem $0 < n_1 < n_2 < \dots < n_\ell < N$ tais que

$$a(n_i) - a(n_i - k) \geq (\alpha - \epsilon)k \quad \forall i, \quad \forall k \in [0, n_i].$$

Lema de Pliss Ergódico

O único ingrediente “ergódico” da prova de K & M é o seguinte:

Lema de Pliss Ergódico (K & M, 1999)

Seja $T : (\Omega, \mu) \curvearrowright$ ergódica.

Seja $\{a(n, \cdot)\}_{n \in \mathbb{N}}$ sequência subaditiva tal que

$$\int a(1, \cdot)^+ < +\infty \quad \text{and} \quad \alpha := \inf_n \frac{1}{n} \int a(n, \cdot) > -\infty.$$

Então para quase todo $\omega \in \Omega$, e para todo $\epsilon > 0$ existem $k_* = k_*(\omega, \epsilon) \in \mathbb{N}$ e uma subsequência $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ tais que:

$$a(n_i, \omega) - a(n_i - k, T^k \omega) \geq (\alpha - \epsilon)k \quad \forall i, \forall k \in [k_*, n_i].$$

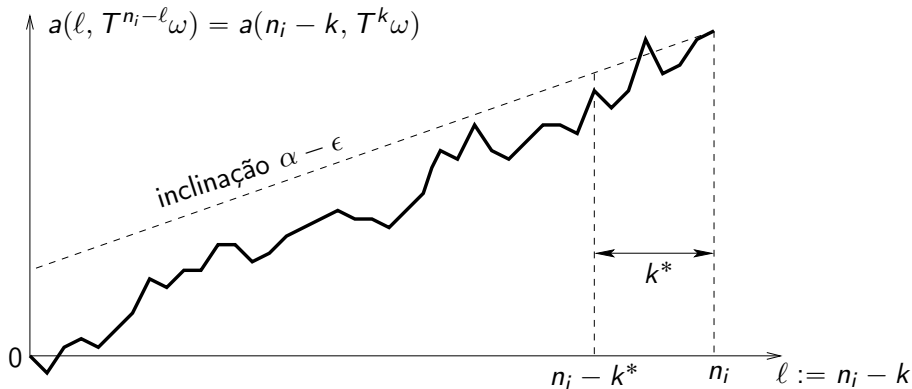
Não é difícil deduzir o Kingman do LPE.

Obs.: A prova do LPE (que não veremos aqui) é complicadinha, mas não usa “nada” (nem o Birkhoff!).

Lema de Pliss Ergódico

Conclusão do LPE

$$a(n_i, \omega) - a(n_i - k, T^k \omega) \geq (\alpha - \epsilon)k \quad \forall i, \forall k \in [k_*, n_i].$$



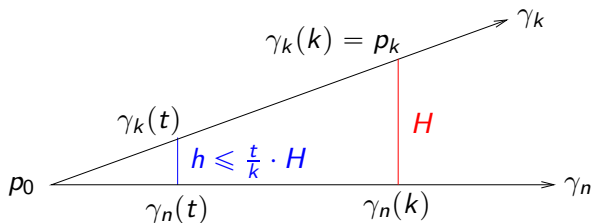
Exceto na região de largura k^* , o gráfico fica abaixo da reta.

Esboço da prova do Teorema K & M

Fixe p_0 . Para cada $k \in \mathbb{N}$, seja $p_n(\omega) := \vec{g}_n(\omega)p_0$, e seja $\gamma_{\omega,n} : [0, \infty) \rightarrow H$ geodésica tal que $\gamma_{\omega,n}(0) = p_0$ e $\gamma_{\omega,n}(n) = p_n(\omega)$.

A geodésica $\gamma_\omega : [0, \infty) \rightarrow H$ será $\gamma_\omega(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_{\omega,n}(t)$.

Dado $t > 0$, temos que mostrar que a sequência $\{\gamma_n(t) = \gamma_{\omega,n}(t)\}$ é de Cauchy. Tome $n \geq k \gg t$. Use a *curvatura negativa à Busemann*:



Se mostrarmos que $H = o(k)$ então $h = o(1)$, como desejado.

Esboço da prova do Teorema K & M

Consideramos a sequência subaditiva $a(k, \omega) := d(p_0, p_k(\omega))$.

Seja $\epsilon > 0$ pequeno. Pela *def. de drift*,

$$k \gg 1 \Rightarrow (\alpha - \epsilon)k \leq a(k, \omega) \leq (\alpha + \epsilon)k$$

Pelo *Lema de Pliss Ergódico*,

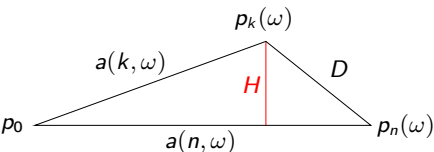
$$n = n_i \geq k \Rightarrow a(n, \omega) - a(n - k, T^k \omega) \geq (\alpha - \epsilon)k.$$

Esboço da prova do Teorema K & M

Drift: $(\alpha - \epsilon)k \leq a(k, \omega) \leq (\alpha + \epsilon)k$

Pliss: $a(n, \omega) - a(n - k, T^k \omega) \geq (\alpha - \epsilon)k$

Considere o triângulo:



Semicontr. $\Rightarrow D \leq a(n - k, T^k \omega)$

excesso desig. triang.

$$\begin{aligned} &= a(k, \omega) + D - a(n, \omega) \\ &\leq a(k, \omega) + a(n - k, T^k \omega) - a(n, \omega) \\ &\leq (\alpha + \epsilon)k - (\alpha - \epsilon)k \\ &= 2\epsilon k \\ &\leq \underbrace{\frac{2\epsilon}{\alpha - \epsilon}}_{\epsilon'} \cdot a(k, \omega) \end{aligned}$$

O triângulo é ϵ' -fino. Pelo *Lema Geométrico (Convexidade Unif.)*,

$$H \leq \delta(\epsilon')a(k, \omega) < \delta'k, \quad \delta' \ll 1.$$

Como explicado antes, concluímos usando a *Curvatura Negativa*.

APLICAÇÃO DO TEOREMA K & M
A COCICLOS DE MATRIZES

ou

$K \& M \Rightarrow \text{OSELEDETS}$

Teorema de Oseledets

Teorema de Oseledets (unilateral), 1968

Seja $T : (\Omega, \mu) \curvearrowright$ ergódica.

Seja $A : \Omega \rightarrow \text{GL}(d, \mathbb{R})$ satisfazendo a condição de integrabilidade $\log^+ \|A^{\pm 1}\| \in L^1(\mu)$.

Então para q.t.p. $\omega \in \Omega$ existe

$$P(\omega) := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\overleftarrow{A}_n(\omega) \right)^* \cdot \overleftarrow{A}_n(\omega) \right)^{1/2n}$$

Observações:

- $P(\omega) \in \text{Pos}_d := \{ \text{matrizes simétricas positivo-definidas} \}$.
- Os \log 's dos autovalores de $P(\omega)$ são os expoentes de Lyapunov.
- A bandeira de Oseledets é obtida a partir dos autoespaços de $P(\omega)$.

Introduzindo uma ação

Seja \mathcal{Q}_d o conjunto das formas quadráticas positivo-definidas $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$. O grupo $GL(d, \mathbb{R})$ age à *direita* em \mathcal{Q}_d :

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}_d \times GL(d, \mathbb{R}) &\rightarrow \mathcal{Q}_d \\ (f, L) &\mapsto f \circ L\end{aligned}$$

Existe uma bijeção óbvia $\mathcal{Q}_d \leftrightarrow \text{Pos}_d$ com o conjunto das matrizes $d \times d$ simétricas positivo-definidas.

Conjugando com esta bijeção, e dualizando, obtemos a seguinte ação à *esquerda* de $GL(d, \mathbb{R})$ em Pos_d :

$$\begin{aligned}GL(d, \mathbb{R}) \times \text{Pos}_d &\rightarrow \text{Pos}_d \\ (L, P) &\mapsto [L]P := LPL^*\end{aligned}$$

Obs.: O estabilizador da matriz Id é o grupo ortogonal $O(d)$.

Geometrizando a ação

Escolhemos uma métrica Riemanniana em $T_{\text{Id}}\text{Pos}_d = \text{Sym}_d$ que é invariante pela ação de $O(d)$, por exemplo:

$$\langle S, T \rangle_{\text{Id}} := \text{tr}(ST) = \sum_{i,j} s_{ij} t_{ij}$$

Obs.: Também serviria $\langle S, T \rangle_{\text{Id}} = \text{tr}(ST) + \epsilon \text{tr}(S) \text{tr}(T)$ (com $\epsilon \simeq 0$). Poderia ainda ser uma métrica Finsler $O(d)$ -invariante (\exists muitas opções).

Espalhamos a métrica em $T_{\text{Id}}\text{Pos}_d$ para todo o fibrado tangente de Pos_d usando a ação. Pela $O(d)$ -invariância, obtemos uma métrica Riemanniana bem definida.

Agora $GL(d, \mathbb{R})$ age *por isometrias*.

Geometria de Pos_d

Fatos:

- 1 Pos_d tem *curvatura não-positiva*;
- 2 os raios geodésicos partindo da origem são da forma $t \in [0, \infty) \mapsto P^t$.

Observações:

- O fato 2 acima diz que a exponencial usual de matrizes $\exp : \text{Sym}_d \rightarrow \text{Pos}_d$ coincide com a exponencial da geometria Riemanniana.
- Os fatos acima valem para qualquer escolha da métrica invariante pela ação.

Explicação (parcial): Apesar dessa escolha não ser única, por um teorema de Nomizu (1956) há uma única *conexão* invariante. A conexão determina as curvaturas seccionais e as geodésicas.

Reinterpretando Oseledets

Oseledets afirma a existência do limite

$$P(\omega) := \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\left(\left(\overleftarrow{A}_n(\omega) \right)^* \cdot \overleftarrow{A}_n(\omega) \right)}_{\square}^{1/2n}$$

Lembre a definição da ação $[L]P := LPL^*$. Aí:

$$\begin{aligned} \square &= \left[\left(\overleftarrow{A}_n(\omega) \right)^* \right] \text{Id} \\ &= \left[\overrightarrow{B}_n(\omega) \right] \text{Id}, \quad \text{onde } B(\omega) := (A(\omega))^* \\ &= \overrightarrow{g}_n(\omega) p_0, \quad \text{onde } g(\omega) := \underbrace{[B(\omega)]}_{\text{isom. de Pos}_d}, \quad p_0 := \text{Id} \\ &= p_n(\omega). \end{aligned}$$

Prova do Oseledets

Considere o cociclo de isometrias $g = [A^*]$, e $p_n(\omega) := \vec{g}_n(\omega)\text{Id}$.

Por K & M, para q.t.p. ω , \exists geodésica $\gamma = \gamma_\omega : [0, \infty) \rightarrow \text{Pos}_d$ partindo de Id que escolta a sequência: $d(\gamma(n), p_n(\omega)) = o(n)$.

Essa geodésica é da forma $\gamma(t) = (P(\omega))^{2t}$ para algum $P(\omega)$.

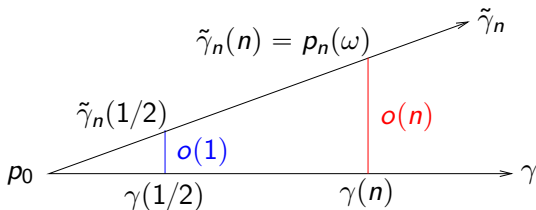
Compare com a geodésica $\tilde{\gamma}_n(t) := (p_n(\omega))^{t/n}$.

Segue da propriedade de Busemann que

$$\tilde{\gamma}_n(1/2) \rightarrow \gamma(1/2), \text{ i.e.,}$$

$$(p_n(\omega))^{1/2n} \rightarrow P(\omega).$$

Logo $P(\omega)$ é a matriz de Oseledets.



OBRIGADO!