Breve introducción a la Teoría de Mather sobre Lagrangeanos

Mario Ponce Acevedo

1 Introducción

Pretendiendo encontrar un marco adecuado para generalizar la teoría de Aubry-Mather sobre aplicaciones twist a mayores grados de libertad (ver [MaFo]), Mather [Ma1] introduce el estudio de medidas minimizantes sobre lagrangeanos periódicos definidos positivos, inspirado por un resultado de Moser [Mos] que escencialmente dice que toda función twist monótona se puede obtener como una aplicación de tiempo uno de un flujo hamiltoniano con algunas hipótesis adicionales.

2 Hipótesis de Mather para los Lagrangeanos

Sea M una variedad compacta, conexa, C^∞ y consideremos $L : TM \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función C^2 que llamaremos *Lagrangeano*. Supondremos que L satisface las siguientes propiedades:

1. Periódico: $L(t+1) = L(t) \qquad \forall t \in \mathbb{R} \qquad$ (hipótesis de Moser).
2. Definido positivo: $L \mid_{TM\times\{t\}}$ es definido positivo, o bien equivalentemente $Hess > 0$.
3. Crecimiento superlineal: $\frac{L(\xi,t)}{\|\xi\|} \to +\infty$ cuando $\|\xi\| \to \infty$.
4. Completitud: El flujo de Euler-Lagrange asociado es completo, es decir, las órbitas del flujo están definidas para todo tiempo $t \in \mathbb{R}$.

Observaciones. La hipótesis (2) garantiza la existencia de la transformada de Legendre, además Herman[Her] mostró que la propiedad del gráfico existe sólo para este tipo de dinámica. La hipótesis (3) garantiza la compacidad de ciertos conjuntos, así como buenas propiedades de algunas funciones convexas relevantes. La hipótesis (4) es escencial y asegura que las curvas minimizantes son soluciones de la ecuación de Euler- Lagrange, por lo tanto de clase C^1.En [BaMi] se muestra que un minimizante sin esta condición no es necesariamente de clase C^1.

2.1 El flujo de Euler-Lagrange

Dado un lagrangenao L, estamos interesados por curvas de clase C^1,$\gamma : [t_0, t_1] \rightarrow M$ con extremos fijos, es decir, $\gamma(t_0) = a, \gamma(t_1) = b$, con $a, b \in M$, que son puntos críticos de la acción

$$A(\gamma) = \int_{t_1}^{t_0} L(\gamma, \dot{\gamma}, t)dt$$

Esta condición variacional es equivalente a una condición local que escrita en coordenadas toma la forma conocida como ecuación de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt}L_v = L_x \tag{1}$$

Utilizando la hipótesis de convexidad (3), podemos ver que esta ecuación representa un campo C^1 sobre TM, luego induce un flujo $\Phi_t\left(x, v, t_0\right)$ sobre $TM \times T^1$.

3 Medidas minimizantes

Sea P^* la compactificación a un punto de $TM \times T^1$, es decir, $P^* = TM \times T^1 \cup \{\infty\}$. El flujo de Euler-Lagrange se extiende continuamente sobre P^* siendo $\{\infty\}$ un punto fijo (poniendo $L\left(\infty\right) = \infty$). Denotaremos este flujo por Φ_L. Sea M_L el conjunto de medidas de probabilidad borelianas invariantes por el flujo Φ_L. Como P^* es un espacio métrico compacto, del teorema de representación de Riesz, M_L es subconjunto del dual de $C(P^*)$. Claramente M_L es convexo y hereda de la topología w^* de $C^*(P^*)$ una topología, la topología *vaga,* que lo hace compacto y metrizable.

Si bien el teorema de Kryloff-Bogoliuboff asegura la existencia de una medida de probabilidad invariante, en este caso el átomo en $\{\infty\}$ no nos entrega ninguna información interesante. Estamos interesados en medidas invariantes de *acción* finita.

Definimos la acción promedio de una medida por

$$A(\mu) = \int L d\mu$$

Como L es inferiormente acotado (superlinealidad), esta acción está bien definida, aunque puede asumir el valor $+\infty$.

Es un principio general que medidas invariantes son obtenidas como límites vagos de medidas equidistribuidas a lo largo de órbitas. Para obtener una medida $\mu \in M_L$ con $A(\mu) < \infty$, aplicaremos este principio a órbitas bien escogidas (ver sección 3.4).

Dada una curva absolutamente continua $\gamma : [t_0, t_1] \rightarrow \tilde{M}$, con $\tilde{M}$ un recubrimiento adecuado de M , definimos su acción por

$$A(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} L(d\pi\gamma(t), t)dt$$

donde $\pi : \tilde{M} \to M$ denota la proyección de recubrimiento. Como $d\pi\gamma(t)$ existe para casi todo t y L es acotado inferiormente, $A(\gamma)$ está bien definida aunque puede asumir el valor $+\infty$.

El teorema de *Tonelli* asegura que esta acción asume un mínimo entre todas las curvas $\gamma : [t_0, t_1] \to \tilde{M}$ absolutamente continuas con $\gamma(t_0) = x_0$ y $\gamma(t_1) = x_1$. La hipótesis de completitud implica que este minimizante es solución de la ecuación de Euler-Lagrange, luego C^1.

Otra importante propiedad de las soluciones de la ecuación de Euler-Lagrange es el siguiente teorema devido a *Weirstrass*, que establece que soluciones suficientemente cortas de la ecuación de Euler-Lagrange son minimizantes de Tonelli estrictos.

Teorema 1 *Para toda $K > 0$, existe $\varepsilon > 0$, tal que si $a < b \leq a+\varepsilon$ y $\gamma : [a, b] \to \tilde{M}$ es una solución de Euler-Lagrange satisfaciendo $\|d\gamma(t)\| \leq K$ para todo $t \in [a, b]$, entonces: $A(\gamma_1) \geq A(\gamma)+F(\gamma, \gamma_1)$ para cualquier curva absolutamente contínua $\gamma_1 : [a, b] \to \tilde{M}$ con extremos $\gamma_1(a) = \gamma(a), \gamma_1(b) = \gamma(b)$, teniéndose que $F(\gamma, \gamma_1) > 0$ si $\gamma_1 \neq \gamma$.*

Además, si $x_0, x_1 \in \tilde{M}$ son tales que $d(x_0, x_1) \leq \frac{K(b-a)}{2}$ entonces existe una solución de Euler-Lagrange $\gamma : [a, b] \to \tilde{M}$ con $\gamma(a) = x_0, \gamma(b) = x_1$ y $\|\dot{\gamma}(t)\| \leq K$ para todo $t \in [a, b]$.

3.1 Existencia de medidas minimizantes

Lema 2 *$A(\mu)$ es semi-contínua inferior en la topología vaga de M_L.*

Prueba. Definimos $A_k(\mu) = \int \min(L, k) d\mu$. La función A_k resulta ser continua y además $A_k \nearrow A$, luego se tiene lo afirmado.

Proposición 3 *Existe $\mu \in M_L$ tal que $A(\mu) < +\infty$.*

Prueba. Análoga a la prueba del teorema 7.

Utilizando la semicontinuidad de la acción y la compacidad de M_L obtenemos el

Corolario 4 *Existe $\mu \in M_L$ que minimiza $A(\mu)$.*

3.2 Vector de rotación

Queremos asociar a cada $\mu \in M_L$ una clase de homología real que represente el comportamiento de las órbitas de μ. Para ello notamos que si $\lambda \in H^1(M, \mathbb{R})$ es una forma exacta entonces para una medida μ invariante se tiene que $\int \lambda d\mu = 0$, luego la siguiente definición tiene sentido

Definición 5 *Si $\mu \in M_L$ es tal que $A(\mu) < +\infty$, entonces existe une clase de homología real $\rho(\mu) \in H_1(M, \mathbb{R})$ tal que $\langle [\lambda], \rho(\mu) \rangle = \int \lambda d\mu$ para toda 1-forma λ cerrada. Este último término es finito ya que L tiene crecimiento superlineal y $A(\mu) < +\infty$. Definimos así $\rho : M_L \to H_1(M, \mathbb{R})$ la función vector de rotación.*

3.2.1 Interpretación geométrica de ρ

Si μ es ergódica, el Teorema Ergódico de Birkhoff nos dice que para $\mu - casi$ todo punto p en $TM \times T^1$ tenemos

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \lambda\left(\gamma(t)\right) dt = \frac{1}{2T}\int_{\tilde{\gamma}_T(p)} \lambda \longrightarrow \int \lambda d\mu = \left\langle [\lambda]\,, \rho(\mu) \right\rangle$$

donde hemos escrito $\tilde{\gamma}_T(p) = \pi(\gamma \mid_{[-T,T]})$ la proyección de la solución de Euler-Lagrange con valor incial p. Vemos entonces que $\rho\left(\mu\right)$ representa $\lim_{T\to\infty} \frac{\tilde{\gamma}_T(p)}{2T}$, la clase de homología de $\mu - casi$ toda órbita.

3.3 El problema en cohomología

Sea $c \in H^1(M, \mathbb{R})$. Considerando c como una función real sobre $TM \times T^1$ escribimos el siguiente problema variacional

$$\min_{\mu \in M_L} \int (L - \lambda) d\mu \tag{2}$$

donde λ es cualquier 1-forma cerrada representando c. El lagrangeano $L - \lambda$ satisface las hipótesis de Mather y su flujo de Euler-Lagrange asociado coincide con el de L :

El teorema de Weirstrass asegura que para puntos suficientemente cercanos existe un único minimizante, que es solución de Euler-Lagrange. Sea γ_1 solución para L y sea γ_2 solución para $L - \lambda$. El teorema de Weirstrass nos entrega también la siguiente desigualdad, con igualdad sólo en el caso $\gamma_1 = \gamma_2$:

$$\int_{\gamma_1} (L - \lambda) \geq \int_{\gamma_2} (L - \lambda)$$

Localmente λ es una forma exacta, luego $\int_{\gamma_1 - \gamma_2} \lambda = 0$, de donde

$$\int_{\gamma_1} L \geq \int_{\gamma_2} L$$

lo que junto con el hecho que γ_1 es un único minimizante global implican lo afirmado.

Lo anterior nos dice que el problema (2) no significa otra cosa que minimizar la acción de las medidas invariantes para el lagrangeano $L - \lambda$. Definimos entonces

$$A_c(\mu) = A(\mu) - \langle c, \rho(\mu) \rangle = \int (L - \lambda) d\mu$$

La proposición 2 implica que A_c es sci y el corolario 4 implica que A_c asume un mínimo finito que denotaremos por $-\alpha(c)$. Esta función real sobre $H^1(M, \mathbb{R})$ es convexa.

3.4 El problema en homología

Nos preguntamos por la existencia de medidas de acción finita con un vector de rotación predeterminado.

Lema 6 *Sea λ una 1-forma sobre M y $C \in \mathbb{R}$. La función $\mu \to \int \lambda d\mu$ es contínua en el conjunto de medidas sobre P^* cuya acción es $\leq C$.*

Teorema 7 *Dado $h \in H_1(M, \mathbb{R})$, existe $\mu \in M_L$ con $A(\mu) < +\infty$ y $\rho(\mu) = h$.*

Prueba. Sea $\tilde{M}$ el recubrimiento abeliano de M, es decir, cuyo grupo fundamental $\pi_1(\tilde{M}) = Ker(\Xi : \pi_1(M) \to H_1(M, \mathbb{R}))$, donde Ξ es el homomorfismo de *Hurewics*. Esto quiere decir que dos caminos en $\tilde{M}$ con extremos en puntos con igual proyección, proyectan sobre curvas cerradas con la misma homolog ía. El conjunto de transformaciones de recubrimiento es $H = Im(\Xi)$. Subentendemos en toda esta introducción que para cada recubrimiento existe un lagrangeano natural asociado $\tilde{L}$ que es simplemente el levantamiento de L, es decir, $\tilde{L}(p) = L(\pi p)$ con $\pi : \tilde{M} \to M$ la proyección de recubrimiento.

Sean $T_1, T_2, ..., T_n, ...$ una secuencia de transformaciones de recubrimiento de manera que $\lim_{n\to\infty} \dfrac{T_n}{n} = h$.

Sean $\tilde{x}_0 \in \tilde{M}$, $\tilde{x}_n = T_n(\tilde{x}_0)$. Consideremos minimizadores de Tonelli $\alpha_n : [0, n] \to \tilde{M}$ del problema con extremos x_0 y x_n.

Definimos $\gamma_n = \pi\alpha_n$, y μ_n la medida sobre $TM \times T^1$ equidistribuida sobre γ_n. Si λ es una 1-forma cerrada entonces de la determinación de los puntos extremos de α_n tenemos que

$$\int \lambda d\mu_n = \frac{1}{n} \int_0^n \lambda\left(\gamma\left(t\right)\right) dt = \left\langle [\lambda], n^{-1} T_n \right\rangle \to \left\langle [\lambda], h \right\rangle \tag{3}$$

Por otra parte, como $T_n \approx nh$, existe $C > 0$ tal que $d(\tilde{x}_0, \tilde{x}_n) \leq Cn$ para alguna métrica riemanniana en $\tilde{M}$ que proviene del levantamiento de alguna sobre M. La geodésica β_n entre $\tilde{x}_0, \tilde{x}_n$ parametrizada sobre $[0, n]$ tiene velocidad $\leq C$, de donde $A(\beta_n) = \int_0^n L dt \leq \tilde{C} n$ para $\tilde{C} > 0$ una cota superior de L para velocidades $\leq C$. Como α_n es minimizante, tenemos que $A(\alpha_n) \leq A(\beta_n) \leq \tilde{C} n$, luego $A(\mu_n) \leq \tilde{C}$ para todo n. Tomando μ un punto de acumulación vago de $\{\mu_n\}$ obtenemos por el lema 2 que $A(\mu) \leq \tilde{C} < +\infty$. Del lema 6

$$\int \lambda d\mu_n \to \int \lambda d\mu$$

luego (3) implica que $\int \lambda d\mu = \left\langle [\lambda], h \right\rangle$, y de la definición de ρ obtenemos finalmente que $\rho(\mu) = h$. Podemos definir entonces $\beta : H_1(M, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ por

$$\beta(h) = \min \left\{ A(\mu) : \mu \in M_L, \rho(\mu) = h \right\}$$

3.5 Definición de medida minimizante

De las propiedades de superlinealidad de L se decuce que $\alpha : H^1(M,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ y $\beta : H_1(M,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ tienen crecimiento superlineal y son funciones convexas conjugadas. Notemos que si $\mu \in M_L$, $A(\mu) = \beta(\rho(\mu))$ si y solamente si existe $c \in H^1(M,\mathbb{R})$ de manera que μ minimiza A_c, es decir, $A_c(\mu) = -\alpha(c)$. Definimos entonces

Definición 8 *$\mu \in M_L$ se dice medida minimizante si y solamente si $A_c(\mu) = -\alpha(c)$ o equivalentemente $A(\mu) = \beta(\rho(\mu))$.*

Como β tiene crecimiento superlineal, su epígrafo tiene infinitos puntos extremos. Sea $(h, \beta(h))$ un tal punto extremo. El conjunto de medidas $\mu \in M_L$ que satisfacen $\rho(\mu) = h$ y $A(\mu) = \beta(h)$ es compacto y convexo, luego posee puntos extremos(Teorema de *Kreim-Milman).* Estas medidas son puntos extremos de M_L, luego ergódicas, de donde deducimos el siguiente

Corolario 9 *Si $(h, \beta(h))$ es un punto extremo del epígrafo de β entonces existe una medida ergódica minimizante μ con $\rho(\mu) = h$. De la interpretación geométrica de ρ (ver 3.2.1), h es representada por $\mu -$ casi toda órbita.*

3.6 Medidas minimizantes, definición de Mañé

Por razones técnicas y por el interés intrínseco de tales resultados, Mañé [Mñ3] introduce un nuevo concepto de medidas minimizantes, que a *priori* no son necesariamente invariantes, es más, no dependen de L.

Definición 10 *Sea M_l el conjunto de medidas de probabilidad borelianas sobre $TM \times T^1$ tales que*

$$\int_{TM\times T^1} \|v\|\, d\mu < \infty$$

Existe una topología metrizable sobre M_l tal que

$$\mu_n \to \mu \quad \Longleftrightarrow \quad \int \Psi d\mu_n \to \int \Psi d\mu$$

para toda función contínua $\Psi : TM \times T^1 \to \mathbb{R}$ que crece a lo más linealmente, esto es

$$\sup_{x,v,t} \frac{\Psi(x,v,t)}{1+\|v\|} < +\infty$$

Llamaremos C_l^0 al espacio de tales funciones.

Nos interesamos en el subconjunto cerrado de M_l definido a continuación.

Dado $\gamma : \mathbb{R} \to M$ una curva absolutamente contínua, periódica de período entero N, definimos la probabilidad μ_γ por

$$\int \Psi d\mu_\gamma = \frac{1}{N}\int_0^N \Psi(\gamma, \dot{\gamma}, t)dt$$

para toda $\Psi : TM \times T^1 \to \mathbb{R}$ contínua de soporte compacto. Claramente $\mu_\gamma \in M_l$.

Podemos asociar naturalmente un vector de rotación $\rho(\mu_\gamma)$ por

$$\rho(\mu_\gamma) = \frac{1}{N}[\gamma]$$

con $[\gamma]$ la clase de homología de γ en $H_1(M, \mathbb{R})$.

Sea $C \subseteq M_l$ el conjunto de tales medidas y sea $\bar{C}$ su adherencia. El siguiente teorema resume los resultados que le permiten a Mañé definir medida minimizante:

Teorema 11 *Consideremos un lagrangiano L que satisface las hipótesis de Mather, entoces:*

- i) El conjunto de medidas invariantes de acción finita está incluido en $\bar{C}$.
- ii) El conjunto $\left\{\mu \in M_l \mid \int L d\mu \leq K\right\}$ es compacto.
- iii) Para toda $\mu \in \bar{C}$ asociamos un vector de rotación $\rho(\mu)$ que es una extensión contínua de $\rho(\mu_\gamma)$.

Dado $\gamma \in H_1(M, \mathbb{R})$, definimos $M_\gamma(L)$ como las medidas $\mu \in \bar{C}$ tales que

$$\int L d\mu = \min\left\{\int L d\nu \mid \nu \in \bar{C}, \rho(\nu) = \gamma\right\}$$

con $\rho(\mu) = \gamma$.

Definimos igualmente $M^c(L)$, para $c \in H^1(M, \mathbb{R})$ como las medidas $\mu \in \bar{C}$ tales que

$$\int (L - \lambda) d\mu = \min_{\nu \in \bar{C}} \int (L - \lambda) d\nu$$

con λ una 1-forma cerrada representando c.

Mañé define entonces $\mu \in M_l$ una medida minimizante por :

Definición 12 *$\mu \in M_l$ es una medida minimizante si y solamente si $\mu \in \bigcup_{\gamma \in H_1(M,\mathbb{R})} M_\gamma(L) = \bigcup_{c \in H^1(M,\mathbb{R})} M^c(L)$.*

- iv) Si μ es minimizante entoces μ es invariante. Concluimos que las medidas minimizantes de Mather y Mañé coinciden.

4 Medidas y curvas minimizantes

Diremos que $\tilde{\gamma} : [a, b] \to \tilde{M}$ es minimizante si minimiza la acción

$$\int_a^b \tilde{L}(\gamma, \tilde{\gamma}, t) dt = \int_a^b L(d\pi\tilde{\gamma}, t) dt$$

sobre todas las curvas absolutamente contínuas a extremos fijos.

Consideremos $\lambda_1 ... \lambda_l$ 1-formas cerradas que represenan una base dual de $H_1(M, \mathbb{R})$. Si $x, y \in \tilde{M}$ y $\tilde{\gamma} : [a, b] \to \tilde{M}$ es una curva C^1 conectando x con y, definimos el vector diferencia $y - x \in H_1(M, \mathbb{R})$ por

$$\langle [\lambda_i], y - x \rangle = \int_a^b \lambda_i(d\pi\tilde{\gamma})dt$$

De la definición de $\tilde{M}$ (una curva cerrada proyecta sobre una curva cerrada de homología nula) esta definición es independiente de la curva $\tilde{\gamma}$ escogida.

Definimos también el vector de rotación de $\tilde{\gamma}$ por

$$\rho(\tilde{\gamma}) = \frac{y - x}{b - a}$$

Notemos que cuando $y = Tx$ con T una transformación de recubrimiento, $\pi\tilde{\gamma}$ es cerrada y $\rho(\tilde{\gamma})$ coincide con la homología definida por Mañé (ver sección 3.6) para la medida definida sobre $\pi\tilde{\gamma}$. La siguiente proposición, y especialmente su corolario nos permiten calcular el valor $\beta(h)$.

Proposición 13 *Considere una secuencia* $\zeta_i : [a_i, b_i] \to \tilde{M}$, $i = 1, 2, ...,$ *de curvas minimizantes. Suponga que* $\rho(\zeta_i) \to h \in H_1(M, \mathbb{R})$, *y* $b_i - a_i \to \infty$ *cuando* $i \to \infty$. *Entonces* $\dfrac{A(\zeta_i)}{b_i - a_i} \to \beta(h)$ *cuando* $i \to \infty$.

Prueba. Si $\liminf \frac{A(\zeta_i)}{b_i - a_i} < \beta(h)$ escogemos un límite vago de medidas $\mu_i \to \mu$ invariante, de manera que $A(\mu) < \beta(h)$. De la continuidad de ρ sobre medidas de acción acotada tenemos que $\rho(\mu) = h$, lo que contradice la definición de $\beta(h)$, luego $\liminf \frac{A(\zeta_i)}{b_i - a_i} \geq \beta(h)$. Supongamos que $(h, \beta(h))$ es un punto extremo del epígrafo de β, entonces existe una medida ergódica μ minimizante tal que $\rho(\mu) = h$, $A(\mu) = \beta(h)$.(ver corolario 9). Notemos que $A(\mu) < \infty$, luego $L \in \mathfrak{L}^1(\mu)$ y $\lambda_i \in \mathfrak{L}^1(\mu)$, luego el teorema ergódico de Birkhoff nos asegura que para $\mu - casi$ toda órbita γ tenemos

$$A(\gamma_T)/2T \to A(\mu) \qquad , \qquad \rho(\gamma_T) \to \rho(\mu)$$

con $\gamma_T = \gamma \mid [-T, T]$. Escogemos una tal trayectoria genérica. Sea ξ un levantamiento de $\pi\gamma$ a $\tilde{M}$. Para i grande, escogemos $a_i < a_{1i} < b_{1i} < b_i$. Definimos $\xi_i : [a_{1i}, b_{1i}] \to \tilde{M}$ de la forma $\xi_i = D_i \circ \xi$ con D_i una transformación de recubrimiento adecuada. Definimos finalmente $\xi_i^* : [a_i, b_i] \to \tilde{M}$ como en la figura

Donde $\zeta_1 : [a_i, a_{1i}] \to \tilde{M}$, $\zeta_2 : [b_{1i}, b_1] \to \tilde{M}$ son minimizantes. Escogemos $\frac{b_{1i} - a_{1i}}{b_i - a_i} \to 1$ y D_i de manera que

$$\frac{\|\zeta_i(a_i) - \xi_i(a_{1i})\|}{a_{1i} - a_i} \quad , \quad \frac{\|\xi_i(b_{1i}) - \zeta_i(b_i)\|}{b_i - b_{1i}}$$

sean acotados independientemente de i. Luego $(b_i - a_i)^{-1} A(\xi_i^*) \to \beta(h)$ (los pedazos $\zeta_1 : [a_i, a_{1i}] \to \tilde{M}$, $\zeta_2 : [b_{1i}, b_1] \to \tilde{M}$ no aportan en límite a la acción de ξ_i^*). Como las curvas ζ_i son minimizantes , tenemos que $A(\xi_i^*) \geq A(\zeta_i)$ y como $\liminf \frac{A(\zeta_i)}{b_i - a_i} \geq \beta(h)$ obtenemos finalmente el resultado. Si $(h, \beta(h))$ no es un punto extremo, consideramos una combinación convexa de medidas ergódicas, para cada una de ellas una curva genérica y formamos ξ_i^* por pedazos de largo ponderado como en la combinación convexa.

Corolario 14 *Para cada $K > 0$, $\varepsilon > 0$ existe $T > 0$ tal que si $\zeta : [a, b] \to \tilde{M}$ es minimizante, entonces*

$$\left\| (b-a)^{-1} A(\zeta) - \beta(\rho(\zeta)) \right\| \leq \varepsilon$$

si $\|\rho(\zeta)\| \leq K$ y $b - a \geq T$.

Prueba. Notar que la construcción de ξ_i^* precedente se puede uniformizar. Diremos que $\zeta : \mathbb{R} \to \tilde{M}$ es minimizante si toda restricción $\zeta \mid [a, b]$ es minimizante. Sea $\zeta : \mathbb{R} \to \tilde{M}$ una curva C^1 y sea $\gamma(t) = (d\pi\zeta, t)$. Diremos que μ es una medida límite de ζ si existe una secuencia de intervalos $[a_i, b_i]_{i=1,2,\ldots}$ de manera que $b_i - a_i \to \infty$ y $\mu_{\gamma|[a_i, b_i]} \to \mu$ vagamente.

El corolario anterior nos induce a pensar que las medidas límites de una curva minimizante son todas minimizantes sobre su clase de homologí a.

La siguiente proposición confirma esta intuición y bajo una hipótesis adicional nos dice que existe una clase de cohomología asociada a la curva para la cual las medidas límites son minimizantes.

Proposición 15 *Sea $\zeta : \mathbb{R} \to \tilde{M}$ minimizante y supongamos que*

$$\varlimsup_{b \to \infty, a \to -\infty} \|\zeta(b) - \zeta(a)\| / (b - a) < \infty \tag{4}$$

Entonces existe $c \in H^1(M, \mathbb{R})$ tal que toda medida límite de ζ minimiza A_c.

La hipótesis (4) de crecimiento puede ser entendida como una restricción sobre la cantidad de homologías representadas por restricciones finitas de ζ. Esta condición es necesaria dado el crecimiento superlineal de β como se puede apreciar en la figura:

$$S = \{h \in H_1(M, \mathbb{R}) \mid \exists \mu \in M_L, \rho(\mu) = h, A_c(\mu) = -\alpha(c)\}$$

Esta condición puede ser reformulada en términos de una métrica riemanniana sobre $\tilde{M}$, es decir

$$\varlimsup_{b \to \infty, a \to -\infty} dist(\zeta(b) - \zeta(a))/(b - a) < \infty$$

El siguiente lema es muy importante, ya que asegura que el tamaño de la homología entre los extremos de una curva controla las posibles homolog ías que aparecen en el interior, y que este control es uniforme.

Lema 16 *Para todo $K > 0$ existe $K' > K$ tal que si $\zeta : \mathbb{R} \to \tilde{M}$ es minimizante y $dist(\zeta(b) - \zeta(a))/(b - a) \leq K$ entonces para $a \leq a' < b' \leq b$ tenemos $dist(\zeta(b') - \zeta(a'))/(b' - a') \leq K'$.*

5 Conjuntos de Mather

Consideremos $c \in H^1(M,\mathbb{R})$. Denotamos por M_c el conjunto de las medidas minimizantes de $A_{c.}$ Claramente M_c es compacto, convexo y sus puntos extremos son medidas ergódicas.

Definimos el conjunto de Mather de cohomología c por

Definición 17 *Supp M_c es el conjunto de todos los puntos $x \in TM \times T^1$ tal que toda vecindad tiene medida positiva para alguna medida $\mu \in M_c$. Esta últilma medida puede ser tomada ergódica.*

Las propiedades de estos conjuntos son la principal motivación de esta introducción.

Proposición 18 *Para todo $c \in H^1(M,\mathbb{R})$, toda trayectoria del flujo de Euler-Lagrange contenida en SuppM_c es minimizante.*

Prueba. Sea γ una tal trayectoria y supongamos que $\gamma\mid_{[a,b]}$ no es minimizante. Podemos suponer que $\gamma(a)$ est á en el soporte de una medida ergódica μ. Podemos escoger intervalos $[a+n_i, b+n_i]$ de manera que $\gamma(a+n_i) \to \gamma(a)$ y podemos reemplazar los segmentos $\gamma\mid_{[a+n_i,b+n_i]}$, que no son minimizantes para i grande, por minimizantes $\zeta^*_{[a+n_i,b+n_i]}$. Una tal curva tiene menor acción pero igual vector de rotación.

Recíprocamente, Mañé en [Mñ1] prueba :

Proposición 19 *Si μ es ergódica y toda trayectoria en suppμ es minimizante, entonces μ es minimizante.*

Como recíproca de la definición y como generalización de la proposición 18, Mañé prueba:

Proposición 20 *Sea μ invariante. Si suppμ $\subseteq$SuppM_c entonces μ es minimizante para el problema $A_{c.}$*

Proposición 21 *SuppM_c es compacto.*

Prueba. De la definición es cerrado, luego basta probar que si $(\xi, t) \in$ SuppM_c entonces $\|\xi\| \leq K$ para algún $K > 0$. De la superlinealidad de β existe $K > 0$ tal que si $\mu \in M_c$ entonces $\|\rho(\mu)\| \leq K$. Suponiendo μ ergódica y tomando una curva genérica γ tenemos que $\|d\gamma\| \leq K'$ por el lema 16. Estas curvas son densas en SuppM_c.

Veremos a continuación el resultado principal sobre Supp$M_{c.}$ Sea $\pi : TM \times T^1 \to M \times T^1$ la proyección. Continuaremos denotando por π a $\pi\mid_{\mathrm{Supp}M_c}$.

Teorema 22 *π :Supp$M_c \to M \times T^1$ es inyectiva. Su inversa $\pi^{-1} : \pi($Supp$M_c) \to TM \times T^1$ es Lipschitz, es decir, existe $C > 0$ tal que*

$$dist(\pi^{-1}(x), \pi^{-1}(y)) \leq C dist(x, y)$$

La demostración está basada en el siguiente lema de Mather:

Lema 23 *Si $K > 0$ entonces existen $\varepsilon, \delta, \eta, C > 0$ tal que si $\alpha, \beta : [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \to M$ son soluciones de Euler-Lagrange con $\|d\alpha(t_0)\|, \|d\beta(t_0)\| \leq K$, $dist(\alpha(t_0), \beta(t_0)) \leq \delta$ y $dist(d\alpha(t_0), d\beta(t_0)) \geq Cdist(\alpha(t_0), \beta(t_0))$ entonces existen curvas C^1 $a, b : [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \to M$ de manera que $a(t_0 - \varepsilon) = \alpha(t_0 - \varepsilon), a(t_0 + \varepsilon) = \beta(t_0 + \varepsilon), b(t_0 - \varepsilon) = \beta(t_0 - \varepsilon), b(t_0 + \varepsilon) = \alpha(t_0 + \varepsilon)$ y*

$$A(\alpha) + A(\beta) - A(a) - A(b) \geq \eta dist(d\alpha(t_0), d\beta(t_0))^2$$

Prueba. (Idea) Gracias a las hipótesis de proximidad y de velocidad de las curvas, podemos escoger un atlas de M de manera que si α, β satisfacen las hipótesis, $\exists \varepsilon > 0$ tal que $\alpha \mid_{[t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon]}, \beta \mid_{[t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon]}$ están dentro una misma carta convexa.

Si bien los pasos técnicos de la prueba son considerablemente más complicados (ver [Ma1]), la prueba es escencialmente la siguiente:

Podemos suponer $L = \frac{\|g\|^2}{2}$ y euclidianamente tenemos que el lema es equivalente a una refinación de la desigualdad triangular del tipo

$$\begin{aligned} r_1 + \tilde{r}_2 - l_1 &\geq \eta\theta^2 \\ \tilde{r}_1 + r_2 - l_2 &\geq \eta\theta^2 \end{aligned}$$

Prueba. Del teorema 22. Como $\mathrm{Supp}M_c$ es compacto, existe $K > 0$ tal que si $(\xi, t_0) \in \mathrm{Supp}M_c$ entonces $\|\xi\| \leq K$. Sean $\varepsilon, \delta, \eta$ como en lema 23. Supongamos que $(\xi, t_0), (\nu, t_0) \in \mathrm{Supp}M_c$, que $dist(\pi\xi, \pi\nu) < \delta$ pero que $dist(\xi, \nu) > Cdist(\pi\xi, \pi\nu)$. Podemos escoger vecindades abiertas N_ξ, N_ν de ξ, ν en TM, y $\delta_1 > 0$ tal que si $\xi' \in N_\xi, \nu' \in N_\nu$ entonces $dist(\pi\xi', \pi\nu') < \delta$. $dist(\xi', \nu') > Cdist(\pi\xi', \pi\nu') + \delta_1$ y $\|\xi'\|, \|\nu'\| \leq K$.

Como $\xi \times \{t_0\}, \nu \times \{t_0\} \in \mathrm{Supp}M_c$ existen medidas ergódicas $\mu_0, \mu_1 \in M_c$ de manera que $N_\xi \times \{t_0\}, N_\nu \times \{t_0\}$ tienen medida positiva para μ_0, μ_1 respectivamente.

Sean $\xi' \in N_\xi, \nu' \in N_\nu$ genéricos para μ_0, μ_1 respectivamente. Del teorema ergódico de Birkhoff la órbita de cada uno de estos puntos retorna con frecuencia positiva a $N_\xi \times \{t_0\}, N_\nu \times \{t_0\}$ respectivamente, es decir, existen $\{n_i\}, \{n_i'\}$ secuencias de enteros de manera que $\lim \frac{n_i}{i}, \lim \frac{n_i'}{i}$ existen, son finitos,positivos y $\Phi_L((\xi', t_0), t_0 + n_i) \in N_\xi \times \{t_0\}, \Phi_L((\nu', t_0), t_0 + n_i') \in N_\nu \times \{t_0\}$. Sean $\alpha(t), \beta(t)$ las proyecciones de tales óbitas. Estas satisfacen la ecuación de Euler-Lagrange y más aún, satisfacen las hipótesis del lema 23, (notando que la diferencia de tiempos entre α y β es entero, y utilizando la periodicidad de L). Luego existen $a_i : [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \to M$, $b_i : [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \to M$ tales que $a_i(t_0 - \varepsilon) = \alpha(t_0 + n_i - \varepsilon), a_i(t_0 + \varepsilon) = \beta(t_0 + n_i' + \varepsilon), b_i(t_0 - \varepsilon) = \beta(t_0 + n_i' - \varepsilon), b_i(t_0 + \varepsilon) = \alpha(t_0 + n_i + \varepsilon)$ y

$$A(\alpha_i) + A(\beta_i) - A(a_i) - A(b_i) \geq \eta dist(d\alpha(t_0 + n_i), d\beta(t_0 + n_i))^2 \geq \eta\delta_1^2$$

con α_i, β_i las restricciones evidentes.

Por razones de simplicidad y transparencia de la prueba supondremos que α y β son órbitas periódicas con períodos dados por las frecuencias correspondientes, esto es, supondremos los retornos dados por el teorema de recurrencia de Poincaré cerca de $\pi\xi', \pi\nu'$ constantes. Construiremos curvas α^* y β^* de la siguiente manera(ajustando los tiempos de manera conveniente):

Reemplazamos 2 períodos de α por

Reemplazamos 2 períodos de β por

Del lema 23 tenemos que

$$A(\alpha) + A(\beta) - A(\alpha^*) - A(\beta^*) \geq D > 0 \tag{5}$$

Notemos ahora que la 1-cadena $\alpha + \beta - \alpha^* - \beta^*$ representa la homología nula, luego

$$\langle c, \alpha + \beta \rangle - \langle c, \alpha^* + \beta^* \rangle = 0 \tag{6}$$

(5)-(6) nos dan

$$A_c(\alpha) + A_c(\beta) - A_c(\alpha^*) - A_c(\beta^*) \geq D > 0$$

Luego, sin perder generalidad podemos suponer que $A_c(\alpha) - A_c(\alpha^*) \geq \tilde{D} > 0$. Recordando la suposició n de periodicidad de α, el caso no periódico nos obliga a tomar medidas límites, pero de todas maneras obtenemos μ^* satisfaciendo $A_c(\mu^*) < A_c(\mu_0)$, lo cual es una contradicción.

6 Punto de vista genérico

En [Mñ3] Mañé muestra que si consideramos propiedades gené ricas de los Lagrangeanos, obtenemos resultados mucho más interesantes para los conjuntos de Mather, luego para la dinámica.

Decimos que una cierta propiedad es cierta para Lagrangeanos genéricos si dado cualquier Lagrangeano L existe un conjunto residual $O \subset C^\infty(M \times T^1)$ de manera que la propiedad es verdadera para todo lagrangeano de la forma $L + \psi$ con $\psi \in O$. Esto es, basta perturbar con potenciales en A para lograr la propiedad.

El tipo de propiedades que preocupan a Mañé, es alguna suerte de recurrencia sobre los conjuntos de Mather. Más precisamente definimos:

Definición 24 $\mu \in M_L$ *se dice únicamente minimizante si existe* $c \in H^1(M, \mathbb{R})$ *tal que* $M_c(L) = \{\mu\}$.

De la proposición 20 obtenemos:

Corolario 25 *Las medidas únicamente minimizantes son únicamente ergódicas, es decir, si* $\nu \in M_L$ *y* $supp\nu \subset supp\mu$ *entonces* $\nu = \mu$.

Sabemos que el soporte de tales medidas es un conjunto minimal.

La principal conjetura de Mañé, planteada en forma de problema es:

Problema 26 *¿Es cierto que para lagrangeanos genéricos L, existe un conjunto abierto y denso $\Re \subset H^1(M, \mathbb{R})$ tal que $M_c(L)$ consiste en una medida únicamente minimizante soportada en una órbita periódica?*

Para ejemplificar las técnicas utilizadas y el tipo de resultados, mostraremos el siguiente

Teorema 27 *Sea L un lagrangeano. Para cada $c \in H^1(M, \mathbb{R})$ existe un subconjunto residual $O(c) \subset C^\infty(M \times T^1)$ de manera que si $\psi \in O(c)$ entonces $\#M_c(L + \psi) = 1$.*

6.1 Un poco de notación y demostración del teorema

Consideramos en lo que sigue que las definiciones y espacios involucrados son como en la sección 3.6 del punto de vista de Mañé.

- a) F será el subespacio de $\left(C_l^0\right)^*$ generado por las probabilidades en $\mu \in \bar{C}$ con
$$\int L d\mu < \infty$$
- b) $E = C^\infty(M \times T^1)$.

E y F son espacios reales localmente convexos.

- c) $L_0 : F \to \mathbb{R}$ es la función lineal
$$L_0(\mu) = \int (L - c) d\mu$$
para $\mu \in \bar{C}$.
- d) Definimos $\varphi : E \to F^*$ por $\varphi(\psi) \in F^*$ la restricción a F de la función lineal $x \to \langle x, \psi \rangle$.
- e) $K = \bar{C}$ es un subconjunto convexo metrizable y separable.

Se satisfacen las siguientes propiedades:

- f) Para todo par $x, y \in K$, $x \neq y$ existe $\psi \in E$ tal que $\langle \varphi(\psi), x \rangle \neq \langle \varphi(\psi), y \rangle$ (para dos medidas distintas existe una función tal que su integral con respecto a cada una de ellas es distinta).
- g) Para toda $\psi \in E$ y $C \in \mathbb{R}$ el conjunto
$$\{x \in K \mid L_0 x + \langle \varphi(\psi), x \rangle \leq C\}$$
es compacto (superlinealidad de L).

Para $\psi \in E$ denotaremos finalmente

$$m(\psi) = \min_K L_0 x + \langle \varphi(\psi), x \rangle$$

$$M(\psi) = \{x \in K \mid L_0 x + \langle \varphi(\psi), x \rangle = m(\psi)\}$$

Por g) $m(\psi)$ existe.

La siguiente proposición, que es válida en condiciones más generales de (E, F, L_0, φ, K), implica el teorema, luego de observar que

$$M_c(L + \psi) = M(\psi)$$

Proposición 28 *Existe un subconjunto residual $O \subset E$ tal que si $\psi \in O$ entonces $\#M(\psi) = 1$.*

Para la prueba de esta proposición se requieren dos lemas de convexidad. Dado un subconjunto convexo $K_0 \subset F$ y $\psi \in E$ denotemos

$$M_0(\psi) = \left\{ x \in K_0 \mid \langle \varphi(\psi), x \rangle = \min_{K_0} \varphi(\psi) \right\}$$

Cuando $M_0(\psi) \neq \emptyset$ escribimos $m_0(\psi) = \min \varphi(\psi) \backslash K_0.$

Lema 29 *(de perturbación) Sea $K_0 \subset F$ compacto, convexo y metrizable. Si x_0 es un punto extremo de K_0, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\psi \in E$ tal que*

$$\begin{aligned} diam M_0(\psi) &< \varepsilon \\ d(x_0, M_0(\psi)) &< \varepsilon \end{aligned}$$

Prueba. Este lema para $F = \mathbb{R}^n$ es escencialmente el teorema de *Strazewicz* (ver [Rock]). Debemos entonces encontrar una función lineal $T : F \to \mathbb{R}^n$ con la propiedad que el tamaño de $T^{-1}(S)$ sea pequeño para S pequeño. Procedemos de la siguiente manera:

Para cada par $(x, y) \in K_0 \times K_0 \backslash \Delta$ existe $\psi \in E$, U vecindad de (x, y) tal que si $(x', y') \in U$ entonces $\langle \varphi(\psi), x' \rangle \neq \langle \varphi(\psi), y' \rangle$. Como K_0 es metrizable separable existe una secuencia (ψ_n, U_n) recubriendo $K_0 \times K_0 \backslash \Delta$ de manera que si $(x, y) \in K_0 \times K_0 \backslash \Delta$ existe n tal que $\langle \varphi(\psi_n), x' - y' \rangle \neq 0$.

Definimos $T_n : F \to \mathbb{R}^n$ por $T_n(x) = (\varphi(\psi_i))_{i=1\ldots n}$.

Esta es la función lineal buscada. Más precisamente, existen $\delta > 0, n > 0$ tales que

$$S \subset \mathbb{R}^n, diam(S) \leq \delta \quad \Longrightarrow \quad diam T_n^{-1}(S) \leq \varepsilon \tag{7}$$

lo cual puede ser probado mediante un simple argumento de contradicción. Esta última construcción puede ser entendida de la siguiente manera: El conjunto compacto $K_0 \times K_0 \backslash \Delta(\varepsilon)$ es recubierto por un número finito de U_n, luego para puntos que están a distancia mayor que ε existe alguna ψ_n que detecta la diferencia.

Observemos que $T_n(x_0)$ es un punto extremo del convexo $T_n(K_0)$, luego Strazewicz implica que existe $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ lineal, que alcanza el mínimo sobre $T_n(K_0)$ en un único punto p que satisface

$$d(p, T_n(x_0)) < \delta$$

luego (7) implica que

$$d(T_n^{-1}(p), x_0) < \varepsilon$$

Solo nos basta tirar f hacia F vía T_n :

$$f(x_1, ..., x_n) = \sum_i \lambda_i x_i$$

definimos entonces $\psi = \sum_i \lambda_i \psi_i$, y tenemos que $M_0(\psi) = T_n^{-1}(p)$ satisfaciendo lo deseado.

Lema 30 *Si $\psi_0 \in E$ y x_0 es un punto extremo de $M(\psi_0)$, entonces para toda vecindad U de ψ_0 y todo $\varepsilon > 0$ existe $\psi_1 \in U$ tal que*

$$\begin{aligned} diam M(\psi_1) &< \varepsilon \\ d(x_0, M(\psi_1)) &< \varepsilon \end{aligned}$$

Prueba. Evidentemente la idea es aplicar el lema anterior a $K_0 = M(\psi_0)$, y usar $\psi_1 = \psi_0 + \psi$. Para obtener $\psi_1 \in U$ lo haremos para $\psi_\lambda = \psi_0 + \lambda\psi$ con λ pequeño. Más formalmente:

Sabemos que $\varphi(\psi)$ alcanza su mínimo m en $S = M_0(\psi)$, y que $d(x_{0,}S) < \varepsilon$. Definimos entonces

$$\begin{aligned} m_0 &= m(\psi_0) \\ f_0 &= L_0 + \varphi(\psi_0) - m_0 \\ f_1 &= \varphi(\psi) - m \\ f_\lambda &= f_0 + \lambda f_1 \\ m_\lambda &= \min(f_\lambda \backslash K) \\ M(\lambda) &= \{x \in K \mid f_\lambda(x) = m_\lambda\} \end{aligned}$$

De las definiciones tenemos que

$$x \in S \Leftrightarrow f_\lambda(x) = 0$$

$$m_\lambda \leq 0$$

Afirmamos que

$$\lim_{\lambda \to 0} d_H(M(\lambda), \{x_0\}) \leq \varepsilon \tag{8}$$

donde d_H se refiere a la distancia de Haussdorf.

Supongamos que (8) no es cierto, es decir, que existen secuencias $\lambda_n \to 0, x_n \in M(\lambda_n)$ con

$$\inf_n d(x_n, x_0) > \varepsilon \tag{9}$$

Probemos que $\{x_n\}$ tiene un punto de acumulación. Por g) es suficiente mostrar que $f_0(x_n) + f_1(x_n) \leq 0$ para todo n.

Como $0 \geq m_{\lambda_n} = f_0(x_n) + \lambda_n f_1(x_n) \geq \lambda_n f_1(x_n)$, tenemos que

$$f_1(x_n) \leq 0 \tag{10}$$

luego

$$f_0(x_n) + f_1(x_n) = m_{\lambda_n} + (1 - \lambda_n) f_1(x_n) \leq (1 - \lambda_n) f_1(x_n) \leq 0$$

Existe entonces $\lim x_n = \bar{x} \in K$ (pasando a una subsecuencia y notándola x_n).

Probemos que $\bar{x} \in S$:

i) $f_0(\bar{x}) = \lim_{n\to\infty}(m_{\lambda_n} - \lambda_n f_1(x_n)) = 0$ ya que $\lim m_{\lambda_n} = \min f_0 \backslash K = 0$ por definición, de donde concluimos que $\bar{x} \in K_0$.

ii) De (10) se tiene que $f_1(\bar{x}) \leq 0$. De la definición de f_1 y de S, $f_1 \backslash_{K_0} \geq 0$ y la igualdad se tiene solo en S, luego $\bar{x} \in S$.

Del lema 29 obtenemos

$$d(x, x_0) < \varepsilon$$

lo que en vista de (9) contradice la construcción de $\bar{x}$.

Para terminar basta notar que $M(\lambda) = M(\psi_0 + \lambda\psi)$

Prueba. De la proposición 28. Definimos $O_\varepsilon = \{\psi \mid diam M(\psi) < \varepsilon\}$, que es abierto y por el lema anterior denso.

$$O = \bigcap_{n=1}^{\infty} O_{1/n}$$

Satisface la propiedad pedida.

References

[BaMi] Ball J., Mizel V.,One dimensional variational problems whose minimizers do not satisfy the Euler Lagrange equation, *Arch. Ration. Mech. Anal.* **90**(1985),325-388.

[Ba1] Bangert V.,Minimal geodesics, *Ergodic Theory and Dyn. Syst.***10**(1990),263-286.

[Ba2] Bangert V.,Minimal Foliations and Laminations, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Zürich*(1994),453-464.

[Ba3] Bangert V.,Minimal measures and minimizing closed normal one-currents, *GAFA* **9**(1999),413-427.

[Ba4] Bangert V.,Minimizing currents and the stable norm in codimension one, *C.R. Acad. Sci. Paris* **333**(2001),1095-1100.

[CDI] Contreras G., Delgado J., Iturriaga R.,The dynamics of globally minimizing orbits II, *Boletim da Sociedade Brasileira de Matematica* **28,N2**(1997),155-196.

[Dias] Dias Carneiro M.,On minimizing measures of the action of autonomous Lagrangians, *Nonlinearity* **8**(1995),1077-1085.

[Her] Herman M.,Existence et non existence de tores invariants par des diffeomorphismes symplectiques, Preprint(1988).

[Ma1] Mather J.,Action minimizing invariant measures for positive definite Lagrangian systems, *Math. Z* **207**(1991),169-207.

[Ma2] Mather J.,Variational construction of connecting orbits, *Annales de l'institut Fourier,tome* **43,n5**(1993),1349,1386.

[MaFo] Mather J.,G. Forni,Action minimizing orbits in Hamiltonian systems, *Springer Lect. Notes in Math.* n^o**1589**,91-186.

[Mñ1] Mañé R.,On the minimizing measures of Lagrangian Dynamical Systems, *Nonlinearity* **5**(1992),623-638.

[Mñ2] Mañé R.,Ergodic Variational Metods:New Techniques and New Problems, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Zürich*(1994),1216-1220.

[Mñ3] Mañé R.,Generic properties and problems of minimizing measures of Lagrangian Systems, *Nonlinearity* **9**(1996),273-310.

[Mñ4] Mañé R.,Lagrangian flows: The dynamics of globally minimizing orbits, *Boletim da Sociedade Brasileira de Matematica* **28,N2**(1997),141-153.

[Mos] Moser J.,Monotone Twist Mappings and the Calculus of Variations, *Ergodic Theory and Dyn. Syst.* **6**(1986),401-413.

[Rock] Rockafellar T., Convex Analysis, *Princeton University Press*(1970).