MOVIMIENTO DE PLANETAS
Y OTRAS DINÁMICAS
DE BAJA DIMENSIÓN

Mario Ponce

Facultad de Matemáticas PUC-Chile

Notas del mini curso dictado en la

XXXVI Semana de la Matemática

7-8-9 de Octubre

Valparaíso-Chile

Índice general

Introducción

El movimiento de los planetas, o más generalmente de los cuerpos llamados celestes, ha sido uno de los focos que han guiado tanto a los navegantes como a los investigadores en Física y Matemática durante siglos. No exageramos al afirmar que la comprensión del comportamiento de este sistema dinámico ha sido el motor de varias de las mayores revoluciones en la ciencia y la filosofía a lo largo de toda la existencia de la humanidad. No haremos una cuenta completa de estos eventos, pero no podemos dejar de citar varios hechos que constituyen hitos en la comprensión del universo, y a la larga, en la visión que los humanos tenemos de nosotros mismos.

En los albores de las civilizaciones las estrellas fueron identificadas con objetos espirituales ligados a las religiones imperantes. Las estrellas estaban localizadas en un cielo ajeno a la Tierra, ubicado arriba de la Tierra para ser más precisos. Los movimientos de estos puntos luminosos fueron objeto de varios estudios por parte de casi todas las civilizaciones. Este se hizo fundamental con el advenimiento de la navegación. Uno de los mayores quiebres y avances en la teoría se produjo con la introducción por Ptolomeo de un modelo geométrico del sistema planetario que incluía a la Tierra como uno más de estos cuerpos celestes. Sin embargo, dispuso en su modelo a la Tierra como el centro del sistema, obedeciendo a la Teoría Geocéntrica, idea formulada por Aristóteles varios siglos antes. A pesar de su inexactitud y desapego a la realidad, el modelo geocéntrico calculado por Ptolomeo permitió predecir muchos fenómenos astronómicos con una elevada precisión.

Este modelo geocéntrico perduró hasta bien entrado el siglo XVI, momento en que Copérnico defiende con fuerza la teoría del Heliocentrismo, en la que tanto la Tierra como los otros cuerpos celestes giran en torno al Sol. Esta teoría fue validada por las observaciones de Galileo, quien apoyado en el uso del recién inventado telescopio, puso en evidencia varias contradicciones empíricas emanadas de la aceptación del modelo geocéntrico. Recordemos que de cierta manera, la visión cristiana del hombre como hijo directo de Dios y por lo tanto centro del universo se veía seriamente atacada al quitar a la Tierra del centro del sistema. Varias teorías con características mixtas coexistieron durante algunos años hasta que Johannes Kepler postuló las Leyes que llevan su nombre y que modelan las órbitas de los planetas en elipses periódicas teniendo al Sol en uno de sus focos. Como era usual en la astronomía de la época, el modelo fue validado al servir como predictor preciso para el tránsito de Venus. La teoría heliocéntrica y las leyes de Kepler son aceptadas al menos desde la comunidad científica, con la aceptación de las leyes de la mecánica formuladas por Newton en 1687. El modelo resultante al aplicar las leyes de Newton a un sistema con características similares a nuestro sistema solar es exactamente el modelo Kepleriano.

La mecánica clásica Newtoniana permite escribir ecuaciones diferenciales que son satisfechas por el movimiento del sistema. De esta manera, conocer el comportamiento del sistema se reduce a poder calcular las funciones que satisfacen estas ecuaciones. Si bien el esquema es simple, la ejecución está lejos de serlo. De hecho, hasta fines del siglo XIX, físicos y matemáticos intentaron encontrar estas funciones (o integrar el sistema), para modelos simples. Estos intentos se agrupan bajo el nombre del *problema de los n cuerpos*. El matemático Henri Poincaré demostró que los intentos por hallar tales funciones son vanos ya en el caso de 3 cuerpos. Así, Poincaré propone un estudio más bien cualitativo de las órbitas, fundando de paso una nueva área en la matemática, los Sistemas Dinámicos.

Es interesante hacer notar que el inicio del siglo XX, con las teorías particulares y generales de la relatividad y la nueva gravitación que de ellas se desprende, aleja a la gravitación Kepleriana de los estudios precisos del movimiento de los planetas y de la astronimía contemporánea. Efectivamente, la calidad de los telescopios de la época ya permitía darse cuenta que varios fenómenos astronómicos no tenían una explicación satisfactoria en la mecánica Newtoniana. La gravitación relativista se hizo cargo de estos fenómenos y parece representar un modelo mucho más preciso de las leyes que gobiernan la naturaleza de los movimientos planetarios.

Sin embargo, el problema matemático que presenta el modelo Kepleriano y las ecuaciones de Newton asociadas continúan siendo una fuente fértil para el desarrollo de investigaciones de punta en matemática y constituyen aún grandes desafíos intelectuales. Además, varios de los fenómenos que han aparecido en el estudio moderno del problema de los n cuerpos aparecen también en otras áreas tanto de los sistemas dinámicos cómo de la matemática en general.

Estas notas corresponden a un mini curso dictado con ocasión de la XXX-VI Semana de la Matemática que se realiza anualmente en el Instituto de Matemática de la Pontificia Universidad de Católica de Valparaíso. Ellas contienen los principales temas tratados en el curso, aunque no constituyen de ninguna manera un texto formal y completo de éstos, y deben entenderse como una introducción informal. Invitamos al lector interesado a consultar la amplia bibliografía dedicada a los temas de gravitación Newtoniana y teoría de pequeños denominadores en sistemas dinámicos. Muchos detalles técnicos han sido dejados como ejercicios para el lector. El desarrollo de los ejercicios no es escencial para la comprensión del texto, no así las conclusiones y afirmaciones contenidas en ellos.

Agradezco a la organización de la XXXVI Semana de la Matemática por la invitación a dictar este curso y por el entusiasta apoyo brindado para que estas notas fuesen escritas. La realización de estas notas fue posible gracias al apoyo del proyecto FONDECYT 3080055.

Capítulo 1

El movimiento de un planeta en torno al Sol

En este capítulo introductorio repasaremos una parte muy bien conocida de la mecánica clásica y que recibe el nombre de *fuerzas centrales.* Seguiremos de cerca el Capítulo 1 de [Pol76]. Nos concentraremos en la gravitación Newtoniana. Es decir, supondremos que un cuerpo (puntual) móvil es afectado por un campo de fuerzas dispuestas radialmente desde un cierto punto fijo central y describiremos los posibles tipos de movimiento del cuerpo móvil obedeciendo a las ecuaciones de Newton. Este sistema modela la situación del movimiento de un planeta muy pequeño que es afectado por un Sol muy grande siguiendo los principios gravitacionales formulados por Newton y Kepler. En nuestro caso, supondremos que el Sol está fijo y es el centro del campo de fuerzas centrales gravitacionales. Así, la posición del Sol será fija en el origen de un sistema de coordenadas en el espacio $\mathbb{R}^3$. La posición del planeta móvil será representada por el vector $\vec{r}$ y su velocidad por el vector $\vec{v}$, ambos dependiendo de la variable temporal t. El movimiento de $\vec{r}$ será gobernado por la segunda ley de Newton:

$$m\ddot{\vec{r}} = -mf(|\vec{r}|)\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}, \tag{1.1}$$

en donde m es la masa del planeta y $f(|\vec{r}|)$ es la magnitud escalar de la fuerza ejercida por el Sol a una distancia $|\vec{r}|$. El factor $-\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$ da cuenta de la dirección radial de esta fuerza. Las derivadas con respecto al tiempo t se denotan como es usual en física por un punto sobre la los vectores. Omitiremos a partir de ahora las flechas sobre los vectores, siempre y cuando no se produzcan confusiones.

En el caso de la gravitación Newtoniana la fuerza central viene dada por una cantidad proporcional al inverso del cuadrado de la distancia

$$f(|r|) = \frac{GM}{|r|^2},$$

en donde G es una constante universal y M es la masa del Sol. Ajustando las unidades, supondremos simplemente que $f(|r|) = \frac{1}{|r|^2}$. De esta manera la ecuación de Newton (1.1) se puede escribir como el siguiente sistema diferencial ordinario de primer orden

$$\dot{r} = v \quad , \quad \dot{v} = -\frac{r}{|r|^3}. \tag{1.2}$$

1.1. Conservación del momento angular, Segunda Ley de Kepler

El producto vectorial (o cruz) $r \times v$ representa un vector que es ortogonal al plano generado por r y v. Estudiemos cómo cambia este vector con el tiempo:

$$\frac{d}{dt}(r \times v) = \dot{r} \times v + r \times \dot{v} = v \times v + r \times \frac{-r}{|r|^3} = 0$$

pues el producto vectorial de un vector consigo mismo es nulo. Así, vemos que el vector $r \times v$ permanece constante con el movimiento, digamos

$$r \times v = c. \tag{1.3}$$

Podemos ya concluir dos cosas acerca del movimiento:

i) El plano generado por r y v es una constante de movimiento y luego el movimiento mismo se produce sobre este único plano.

ii) El largo del vector $c = r \times v$ es constante. La cantidad $m|c|$ se conoce como *momento angular* del planeta y es conservada a lo largo del movimiento.

Introduzcamos un sistema de coordenadas polares (ρ, θ) sobre el plano del movimiento y completemos este sistema hasta un sistema de coordenadas de todo el plano de manera tal que

$$r = (\rho \cos\theta, \rho \operatorname{sen}\theta, 0) \quad , \quad c = (0, 0, |c|)$$

con $\rho = |r|$.

Ejercicio 1.1 *Muestre que en estas coordenadas la ecuación (1.3) implica*

$$\rho^2 \dot{\theta} = |c|. \tag{1.4}$$

Consideremos el segmento de recta l que une el origen con el punto r. Este segmento se mueve con el tiempo y "barre" una cierta porción de área sobre el plano del movimiento.

Ejercicio 1.2 *Si denotamos por A el área barrida, muestre que*

$$\dot{A} = \rho^2 \dot{\theta} = |c|.$$

El resultado del ejercicio anterior se conoce como la *Segunda Ley de Kepler* y es enunciado comúnmente diciendo que la línea que une el Sol con el planeta barre áreas iguales durante intervalos de tiempo iguales. Nosotros preferiremos la versión diferencial de la ley que asegura que la velocidad de barrido de áreas es constante.

1.2. Descripción de la órbita, Primera Ley de Kepler

Además de c, existe otro importante vector que permanece constante con el movimiento del planeta. Para hallarlo, nos será útil recordar algunas propiedades clásicas de los productos vectoriales y sus derivadas.

Ejercicio 1.3 *Sea u un vector que depende diferenciablemente de una variable real t. Denotamos $a = |u|$ su largo.*

i) Muestre que

$$a\dot{a} = u \cdot \dot{u}.$$

ii) Si $a \neq 0$ deduzca que

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{u}{a}\right) = \frac{a\dot{u} - \dot{a}u}{a^2}.$$

iii) Utilice (i) para mostrar que

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{u}{a}\right) = \frac{(u \cdot u)\dot{u} - (u \cdot \dot{u})u}{a^3}.$$

iv) *Usando la igualdad*

$$(x \times y) \times z = (x \cdot z)y - (y \cdot z)x$$

muestre finalmente que

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{u}{a}\right) = \frac{(u \times \dot{u}) \times u}{a^3}. \tag{1.5}$$

Usando (1.5) con $u = r$ y las relaciones que definen v y c tenemos

$$\frac{d}{dt}\frac{r}{|r|} = \frac{c \times r}{|r|^3} = \dot{v} \times c.$$

Integrando a ambos extremos obtenemos

$$\frac{r}{|r|} + e = v \times c, \tag{1.6}$$

en donde el vector e es una constante de integración, y luego de movimiento.

Ejercicio 1.4 *Muestre que $e \cdot c = 0$ y deduzca que e pertenece al plano de movimiento.*

El vector e es llamado *eje de eccentricidad*. Si hacemos producto punto de ambos lados de la igualdad (1.6) con r obtenemos

$$\rho + e \cdot r = (v \times c) \cdot r = |c|^2. \tag{1.7}$$

De aquí vemos inmediatamente que si $e = 0$ entonces $\rho = |c|^2$ y el movimiento resulta ser circular. La Segunda Ley de Kepler asegura además que ocurre a velocidad constante. Consideremos ahora el caso $e \neq 0$: En el plano de movimiento dibujamos el vector e. Sea ω el ángulo fijo entre e y el eje x. Llamamos $\tau = \theta - \omega$ al ángulo de r medido en referencia al vector e. En estas nuevas coordenadas tenemos $e \cdot r = |e|\rho \cos\tau$ y (1.7) queda

$$\rho + \rho|e|\cos\tau = |c|^2$$

lo que simplificado nos da

$$\rho = \frac{|c|^2}{1 + |e|\cos\tau}. \tag{1.8}$$

Esta ecuación describe la órbita del planeta. Si miramos con atención, ésta corresponde a una cónica escrita en coordenadas polares (ρ, τ), cuya eccentricidad es $|e|$, y uno de sus focos está en el origen. Este es el contenido de la *Primera Ley de Kepler*. Recordemos que

Proposición 1.5 *Para una cónica escrita como en (1.8) se tiene*

i) *Si* $|e| = 1$ *la cónica corresponde a una parábola.*

ii) *Si* $|e| > 1$ *la cónica corresponde a una hipérbola.*

iii) *Si* $|e| < 1$ *la cónica corresponde a una elipse* $\blacksquare$

El valor de $|e|$ está intimamente relacionado con la energía del sistema. Esta relación no será profundizada en estas notas e invitamos al lector a consultar [Pol76] para obtener precisiones a ese respecto. De todas maneras, nos contentaremos con saber que en el caso que nos convoca, acerca del movimiento de planetas como el nuestro, la eccentricidad es menor que 1 (correspondiendo a un caso de energía negativa). Podemos finalizar entonces este primer Capítulo enunciando un resultado que nos será suficiente:

Teorema 1.6 *El movimiento de un planeta en torno al Sol, que obedece las leyes de Newton satisface:*

i) *Su órbita es plana. Mejor aún, describe una elipse que tiene al Sol en uno de sus focos.*

ii) *La velocidad con que se barren las áreas es constante* $\blacksquare$

Capítulo 2

Problema de n cuerpos

En este Capítulo introduciremos el problema asociado al movimiento de planetas desde el punto de vista de los Sistemas Dinámicos. Estudiaremos el sistema dinámico modelo que resulta de introducir una simplificación a las ecuaciones de movimiento y veremos que la interpretación del problema real como una situación perturbada de la modelo nos permite obtener conclusiones importantes.

2.1. El sistema dinámico asociado al movimiento de un planeta

Como vimos al final del Capítulo anterior, la posición de un planeta que gira en torno al Sol fijo está determinada por un punto sobre la elipse correspondiente. Este punto se mueve con el tiempo obedeciendo a la Segunda Ley de Kepler, es decir, la velocidad del barrido de las áreas es constante. Marquemos un punto sobre la elipse, digamos la posición en el instante $t = 0$, $r(0)$. Denotemos por $l(t)$ al segmento que une el Sol con la posición $r(t)$. El área (barrida) $A(t)$, delimitada por el arco de elipse $r(0)r(t)$ y los segmentos $l(0)$ y $l(t)$, está en biyección (diferenciable) con la posición $r(t)$.

En otras palabras, si somos capaces de conocer la cantidad de área barrida seremos capaces de conocer la posición del planeta e inversamente. De ahora en adelante, estaremos más interesados en leer la posición del planeta conociendo el área barrida, o mejor aún, la proporción de área barrida con respecto al total del área de la elipse en un insyante de tiempo t. Usaremos esta cantidad como una nueva coordenada, y la denotaremos por $x = x(t)$. En esta nueva coordenada el movimiento se realiza sobre un círculo de largo 1 (representando una vuelta a la elipse, o sea, al total del área). Como la velocidad, en términos de esta nueva coordenada, es constante, el movimiento viene dado explícitamente por

$$x(t) = \frac{t}{T},$$

en donde T es el período de la órbita y la posición $x(t)$ debe ser entendida como un punto en el intervalo $[0, 1]$ cuyos extremos han sido identificados (es decir, en el círculo). En un lenguaje más formal, diremos que el movimiento del planeta obedece al de un flujo constante sobre el círculo $\mathbb{T}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. La velocidad está determinada por la cantidad $\frac{1}{T}$, que llamaremos *frecuencia*.

2.2. El sistema dinámico asociado a varios planetas

Supongamos ahora que hay $n \geq 2$ planetas que son movidos siguiendo las leyes de Gravitación de Newton revisadas en el Capítulo anterior. La ecuación de fuerzas sobre uno de estos planetas, digamos el i-ésimo, tiene la forma

$$m_i \ddot{r}_i = -\frac{GMm_i r_i}{|r_i|^3} - \sum_{j \neq i} \frac{Gm_i m_j (r_i - r_j)}{|r_i - r_j|^3}$$

en donde m_j representa la masa del j-ésimo planeta. La resolución explícita de estas ecuaciones diferenciales es en muchos casos imposible dada la presencia de los términos en la sumatoria, y que representan las fuerzas de atracción mutua de los planetas entre sí. De todas maneras, las masas de los planetas que nos interesan son muy pequeñas en comparación con la masa del Sol. Entonces, los términos en la sumatoria son muy pequeños en comparación con el término asociado a la atracción gravitacional del Sol. Imaginemos que estas fuerzas de interacción mutua entre planetas son tan pequeñas que nos permitiremos asumir como nulas. De esta manera la ecuación de movimiento de cada planeta sería

$$\ddot{r}_i = -\frac{r_i}{|r_i|^3}.$$

Esta es la ecuación de movimiento de un solo planeta y la discusión del Capítulo 1 nos permite describir completamente el movimiento. Decimos entonces que, en este caso idealizado, cada planeta se mueve en torno al Sol siguiendo una elipse plana, teniendo al Sol en uno de sus focos obedeciendo a las Leyes de Kepler. En términos de las coordenadas de área introducidas en la Sección previa, podemos decir que cada planeta se mueve en un círculo según un flujo de velocidad constante

$$x_i(t) = \frac{t}{T_i}$$

en donde T_i es le período respectivo. Para describir el sistema dinámico que representa al conjunto de los planetas, definiremos el *toro de dimensión* n como el producto

$$\mathbb{T}^n = \underbrace{\mathbb{T}^1 \times \mathbb{T}^1 \times \cdots \times \mathbb{T}^1}_{n \ veces}.$$

De esta manera, un punto $\vec{x} \in \mathbb{T}^n$ representa al mismo tiempo un punto en el primer círculo, otro en el segundo, ... etc. Si los círculos del producto de arriba son aquellos que representan las posibles posiciones de cada planeta, diremos que conocer la posición de **todos** los planetas en un cierto instante de tiempo equivale a conocer la posición de un único punto $\vec{x}$ en $\mathbb{T}^n$. En esta nueva coordenada el movimiento de todo el sistema (idealizado) viene dado por el flujo

$$\vec{x}(t) = t\vec{\Omega} \tag{2.1}$$

en donde $\vec{\Omega}$ es el vector de frecuencias

$$\vec{\Omega} = \left(\frac{1}{T_1}, \frac{1}{T_2}, \dots, \frac{1}{T_n} \right).$$

2.3. Flujo lineal en el toro $\mathbb{T}^n$

Una dinámica como la descrita en (2.1) recibe el nombre de *flujo lineal sobre el toro*. Este flujo está completamente determinado por el vector de frecuencias $\vec{\Omega}$. En esta sección estudiaremos con atención esta clase de sistema dinámico. Desarrollaremos el caso $n = 2$, bien que el caso general sigue las mismas líneas de razonamiento.

Pensaremos al toro $\mathbb{T}^2$ como el cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$ que tiene sus lados paralelos identificados. De esta manera, un punto que atraviesa el lado superior aparece instantáneamente por el inferior (pensemos en la pantalla de un Pac-Man). El movimiento de un punto inicial (x_0, y_0) vendrá dado por el flujo lineal

$$\phi_t(x_0, y_0) = (x_0 + \omega_1 t, y_0 + \omega_2 t)$$

en donde (ω_1, ω_2) es el vector de frecuencias. Notemos que el movimiento se produce sobre la línea

$$\mathcal{L} = (x_0, y_0) + t(\omega_1, \omega_2)$$

cuya pendiente es ω_2/ω_1. Esta línea se "enrrolla" en el toro (al atravesar los lados) y se distribuye sobre éste de dos maneras muy diferentes y precisas:

Proposición 2.1

i) *Si $\omega_2/\omega_1 \in \mathbb{Q}$ entonces la línea $\mathcal{L}$ es periódica. Es decir, existe $t^* \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ de manera que*

$$(x_0, y_0) + t^*(\omega_1, \omega_2) = (x_0, y_0)$$

sobre el toro $\mathbb{T}^2$. En otras palabras, $\mathcal{L}$ se encuentra consigo misma.

ii) *Si $\omega_2/\omega_1 \notin \mathbb{Q}$ entonces la línea $\mathcal{L}$ llena densamente la superficie del toro. En otras palabras, dado cualquier disco sobre el toro (tan pequeño como queramos), la línea $\mathcal{L}$ atraviesa este disco.*

Demostración.

i) Será conveniente imaginar el toro $\mathbb{T}^2$ como el plano $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ en donde hemos identificado los pares de puntos cuyas coordenadas difieren en un par de enteros. Escribamos $\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{p}{q}$ con $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ y primos entre sí. Poniendo $t^* = \frac{p}{\omega_1}$ tenemos que

$$(x_0, y_0) + t^*(\omega_1, \omega_2) = (x_0, y_0) + (p, q)$$

que es igual a (x_0, y_0) en $\mathbb{T}^2$ pues sus coordenadas difieren en un par de enteros.

ii) Para estudiar este caso haremos uso de un argumento clásico en el estudio de flujos: tomaremos una sección transversal al flujo y estudiaremos la dinámica discreta inducida por el primer retorno a la sección. Seamos precisos: estudiemos el movimiento del punto $(0, 0)$ pues el movimiento de un punto cualquiera (x_0, y_0) se obtiene luego de una simple traslación. Marquemos las posiciones consecutivas de la órbita de $(0, 0)$ cuando pasa sobre el círculo $\mathbb{T}^1 = [0, 1] \times \{0\}$. Estas pasadas ocurren a intervalos de tiempo iguales y de largo $\frac{1}{\omega_2}$. Luego, estamos interesados en estudiar la primera coordenada de la dinámica

$$(0,0) \mapsto \left(\frac{1}{\omega_2}\omega_1, 1\right) \mapsto \left(2\frac{\omega_1}{\omega_2}, 2\right) \mapsto \left(3\frac{\omega_1}{\omega_2}, 3\right) \mapsto \dots$$

Estos primeros retornos se reducen así a estudiar la distribución de los números $\left\{n\frac{\omega_1}{\omega_2}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ sobre el círculo $\mathbb{T}^1$.

Ejercicio 2.2 *Muestre que si α es un número irracional entonces los números $\{n\alpha\}_{n\in\mathbb{N}}$ se distribuyen densamente sobre el círculo $\mathbb{T}^1$.*

Del ejercicio anterior concluímos que la línea $\mathcal{L}$ corta al círculo $\mathbb{T}^1$ en un conjunto denso. Si movemos esta sección transversal con el flujo lineal vemos que $\mathcal{L}$ llena densamente al toro $\mathbb{T}^2$ ■

Para el caso general de un toro $\mathbb{T}^n$, siguiendo razonamientos análogos podemos probar:

Proposición 2.3 *Sea $\Phi(t) = \vec{x} + t\vec{\Omega}$ un flujo lineal sobre el toro $\mathbb{T}^n$, con vector de frecuencias $\vec{\Omega} = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$. El flujo lineal llena densamente al toro $\mathbb{T}^n$ si y solamente si las frecuencias $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ son racionalmente independientes, es decir, si para toda lista de enteros $k_1, k_2, \dots, k_n$ tal que*

$$k_1\omega_1 + k_2\omega_2 + \cdots + k_n\omega_n = 0$$

se tiene necesariamente $k_1 = k_2 = \cdots = k_n$ ■

En la situación de la Proposición anterior diremos que el flujo lineal es minimal. Notemos que en un cierto sentido, el flujo minimal es indescomponible y que la órbita de cada punto se ve como el toro $\mathbb{T}^n$ completo.

Volvamos al problema de los n planetas, en que hemos supuesto idealizadamente que las fuerzas de interacción entre los planetas son nulas. Las frecuencias son $1/T_i$. La Tercera Ley de Kepler relaciona el período T_i con el tamaño de la elipse asociada, y luego con la energía del planeta. Si suponemos que el nivel de energía del sistema es tal que el vector de frecuencias es racionalmente independiente, podremos decir que el movimiento del sistema completo obedece a un flujo lineal minimal sobre el toro $\mathbb{T}^n$ y que la órbita de todo el sistema llena densamente este toro. Vemos que la descripción del sistema en el caso idealizado es muy simple.

2.4. El punto de vista perturbativo, la Teoría KAM

El problema real de los n planetas, que consiste en no despreciar las pequeñas fuerzas ejercidas por los planetas entre sí, será abordado desde el punto de vista perturbativo. Nuestra situación inicial será la idealizada presentada en la Sección previa para la cual obtenemos una descripción completa. Perturbaremos este sistema dinámico introduciendo las fuerzas de interacción en las ecuaciones. Al ser éstas muy pequeñas, deberían dar lugar a un sistema dinámico muy parecido al original no perturbado.

Este principio, es decir, ecuaciones parecidas dan lugar a movimientos parecidos, no es muy fácil de probar, y más aún, resulta ser falso en varias oportunidades (veremos un ejemplo explícito de este fenómeno en el último Capítulo de estas notas).

En el caso preciso del sistema dinámico que nos interesa, existe una serie de resultados positivos, conocidos hoy bajo el nombre de Teoría KAM (en honor a Kolmogorov [Kol54], Arnold [Arn63] y Moser [Mos67], quienes realizaron las contribuciones fundacionales a la teoría). Estos resultados están usualmente planteados en términos del formalismo Hamiltoniano de la mecánica clásica. En este formalismo, las ecuaciones de movimiento dependen de una cierta función de la posición y la velocidad de las partículas y que toma valores reales, llamada *Hamiltoniano*. En el caso idealizado de la Sección previa, el Hamiltoniano asume una forma muy simple y se dice que es *completamente integrable*, dando lugar a movimientos que corresponden a flujos lineales sobre toros n dimensionales. Dependiendo del nivel de energía la dinámica se concentra en un toro $\mathbb{T}^n$ (decimos que el toro es invariante) y en el caso de frecuencias racionalmente independientes, a dinámica es minimal sobre este toro. Los teoremas KAM, si bien más precisos, aseguran lo siguiente:

Teorema 2.4 *Sea H_0 un Hamiltoniano completamente integrable y sea $\mathbb{T}^n \subset \mathbb{R}^{2n}$ un toro invariante para la dinámica inducida. Suponemos además que el vector de frecuencias $\vec{\Omega} = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$ es racionalmente independiente y luego que el flujo es minimal sobre este toro. Sea H un Hamiltoniano muy cercano a H_0. Si el vector de frecuencias $\vec{\Omega}$ verifica una condición aritmética de tipo Diofantino, entonces existe un conjunto $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}^{2n}$ que es difeomorfo a un toro $\mathbb{T}^n$ y tal que la dinámica inducida por H sobre puntos de $\mathcal{T}$ (pensemos en posiciones iniciales de un sitema de n planetas) es la misma que la del flujo* *lineal con frecuencias* $\vec{\Omega}$ ■

En otras palabras, la dinámica inducida por H (movimiento real) es la misma que la idealizada sobre ciertos toros invariantes (en coordenadas adecuadas). Es decir, existen condiciones iniciales de energía sobre el sistema de planetas tales que la órbita del sistema se ve como la de un flujo lineal minimal sobre un toro $\mathbb{T}^n$. El lector interesado deberá consultar los artículos originales o bien alguno de los excelentes surveys existentes en la literatura (ver por ejemplo [dlL01], [Bos86]). En este mini curso nos contentaremos con rescatar el siguiente principio:

Consideremos un sistema dinámico simple, digamos lineal, y cuyas órbitas obedecen a movimientos rotacionales gobernados por frecuencias. Dada una pequeña perturbación del sistema, nos preguntamos si la nueva dinámica rescata características rotacionales de la original. Veremos que bajo ciertas hipótesis de naturaleza aritmética sobre las frecuencias podemos obtener respuestas positivas.

Capítulo 3

Elementos de Sistemas Dinámicos

En este breve Capítulo revisaremos algunos contenidos básicos sobre Sistemas Dinámicos, Análisis de Fourier y Condiciones Aritméticas que nos serán de gran utilidad en los ejemplos del Capítulo final. Nuevamente, los párrafos que siguen no pretenden de ninguna manera sustituir una introducción seria y formal a los temas que tratan y han sido incluidos en estas notas para tornarlas auto contenidas. Aconsejamos fuertemente al lector consultar las referencias clásicas citadas al final de las notas (ver [KH95], [Kat04] por ejemplo).

3.1. Algunos elementos de Sistemas Dinámicos

Sea X un espacio topológico y sea $f : X \to X$ una función contínua (pensemos por simplicidad en que X es un abierto de $\mathbb{R}^n$). Al par (X, f) le llamaremos un *sistema dinámico*. Dado un punto $x_0 \in X$ estaremos interesados en describir el comportamiento de los puntos

$$f(x_0), f\left(f(x_0)\right), f\left(f\left(f(x_0)\right)\right), \ldots, f^{(n)}(x_0), \ldots$$

A estos puntos de X les llamamos los *iterados* de x_0 por f y al conjunto completo de ellos le llamamos la *órbita* de x_0. Cuando $f(x_0) = x_0$ diremos que x_0 es un punto fijo. Cuando existe $k \geq 1$ tal que $f^k(x_0) = x_0$ decimos que x_0 es un punto periódico y al menor k con esa propiedad le llamamos el período de x_0.

Sea (Y, g) otro sistema dinámico. Diremos que f y g son topológicamente equivalentes (o *conjugados*) si existe un homeomorfismo $h : X \to Y$ tal que

$$f = h^{-1} \circ g \circ h.$$

En este caso, podemos pensar en h como un cambio de coordenadas y en la dinámica g como la dinámica f vista en estas nuevas coordenadas. A menudo, un cambio de coordenadas adecuado (una conjugación) nos permitirá comprender mejor un sistema dinámico.

Ejemplo: Tomemos

$$X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} = \{(x,y) \neq (0,0)\}$$

y dado $\alpha \in \mathbb{R}$, la transformación

$$f(x,y) = (x \sin\alpha - y\cos\alpha, x\cos\alpha + y\sin\alpha).$$

Ahora tomemos

$$Y = \{r\exp(i\theta) \quad | \quad r \geq 0, \theta \in \mathbb{T}^1\}$$

y la transformación

$$g(r\exp(i\theta)) = r\exp(i(\theta + \alpha)).$$

El cambio de coordenadas clásico de cartesianas a polares

$$h(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}\exp\left(i\ argtg\left(\frac{x}{y}\right)\right)$$

conjuga f con g. Luego la transformación f representa simplemente una rotación de ángulo α con centro en el origen en un sistema de coordenadas adecuado.

Ejercicio 3.1 *Verifique los detalles del ejemplo anterior.*

Si f y g son dos dinámicas conjugadas, entonces para todo $n \geq 1$ tenemos

$$f^{(n)} = h^{-1} \circ g^{(n)} \circ h,$$

es decir, todos los iterados de las dinámicas son conjugados, y luego podemos leer la órbita del punto x_0 por f en la órbita del punto $h(x_0)$ por g. Luego, si somos capaces de describir una de estas órbitas, obtenemos una descripción de la otra por medio del cambio de coordenadas h.

En los ejemplos de tipo KAM que veremos en el último Capítulo de estas notas nos guiaremos por el siguiente principio: Comenzaremos con un sistema dinámico lineal (por lo tanto muy simple de describir). Lo perturbaremos un poco agregando términos no lineales. Nos preguntaremos si el nuevo sistema dinámico es conjugado o no al modelo lineal desde el cual partimos. En el caso en que tal conjugación exista diremos que la dinámica perturbada es *linealizable* y obtendremos, salvo un cambio de coordenadas, una descripción completa de sus órbitas.

3.2. Algunos elementos de Análisis

Consideremos el conjunto $C_1^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ de las funciones contínuas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{C}$ y que son periódicas con período 1. Identificaremos este conjunto al conjunto de las funciones contínuas del círculo $\mathbb{T}^1$ en $\mathbb{C}$. Para cada $k \in \mathbb{Z}$ la función

$$e_k(x) = \exp(2\pi i k x)$$

pertenece a C_1^0. El conjunto $\{e_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \subset C_1^0$ puede ser pensado como una base del espacio vectorial C_1^0 a escalares complejos. Dotamos a C_1^0 del producto Hermítico

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}dx.$$

Ejercicio 3.2 *Muestre que* $|e_k| = \langle e_k, e_k\rangle^{1/2} = 1$ *para todo* $k \in \mathbb{Z}$ *y que* $\langle e_k, e_j\rangle = 0$ *para* $k \neq j$. *En otras palabras, el conjunto* $\{e_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ *es ortonormal.*

Si pretendemos que $\{e_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ sea una base, debemos ser capaces de escribir cualquier función $f \in C_1^0$ como una combinación lineal de estas funciones. Escribamos formalmente

$$f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k e_k. \tag{3.1}$$

Dado el resultado del Ejercicio previo, los coeficientes complejos a_k deben obtenerse por proyección ortogonal

$$a_k = \langle f, e_k \rangle = \int_0^1 f(x) \exp(-2\pi i k x) dx. \tag{3.2}$$

La serie formal (3.1) es llamada la *Serie de Fourier* de f y (3.2) el k-ésimo coeficiente de Fourier. Note que el lado derecho de (3.1) es simplemente una combinación formal pues no hemos mostrado que dado $x \in \mathbb{R}$ la serie numérica $\sum_k a_k e_k(x)$ converge, ni menos aún, que de hacerlo lo haga al valor $f(x)$. De todas maneras tenemos el siguiente resultado:

Teorema 3.3 (ver [Kat04]) *Sea $f \in C_1^0$ y de clase C^1. La serie de Fourier de f converge uniformemente a la función f* ■

Pensemos recíprocamente que tenemos una sucesión de números complejos $\{a_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$. Nos podemos preguntar bajo qué condiciones estos números corresponden a los coeficientes de la serie de Fourier de una función en C_1^0, o bien, si la serie formal de funciones $\sum_k a_k e_k$ converge o no a una función en C_1^0.

Teorema 3.4 *Sea $r \geq 1$. Si $|a_k k^r| \longrightarrow 0$ entonces la serie $\sum_k a_k e_k$ converge uniformeme y absolutamente a una función en C_1^0 y además esta función es de clase C^r* ■

3.3. Algunos elementos de Aritmética

Es bien sabido que todo número irracional puede ser aproximado por números racionales. Basta tomar por ejemplo una truncación adecuada de su escritura decimal. Estamos interesados en medir la *calidad de las aproximaciones* en términos del tamaño del denominador del número racional que usemos para aproximar.

Ejercicio 3.5 *Sea $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ y sea $q \in \mathbb{N}$. Muestre que existe un número racional p/q tal que*

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q}.$$

Es decir, para todo $q \geq 1$ existen números racionales con denominador q que aproximan a α con un error menor que $1/q$. Mejor aún, tenemos el

Teorema 3.6 (Dirichlet) *Existe una infinidad de racionales p/q tales que*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2} \quad \blacksquare$$

Diremos que un número irracional es mal aproximado por racionales si el error en el Teorema anterior no puede ser mejorado substancialmente. Más precisamente, diremos que $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ verifica una condición Diofantina $CD(\eta, \tau)$ si existe $\eta > 0$ y $\tau > 0$ tales que para todo número racional p/q se tiene

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{\eta}{q^{\tau+2}}.$$

Ejercicio 3.7

i) *Muestre que el conjunto $CD(\eta, \tau)$ es de medida total en el sentido de Lebesgue.*

ii) *Pruebe que*

$$\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n!}$$

no verifica ninguna condición Diofantina.

Capítulo 4

Sistemas Dinámicos linealizables en baja dimensión

Este es el Capítulo central de estas notas y contiene ejemplos concretos de Sistemas Dinámicos que resultan ser linealizables. A pesar de ser ejemplos muy simples desde el punto de vista del Análisis, pues reduciremos el tratamiento de las funciones al manejo de series, estos ejemplos presentan ya todas las características y fenómenos aritméticos que aparecen en ejemplos más complicados como en la linealización de difeomorfismos del círculo, la existencia de curvas invariantes para aplicaciones twist, persistencia de toros invariantes para perturbaciones de Hamiltonianos completamente integrables, persistencia de curvas invariantes en dinámicas fibradas, etc. (ver [Her79], [Yoc84], [Mos62], [Rüs72], [Bos86], [Her86], [Pon09] y otros).

4.1. Baby-KAM

Consideremos la siguiente transformación

$$\begin{array}{rcl} T_{\alpha,c} : \mathbb{T}^1 \times \mathbb{R} & \longmapsto & \mathbb{T}^1 \times \mathbb{R} \\ (x, y) & \longrightarrow & (x + \alpha, y + c), \end{array}$$

en donde $\alpha \in T$ y $c \in \mathbb{R}$. Esta es una dinámica muy simple y se conoce como una *traslación lineal sobre el cilindro* $\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}$.

Permitamos ahora una perturbación

$$F(x,y) = (x+\alpha, y+\psi(x))$$

en donde $\psi : \mathbb{T}^1 \to \mathbb{R}$ es una función de clase C^∞. Buscamos un cambio de coodenadas

$$H(x,y) = (x, y+\phi(x))$$

de manera tal que la conjugación de F por H sea una traslación:

$$H \circ F \circ H^{-1} = T_{\alpha,c} \tag{4.1}$$

para algún $c \in \mathbb{R}$ adecuado. Este cambio de coordenadas estará determinado por la función $\phi : \mathbb{T}^1 \to \mathbb{R}$ y por la ecuación de conjugación (4.1) que se lee

$$\begin{aligned} H \circ F \circ H^{-1}(x,y) &= (x+\alpha, y-\phi(x)+\psi(x)+\phi(x+\alpha)) \\ &= (x+\alpha, y+c). \end{aligned}$$

Luego buscamos una función ϕ y una constante c tales que

$$\phi(x+\alpha) - \phi(x) = c - \psi(x). \tag{4.2}$$

Esta ecuación es conocida como la *ecuación cohomológica*. Si pretendemos que el lado izquierdo de (4.2) sea al menos integrable con respecto a la medida de Lebesgue dx en $\mathbb{T}^1$ debe tenerse que

$$\int_{\mathbb{T}^1} \phi(x+\alpha)dx - \int_{\mathbb{T}^1} \phi(x)dx = \int_{\mathbb{T}^1} c\ dx - \int_{\mathbb{T}^1} \psi(x)dx.$$

Haciendo un cambio de variable $x \mapsto x+\alpha$ en la primera integral de la izquierda vemos que el lado izquierdo se anula. Luego existe un único valor posible para la constante c dado por

$$c = \int_{\mathbb{T}^1} \psi(x)dx.$$

La función ψ es de clase C^∞ y en particular de clase C^1. Luego la podemos escribir en términos de su serie de Fourier:

$$\psi(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \psi_k \exp 2\pi i k x.$$

Busquemos la expresión formal $\phi(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \phi_k \exp(2\pi ikx)$ de la serie de Fourier correspondiente a la solución ϕ de la ecuación cohomológica . Reemplazando en (4.2) obtenemos

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \phi_k \exp(2\pi ik(x+\alpha)) - \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \phi_k \exp(2\pi ikx) = -\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \psi_k \exp(2\pi ikx). \tag{4.3}$$

Note que el término correspondiente a $k = 0$ no aparece pues la elección de c hecha más arriba toma cuenta de esto. De hecho, podemos escoger cualquier valor para el coeficiente $\phi_0 \in \mathbb{C}$. Igualando coeficientes en (4.3) obtenemos una expresión explícita para ϕ_k:

$$\phi_k = \frac{\psi_k}{1 - \exp(2\pi ik\alpha)}.$$

Los términos $1 - \exp(2\pi ik\alpha)$ son comúnmente conocidos como *pequeños denominadores*. Esto se debe a que cuando $k\alpha$ se parece mucho a un entero el pequeño denominador se parece mucho a 0. Este fenómeno puede provocar que el coeficiente de Fourier ϕ_k crezca muy brúscamente. Note que si fuésemos capaces de controlar los pequeños denominadores, el crecimiento de ϕ_k sería comparable al de ψ_k. La sucesión $\{\psi_k\}$ corresponde a los coeficientes de la serie de Fourier de una función de clase C^∞ y decrece entonces más rápido que el inverso de cualquier expresión polinomial en k. Para obtener un decrecimiento más que polinomial para ϕ_k debemos exigir un control polinomial en el crecimiento de los pequeños denominadores. Este control se obtiene exigiendo una condición Diofantina sobre el número α.

Proposición 4.1 *Sea $\alpha \in CD(\eta, \tau)$ y $\psi : \mathbb{T}^1 \to \mathbb{C}$ de clase C^∞. La serie*

$$x \longmapsto \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{\psi_k}{1 - \exp(2\pi ik\alpha)} \exp(2\pi ikx)$$

converge uniformemente a una función de clase C^∞ y que es solución a la ecuación cohomológica (4.2).

Demostración: Dado $r \geq 1$ debemos mostrar que

$$\frac{|\psi_k|}{|1 - \exp(2\pi ik\alpha)|} |k|^r \longrightarrow 0$$

cuando $|k| \to \infty$. Usaremos el siguiente resultado:

Ejercicio 4.2 *Denotemos por $\|k\alpha\|$ la distancia entre $k\alpha$ y el conjunto de los los números enteros. Muestre que*

$$4\|k\alpha\| \leq |1-\exp(2\pi ik\alpha)| \leq 2\pi\|k\alpha\|.$$

La condición Diofantina $\alpha \in CD(\eta,\tau)$ equivale a

$$\|k\alpha\| \geq \frac{\eta}{|k|^{\tau+1}}$$

y luego

$$\frac{|\psi_k|}{|1-\exp(2\pi ik\alpha)|}|k|^r \leq \frac{|\psi_k||k|^{\tau+1+r}}{4\eta}.$$

El lado derecho tiende a cero cuando k va infinito pues $\psi \in C^\infty$ ∎

Los argumentos previos nos permiten enunciar y demostrar el siguiente resultado de linealización:

Teorema 4.3 (Baby-KAM) *Sea $\alpha \in CD(\eta,\tau)$ y $\psi \in C^\infty$. La dinámica*

$$(x,y) \longmapsto (x+\alpha, y+\psi(x))$$

es conjugada a

$$(x+\alpha, y+c)$$

con $c = \int_{\mathbb{T}^1}\psi(x)dx$. Mejor aún, la conjugación es de clase C^∞ ∎

Este ejemplo nos muestra de manera clara como una condición sobre los pequeños denominadores, es decir una condición aritmética sobre la frecuencia α, nos permite conjugar una dinámica complicada a una muy simple.

El siguiente ejemplo es más complejo, pues la dinámica que pretendemos entender es no lineal. Buscaremos conjugar esta dinámica a su parte lineal (trataremos de linealizar). Sin embargo, a diferencia del Baby-KAM, el método para obtener la conjugación no se realiza en un solo paso. Se basa más bien en el principio de las aproximaciones sucesivas, también conocido como el Método de Newton. Este consiste en buscar conjugaciones que, a pesar de no anular completamente la parte no lineal de la dinámica, la conjugan a otra cuya parte no lineal tiene un tamaño menor. Suponiendo un buen control sobre los pequeños denominadores que aparecen en el proceso, un argumento de límite nos permitirá hallar una conjugación linealizante. Seguiremos el tratamiento clásico de Moser (ver por ejemplo [CG93], [KH95]).

4.2. Linealización de gérmenes holomorfos

Sea $U \subset \mathbb{C}$ un abierto que contiene al origen y sea $f : U \to \mathbb{C}$ una función holomorfa cuya serie de potencias en torno al origen se escribe

$$f(z) = e^{2\pi i\alpha}z + r_2 z^2 + r_3 z^3 + \dots$$

con $\alpha \in \mathbb{T}^1$ y $r_j \in \mathbb{C}$. En el caso en que los términos no lineales sean nulos $r_2 = r_3 = r_4 = \cdots = 0$ decimos que f es puramente lineal y la dinámica de todo punto $z^* \in \mathbb{C}$ es muy simple pues corresponde a una rotación de ángulo α en el círculo $\{|z| = |z^*|\}$.

Sigamos con el caso no lineal. Notemos que $f(0) = 0$, luego $z = 0$ es un punto fijo para f. Además $f'(0) = e^{2\pi i\alpha}$ lo que dice que al menos infinitesimalmente la transformación es una rotación. Estamos interesados en saber si las órbitas de puntos cercanos al origen obedecen o no a este comportamiento simple dado por la parte lineal de f. Más precisamente, nos preguntamos si existe una función holomorfa $\mathbf{h}(w) = w + h_2 w^2 + h_3 w^3 + \dots$ tal que

$$\mathbf{h}^{-1} \circ f \circ \mathbf{h}(w) = e^{2\pi i\alpha}w \tag{4.4}$$

para todo $w \in \mathbb{C}$ y suficientemente cercano al origen. En tal caso diremos que *el germen holomorfo de f es linealizable*. La ecuación de linealización (4.4) es equivalente a

$$f \circ \mathbf{h}(w) = \mathbf{h}\left(e^{2\pi i\alpha}w\right) \tag{4.5}$$

pues $\mathbf{h}'(0) = 1$ y el teorema de la función inversa asegura que $\mathbf{h}$ es invertible en una vecindad del origen.

Pongamos

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{h}}(w) = \mathbf{h}(w) - w &= h_2 w^2 + h_3 w^3 + \dots \\ \tilde{f}(z) = f(z) - e^{2\pi i\alpha}z &= f_2 z^2 + f_3 z^3 + \dots\end{aligned}$$

y en general pondremos un $\sim$ para designar la parte no lineal de una función holomorfa. Con esta notación la ecuación (4.5) se lee

$$\begin{aligned}f\left(w + \tilde{\mathbf{h}}(w)\right) &= \mathbf{h}\left(e^{2\pi i\alpha}w\right) \\ e^{2\pi i\alpha}\left(w + \tilde{\mathbf{h}}(w)\right) + \tilde{f}\left(w + \tilde{\mathbf{h}}(w)\right) &= e^{2\pi i\alpha}w + \tilde{\mathbf{h}}\left(e^{2\pi i\alpha}w\right).\end{aligned}$$

Manipulando un poco obtenemos equivalentemente

$$\tilde{\mathbf{h}}\left(e^{2\pi i\alpha}w\right) - e^{2\pi i\alpha}\tilde{\mathbf{h}}(w) = \tilde{f}\left(w + \tilde{\mathbf{h}}(w)\right). \tag{4.6}$$

Esta ecuación es muy difícil de resolver a causa del término no lineal de la derecha. En su lugar resolveremos una versión aproximada en que sólo tomamos cuenta de los términos lineales:

$$\tilde{\mathbf{h}}\left(e^{2\pi i\alpha}w\right) - e^{2\pi i\alpha}\tilde{\mathbf{h}}(w) = \tilde{f}\left(w\right). \tag{4.7}$$

El problema que se presenta ahora es que una solución $\tilde{\mathbf{h}}$ a esta ecuación no permitirá conjugar f a su parte lineal, pues $\tilde{\mathbf{h}}$ solo resuelve una versión aproximada de la ecuación de conjugación. De todas maneras, una función $\tilde{\mathbf{h}}$ que soluciona (4.7) nos permitirá construir una conjugación de f a una versión aproximada de su parte lineal. Para ser más precisos, existe una función holomorfa $g(w) = e^{2\pi i\alpha}w + g_2w^2 + g_3w^3 + \dots$ tal que

$$f \circ \mathbf{h} = \mathbf{h} \circ g.$$

En otras palabras, $\mathbf{h}$ conjuga f con un nuevo germen holomorfo. Estudiemos qué ocurre con su parte no lineal $\tilde{g}$: la ecuación de conjugación entre f y g nos da

$$e^{2\pi i\alpha}\left(w + \tilde{\mathbf{h}}(w)\right) + \tilde{f}\left(w + \tilde{\mathbf{h}}(w)\right) = e^{2\pi i\alpha}w + \tilde{g}(w) + \tilde{\mathbf{h}}\left(e^{2\pi i\alpha}w + \tilde{g}(w)\right).$$

Limpiado términos y manipulando convenientemente obtenemos

$$\begin{aligned}\tilde{g}(w) \;\; = \;\; & \left[\tilde{f}\left(w + \tilde{\mathbf{h}}(w)\right) - \left(\tilde{\mathbf{h}}\left(e^{2\pi i\alpha}w\right) - e^{2\pi i\alpha}\tilde{\mathbf{h}}(w)\right)\right] + \\ & \left[\tilde{\mathbf{h}}\left(e^{2\pi i\alpha}w\right) - \tilde{\mathbf{h}}\left(e^{2\pi i\alpha}w + \tilde{g}(w)\right)\right].\end{aligned}$$

Recordando que $\tilde{\mathbf{h}}$ satisface (4.7) obtenemos

$$\begin{aligned}\tilde{g}(w) \;\; = \;\; & \left[\tilde{f}\left(w + \tilde{\mathbf{h}}(w)\right) - \tilde{f}(w)\right] + \\ & \left[\tilde{\mathbf{h}}\left(e^{2\pi i\alpha}w\right) - \tilde{\mathbf{h}}\left(e^{2\pi i\alpha}w + \tilde{g}(w)\right)\right].\end{aligned}$$

Esta expresión para $\tilde{g}$ nos permitirá estimar su tamaño. Precisemos desde ya cómo mediremos el tamaño de nuestras funciones. Para un real positivo R

denotaremos por $D(R)$ al disco centrado en el origen y radio R. Para una función holomorfa $\mathbf{f} : \overline{D(R)} \to \mathbb{C}$ definimos su norma en el disco $D(R)$, y la interpretamos como su tamaño, como el número

$$\|\mathbf{f}\|_R = \sup_{z \in D(R)} |\mathbf{f}(z)|.$$

Supongamos que $\tilde{g}$ y $\tilde{\mathbf{h}}$ están definidas en un disco $D(R)$. Estimemos la norma de $\tilde{g}$ usando la desigualdad del valor medio en la expresión de arriba:

$$\|\tilde{g}\|_R \leq \|\tilde{f}\|_R \|\tilde{\mathbf{h}}\|_R + \|\tilde{\mathbf{h}}\|_R \|\tilde{g}\|_R.$$

Si $\tilde{\mathbf{h}}$ es muy pequeño, digamos $\|\tilde{\mathbf{h}}\|_R \leq 1/2$ tendremos

$$\|\tilde{g}\|_R \leq 2\|\tilde{f}\|_R \|\tilde{\mathbf{h}}\|_R. \tag{4.8}$$

Podremos decir que la parte no lineal del nuevo gérmen holomorfo es más pequeña que la de f.

Formalicemos un poco el procedimiento que usaremos para linealizar f: Ponemos $f_0 = f$ definida en un cierto disco $D(R_0)$. Suponiendo que tenemos definido un germen f_n en un cierto disco $D(R_n)$, construiremos una conjugación $\mathbf{h}_n(w) = w + \tilde{\mathbf{h}}_n(w)$ resolviendo la ecuación cohomológica

$$\tilde{\mathbf{h}}_n \left(e^{2\pi i\alpha} w\right) - e^{2\pi i\alpha} \tilde{\mathbf{h}}_n(w) = \tilde{f}_n\left(w\right). \tag{4.9}$$

Construiremos un nuevo gérmen f_{n+1} poniendo

$$\begin{aligned} f_{n+1} &= \mathbf{h}_n^{-1} \circ f_n \circ \mathbf{h}_n \\ &= \left(\mathbf{h}_n \circ \mathbf{h}_{n-1} \circ \cdots \circ \mathbf{h}_0\right)^{-1} \circ f \circ \left(\mathbf{h}_n \circ \mathbf{h}_{n-1} \circ \cdots \circ \mathbf{h}_0\right). \end{aligned}$$

Así, cada germen f_{n+1} será conjugado al germen original f. Para poder obtener un control adecuado sobre $\|\tilde{\mathbf{h}}_n\|$ deberemos admitir una pérdida en el dominio de definición (usaremos la desigualdad de Cauchy) y de esta forma, el nuevo gérmen f_{n+1} estará definido en un nuevo disco $D(R_{n+1}) \subset D(R_n)$. Esto nos permitirá concluir que $\|\tilde{\mathbf{h}}_n\| \sim \|\tilde{f}_n\|$ y por último una relación como en (4.8) nos permitirá estimar

$$\|\tilde{f}_{n+1}\|_{R_{n+1}} \sim \|\tilde{f}_n\|_{R_n}^2$$

y obtener un decrecimiento exponencialmente rápido de la parte no lineal en cada iteración del procedimiento.

Si las funciones $\tilde{\mathbf{h}}_n$ se construyen con cuidado y la frecuencia α verifica buenas condiciones aritméticas, podremos asegurar que la secuencia de funciones

$$\mathbf{h}_n \circ \mathbf{h}_{n-1} \circ \cdots \circ \mathbf{h}_0$$

converge a una función holomorfa $\mathbf{h}^*$ bien definida en un cierto disco $D(R_\infty)$, con $R_\infty = \lim R_n > 0$. Dado el decrecimiento rápido de $\|\tilde{f}_n\|$ obtendremos finalmente que $\mathbf{h}^*$ conjuga $f_0 = f$ a un germen cuya parte no lineal es nula, es decir, conjuga f a $e^{2\pi i\alpha}w$. En lo que sigue llevaremos a cabo este programa, aunque dejaremos varios detalles técnicos a cargo del lector.

La base del algoritmo descrito es la resolución con estimaciones de la ecuación cohomológica (4.7). Escribiendo las funciones involucradas en términos de sus series de potencias la ecuación se lee

$$\sum_{k\geq 2} r_k w^k = \sum_{k\geq 2} h_k \left(e^{2\pi i\alpha}w\right)^k - e^{2\pi i\alpha}\sum_{k\geq 2} h_k w^k.$$

en donde $h_k \in \mathbb{C}$ son los coeficientes de la serie de $\mathbf{h}$ y no los debemos confundir con las funciones $\mathbf{h}_n$. Igualando los coeficientes de potencias iguales obtenemos

$$r_k = h_k e^{2\pi ik\alpha} - e^{2\pi i\alpha} h_k$$

de donde finalmente se tiene

$$h_k = \frac{r_k}{e^{2\pi i\alpha}\left(e^{2\pi i(k-1)\alpha} - 1\right)}. \tag{4.10}$$

Vemos aparecer en escena nuevamente a los pequeños denominadores. Para que los coeficientes h_k correspondan efectivamente a los de una función holomorfa, deben verificar una condición precisa de decrecimiento que asegure la existencia de un cierto radio de convergencia. Como los números r_k son coeficientes de una función holomorfa, bastará con asegurar un control adecuado sobre los pequeños denominadores para garantizar tanto la convergencia de $\tilde{\mathbf{h}}$ como una estimación para su norma.

Lema 4.4

i) Sea

$$\phi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \phi_k z^k$$

una función holomorfa en el disco $D(R)$ y continua en $\overline{D(R)}$. Entonces para todo $k \in \mathbb{N}$ se tiene

$$|\phi_k| < \|\phi\|_R R^{-k}.$$

ii) *Sean $\{\phi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una secuencia de números complejos y $M > 0$ tales que*

$$|\phi_k| < MR^{-k}.$$

La serie de potencias

$$\phi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \phi_k z^k$$

converge a una función holomorfa en $D(R)$ y para todo $\delta \in (0, R)$ se tiene

$$\|\phi\|_{R-\delta} \leq \frac{MR}{\delta}.$$

Demostración:

i)

$$|\phi_k| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{\phi(z)}{z^{k+1}} dz \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{|z|=R} \left| \frac{\phi(z)}{z^{k+1}} \right| dz \leq \|\phi\|_R R^{-k}.$$

ii)

$$|\phi(z)| \leq M \sum_{k=0}^{\infty} R^{-k}(R-\delta)^k = \frac{MR}{\delta} \quad \blacksquare$$

Este Lema permite caracterizar las secuencias de coeficientes que dan lugar a series de potencias convergentes en $D(R)$ y además relaciona los crecimientos de éstos con la norma de la serie. Este Lema será clave para la resolución con estimaciones de la ecuación (4.7).

Proposición 4.5 *Sea $f : \overline{D(R)} \to \mathbb{C}$ holomorfa y $\alpha \in CD(\eta, \tau)$. La serie*

$$\tilde{\mathbf{h}}(w) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{r_k}{e^{2\pi i\alpha}\left(e^{2\pi i(k-1)\alpha} - 1\right)} w^k$$

es holomorfa en $D(R)$ y existe una constante positiva $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\eta)$ tal que para todo $\Delta \in (0, 1)$ se tiene

$$\|\tilde{\mathbf{h}}\|_{R(1-\Delta)} < \mathcal{C}\|f\|_R \Delta^{-(\tau+1)}.$$

Demostración: La estimación que sigue

$$\begin{aligned}
|h_k| &\leq |r_k|\frac{|k-1|^{\tau+1}}{\eta} \\
&\leq \|f\|_R R^{-k}|k-1|^{\tau+1} \\
&\leq \|f\|_R\big(R(1-\Delta)\big)^{-k}(1-\Delta)^k k^{\tau+1}
\end{aligned}$$

y el Lema anterior permiten concluir ∎

En la Proposición previa debemos entender el número Δ como la fracción del dominio que perdemos para poder ganar una estimación en la noma de $\tilde{\mathbf{h}}$. Una vez que contamos con la tecnología requerida, podemos hacer andar el procedimiento iterativo (conocido como el algoritmo de Newton):

Sea $\varepsilon > 0$ (fijaremos su valor dentro de poco). Como $\tilde{f}_0'(0) = 0$ podemos escoger un radio $R_0 > 0$ tal que $\|\tilde{f}_0\|_{R_0} \leq \varepsilon$. Suponemos que f_n está definida en en disco $D(R_n)$. Construimos $\tilde{\mathbf{h}}_n$ solucionando la ecuación cohomológica (4.9) y obtenemos

$$\|\tilde{\mathbf{h}}_n\|_{R_{n+1}} \leq \mathcal{C}\|\tilde{f}_n\|_{R_n}\Delta_n^{-(\tau+1)}$$

con $R_{n+1} = R_n(1-\Delta_n)$ y $\Delta_n = \frac{1}{2^n+1}$. Para la parte no lineal $\tilde{f}_{n+1}$ tenemos la siguiente estimación

$$\|\tilde{f}_{n+1}\|_{R_{n+1}} \leq \mathcal{C}\|\tilde{f}_n\|_{R_n}^2\Delta_n^{-(\tau+1)}.$$

Recursivamente esto nos da

$$\|\tilde{f}_{n+1}\|_{R_{n+1}} \leq \varepsilon^{2^n}\mathcal{O}\left(M^{2^n}\right)$$

en donde M es una constante positiva y $\mathcal{O}\left(M^{2^n}\right)$ representa el orden de crecimiento del término exacto, que no computaremos explícitamente. Luego, si escogemos inicialmente ε suficientemente pequeño tendremos $\|\tilde{f}_n\|_{R_n} \longrightarrow 0$ más que exponencialmente. Dejamos al lector el ejercicio de verificar que:

Ejercicio 4.6

i) $\mathbf{h}_n(w) = w + \tilde{\mathbf{h}}_n(w)$ *es invertible en* $D(R_{n+1})$.

ii) $R_\infty = \lim R_n > 0$.

iii) *Existe el límite uniforme*

$$\mathbf{h}^* = \text{lím}\, \mathbf{h}_n \circ \mathbf{h}_{n-1} \circ \cdots \circ \mathbf{h}_0.$$

Además $\mathbf{h}^*$ *es invertible en* $D(R_\infty)$.

Tal función $\mathbf{h}^*$ linealiza f. Hemos mostrado de esta manera los principales ingredientes de la demostración del

Teorema 4.7 (Siegel [Sie42]) *Sea* $f(z) = e^{2\pi i\alpha}z + r_2 z^2 + \ldots$ *una función holomorfa con* $\alpha \in CD(\eta, \tau)$. *Existe una conjugación* $\mathbf{h}(w) = w + h_2 w^2 + \ldots$ *holomorfa y definida en una vecindad del origen tal que*

$$\mathbf{h}^{-1} \circ f \circ \mathbf{h}(w) = e^{2\pi i\alpha} w$$

para todo w *cercano al origen* ■

Por otra parte, un célebre resultado debido a Yoccoz asegura que es efectivamente la aritmética de la frecuencia α quien gobierna la dinámica. Más precisamente

Teorema 4.8 (Yoccoz [Yoc95]) *Suponga que* $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ *no satisface la condición aritmética de* $\mathcal{B}$*runo. Entonces el polinomio cuadrático*

$$P_\alpha(z) = e^{2\pi i\alpha}z + z^2$$

no es linealizable ■

La condición aritmética de $\mathcal{B}$runo puede definirse en términos de las reducidas $\frac{p_n}{q_n}$ de la fracción contínua de α (ver [Yoc02]) y es equivalente a la finitud de la serie

$$\sum_{n \geq 0} \frac{\log q_{n+1}}{q_n} < \infty.$$

Varios años antes Brjuno [Brj71] había mejorado el resultado de Siegel mostrando que la condición de $\mathcal{B}$runo (que es más débil que cualquier condición Diofantina) era suficiente para que las conclusiones del teorema de Siegel se tengan.

Bibliografía

[Arn63] V.I. Arnold. Small denominators II: Proof of a theorem of A.N.Kolmogorov on the invariance of quasi-periodic motions under small perturbations on the Hamiltonian. *Russ. Math. Surveys*, 18(6):9–36, 1963.

[Bos86] J.B. Bost. Tores invariantes des systèmes dynamiques hamiltoniens. *Asterisque, Séminaire Bourbaki 639*, 133-134:113–157, 1986.

[Brj71] A. D. Brjuno. Analytic form of differential equations. I, II. *Trudy Moskov. Mat. Obšč.*, 25:119–262; ibid. 26 (1972), 199–239, 1971.

[CG93] Lennart Carleson and Theodore W. Gamelin. *Complex dynamics*. Universitext: Tracts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1993.

[dlL01] Rafael de la Llave. A tutorial on KAM theory. In *Smooth ergodic theory and its applications (Seattle, WA, 1999)*, volume 69 of *Proc. Sympos. Pure Math.*, pages 175–292. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001.

[Her79] Michael-Robert Herman. Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (49):5–233, 1979.

[Her86] Michael-R. Herman. Sur les courbes invariantes par les difféomorphismes de l'anneau. Vol. 2. *Astérisque*, (144):248, 1986. With a correction to: ıt On the curves invariant under diffeomorphisms of the annulus, Vol. 1 (French) [Astérisque No. 103-104, Soc. Math. France, Paris, 1983; MR0728564 (85m:58062)].

[Kat04] Y. Katznelson. *An introduction to harmonic analysis.* Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, Cambridge, third edition, 2004.

[KH95] Anatole Katok and Boris Hasselblatt. *Introduction to the modern theory of dynamical systems*, volume 54 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications.* Cambridge University Press, Cambridge, 1995. With a supplementary chapter by Katok and Leonardo Mendoza.

[Kol54] A.Ñ. Kolmogorov. On conservation of conditionally periodic motions for a small change in Hamilton's function. *Dokl. Akad. Nauk SSSR (N.S.)*, 98:527–530, 1954.

[Mos62] J. Moser. On invariant curves of area-preserving mappings of an annulus. *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Kl. II*, 1962:1–20, 1962.

[Mos67] J. Moser. Convergent series expansions for quasi-periodic motions. *Math. Ann.*, 169:136–176, 1967.

[Pol76] Harry Pollard. *Celestial mechanics.* Mathematical Association of America, Washington, D. C., 1976. Carus Mathematical Monographs, No. 18.

[Pon09] Mario Ponce. On the persistence of invariant curves for fibered holomorphic transformations. *Comm. Math. Phys.*, 289(1):1–44, July 2009.

[Rüs72] Helmut Rüssmann. Kleine Nenner. II. Bemerkungen zur Newtonschen Methode. *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Kl. II*, pages 1–10, 1972.

[Sie42] Carl Ludwig Siegel. Iteration of analytic functions. *Ann. of Math. (2)*, 43:607–612, 1942.

[Yoc84] J.-C. Yoccoz. Conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle dont le nombre de rotation vérifie une condition diophantienne. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 17(3):333–359, 1984.

[Yoc95] Jean-Christophe Yoccoz. Théorème de Siegel, nombres de Bruno et polynômes quadratiques. *Astérisque*, (231):3–88, 1995. Petits diviseurs en dimension 1.

[Yoc02] Jean-Christophe Yoccoz. Analytic linearization of circle diffeomorphisms. In *Dynamical systems and small divisors (Cetraro, 1998)*, volume 1784 of *Lecture Notes in Math.*, pages 125–173. Springer, Berlin, 2002.