

Acerca del interior de un polígono

Mario Ponce
PUC-Chile

9 de marzo de 2011

Resumen

En esta nota proponemos una demostración elemental del Teorema de la curva de Jordan para polígonos, justificando así la existencia del interior de un polígono.

Un *polígono cerrado simple* es un camino continuo $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ verificando

i) Cerrado. $\gamma(0) = \gamma(1)$.

ii) Simple. Si $\gamma(x) = \gamma(y)$ entonces $x = y$ o bien $\{x, y\} = \{0, 1\}$.

Esta segunda propiedad debe entenderse como que el camino γ no se corta a si mismo, salvo al momento de cerrarse. Una curva verificando (i) y (ii) es llamada una *curva de Jordan*. Un polígono cerrado simple es entonces una curva de Jordan que verifica una propiedad adicional

iii) Poligonal. Existe una partición $x_0 = 0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = 1$ del intervalo $[0, 1]$ de manera tal que la restricción de γ a cualquier subintervalo $[x_j, x_{j+1}]$ es una función afín.

En otras palabras, γ es una concatenación continua y cerrada de una cantidad finita de segmentos de recta que no se cortan.

A los segmentos $\gamma|_{[x_j, x_{j+1}]}$ se les llama *lados del polígono* y a los puntos $\gamma(x_j)$ se les llama *vértices del polígono*. Por conveniencia asumiremos que la partición x_0, \dots, x_n es minimal en el sentido que en cada vértice existe efectivamente una discontinuidad en la dirección de la función afín (un quiebre). De esta manera el número de vértices (y de lados) es una cantidad bien definida (igual a n). En lo que sigue, denotaremos los vértices por $v_j = \gamma(x_j)$ y escribiremos polígono en lugar de polígono cerrado simple.

En general, los polígonos son los primeros objetos geométricos a los que se ve expuesto un estudiante. Muchos conceptos geométricos se encuentran ya en los polígonos: ángulos, perímetro, área, etc. Se puede ir aún más lejos y plantear resultados generales acerca de los polígono tales como:

Proposición 1

1. La suma de los ángulos exteriores de un polígono es 360 grados.
2. La suma de los ángulos interiores de un polígono de n lados es $180(n - 2)$ grados.

Otro resultado más complejo, pero ampliamente aceptado es

Proposición 2 *Todo polígono puede subdividirse, por medio de diagonales interiores, en un número finito de triángulos.*

La proposición anterior es la clave para la demostración de resultados mucho más sofisticados como

Teorema 3 (de equidescomposición de Bolyai-Gerwie) *Dados dos polígonos de igual área, es posible cortar uno de ellos a través de cortes rectos de manera tal que con las piezas así obtenidas se pueda formar (sin sobras ni traslapes) el otro polígono.*

Teorema 4 (de Pick) *Considere un polígono γ trazado sobre el plano \mathbb{R}^2 , en donde se han marcado los puntos con coordenadas enteras \mathbb{Z}^2 . Si todos los vértices de γ tienen coordenadas enteras, entonces el área de γ viene dada por la fórmula*

$$A(\gamma) = I + \frac{B}{2} - 1,$$

en donde I es el número de puntos con coordenadas enteras en el interior de γ y B es el número de puntos con coordenadas enteras en γ (en el borde de γ).

El objetivo de esta nota no es demostrar estos resultados, si no que llamar la atención en que éstos, así como muchos otros, presuponen la existencia de dos objetos fundamentales acerca de los polígonos: el interior de un polígono y una diagonal interior. La existencia de estos objetos es intuitiva, sin embargo, una demostración rigurosa requiere de argumentos no triviales, y merece por lo tanto la dedicación de este trabajo. El interior de un polígono es aquella región delimitada por el polígono. Definida de una manera más precisa, una *región* Ω es un sub-conjunto abierto del plano \mathbb{R}^2 , que es *conexo*, esto es, dado cualquier par de puntos $x, y \in \Omega$ existe un camino continuo η enteramente contenido en Ω , que une x con y . El siguiente es el teorema que nos asegura la existencia de la región interior:

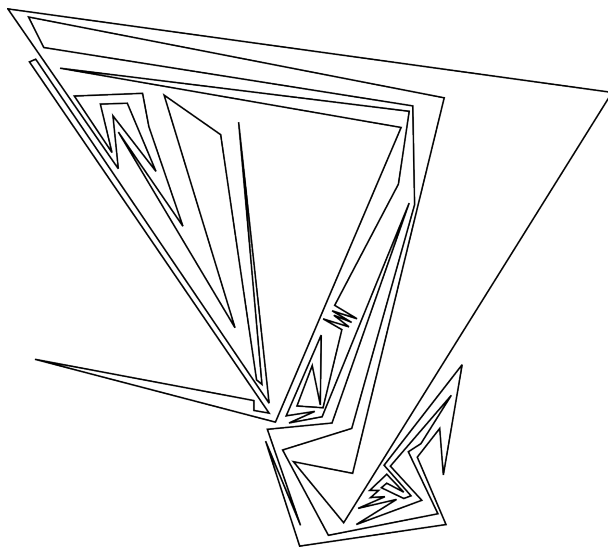


Figura 1: Polígono complicado

Teorema 5 (de la curva de Jordan) Sea $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ una curva de Jordan. El complemento $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ es exactamente la unión de dos regiones Ω_I, Ω_E , de manera que Ω_I es acotada y simplemente conexa, mientras que Ω_E es no acotada.

Se dice que una región es *simplemente conexa* cuando no tiene “hoyos”. La región Ω_I es llamada la *región interior* delimitada por la curva Γ y Ω_E la *región exterior* a la curva Γ . Como un polígono es en particular una curva de Jordan, este teorema nos permite definir las regiones interior y exterior al polígono. Sin embargo, las demostraciones clásicas del Teorema de la curva de Jordan hacen uso de herramientas complejas de topología del plano. En esta nota presentaremos una demostración elemental para una versión particular del teorema

Teorema 6 (de la curva de Jordan para polígonos) Sea $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ un polígono. El complemento $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma$ es exactamente la unión de dos regiones Ω_I, Ω_E , de manera que Ω_I es acotada y simplemente conexa, mientras que Ω_E es no acotada.

Antes de pasar a la demostración del teorema, intentemos convencernos de la real necesidad de presentar una prueba para este, aparentemente, evidente hecho. Primero, la figura 1 muestra un polígono complicado, en el que, al menos para el autor, la existencia de una única región interior no es del todo evidente.

Por otra parte, debemos notar que este teorema es una propiedad del plano \mathbb{R}^2 . Efectivamente, si consideramos un polígono como el de la figura 2, dibujado esta vez sobre un cilindro, notamos que aparecen dos regiones, pero que no gozan de las propiedades de sus contrapartes del plano \mathbb{R}^2 . Otro ejemplo muy interesante ocurre con el polígono de la figura 3. En este caso el polígono está dibujado sobre una banda de Möbius, y el complemento del polígono está constituido por exactamente una región.

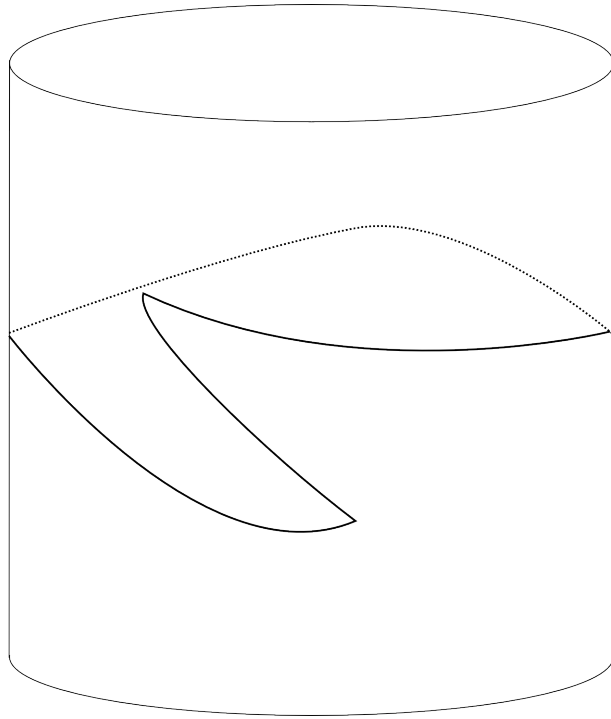


Figura 2: Polígono sobre un cilindro

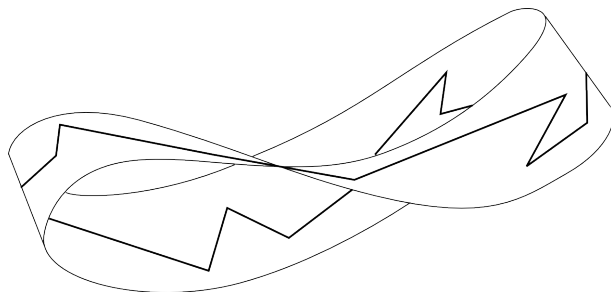


Figura 3: Polígono sobre una banda de Möbius

El segundo concepto que trataremos es la existencia de una diagonal interior al polígono. Dos vértices consecutivos v_j, v_{j+1} definen un segmento $\overline{v_j v_{j+1}}$, llamado *diagonal* del polígono γ . Una tal diagonal es llamada *diagonal interior* cuando, salvo por sus extremos, está enteramente contenida en la región interior Ω_I al polígono. La demostración de varios de los resultados arriba citados hacen uso de argumentos inductivos sobre el número de vértices del polígono. La existencia de una diagonal interior permite cortar el polígono a lo largo de ella y obtener así dos nuevos polígonos con un número menor de vértices, a los cuales se les pueden aplicar hipótesis inductivas. Desarrollemos a continuación una prueba clásica de la Proposición 2.

- Para $n = 3$ el resultado es evidente.
- Supongamos que el resultado se tiene para todo polígono con $n \leq k$ vértices.
- Sea γ un polígono con $n = k + 1$ vértices. Cortando el polígono γ a lo largo de una diagonal interior obtenemos dos polígonos γ_1, γ_2 con n_1, n_2 vértices respectivamente, verificando $n_1 + n_2 = k + 3$. Se deduce que $n_1 \leq k$, $n_2 \leq k$ y se puede aplicar la hipótesis de inducción a los polígonos γ_1, γ_2 . Las particiones en triángulos de los polígonos γ_1, γ_2 inducen una partición del polígono total γ . \square

Volvamos a la existencia de una diagonal interior

Proposición 7 *Todo polígono con al menos 4 vértices posee al menos una diagonal interior.*

Demostración. Sean v_{n-1}, v_0, v_1 tres vértices consecutivos y tales que el ángulo interior $\angle v_{n-1} v_0 v_1 < 180$. Si la diagonal $\overline{v_{n-1} v_1}$ es interior, entonces el resultado está probado. Asumamos que éste no es el caso. Deben entonces existir vértices en el interior del triángulo $v_{n-1} v_0 v_1$ (pues el segmento $\overline{v_{n-1} v_1}$ debe ser cortado por lados del polígono, que no pueden salir de dicho triángulo una vez que entran en él). Sea v_j el vértice dentro del triángulo $v_{n-1} v_0 v_1$ y que está más alejado del segmento $\overline{v_{n-1} v_1}$ de entre todos los vértices en el interior del triángulo. No es difícil darse cuenta que la diagonal $\overline{v_0 v_j}$ es una diagonal interior. \square

Demostración del Teorema 6. La idea es demostrar la existencia de las regiones interior y exterior al polígono. Para ello comenzaremos por determinar qué puntos son candidatos a pertenecer a estas regiones y luego demostraremos que efectivamente nuestros candidatos son exactamente aquellos puntos que constituyen estas regiones. Para definir a nuestros candidatos, asumamos por un instante que el resultado es cierto, es decir, que existen las regiones interior y exterior al polígono: ¿qué propiedades debe verificar un punto interior al polígono? Una respuesta interesante es que el punto debería poder moverse hacia el exterior del polígono. Supongamos que el punto $a \in \mathbb{R}^2$ es un punto interior. Tomemos una semirecta partiendo desde a y que no pasa por ningún vértice del polígono. Movamos ahora el punto a a lo largo de la semirecta en dirección al infinito. A medida que se mueve, el punto va cortando al polígono, y luego de un rato, el punto se encuentra

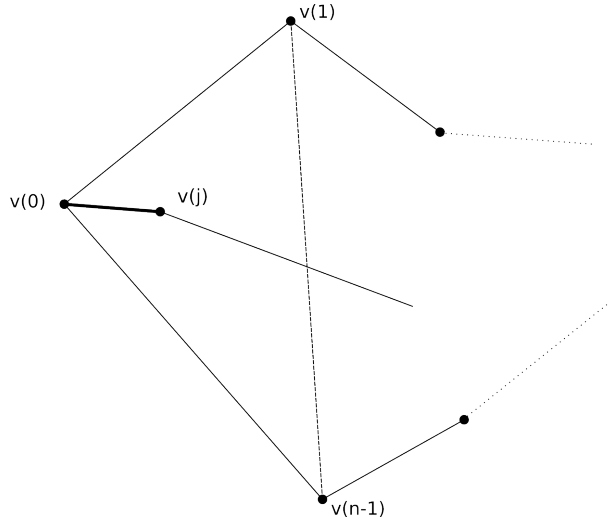


Figura 4: Existencia de una diagonal interior

lejos del polígono, y definitivamente en la región exterior. Cada vez que el punto cortaba al polígono, pasaba de una región a la otra. Como el recorrido partió en el interior y acabó en el exterior, la semirecta debió cortar al polígono un número impar de veces. De manera análoga, si hacemos el mismo ejercicio, empezando esta vez desde un punto exterior, la semirecta cortará al polígono un número par de veces.

Esta construcción nos sugiere una manera de definir candidatos naturales para los puntos en las regiones interior y exterior. Pasemos ahora a la definición de ellos. Sea a un punto en $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma$. Decimos que una semirecta T que parte en a está en *posición general* si T no pasa por ningún vértice de γ . Como γ tiene un número finito de vértices, casi todas las semirectas que parten en a están en posición general. Definimos el número $C_a(T)$ como la cantidad de veces que la semirecta T corta al polígono γ . Nos interesará la paridad del número $C_a(T)$.

Lema 8 Sean T, U dos semirectas en posición general partiendo desde el punto a . La paridad de los números $C_a(T)$ y $C_a(U)$ es la misma.

Demostración. Las dos semirectas T, U separan al plano en dos regiones R_1, R_2 . Tomemos un vértice $v_0 \in R_1$ y recorramos el polígono partiendo desde v_0 . Al completar una vuelta del recorrido habremos pasado de la región R_1 a la R_2 y de la R_2 a la R_1 varias veces. Estos cambios de región ocurren exactamente en aquellos puntos en donde alguna de las semirectas T, U corta al polígono. Como el recorrido comienza y acaba en la región R_1 , la cantidad de cambios de región debe ser par, luego la suma $C_a(T) + C_a(U)$ es un número par. \square

Este lema nos permite asociarle una *paridad* a los puntos del complemento $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma$: decimos que un punto $a \in \mathbb{R}^2 \setminus \gamma$ es *par* si $C_a(T)$ es un número par, y decimos que

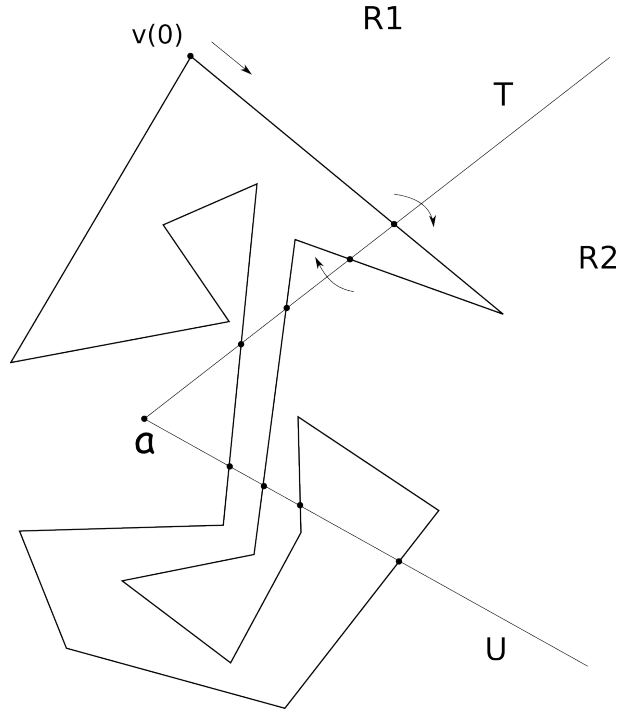


Figura 5: La paridad de un punto está bien definida

es impar si $C_a(T)$ es impar, esto para cualquier semirecta T en posición general que parte desde a .

Lema 9 Si un segmento \overline{ab} está enteramente contenido en el complemento $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma$ entonces todos los puntos del segmento tienen la misma paridad. En particular los extremos a, b tienen la misma paridad.

Demostración. Consideremos la semirecta T que parte en a y que contiene al segmento \overline{ab} . Si esta semirecta está en posición general, entonces puede ser usada para calcular la paridad de a así como de todos los puntos del segmento. Como el segmento no corta al polígono, el número de cortes (luego la paridad) es el mismo para todos los puntos del segmento. Si la semirecta T no está en posición general, podemos escoger un punto c muy cercano al punto medio del segmento \overline{ab} y de manera que los segmentos $\overline{ac}, \overline{cb}$ no cortan al polígono y las semirectas que los contienen y parten de a y c respectivamente están en posición general (esto es posible pues γ tiene un número finito de vértices). Aplicando el razonamiento anterior, podemos deducir que las paridades de todos los puntos del segmento \overline{ac} son la misma y las de los puntos en \overline{cb} también. Como el punto c es común a ambos segmentos se deduce que las paridades de a y b son iguales. El mismo razonamiento se puede aplicar para otro punto del segmento \overline{ab} y el punto a . \square

Definimos ahora nuestros candidatos a regiones interior y exterior:

$$\begin{aligned}\Omega_I &= \{a \in \mathbb{R}^2 \setminus \gamma \mid a \text{ es impar} \}, \\ \Omega_E &= \{a \in \mathbb{R}^2 \setminus \gamma \mid a \text{ es par} \}.\end{aligned}$$

Proposición 10

1. $\Omega_I \cup \Omega_E = \mathbb{R}^2 \setminus \gamma$.
2. Ω_I y Ω_E son conjuntos abiertos.
3. Ω_I es un conjunto acotado y no vacío. Ω_E es un conjunto no acotado.

Demostración. La parte 1. es evidente de la definición de paridad. La parte 2. se deduce rápidamente con la ayuda del Lema 9. Tomemos un punto $a \in \mathbb{R}^2 \setminus \gamma$ y una pequeña bola B centrada en a y contenida en $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma$. Cualquier punto de B puede ser unido con a por medio de un segmento contenido en B . Aplicando el Lema 9 concluimos que todos los puntos de B tienen la misma paridad que su centro. Para mostrar la parte 3. consideremos una gran bola que contenga a γ en su interior. Es claro que todos los puntos exteriores a la bola son pares y que los puntos impares están confinados al interior de la bola. Para mostrar que Ω_I es no vacío, basta con tomar un punto par a y una semirecta en posición general T que parta desde este punto y corte al polígono. Luego del primer corte de T con γ hay puntos en T que no están en γ y que realizan un corte menos que a , luego son puntos impares. \square

Lo único que nos falta por probar para completar la demostración del Teorema de la curva de Jordan para polígonos es que las regiones Ω_I, Ω_E son conexas. Los siguientes lemas nos serán de utilidad

Lema 11 *Sea η una camino poligonal que está completamente contenido en $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma$. Todos los puntos de η tienen la misma paridad.*

Demostración. Por el Lema 9, en cada segmento que forma al camino η , la paridad de los puntos es la misma. Como los segmentos están concatenados, dos segmentos consecutivos tienen la misma paridad, y así, todos los puntos del camino η tienen la misma paridad. \square

Lema 12 *Sean $a, b \in \mathbb{R}^2 \setminus \gamma$. Existe un camino poligonal η que une a con b y que corta al polígono γ en 0 ó 1 punto.*

Demostración. Sean T, U dos semirectas en posición general partiendo desde a y b respectivamente y que cortan al polígono. Sea p_a el primer punto (desde a) en la intersección $T \cap \gamma$ y sea p_b el primer punto (desde b) en la intersección $U \cap \gamma$. El camino η se define de la siguiente manera: parte en a y sigue por T hasta detenerse muy próximo (pero antes) de p_a . Continúa acompañando al polígono de manera poligonal y paralela a éste (tan cerca como sea necesario para no cortar al polígono

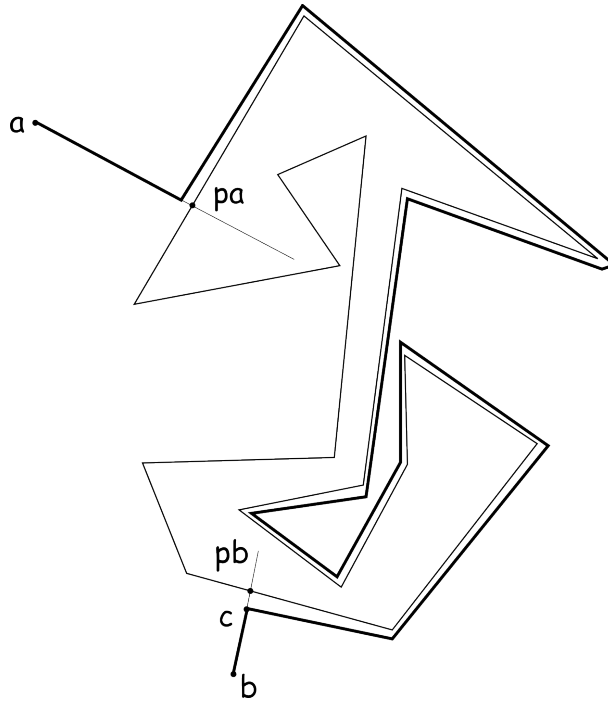


Figura 6: Construcción del camino η

γ), hasta que se encuentra con la semirecta U en un punto c , de manera que entre b y c aparece a los más un punto (necesariamente p_b) de la intersección entre U y γ . Completamos η uniendo c con b usando el segmento sobre U . Es claro que si c está antes de p_b (sobre U), entonces η no corta a γ . Si no es el caso, η corta en exactamente un punto (p_b) a γ . \square

La demostración del teorema se termina con

Proposición 13 *Las regiones Ω_I , Ω_E son conexas. Además, Ω_I es simplemente conexa.*

Demostración. Sean $a, b \in \mathbb{R}^2 \setminus \gamma$ con la misma paridad. Sea η el camino poligonal que une a con b dado por el lema anterior. Sea c el punto definido en la demostración del lema anterior. Usando el Lema 11 deducimos que a y c tienen la misma paridad. Si η cortase a γ (en un único punto necesariamente), las paridades de c y b serían diferentes, luego η no corta al polígono. Como Ω_E es una región conexa y no acotada, Ω_I no puede tener “hoyos”, los que forzosamente serían puntos en Ω_E que estarían desconectados de los puntos cercanos al infinito. \square

Ejercicio. Encuentre la razón por la cual la demostración precedente no es correcta en los casos de un polígono sobre un cilindro y sobre la banda de Möbius.