Curso de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
MAT 1532

Rolando Rebolledo

Curso de Ecuaciones Diferenciales, MAT1532,2001-2do. semestre

Advertencia:

Este material corresponde a las transparencias utilizadas en el curso oral de "Ecuaciones Diferenciales Ordinarias", dictado por el Profesor Rolando Rebolledo durante el segundo semestre lectivo 2001 en la Pontificia Universidad Católica de Chile. Las transparencias están basadas en el libro *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias* de Claudio Fernández y Rolando Rebolledo, 2ed., Ediciones P.U.C.-Alfa Omega, (1999).

Siendo sólo un auxiliar de la exposición oral, estas páginas no cubren completamente las lecciones entregadas en el aula y no pueden ser usadas como fuente única de estudio.

Capítulo I: Introducción

1. La Mecánica según Newton

2. Las ecuaciones diferenciales en otras ciencias.

La Mecánica según Newton

Resumiendo la discusión de este tema († Si quiere saber más venga a clases...), sea $x(t)$ la posición de un móvil de masa m y $p(t)$ su momentum. Las ecuaciones del movimiento se escriben en la forma

$$
\begin{aligned}
x'(t) &= \frac{1}{m}p(t) \\
p'(t) &= F(t) \\
x(0) &= x_0 \\
p(0) &= p_0,
\end{aligned}
$$

donde $F(t)$ es la fuerza en el instante $t \geq 0$ que engendra el movimiento del cuerpo.

Ejemplo 1. *Un ladrillo de masa m está sujeto por un resorte que a su vez tiene la segunda extremidad empotrada en un muro vertical. El ladrillo reposa sobre una superficie plana, que genera una fuerza de fricción lineal. El resorte ejerce una fuerza proporcional al desplazamiento con respecto a la posición de equilibrio. El origen del sistema de coordenadas se fija en la posición de equilibrio del sistema. De modo que si el desplazamiento es $x(t)$, entonces, la fuerza ejercida por el resorte es $F(t) = -kx(t)$, donde k es constante (constante de elasticidad). Plantear las ecuaciones del movimiento.*

Por la Segunda Ley de Newton:

$$mx''(t) = -\lambda x'(t) - kx(t) \tag{1}$$

Y suponemos que las condiciones iniciales son:

$$x(0) = x_0,\ v(0) = v_0 \tag{2}$$

Introduciendo las constantes

$$\alpha = \frac{\lambda}{m}\,\omega = \sqrt{\frac{k}{m}},$$

la ecuación se escribe

$$x'' + \alpha x' + \omega^2 x = 0 \tag{3}$$

Las ecuaciones diferenciales en otras ciencias

Poblaciones en competencia.

La tasa de crecimiento promedio por individuo, de una población dada, es la diferencia de las tasas de nacimiento y de muerte, que designamos por β y δ respectivamente. Supongamos que β es constante y que δ es proporcional a la cantidad de individuos de la población. Si $x(t)$ denota el tamaño de la población en el instante de tiempo t, entonces $\delta(t) = -\alpha x(t)$, con α constante. Este modelo se representa por la *ecuación logística*

$$\frac{1}{x(t)} x'(t) = \beta - \alpha x(t), \tag{4}$$

vale decir,

$$x'(t) = x(t)(\beta - \alpha x(t)), \ (t \geq 0). \tag{5}$$

Consideremos ahora dos especies que compiten por los recursos disponibles y sean $x_1(t)$, $x_2(t)$, los respectivos tamaños de sus poblaciones. Generalizando las ideas anteriores, obtenemos las llamadas *Ecuaciones de Lotka–Volterra*:

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= x_1(t)(\beta_1 - \alpha_{1,1}x_1(t) - \alpha_{1,2}x_2(t)) \\ x_2'(t) &= x_2(t)(\beta_2 - \alpha_{2,1}x_1(t) - \alpha_{2,2}x_2(t)). \end{aligned}$$

Capítulo II: Terminología básica

1. Terminología básica.
2. Reducción de ecuaciones al primer orden.
3. Un algoritmo de resolución de ecuaciones.

Definición 1. *A lo largo de todo este texto, consideraremos que la variable independiente es $t \in \mathbf{R}$, a menos que lo contrario se explicite. En la mayoría de los casos, esta variable representará el tiempo.*

Una **ecuación diferencial ordinaria** *es una que involucra a t y una función desconocida $x(t)$ así como a algunas de sus derivadas. Las derivadas se designan por los símbolos usuales x', $x^{(k)}$. El supremo de los k tales que $x^{(k)}$ aparece en la ecuación, se llama* **orden de la ecuación***. Así la forma general de la ecuación de orden k es*

$$F(t, x(t), x'(t), \ldots, x^{(k)}(t)) = 0. \tag{6}$$

Definición 2. *Diremos que la ecuación diferencial de orden k se expresa en* **forma normal** *si podemos despejar $x^{(k)}$ de la expresión (6), vale decir:*

$$x^{(k)}(t) = f(t, x(t), x'(t), \ldots, x^{(k-1)}(t)). \qquad (7)$$

Se puede observar que F en (6) es una función de $k+2$ variables, en tanto que f depende de $k+1$ variables. Supondremos en general que $x(t)$ es una función con valores en $\mathbf{R}^d$, de modo que sus derivadas en cada punto t son también vectores de $\mathbf{R}^d$. En consecuencia, para que (6) tenga sentido, es necesario que F esté definida en un dominio $D(F)$ contenido en $\mathbf{R}^{d(k+1)+1}$ y con valores en $\mathbf{R}$. Por su parte, f debe estar definida en un dominio $D(f) \subset \mathbf{R}^{dk+1}$ con valores en $\mathbf{R}^d$.

Teorema 1. *Sea F una función definida y de clase C^1 sobre un abierto $U \subset \mathbf{R}^n$, con valores reales. Sea $a \in U$, tal que $F(a) = 0$. Se supone además que*

$$\frac{\partial F}{\partial x_n}(a) \neq 0.$$

Entonces existe una vecindad V de $(a_1, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbf{R}^{n-1}$ y una función $\varphi : V \to \mathbf{R}$ tal que

(i) $V \times \varphi(V) \subset U$,

(ii) $F(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) = 0$ *si y sólo si*

$$x_n = \varphi(x_1, \ldots, x_{n-1})$$

.

Además φ es diferenciable y

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(a_1, \ldots, a_{n-1}) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(a_1, \ldots, a_n)}{\frac{\partial F}{\partial x_n}(a_1, \ldots, a_n)}. \qquad (8)$$

Definición 3. *Dada una función f cuyo dominio de definición $D(f)$ sea una parte de $\mathbf{R}^{nd+1}$ y con valores en $\mathbf{R}^d$, una* **solución** *de la ecuación diferencial de orden n, expresada en forma normal*

$$x^{(n)} = f(t, x, x', \ldots, x^{(n-1)}), \tag{9}$$

es una función $x = \varphi(t)$, definida en un intervalo $D(\varphi)$ de la recta real y con valores en $\mathbf{R}^d$, tal que

$$\varphi^{(n)}(t) = f(t, \varphi(t), \varphi'(t), \ldots, \varphi^{(n-1)}(t)), \tag{10}$$

para todo punto $t \in D(\varphi)$.

Las ecuaciones diferenciales de cualquier orden se pueden reducir a un sistema de primer orden de la forma

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \tag{11}$$

donde,

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \tag{12}$$

Ejemplo 2. *Reducir a una ecuación de primer orden el sistema*

$$x_1'' = x_1' x_2 \tag{13}$$

$$x'' = x_1^2 + (x_2')^2 \tag{14}$$

¿Cómo saber si una ecuación diferencial tiene solución antes de resolverla?

Consideremos el PVI

$$\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{15}$$

Observemos que este PVI es equivalente a la ecuación integral

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(s, x(s))ds. \tag{16}$$

Estudiemos un algoritmo de resolución de esta última ecuación.

† Si quiere saber más venga a clases...

Capítulo III: Ecuaciones escalares de primer orden

En este capítulo nos concentraremos en el estudio de la ecuación de primer orden

$$x' = f(t, x), \tag{17}$$

donde t varía sobre $\mathbf{R}$ y la función desconocida $x(t)$ toma también sus valores en dicho espacio en un primer caso: así entonces, $D(f) \subset \mathbf{R}^2$. Posteriormente permitiremos a $x(t)$ tomar sus valores sobre el espacio de los números complejos $\mathbf{C}$. En ese caso $D(f)$ es un subconjunto de $\mathbf{R} \times \mathbf{C}$.

Temario

1. Ecuaciones con variables separables.
2. Ecuaciones lineales.
3. Diferenciales exactos.
4. Reducción de ecuaciones al caso lineal.
5. Introducción a los sistemas dinámicos.

Problema 1. *En una población dada, sea $x(t)$, (respectivamente $1 - x(t)$), la proporción de individuos enfermos, (resp. de individuos sanos), en el instante t. Así, $x'(t)$ mide la rapidez de propagación de la enfermedad. Suponga que la enfermedad se propaga por contactos entre individuos sanos y enfermos, o sea, $x'(t)$ es proporcional al producto $x(t)(1 - x(t))$ y se tiene la ecuación $x' = \alpha x(1 - x)$.*

Demuestre que aún cuando inicialmente haya muy pocos individuos enfermos, la epidemia terminará por alcanzar a toda la población.

Extienda el estudio al caso en que la epidemia se propaga según la ecuación $x' = ax - bx^2$, donde $a,\ b > 0$ son constantes. Suponga que $x(0) = x_0 > 0$. Pruebe que la proporción de individuos enfermos tiene limite cuando $t \to \infty$. ¿Cúal es el límite?

Algunas indicaciones para resolver el problema anterior.

Se puede responder a las preguntas sin resolver las ecuaciones diferenciales. Para ello,

- Comience por encontrar los puntos de equilibrio del sistema físico: son las soluciones constantes $\varphi(t) = c$ de la ecuación diferencial. Ellos son: $c_1 = 0$, $c_2 = 1$, que corresponden a las raíces de la ecuación

$$\alpha c(1 - c) = 0.$$

- Luego, basta observar que toda solución $\varphi(t, x_0)$, que parte de x_0 en $t = 0$, verifica:

$$\varphi(t, x_0) = x_0 + \int_0^t \alpha\varphi(s, x_0)\,(1 - \varphi(s, x_0))\,ds.$$

Como la función $x \mapsto \alpha x(1-x)$ es positiva para todo $x \in [0,1]$, resulta que la integral crece cuando $x_0 > 0$, de modo que la función $\varphi(t, x_0)$ converge hacia el punto de equilibrio $c_2 = 1$. En el caso que $x_0 = c_1 = 0$, la función $\varphi(t, x_0) = 0$ obviamente.

Lo anterior se ve gráficamente en un diagrama de fase que muestra que 1 es un punto **atractor**, en tanto 0 es **repulsor**.

. $0 \longrightarrow 1$

† Si quiere saber más venga a clases...

Definición 4. *Diremos que la ecuación (17) es de* variables separables *si la función $f : D(f) \to \mathbf{R}$ se escribe en la forma*

$$f(t,x) = g(t)h(x), \ (t,x) \in D(f). \tag{18}$$

Teorema 2. *Suponemos que la función f satisface la descomposición (18), donde g (respectivamente $1/h$) está definida y es integrable sobre un intervalo $D(g)$ (respectivamente $D(1/h)$) de $\mathbf{R}$. Entonces, una función φ tal que $D(\varphi) \subset D(g)$ y $\varphi(D(\varphi)) \subset D(1/h)$ es solución de*

$$x' = g(t)h(x), \tag{19}$$

si y sólo si verifica la relación

$$\int_{\varphi(t_0)}^{\varphi(t)} \frac{dy}{h(y)} = \int_{t_0}^{t} g(s)ds, \tag{20}$$

para todos $t, \ t_0 \in D(\varphi)$.

La ecuación lineal homogénea

Proposición 1. *Dada una función $a : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ continua, la forma general φ de las soluciones de la ecuación lineal homogénea de primer orden*

$$z' = a(t)z \tag{21}$$

es

$$\varphi(t) = C \exp\left(\int_{t_0}^{t} a(s)ds\right),\ (t \in \mathbf{R}), \tag{22}$$

donde $C \in \mathbf{C}$ es una constante arbitraria y t_0 un punto inicial arbitrario.

La ecuación lineal no homogénea

Sea $b : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ otra función continua y busquemos una solución de la ecuación no homogénea

$$x' = a(t)x + b(t). \tag{23}$$

La solución de la ecuación homogénea se escribe

$$\varphi_h(t) = Ce^{\int_0^t a(s)ds}.$$

Buscamos una solución particular de (23) que se escriba en la forma

$$\varphi_p(t) = u(t)e^{\int_0^t a(s)ds},$$

y que verifique $\varphi_p(0) = 0$.

Teorema 3. *La solución general φ de la ecuación lineal no homogénea*

$$x' = a(t)x + b(t),$$

se escribe como una suma $\varphi = \varphi_h + \varphi_p$, donde φ_h es la solución general de la ecuación homogénea $x' = a(t)x$ y φ_p es una solución particular de la ecuación no homogénea.

$$\varphi(t) = Ce^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds} + \int_{t_0}^{t} G(t,s)b(s)ds,$$

donde

$$G(t,s) = e^{\int_s^t a(r)dr}.$$

Problema 2. *Encontrar la solución de la ecuación diferencial del oscilador armónico:*

$$x'' + \omega^2 x = 0,$$

usando el Principio de Conservación de la Energía.

† Si quiere saber más venga a clases...

Las ecuaciones diferenciales exactas

Teorema 4. *Sean M/N, $\partial M/\partial x$, $\partial N/\partial t$ funciones contínuas para $\alpha < t < \beta$, $a < x < b$. Entonces una condición necesaria y suficiente para que*

$$x' = -\frac{M(t,x)}{N(t,x)} \tag{24}$$

sea una ecuación exacta, es que se cumpla la ecuación

$$\frac{\partial M}{\partial x}(t,x) = \frac{\partial N}{\partial t}(t,x), \tag{25}$$

para todo punto $(t,x) \in]\alpha,\beta[\times]a,b[$.

Problema 3. *La* fuerza de restauración $-f(x)$ *de un resorte es aquella ejercida por él sobre un punto situado en la abcisa* x*, colocando el origen en el punto de equilibrio. Una tal fuerza debe satisfacer la condición* $xf(x) > 0$ *para todo* $x \neq 0$ *suficientemente pequeño. Esta desigualdad expresa el hecho de que la fuerza de restauración se opone a la compresión (*$x < 0$*) y a la extensión (*$x > 0$*) del resorte. La fuerza de restauración debe además satisfacer* $f(0) = 0$ *para que el resorte no ejerza fuerza alguna si no se comprime ni se extiende. Si existe una constante* $k > 0$ *tal que* $f(x)/x < k$ *para todo valor suficientemente pequeño de* $x \neq 0$*, se dice que el resorte es* blando*, en caso contrario se dice* duro*.*

1. *Considere la fuerza:*

$$-f(x) = -x + x^3,$$

y pruebe que si $|x| < 1$*,* f *satisface la desigualdad de las fuerzas restauradoras. Deduzca que ella corresponde a un caso de resorte blando.*

2. *Establezca la ecuación del movimiento debido a la fuerza restauradora anterior, en el caso de ausencia de roce.*

3. *Obtenga una curva integral para la ecuación anterior y resuélvala en forma* **implícita**. *[Indicación: multiplique su ecuación por $y = x'$ e integre, para obtener $U(x, y)$; o bien, encuentre el potencial que corresponde a la fuerza restauradora y recuerde que la energía total se conserva].*

4. *Dibuje el diagrama de fase correspondiente.*

Factores integrantes

El propósito es resolver una ecuación diferencial de la forma

$$x' = -\frac{P(t,x)}{Q(t,x)}, \tag{26}$$

cuando

$$\frac{\partial P}{\partial x}(t,x) \neq \frac{\partial Q}{\partial t}(t,x), \tag{27}$$

para algún punto (t,x) en el dominio de definición común a P y Q.

El método consiste en multiplicar a la vez P y Q por un **factor integrante** $\mu(t,x)$, de modo que $M(t,x) = \mu(t,x)P(t,x)$ y $N(t,x) = \mu(t,x)Q(t,x)$ satisfagan (25). Esto establece una condición sobre las derivadas parciales de μ, pero no determina este tipo de funciones de manera única. En efecto, (25) implica

$$(\frac{\partial P}{\partial x})\mu + P\frac{\partial \mu}{\partial x} = (\frac{\partial Q}{\partial t})\mu + Q\frac{\partial \mu}{\partial t}. \tag{28}$$

Obviamente (28) no permite determinar μ completamente. En algunos casos es útil agregar alguna información sobre la forma deseada de μ. Por ejemplo, supongamos que buscamos un factor integrante que se escriba en la forma de un producto de funciones:

$$\mu(t,x) = a(x)b(t). \tag{29}$$

Reemplazando en (28) y reagrupando términos según a y b, se obtiene:

$$P\frac{a'(x)}{a(x)} + \frac{\partial P}{\partial x} = Q\frac{b'(t)}{b(t)} + \frac{\partial Q}{\partial t}, \tag{30}$$

y para resolver esta última ecuación, podemos escoger a'/a (ó b'/b) igual a una función conocida de x (ó de t), resolviendo la ecuación para el otro cuociente.

Reducción de ecuaciones al caso lineal de primer orden

La Ecuación de Bernoulli

Consideremos la ecuación

$$x' + p(t)x = q(t)x^n, \tag{31}$$

donde p y q son funciones reales continuas definidas sobre un intervalo I de la recta real **Solución trivial:** $x(t) = 0$

Solución no trivial: Si $x(t) \neq 0$ en el intervalo I, podemos dividir por x^n ambos miembros de la ecuación y sustituímos $y = x^{-(n-1)}$. Luego

$$y' = \frac{d}{dt}y = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = -(n-1)x^{-n}x',$$

y la ecuación de Bernoulli se transforma en

$$y' = (n-1)p(t)y - (n-1)q(t), \tag{32}$$

que es una ecuación lineal no homogénea que sabemos resolver: su solución general está dada por

$$y(t) = Ce^{(n-1)\int_{t_0}^{t} p(s)ds}$$
$$-(n-1)\left(\int_{t_0}^{t} q(\tau)e^{(-(n-1)\int_{t_0}^{\tau} p(s)ds)}d\tau\right)e^{(n-1)\int_{t_0}^{t} p(s)ds}.$$

Ecuaciones no lineales homogéneas de grado 0

Nos referimos a ecuaciones del tipo

$$x' = f(\frac{x}{t}) \tag{33}$$

cuando $t \neq 0,\ t \in \mathbf{R}$, y f es una función contínua.

En este caso una sustitución del tipo $x = tv$ nos da

$$x' = v + tv',$$

que reemplazada en la ecuación diferencial, la transforma en

$$v + tv' = f(v), \tag{34}$$

soluble por separación de variables.

Problema 4. Un conejo parte del origen y corre por el eje y positivo con velocidad a. Al mismo tiempo, un perro que corre con velocidad b sale del punto $(c, 0)$ y persigue al conejo. El propósito de este problema es determinar la trayectoria $y(x)$ que sigue el perro.

Notar que la variable independiente que interesa tener en la ecuación diferencial de la curva es x; el tiempo t es aquí una variable que se utilizará en forma auxiliar en el planteamiento, pero que se buscará eliminar en la expresión final.

1. Dado un instante t cualquiera, el conejo se encontrará en la posición $C = (0, at)$ del plano xy y llamamos $P = (x, y)$ a las coordenadas de la posición del perro. Observando que el trazo PC es tangente a la trayectoria buscada, obtenga la ecuación diferencial que satisface $y(x)$.

2. Derivando la expresión anterior con respecto a x

pruebe que se tiene

$$x\frac{d^2y}{dx^2} = -a\frac{dt}{dx}. \tag{35}$$

3. Para calcular dt/dx en la ecuación anterior comience por obtener el valor de la derivada ds/dx de la longitud s del arco de curva descrito por $y(x)$. Para este efecto, recuerde que

$$ds^2 = dx^2 + dy^2,$$

y que s crece si x decrece en nuestro caso.

4. Continuando con el cálculo de dt/dx, observe que ds/dt representa la velocidad del perro que es constante y conocida según los datos del problema. Usando este hecho y el valor de ds/dx, calcule dt/dx.

5. Demuestre entonces que la ecuación buscada de la curva es

$$x\frac{d^2y}{dx^2} = k\sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2}, \tag{36}$$

donde $k = a/b$.

6. Mediante la sustitución $p = \frac{dy}{dx}$, obtendrá una ecuación de primer orden en p. Resuelva dicha ecuación. Concluya usando p para determinar y.

Introdución a los sistemas dinámicos

En la Mecánica de Newton un sistema físico queda representado por dos datos: su posición $q(t)$ y su momento $p(t)$ (que es igual a su masa por la velocidad, de modo que también se puede usar $q'(t)$ en vez de $p(t)$). El par $x(t) = (q(t), p(t))$ recibe el nombre de **estado del sistema en el tiempo** t. Llamemos Σ el espacio de estados, también conocido como **espacio de fase**. En general, Σ es un subconjunto de $\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d$.

La Física Clásica asegura, entonces, que el sistema queda completamente determinado si conocemos

(i) Un estado **inicial** $x(t_0) = (q(t_0), p(t_0))$;

(ii) su evolución en un intervalo de tiempo "infinitesimal" $[t, t + dt]$.

Para escribir rigurosamente la frase (ii) disponemos ahora de los útiles matemáticos apropiados: las ecuaciones diferenciales. En particular, en el caso de la Mecánica, las ecuaciones de Newton.

Vale decir, retomando nuestras notaciones, escribamos el tipo de ecuación diferencial que satisfacen los estados:

$$x' = f(t, x) \tag{37}$$

y supondremos que dada una condición inicial, el problema asociado tiene una solución única (se verá en un capítulo posterior la demostración de ese teorema fundamental).

Definamos una transformación sobre Σ de la manera siguiente:

$$\theta_{(t_0,t)} : \Sigma \to \Sigma,$$

de modo que para cada $x_0 \in \Sigma$, $\theta_{(t_0,t)}(x_0) = \varphi(t)$ es la solución del problema con valores iniciales (t_0, x_0). En otros términos $\theta_{(t_0,t)}$ envía el estado inicial al estado del sistema en el instante t. Esta aplicación recibe el nombre de **flujo** de las soluciones de la ecuación diferencial. En ella se resumen los postulados (i) y (ii) de la Física Clásica.

Proposición 2. *El flujo satisface las propiedades*

$$\theta_{(t,t)} = \textit{identidad}, \tag{38}$$

$$\theta_{(t_1,t)} \circ \theta_{(t_0,t_1)} = \theta_{(t_0,t)}. \tag{39}$$

Demostración. La primera propiedad es evidente, ya que

$$\theta_{(t_0,t)}(x_0) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \theta_{(t_0,s)}(x_0))ds. \tag{40}$$

La segunda propiedad es bastante intuitiva. En efecto, si se observa el significado del miembro izquierdo, éste nos dice que si se evoluciona primero de t_0 a t_1, llegando a un estado $\theta_{(t_0,t_1)}(x_0)$, y se continúa luego la evolución hasta t, se llega finalmente al estado $\theta_{(t_1,t)} \circ \theta_{(t_0,t_1)}(x_0)$. La igualdad nos dice que lo anterior equivale a evolucionar de t_0 a t sin interrupción. La demostración se hace probando que $\theta_{(t_1,t)} \circ \theta_{(t_0,t_1)}(x_0)$ y $\theta_{(t_0,t)}(x_0)$ son dos soluciones de la ecuación diferencial con igual valor en el punto t_1 y deben, por lo tanto, coincidir porque hemos supuesto unicidad de la solución. $\square$

El flujo de una ecuación autónoma

Supongamos además que $f(t,x) = f(x)$ no depende de t. Se dice que la ecuación es autónoma. Notemos que entonces tenemos

Proposición 3. *Para todos* $t_0, t, h \in \mathbf{R}$*:*

$$\theta_{(t_0+h,t+h)} = \theta_{(t_0,t)} \tag{41}$$

Demostración. Sea $x_0 \in \Sigma$ y llamemos $\varphi(t) = \theta_{(t_0+h,t+h)}(x_0)$. Esta función verifica:

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= f(\varphi(t)) \\ \varphi(t_0) &= x_0. \end{aligned}$$

No es difícil obtener entonces la igualdad anunciada pues $\theta_{(t_0,t)}(x_0)$ es también solución de la misma ecuación y satisface la condición $\theta_{(t_0,t_0)}(x_0) = x_0$. $\square$

Las propiedades del flujo nos muestran que podemos escoger $t_0 = 0$, por ejemplo y denotar θ_t el operador $\theta_{(0,t)}$. Entonces, se tendrá que $\theta_t : \Sigma \to \Sigma$

satisface las propiedades siguientes

$$\theta_0 = \text{identidad} \tag{42}$$

$$\theta_t \circ \theta_s = \theta_{s+t},\ (s, t \in \mathbf{R}). \tag{43}$$

Se dice que la familia de transformaciones $(\theta_t)_{t\in\mathbf{R}}$ es un **Sistema Dinámico** sobre el espacio de estados Σ. Un tal sistema define un grupo de transformaciones diferenciables de clase C^1 sobre Σ.

Diagramas de fase

Un sistema dinámico como el anterior, puede ser estudiado en forma cualitativa mediante gráficos de las funciones $t \mapsto \theta_t(x_0)$ cuando x_0 varía sobre Σ. Son los llamados diagramas de fase. Para ilustrar este tipo de estudio, veamos el caso del oscilador armónico. En ese caso cada estado será $x(t) = (q(t), p(t))$ donde q es la posición, que verifica la ecuación

$$q'' + \omega^2 q = 0,\ (\omega^2 = \frac{k}{m}). \tag{44}$$

y tomamos $m = 1$.

Entonces, como hemos visto,

$$q(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \operatorname{sen} \omega t,$$

y $p(t) = q'(t)$, que fueron obtenidos a partir de la integral

$$U(q,p) = \frac{1}{2}p^2 + \frac{k^2}{2}q^2.$$

Para obtener los distintos gráficos bastará expresar las curvas de nivel de U en Σ, vale decir, aquellas $t \mapsto (q(t), p(t))$ para las cuales $U(q(t), p(t)) = const.$ Dichas curvas son elipses en el plano. Quiere decir que para cada $x_0 = (q_0, p_0) \in \Sigma$, el flujo $t \mapsto \theta_t(x_0)$ describe la elipse $U(\theta_t(x_0)) = U(q_0, p_0)$.

Aproximación de soluciones en tiempo discreto: Método de Euler

Considerar el PVI:

$$\begin{aligned} x' &= f(t,x) && (45) \\ x(t_0) &= x_0. && (46) \end{aligned}$$

Tiempos de discretización:

$$t_0 < t_1 < \ldots < t_n < \ldots$$

$$\Delta_n = t_{n+1} - t_n.$$

$$\begin{aligned} y_1 &\sim \theta_{t_0,t_1}(x_0) \\ y_2 &\sim \theta_{t_0,t_1}(x_0) \\ &\ldots \\ y_n &\sim \theta_{t_0,t_n}(x_0) \\ &\ldots \end{aligned}$$

$$y_{n+1} = y_n + f(t_n, y_n)\Delta_n. \tag{47}$$

Error de discretizacón local:

$$\ell_{n+1} = \theta_{t_n,t_{n+1}}(y_n) - y_{n+1}.$$

Error de discretización global:

$$\epsilon_{n+1} = \theta_{t_0,t_{n+1}}(x_0) - y_{n+1}.$$

Usando el desarrollo de Taylor de una función $x(t)$ hasta el segundo orden, se obtiene:

$$x(t_{n+1}) = x(t_n) + x'(t_n)\Delta_n + \frac{1}{2}x''(\xi_n)\Delta_n^2,$$

para un ξ_n tal que $t_n < \xi_n < t_{n+1}$. Si $x(t) = \theta_{t_n,t}(y_n)$ se tiene

$$x(t_{n+1}) = x(t_n) + f(t_n, x(t_n))\Delta_n + \frac{1}{2}x''(\xi_n)\Delta_n^2.$$

Aquí $x(t_n) = y_n$, luego

$$|\ell_{n+1}| \leq \frac{1}{2} M \Delta_n^2, \tag{48}$$

si

$$\begin{aligned} M &= \sup_{(t,x)\in[t_0,T]\times R} \left|\frac{\partial f(t,x)}{\partial t}\right| \\ &+ \sup_{(t,x)\in[t_0,T]\times R} \left|\frac{\partial f(t,x)}{\partial x} f(t,x)\right|. \end{aligned}$$

Capítulo IV: Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales

Temario:

1. Ecuaciones diferenciales lineales homogéneas con coeficientes constantes.

2. Ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes y no homogéneas.

3. Ecuaciones diferenciales lineales homogéneas con coeficientes variables.

4. Ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas con coeficientes variables.

Ecuaciones diferenciales lineales homogéneas con coeficientes constantes

Para ilustrar los procedimientos que usaremos en este capítulo, comencemos por analizar una ecuación de segundo orden bien conocida: la del oscilador armónico:

$$mx'' + \lambda x' + kx = 0, \tag{49}$$

que se puede escribir en forma normal:

$$x'' + px' + qx = 0, \tag{50}$$

donde $p = \lambda/m$, $q = k/m$.

Ya hemos resuelto esta ecuación cuando hay ausencia de roce ($\lambda = 0$), reduciéndola a una de primer orden, usando el principio de conservación de la energía. En ese caso toda solución se escribe como una combinación lineal de la forma

$$\varphi(t) = c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t} = k_1 \operatorname{sen}(\omega t) + k_2 \cos(\omega t),$$

donde $\omega = \sqrt{k/m}$.

Si suprimimos el resorte ($k = 0$), también podemos hallar fácilmente una solución por reducción al primer orden. En ese caso la ecuación se escribe primero en la variable $y = x'$ en la forma

$$y' + py = 0,$$

cuya solución es de la forma $\psi(t) = d_1 e^{-pt}$. Luego, la solución de (50) será en este caso de la forma

$$\varphi(t) = d_2 - \frac{d_1}{p} e^{-pt}.$$

Es de particular importancia la forma exponencial de las soluciones que se obtiene en los dos casos particulares analizados.

Veamos de qué manera podemos usar esta observación en el caso general, explorando dos interpretaciones:

1. Buscamos bajo qué condiciones una función exponencial de la forma $e^{\lambda t}$ puede ser solución de (50). La ecuación se escribe:

$$\left(\lambda^2 + p\lambda + q\right) e^{\lambda t} = 0. \tag{51}$$

Como una exponencial nunca se anula, lo anterior es posible si y sólo si

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0.$$

Es decir, para que $\exp(\lambda t)$ sea solución de la ecuación diferencial, λ tiene que ser escogido como una raíz del *polinomio característico* $L(\lambda) = \lambda^2 + p\lambda + q$.

2. Reduzcamos la ecuación a un sistema de ecuaciones de primer orden:

$$X = \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}$$

y

$$X' = AX, \tag{52}$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q & -p \end{pmatrix}.$$

Definamos la matriz exponencial

$$e^{tA} = \sum_{n \geq 0} \frac{t^n A^n}{n!}, \tag{53}$$

lo que, como se verá más adelante, tiene sentido pues la serie de término general $t^n A^n / n!$ es normalmente uniformemente convergente para $t \in I$, en todo intervalo real acotado I. La convergencia uniforme señalada permite derivar la serie término a término, de donde

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} e^{tA} &= \frac{d}{dt}\left(I + tA + \frac{1}{2} t^2 A^2 + \ldots + \frac{1}{n!} t^n A^n + \ldots \right) \\ &= A \left(I + tA + \frac{1}{2} t^2 A^2 + \ldots + \frac{1}{n!} t^n A^n + \ldots \right) \\ &= A e^{tA}. \end{aligned}$$

Entonces, si v es un vector cualquiera y $\phi(t) =$

$e^{tA}v$, esta función resuelve la ecuación (52), ya que

$$\phi(t)' = e^{tA}v' = Ae^{tA}v = A\phi(t).$$

Nuestro problema se ha reducido entonces a calcular $e^{tA}v$.

† Si quiere saber más venga a clases...

La ecuación lineal homogénea con coeficientes constantes

En general, un sistema de ecuaciones diferenciales lineales homogéneas, con coeficientes constantes, de primer orden, se escribe en la forma

$$X' = AX, \tag{54}$$

donde A es una matriz de $d \times d$ componentes complejas; la función incógnita X está definida en $\mathbf{R}$ con valores en $\mathbf{C}^d$.

Por otra parte, una ecuación escalar de la forma

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} x' + a_n x = 0, \tag{55}$$

se reduce a un sistema del tipo (54) mediante la introducción de los siguientes vectores y matrices:

$$X = \begin{pmatrix} x \\ x' \\ \vdots \\ x^{(n-1)} \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{pmatrix}.$$

Al revés, dado un sistema de la forma (54), no siempre existe una ecuación escalar del tipo (55) que le corresponda. Es decir, la categoría más general es la de los sistemas (54) y su teoría incluye a la de las ecuaciones (55). Nos concentraremos entonces en la resolución de (54).

Los resultados principales

Teorema 5. *La solución general del sistema homogéneo* (54) *es de la forma*

$$\phi(t) = e^{At}C, \tag{56}$$

donde C es un vector de constantes.

Corolario 1. *El espacio vectorial de soluciones del sistema de ecuaciones* (54) *es de dimensión d.*

Los dos resultados anteriores nos permiten resolver en toda generalidad tanto sistemas de ecuaciones como ecuaciones lineales de orden n.

Corolario 2. *Dada la ecuación diferencial lineal homogénea de orden n, con coeficientes constantes,*

$$L(D)x = x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}x' + a_n x = 0, \tag{57}$$

el espacio vectorial de sus soluciones es de dimensión n.

Consecuencias

Para escribir la solución general de un sistema de d ecuaciones, basta determinar una **base** de soluciones $\phi_1, \ldots, \phi_d$. Los elementos de la base son de la forma

$$\phi_i = e^{tA} v_i,$$

donde los vectores v_i, $(i = 1, \ldots, d)$ constituyen una base de $\mathbf{C}^d$. Podemos entonces escoger los v_i de la manera más conveniente para simplificar el cálculo de las expresiones $\exp(tA)v_i$.

Idea general: Sea $\lambda \in \mathbf{C}$, como λI y $A - \lambda I$ conmutan, resulta $\exp(tA) = \exp(\lambda t)\exp(t(A - \lambda I))$ y

$$e^{tA}v = e^{\lambda t}\left(v + t(A - \lambda I)v + \frac{1}{2}t^2(A - \lambda I)^2 v + \ldots\right).$$

Lo óptimo es encontrar vectores v de modo que la serie anterior se transforme en una suma finita, para lo cual es necesario que a partir de algún rango k se tenga $(A - \lambda I)^k v = 0$.

Estudio de un ejemplo

Consideremos el caso de un sistema de 2 ecuaciones:

$$X' = AX,$$
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Para estudiar si existen pares (λ, v) de modo que $(A-\lambda I)^k v = 0$, para algún k, comenzamos por estudiar el polinomio característico de A, $L(\lambda) = \mathrm{det}(\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I})$. Las raíces de este polinomio son los **valores propios** de A.

Notar que en nuestro caso el polinomio característico de A puede ser escrito

$$L(\lambda) = \lambda^2 - \mathrm{tr}(\mathrm{A})\lambda + \mathrm{det}(\mathrm{A}).$$

El discriminante Δ vale entonces:

$$\Delta = (\mathrm{tr}(\mathrm{A}))^2 - 4\mathrm{det}(\mathrm{A})$$

Caso 1. Los valores propios de A son distintos.

$[(\mathrm{tr}(\mathrm{A}))^2 \geq 4\det(\mathrm{A}),\ \det(\mathrm{A}) > 0]$

En este caso, existen vectores propios linealmente independientes v_1, v_2 con $Av_1 = \lambda v_1$, $Av_2 = \lambda_2 v_2$. Además, la solución general tiene la forma,

$$\begin{aligned}\phi(t) &= c_1 e^{At} v_1 + c_2 e^{At} v_2 \\ &= c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2} v_2,\end{aligned}$$

con c_1 y c_2 constantes arbitrarias.

Caso 2. $\mathrm{tr}(\mathrm{A})^2 = 4\det(\mathrm{A})$.

Los valores propios son iguales:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(\mathrm{A}).$$

Entonces

$$(A - \lambda I)(A - \lambda I) =$$

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{a-d}{2}\right)^2 + bc & b\left(\frac{a-d}{2}\right) + b\left(\frac{d-a}{2}\right) \\ c\left(\frac{a-d}{2}\right) + c\left(\frac{d-a}{2}\right) & bc + \left(\frac{d-a}{2}\right)^2 \end{pmatrix}$$

Es decir $(A - \lambda I)^2 = 0$.

De lo anterior resulta

$$\begin{aligned} \exp(tA) &= \exp(\lambda t)[I + t(A - \lambda I)] \\ &= \begin{pmatrix} 1 + t\frac{a-d}{2} & tb \\ tc & 1 + t\frac{d-a}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Luego, la solución general de la ecuación se escribe en la forma

$$\phi(t) = e^{\lambda t} v_1 + t e^{\lambda t} v_2,$$

donde v_1, v_2 son dos vectores linealmente independientes.

Ejercicio 1. *Escriba todas las posibles soluciones que se obtienen en el caso de la ecuación escalar*

$$x'' + px' + qx = 0.$$

Resumen del cálculo de exponenciales de matrices en el caso general $d \times d$

- Si la matriz A tiene la forma de un bloque de Jordan, vale decir

$$A = J_{\lambda,m} = \lambda I + N, \tag{58}$$

donde $\lambda \in \mathbf{C}$ y N es nilpotente de orden m, i.e. $N^m = 0$. En tal caso,

$\exp(At) =$

$$\exp(\lambda t)\left(I + Nt + \ldots + \frac{1}{(m-1)!}N^{m-1}t^{m-1}\right).$$

En caso contrario,

- La matriz A no tiene la forma anterior que permite calcular fácilmente $\exp(At)$. Su polinomio característico $L(\lambda)$ se puede escribir en la forma

$$L(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1}(\lambda - \lambda_2)^{m_2}\cdots(\lambda - \lambda_q)^{m_q},$$

donde m_i es la multiplicidad de la raíz λ_i, ($i = 1, \ldots, q$, $m_1 + \ldots + m_q = d$). Por el Teorema de Jordan existe una matriz de cambio de base P tal que

$$A = PJP^{-1}, \tag{59}$$

donde J, escrita en bloques, es de la forma

$$J = \begin{pmatrix} J_{\lambda_1,m_1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & J_{\lambda_2,m_2} & \ldots & 0 \\ & \ldots & & \\ 0 & 0 & \ldots & J_{\lambda_q,m_q} \end{pmatrix}, \tag{60}$$

donde cada J_{λ_i,m_i} es un bloque de Jordan.

En tal caso,

$$\exp(At) = P^{-1}(\exp(Jt))\ P, \tag{61}$$

y

$$\exp(Jt) = \begin{pmatrix} e^{J_{\lambda_1,m_1}t} & \ldots & 0 \\ & \ldots & \\ 0 & \ldots & e^{J_{\lambda_q,m_q}t} \end{pmatrix}. \tag{62}$$

En la expresión anterior, cada bloque $\exp(J_{\lambda_i,m_i}t)$ se calcula como

$$\exp(J_{\lambda_i,m_i}t) =$$

$$\exp(\lambda_i t)\left(I + N_i t + \ldots + \frac{1}{(m_i-1)!}N^{m_i-1}t^{m_i-1}\right).$$

El caso particular de las ecuaciones escalares de orden n

Corolario 3. *Dada la ecuación diferencial lineal homogénea de orden n, con coeficientes constantes,*

$$L(D)x = x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}x' + a_n x = 0, \tag{63}$$

cuyo polinomio característico $L(\lambda)$ se escribe en la forma

$$L(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \cdots (\lambda - \lambda_q)^{m_q}, \tag{64}$$

con $m_1 + \ldots + m_q = n$, entonces una base de soluciones $(\varphi_i,\ i = 1, \ldots, n)$ se obtiene en la forma

$$\begin{aligned}
\varphi_i(t) &= t^{i-1} e^{\lambda_1 t},\ 1 \leq i \leq m_1; \\
\varphi_{m_1+i}(t) &= t^{i-1} e^{\lambda_2 t},\ 1 \leq i \leq m_2; \\
&\ldots \\
\varphi_{m_1+m_2+\ldots+m_{q-1}+i}(t) &= t^{i-1} e^{\lambda_q t},\ 1 \leq i \leq m_q.
\end{aligned}$$

En el caso particular en que todas las multiplicidades son unitarias ($m_i = 1$, $i = 1, \ldots, n$), la base se escribe simplemente

$$\varphi_i(t) = e^{\lambda_i t},\ i = 1, \ldots, n.$$

Estabilidad de sistemas lineales homogéneos en dimensión 2

En la siguiente sección presentaremos un estudio general acerca de la estabilidad para sistemas lineales con coeficientes constantes. Aquí, comenzamos por el caso más simple, el de los sistemas de dos ecuaciones en dos incógnitas. Consideremos entonces el sistema,

$$X' = AX,$$

donde,

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

El polinomio característico de la matriz de coeficientes A, puede ser escrito

$$L(\lambda) = \lambda^2 - \mathrm{tr(A)}\lambda + \mathrm{det(A)}.$$

El discriminante Δ vale entonces:

$$\Delta = (\mathrm{tr(A)})^2 - 4\mathrm{det(A)}$$

Caso 1

Los valores propios de A son reales, distintos y tienen el mismo signo. Esto ocurre cuando $(\mathrm{tr(A)})^2 \geq 4\mathrm{det(A)}$ y $\mathrm{det(A)} > 0$

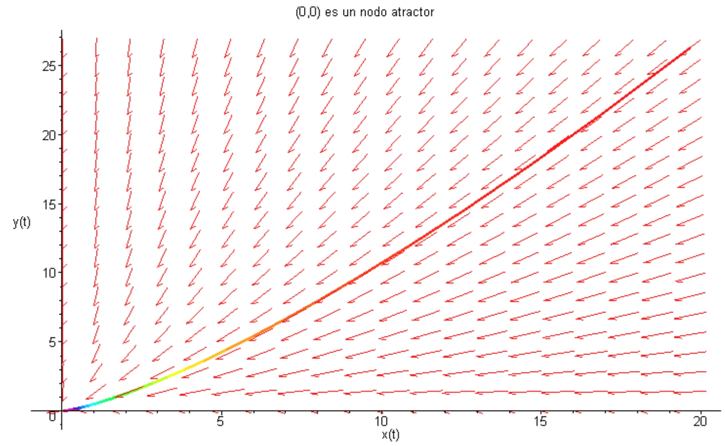
En este caso, existen vectores propios linealmente independientes v_1, v_2 con $Av_1 = \lambda_1 v_1$, $Av_2 = \lambda_2 v_2$. Además, la solución general tiene la forma,

$$\begin{aligned} \phi(t) &= c_1 e^{At} v_1 + c_2 e^{At} v_2 \\ &= c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2} v_2, \end{aligned}$$

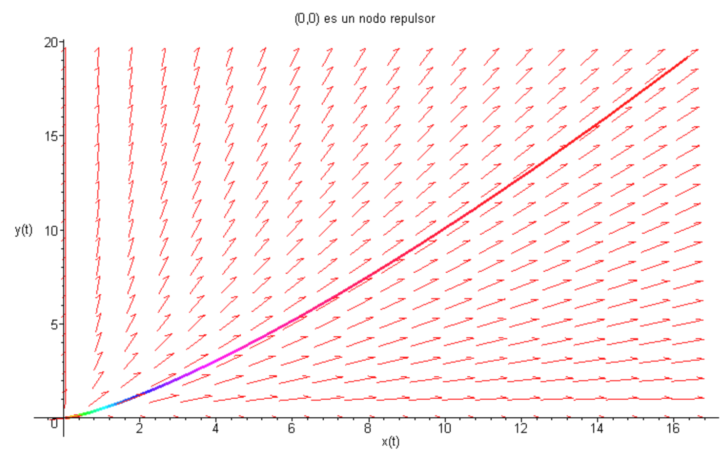
con c_1 y c_2 constantes arbitrarias.

El comportamiento asintótico de la solución general, para valores grandes de t, depende directamente del signo de los valores propios.

- **El origen es nodo estable o atractor o foco**: $\lambda_1, \lambda_2 < 0$. En este caso, $\phi(t) \to 0$, cuando $t \to \infty$ y, por lo tanto, toda solución es asintóticamente estable, para t positivo.



- **El origen es nodo inestable o repulsor o fuente**: $\lambda_1, \lambda_2 > 0$. Esta vez toda solución converge a infinito cuando $t \to \infty$.

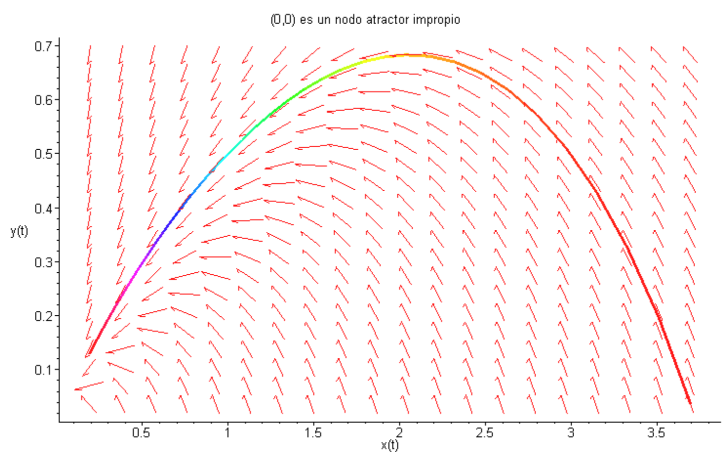


Caso 2

Los valores propios son reales e iguales. Esto ocurre si $\mathrm{tr}(\mathrm{A})^2 = 4\mathrm{dete}(\mathrm{A})$.

En este caso, la solución general tiene la forma $\phi(t) = e^{\lambda t}(v_1 + tv_2)$, con $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$.

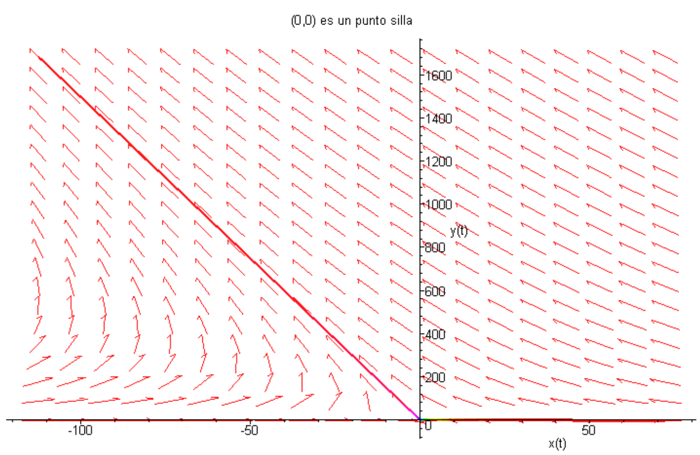
De nuevo el origen es un nodo estable si $\lambda < 0$ e inestable si $\lambda > 0$. Algunos autores llaman a este tipo de nodos, *nodos impropios*.



Caso 3

Los valores propios satisfacen $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$. Este caso se da cuando $\mathrm{tr(A)}^2 > 4\mathrm{det(A)}$ y $\mathrm{det(A)} < 0$. En este caso, hay soluciones de dos tipos: $e^{\lambda_1 t}v_1$, que converge a cero cuando $t \to \infty$ y $e^{\lambda_2 t}v_1$, que converge a infinito.

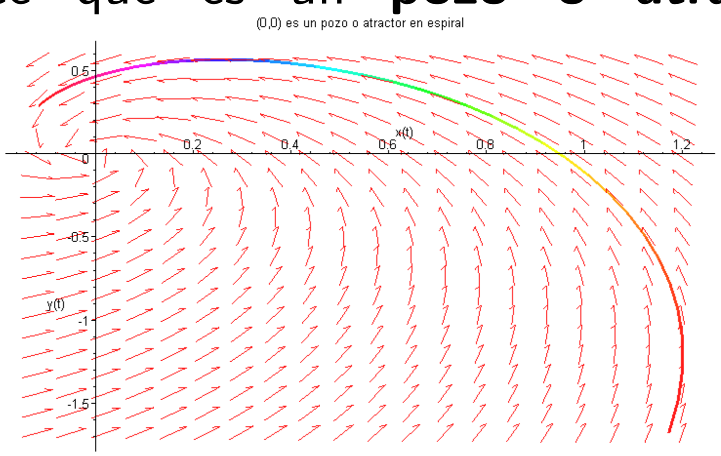
Aquí decimos que el origen es un **punto silla**.



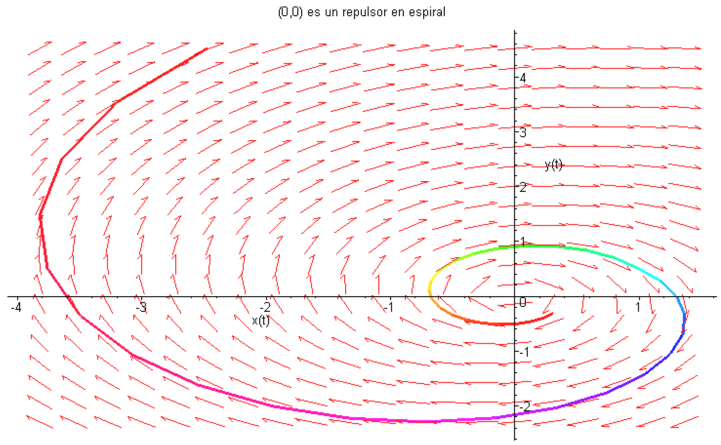
Caso 4

Los valores propios son números complejos conjugados, lo que ocurre si $\mathrm{tr}(A)^2 < 4\det(A)$. En este caso, las soluciones son espirales o elipses.

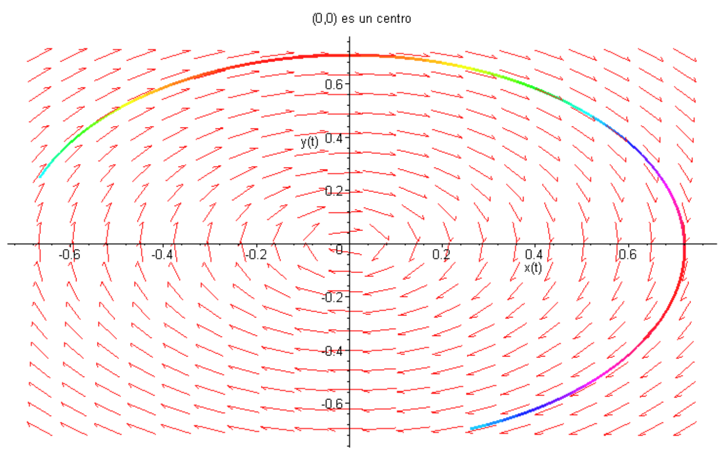
- Si $\mathrm{tr}(A) < 0$, tenemos órbitas en espiral, el origen es asintóticamente estable. Se dice que es un **pozo o atractor en espiral**.



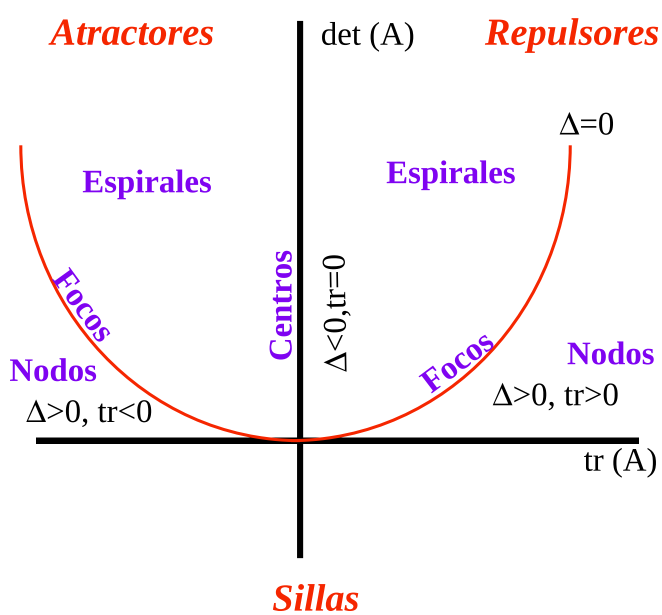
- Si $\mathrm{tr}(A) > 0$, el origen es un **repulsor en espiral**.



- Si $\mathrm{tr}(\mathrm{A}) = 0$, las órbitas son periódicas. El origen es estable y se dice que es un **centro**.



Resumen


Atractores
det (A)
Repulsores
Δ=0
Espirales
Espirales
Focos
Centros
Δ<0,tr=0
Focos
Nodos
Nodos
Δ>0, tr<0
Δ>0, tr>0
tr (A)
Sillas

Estabilidad para sistemas lineales en general

El caso general de sistemas lineales con coeficientes constantes de cualquier dimensión, puede ser analizado de manera similar al caso de dimensión 2. Dicho caso general tiene una respuesta completa, puesto que al menos teóricamente, sabemos cómo encontrar todas las soluciones de manera explícita. Por cierto, resulta más interesante el estudio de los sistemas no lineales, pero, como veremos más adelante, en algunos situaciones, este último podrá reducirse a un caso lineal.

Consideremos entonces el sistema lineal

$$x' = Ax, \tag{65}$$

donde A es una matriz constante $n \times n$. Notemos que la solución trivial $\phi(t) \equiv 0$ es un punto estacionario y por el resultado siguiente, basta estudiar su estabilidad.

Lema 1. *Toda solución del sistema $x' = Ax$ es estable si y sólo si la solución trivial es estable.*

Demostración. Supongamos que la solución nula es estable y sea $\phi(t)$ una solución cualquiera. Demostraremos que esta última es estable y para eso consideremos otra solución $\psi(t)$ tal que $\phi(0)$ está cerca de $\psi(0)$. Entonces, la diferencia $\phi(t) - \psi(t)$ es una solución cuyo valor inicial está cerca de 0 y como la solución trivial es estable, concluímos se mantiene cerca de 0, para todo valor de t. O sea ,$\psi(t)$ se mantiene cerca de $\phi(t)$, para todo t. $\square$

Teorema 6. *Si todos los valores propios de la matriz A tienen su parte real negativa, entonces las soluciones de $x' = Ax$ son estables , para valores positivos de t. Más aún, la solución trivial es asintóticamente estable.*

Demostración. Recordemos que en un capítulo anterior mostramos como calcular la solución general de un sistema con coeficientes constantes. En general, esta solución será una combinación lineal de vectores de la forma $e^{\lambda t}v$ o, cuando la matriz A no es diagonalizable, un polinomio en t por una combinación lineal de ese tipo. En cualquier caso, cuando los valores propios tienen su parte real negativa, la solución convergerá a cero, cuando t tienda a imfinito. Dejamos como ejercicio verificar que , si la solución parte inicialmente cerca del origen, entonces se mantiene cerca del origen para todo $t > 0$. Esto demuestra que la solución trivial es estable y, por el lema anterior, todas las soluciones son estables.

$\square$

Ecuaciones Diferenciales Lineales no homogéneas

En esta sección estudiaremos la resolución del sistema de ecuaciones diferenciales lineales

$$X' = AX + b(t), \tag{66}$$

donde A es una matriz de $d \times d$ componentes complejas y $b(t)$ una función vectorial con valores en $\mathbf{C}^d$.

Proposición 4. *Toda solución ϕ de la ecuación no homogénea se escribe como una suma*

$$\phi = \phi_g + \phi_p, \tag{67}$$

donde ϕ_g es solución general de la ecuación homogénea

$$X' = AX,$$

y ϕ_p es una solución particular cualquiera de la ecuación no homogénea.

Teorema 7. *La solución general ϕ de la ecuación no homogénea* (66) *se escribe en la forma*

$$\phi(t) = e^{At}C + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)} b(s) ds, \ , \tag{68}$$

donde t_0 es un punto arbitrario real y C es un vector constante cualquiera de $\mathbf{C}^d$.

La función matricial

$$G(t, s) = e^{A(t-s)},$$

se conoce con el nombre de *Función de Green*.

En lo que sigue veremos algunos métodos particulares para obtener la solución $\phi(t)$, basados en el Teorema anterior (cuya prueba se hace por el método de "variación de parámetros")

† Si quiere saber más venga a clases...

Método de aniquilación

Cuando la función b es solución de una ecuación diferencial homogénea con coeficientes constantes, los cálculos anteriores, conducentes a una solución particular ϕ_p de (66), pueden ser simplificados, según veremos a continuación.

Sea B otra matriz de $d \times d$, tal que

$$b'(t) = Bb(t). \tag{69}$$

Consideremos (66) junto con (69): tenemos un nuevo sistema de $2d$ ecuaciones diferenciales. Introducimos el vector de $2d$ componentes,

$$Y = \begin{pmatrix} X \\ b \end{pmatrix}$$

y la matriz de $2d \times 2d$ que consta de 4 bloques de $d \times d$:

$$Q = \begin{pmatrix} A & I \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

Con las notaciones anteriores, las dos ecuaciones (66) y (69) se sintetizan en:

$$Y' = QY. \tag{70}$$

Hemos cambiado así el problema de resolver una ecuación no homogénea por el de una ecuación homogénea con mayor número de incógnitas. La ecuación (70) puede ser resuelta usando las técnicas de la sección precedente, pero hay que tener en cuenta que al encontrar su solución general, hay d componentes de ella, las que corresponden a b en el vector Y, que son en realidad conocidas y eso hace que las d primeras componentes (las que contienen X) sólo dependerán de d constantes de integración, como se verá en el ejemplo más abajo. Obsérvese que si $L(\lambda)$ es el polinomio característico de A y $M(\lambda)$ es el de B, entonces

$$L(\lambda)M(\lambda)$$

es el polinomio característico de Q.

Este truco de cálculo se conoce como el *método de aniquilación* (se aniquila el término no homogéneo).

Aplicado en el caso particular de ecuaciones lineales de orden n, se puede interpretar así. El problema inicial consiste en resolver $L(D)x = f(t)$. Se observa enseguida que $f(t)$ resuelve una ecuación homogénea de la forma $M(D)f = 0$. Entonces, se aplica $M(D)$ a la ecuación original aniquilando el segundo miembro:

$$M(D)L(D)x = M(D)f = 0.$$

El nuevo operador diferencial $Q(D) = M(D)L(D)$ tiene polinomio característico

$$Q(\lambda) = M(\lambda)L(\lambda).$$

Se procede luego a resolver la ecuación homogénea asociada a $Q(D)$.

Método de los coeficientes indeterminados

Veamos ahora algunos casos en que ϕ_p puede ser obtenida reemplazando una función de una clase determinada en la ecuación original. Es otra variante del método de aniquilación. Sabemos que una forma de solución particular queda dada por

$$\phi_p(t) = e^{At} \int_{t_0}^{t} e^{-As} b(s) ds.$$

Supongamos que $b(s)$ se escriba

$$b(s) = e^{Bs} v, \tag{71}$$

donde B es una matriz de $d \times d$ y v un vector constante. Esto equivale a que b resuelva una ecuación lineal homogénea asociada a la matriz B. Estudiemos algunos de los casos en que (71) se simplifica. Uno de los más simples es cuando v es un vector propio correspondiente a un valor propio μ de B. **Supongamos que μ no es valor propio de A**. Entonces, si escogemos $t_0 = 0$,

$$\begin{aligned}
\phi_p(t) &= e^{At} \int_0^t e^{-As} e^{\mu s} v ds \; v \text{ es vector propio de } B, \\
&= e^{At} \int_0^t e^{(\mu I - A)s} v ds \\
&= e^{At} (\mu I - A)^{-1} [e^{(\mu I - A)t} - I] v \\
&= (\mu I - A)^{-1} [e^{\mu t} - e^{At}] v,
\end{aligned}$$

pues A y $(\mu I - A)$ conmutan.

El cálculo anterior nos muestra que ϕ_p tendrá una *forma exponencial*, determinada por las exponenciales de matrices. En general, si $b(t)$ es $(\exp(Bt))v$, sus componentes serán de la forma $p(t)\exp(\mu t)$ donde $p(t)$ es un polinomio y μ es raíz del polinomio característico de B. Asimismo, $\phi_p(t)$ tendrá una forma similar en dicho caso y en vez de perdernos en largos cálculos, podemos ensayar una solución ϕ_p de la ecuación no homogénea reemplazando en ella una función con componentes de la forma $q(t)\exp(\mu t)$, donde $q(t)$ es un polinomio, cuyos coeficientes se determinarán por simple identificación.

Sistemas homogéneos con coeficientes variables

En esta sección estudiaremos la ecuación homogénea con coeficientes variables:

$$X' = A(t)X, \tag{72}$$

donde X es el vector de incógnitas

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

y $A(t)$ es la matriz de coeficientes del sistema:

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}.$$

Supondremos en todo lo que sigue que las funciones $a_{ij}(t)$ son continuas, de modo que dado cualquier $x_0 \in \mathbf{C}^n$, el problema con valores iniciales

$$\begin{cases} X' & = A(t)X \\ X(t_0) & = x_0, \end{cases} \tag{73}$$

tiene una única solución.

Al igual que en el caso de coeficientes constantes, el conjunto de todas las soluciones de la ecuación (72) es un espacio vectorial. Más aún:

Teorema 8. *El conjunto de todas las soluciones de la ecuación* (72) *es un espacio vectorial de dimensión* n*.*

† Si quiere saber más venga a clases...

Llamamos **espacio solución** de la ecuación (72) al conjunto de todas sus soluciones. Para caracterizar dicho espacio, basta encontrar un conjunto linealmente independiente $\{\phi_1(t), \phi_2(t), \dots, \phi_n(t)\}$ que consiste de exactamente n soluciones. La solución general de (72) se expresa entonces como:

$$\phi(t) = c_1\phi_1(t) + c_2\phi_2(t) + \cdots + c_n\phi_n(t),$$

donde $c_1, c_2, \ldots, c_n$ son constantes arbitrarias.

Recordemos que en el caso de coeficientes constantes

$$X' = AX, \tag{74}$$

la solución general está dada por $\phi(t) = e^{At}C$, donde C es un vector de constantes. Notemos que $e^{At}C$ es una combinación lineal, con coeficientes arbitrarios, de las columnas de e^{At}. Esto expresa el hecho que las columnas de e^{At} generan al espacio solución y por lo tanto constituyen una base.

Asociado a la ecuación (72), consideremos el **sistema matricial**

$$\Phi' = A(t)\Phi, \tag{75}$$

donde $\Phi(t)$ es una matriz $n \times n$.

Es fácil ver que $\Phi(t)$ es una solución de esta ecuación si y sólo si sus columnas son soluciones de la ecuación (72).

Definición 5. *Sea $\Phi(t)$ una matriz solución del sistema* (75). *Decimos que $\Phi(t)$ es una* **matriz fundamental** *para la ecuación* (72) *si $\Phi(t)$ es invertible para todo t.*

En otras palabras, una matriz fundamental es una matriz cuyas columnas forman una base para el espacio solución.

En el resultado que sigue, tr A denota la **traza** de una matriz A, es decir, la suma de los elementos de su diagonal principal.

Teorema 9. [Fórmula de Liouville] *Sea $\Phi(t)$ una matriz cuyas columnas son n soluciones de la ecuación* (72). *Entonces,*

$$\det \Phi(t) = \det \Phi(t_0) e^{\int_{t_0}^{t} tr\, A(s) ds}. \tag{76}$$

† Si quiere saber más venga a clases...

El factor que contiene la función exponencial en el lado derecho de la identidad (76) nunca se anula. De aquí sigue de manera inmediata el resultado siguiente:

Corolario 4. *Sea* $\Phi(t)$ *una matriz cuyas columnas son* n *soluciones del sistema* (72)*. Entonces,* $\det \Phi(t)$ *es idénticamente cero si y sólo si* $\det \Phi(t_0) = 0$*, para algún* t_0*. En otras palabras,* n *soluciones* $\phi_1(t), \ldots, \phi_n(t)$ *son linealmente independientes si y sólo si los vectores de* $\mathbf{C}^n$*,* $\phi_1(t_0), \ldots, \phi_n(t_0)$ *lo son.*

Corolario 5. *Sea* $\Phi(t)$ *una matriz fundamental para el sistema* (72)*. Entonces, la solución general es* $\Phi(t)C$*, donde* C *es un vector de constantes.*

Definición 6. *El* **Wronskiano** *de* n *soluciones* $\phi_1(t), \ldots, \phi_n(t)$ *de la ecuación* (72) *es*

$$W(t) = W(\phi_1(t), \phi_2(t), \ldots, \phi_n(t)) = \det \Phi(t), \quad (77)$$

donde $\Phi(t)$ *es la matriz cuyas columnas son las soluciones dadas.*

Ejemplo 3. *Consideremos un sistema homogéneo con coeficientes constantes*

$$X' = AX,$$

donde $A = (a_{ij})$ *es una matriz* $(n \times n)$ *de constantes. Demostrar que* $\det e^{At} = e^{(trA)t}$*.*

Es fácil ver que la exponencial e^{At} es una matriz fundamental de la ecuación. La fórmula de Liouville se traduce en este caso en

$$\det e^{At} = e^{(trA)t}.$$

Ejemplo 4. *Considere el sistema* $X' = A(t)X$ *y sea* $\Phi(t)$ *una matriz fundamental. Demuestre que los coeficientes del sistema satisfacen* $A(t) = \Phi'(t)\Phi^{-1}(t)$*.*

En efecto, como Φ es una matriz de soluciones, tenemos que:

$$\Phi'(t) = A(t)\Phi(t),$$

a partir de lo cual, usando el hecho que $\Phi(t)$ es invertible, resulta lo pedido.

Ejemplo 5. *Verifique que* $\phi_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}$ *y* $\phi_2(t) = \begin{pmatrix} -t\log t \\ -t^2\log t + t^2 \end{pmatrix}$ *son dos soluciones linealmente independientes del sistema*

$$\begin{cases} x_1' = & \dfrac{2}{t}x_1 - \dfrac{1}{t^2}x_2 \\ x_2' = & x_1 + \dfrac{1}{t}x_2, \end{cases}$$

en el intervalo $(0,\infty)$*.*

Es fácil comprobar que $\phi_1(t)$ y $\phi_2(t)$ son efectivamente soluciones. Además, su Wronskiano es

$$W(t) = \left| \begin{array}{cc} t & -t\log t \\ t^2 & -t^2\log t + t \end{array} \right| = t^3,$$

el cual no se anula en $(0,\infty)$. De aquí concluímos que estas soluciones son linealmente independientes.

Finalizamos esta sección aplicando los resultados anteriores a la ecuación lineal homogénea de orden n, ya que esta última siempre puede ser escrita como un sistema de n ecuaciones de primer orden. Consideremos, entonces,la ecuación,

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + a_2(t)x^{(n-2)} + \cdots + a_n(t)x = 0, \tag{78}$$

donde los coeficientes $a_i(t)$ son funciones continuas.

Recordemos que el cambio de variables

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}, \tag{79}$$

transforma la ecuación (78) en el sistema de primer orden

$$X' = A(t)X, \tag{80}$$

donde la matriz de coeficientes es

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{pmatrix}.$$

Sean ahora $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ n soluciones de la ecuación (78) y sean

$$\phi_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1^1 \\ \vdots \\ x_1^{(n-1)} \end{pmatrix}, \ \phi_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2^1 \\ \vdots \\ x_2^{(n-1)} \end{pmatrix}, \ldots, \phi_n = \begin{pmatrix} x_n \\ x_n^1 \\ \vdots \\ x_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

Lema 2. *El conjunto $\{x_1(t), \ldots, x_n(t)\}$ es linealmente independiente si y sólo si $\{\phi_1(t), \ldots, \phi_n(t)\}$ es linealmente independiente.*

† Si quiere saber más venga a clases...

Notemos que la matriz $\Phi(t)$ cuyas columnas son $\phi_1(t), \phi_2(t), \ldots, \phi_n(t)$ es una matriz de soluciones del sistema (80).

Definición 7. *El* **Wronskiano** *de n soluciones $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ de la ecuación lineal homogénea* (78) *es:*

$$
\begin{aligned}
W(t) &= W(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)) \\
&= \det \Phi(t) \\
&= \det \begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \cdots & x_n(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) & \cdots & x_n'(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{(n-1)}(t) & x_2^{(n-1)}(t) & \cdots & x_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Gracias al lema anterior, los resultados de esta sección pueden ser aplicados al caso que estudiamos, resultando el Teorema que sigue, cuya demostración es inmediata.

Teorema 10. *Sean $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ n solución de la ecuación lineal homogénea* (78)*. Entonces, su Wronskiano satisface*

$$W(t) = W(t_0)e^{-\int_{t_0}^{t} a_1(s)ds}.$$

Además, estas soluciones son linealmente independientes si y sólo si $W(t) \neq 0$*, para todo* t *y esto último equivale a que* $W(t_0) \neq 0$*, para algún* t_0*.*

Las ecuaciones no homogéneas con coeficientes variables

Consideremos la ecuación lineal no homogénea:

$$X' = A(t)X + b(t), \tag{81}$$

donde $b(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}$ es un vector cuyas coordenadas son funciones continuas de t.

Nuestro propósito es encontrar una solución particular del sistema (81) y para esto consideramos el sistema homogéneo asociado:

$$X' = A(t)X. \tag{82}$$

Suponemos que $\phi_1(t), \phi_2(t), \ldots, \phi_n(t)$ son n soluciones linealmente independientes de (82). Los resultados de la sección anterior permiten decidir fácilmente cuando n soluciones dadas son linealmente independientes. Sin embargo, no existe un método general para encontrar soluciones de sistemas homogéneos con coeficientes variables. Sólo es posible construir soluciones una vez que algunas de ellas son conocidas de antemano.

Teorema 11. *El vector*

$$\phi_p(t) = \int_{t_0}^{t} \Phi(t)\Phi^{-1}(s)b(s)ds \tag{83}$$

es una solución particular de la ecuación no homogénea (81)*. La solución general es* $\phi_g(t) + \phi_p(t)$*, donde* $\phi_h(t)$ *es la solución general de la ecuación homogénea* (82)*, es decir,*

$$\phi_g(t) = \Phi(t)C,$$

donde C *es un vector de constantes.*

Demostración. Notemos primero que la matriz $\Phi^{-1}(t)$ es, en algún sentido, un factor integrante de la ecuación no homogénea (81). En efecto:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\Phi^{-1}X) &= -\Phi AX + \Phi^{-1}X' \\ &= \Phi^{-1}(X' - AX).\end{aligned}$$

Así, componiendo con Φ^{-1} por el lado izquierdo, la ecuación (81) equivale a

$$\frac{d}{dt}(\Phi^{-1}X) = \Phi^{-1}b.$$

Esta última ecuación puede integrarse desde t_0 a t, obteniendo,

$$\Phi^{-1}(t)X(t) - \Phi^{-1}(t_0)X(t_0) = \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)b(s)ds,$$

de donde,

$$X(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)X(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t)\Phi^{-1}(s)b(s)ds. \tag{84}$$

Esto concluye la demostración, pues $C = \Phi^{-1}(t_0)X(t_0)$ es un vector de constantes. $\square$

Una vez más hacemos notar que el cálculo de la matriz $\Phi(t)\Phi^{-1}(s)$ permite encontrar fácilmente una solución particular $\phi_p(t)$ de la ecuación no homogénea. Esta solución satisface además la condición inicial $\phi_p(t_0) = 0$.

Definición 8. *La función de Green para el problema $X' = A(t)X$ es la matriz $G(t,s) = \Phi(t)\Phi^{-1}(s)$, donde $\Phi(t)$ es una matriz fundamental.*

Es posible demostrar que la función de Green no depende de la elección particular de la matriz fundamental y satisface

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}G(t,s) &= A(t)G(t,s) \\ G(s,s) &= I. \end{cases} \tag{85}$$

Observemos también, que la solución general de la ecuación no homogénea, dada por la identidad (84) es de hecho una versión del método de variación de parámetros, puesto que dicha solución puede ser escrita como:

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \Phi(t)(\Phi^{-1}(t_0)X(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(s)b(s)ds) \\ &= \Phi(t)C(t), \end{aligned}$$

donde

$$C(t) = \Phi^{-1}(t_0)X(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)b(s)ds$$

es un vector variable. Ciertamente, cuando C es un vector de constantes, $\phi(t) = \Phi(t)C$ es la solución general de la ecuación homogénea.

Para finalizar con este capítulo estudiaremos la ecuación lineal no homogénea con coeficientes variables,

$$L(D)x = x^{(n)}+a_1(t)x^{(n-1)}+a_2(t)x^{(n-2)}+\cdots+a_n(t)x = f(t), \tag{86}$$

donde $L(D) = D^n + a_1(t)D^{n-1} + \cdots + a_{n-1}D + a_n I$.

Consideremos la ecuación homogénea asociada

$$L(D)x = 0. \tag{87}$$

Sean $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ n soluciones linealmente independientes de (87) y consideremos la matriz fundamental

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^1 & x_2^2 & \cdots & x_n^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{(n-1)} & x_2^{(n-1)} & \cdots & x_n^{(n-1)} \end{pmatrix}.$$

Como ya hemos indicado, la ecuación (86) puede ser escrita como un sistema de primer orden

$$X' = A(t)X + b(t), \tag{88}$$

donde

$$b(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t) \end{pmatrix}.$$

Además, por el Teorema 11, una solución particular del sistema (88) está dada por

$$\phi_p(t) = \int_{t_0}^{t} G(t,s)b(s)ds, \tag{89}$$

donde G es la función de Green $G(t,s) = \Phi(t)\Phi^{-1}(s)$.

Así, para encontrar una solución particular de la ecuación no homogénea (86), basta encontrar la primera componente del vector $\phi_p(t)$.

Sea

$$V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \Phi^{-1} b. \tag{90}$$

Entonces, la primera componente de $G(t,s)b(s)$ es:

$$x_1(t)v_1(s) + x_2(t)v_2(s) + \cdots + v_n(t)v_n(s). \tag{91}$$

Además, $v_1(s), v_2(s), \ldots, v_n(s)$ se calculan a partir del sistema lineal siguiente, el cual equivale a (90),

$$\begin{aligned} x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_n v_n &= 0, \\ &\vdots \\ x_1^{(n-1)} v_1 + x_2^{(n-1)} v_2 + \cdots + x_n^{(n-1)} v_n &= f(t). \end{aligned}$$

Ejemplo 6. *Encontrar una expresión explícita de la función de Green para la ecuación de segundo orden*

$$x'' + p(t)x'(t) + q(t)x = f(t).$$

Sean $x_1(t), x_2(t)$ dos soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea asociada:

$$x'' + p(t)x' + q(t)x = 0.$$

Sean $v_1(s), v_2(s)$ las soluciones del sistema

$$\begin{array}{rcl} x_1 v_1 + x_2 v_2 & = & 0, \\ x_1' v_1 + x_2' v_2 & = & f. \end{array}$$

Es decir,

$$v_1(s) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & x_2(s) \\ f(s) & x_2'(s) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1(s) & x_2(s) \\ x_1'(s) & x_2'(s) \end{vmatrix}}, \qquad v_2(s) = \frac{\begin{vmatrix} x_1(s) & 0 \\ x_1'(s) & f(s) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1(s) & x_2(s) \\ x_1'(s) & x_2'(x) \end{vmatrix}}$$

Entonces, la identidad (89) entrega una solución particular de la ecuación no homogénea de la forma

$$\begin{aligned}
x_p(t) &= \int_{t_0}^{t} (x_1(t)v_1(s) + x_2(t)v_2(s))ds \\
&= \int_{t_0}^{y} \left(x_1(t)\frac{(-x_2(s)f(s))}{W(s)} + x_2(t)\frac{x_1(s)f(s)}{W(s)} \right) ds \\
&= \int_{t_0}^{t} \frac{x_1(s)x_2(t) - x_1(t)x_2(s)}{W(s)} f(s)ds.
\end{aligned}$$

Así, la función de Green es

$$G(t,s) = \frac{x_1(s)x_2(t) - x_1(t)x_2(s)}{x_1(s)x_2'(s) - x_1'(s)x_2(s)}.$$

Capítulo V: La Transformación integral de Laplace

Temario

- Definiciones y propiedades elementales.
- Aplicaciones a las ecuaciones diferenciales.
- Efectos especiales.

Definiciones y propiedades elementales

Definición 9. *Supongamos que la función f es localmente integrable, vale decir, para todo $T > 0$, la integral $\int_0^T f(t)dt$ existe. Dado un complejo $\lambda = \alpha + i\beta$, diremos que la* **transformada de Laplace** *de f existe en el punto λ si la integral impropia*

$$\int_0^\infty f(t)e^{-\lambda t}dt = \lim_{T\to\infty} \int_0^T f(t)e^{-\lambda t}dt, \tag{92}$$

existe y en ese caso escribimos

$$\mathcal{L}f(\lambda) = \int_0^\infty f(t)e^{-\lambda t}dt. \tag{93}$$

El conjunto de valores $\lambda \in \mathbf{C}$ para el cual el límite en (92) existe es el dominio de la función $\mathcal{L}f$ y se designará por $D(\mathcal{L}f)$. Obviamente, interesa el caso en que $D(\mathcal{L}\{)$ es no vacío y en tal caso $\lambda \mapsto \mathcal{L}f(\lambda)$ define una aplicación de $D(\mathcal{L}f)$ en $\mathbf{C}$.

Ejemplo 7. Transformada de una función exponencial.

Sea $c \in \mathbf{C}$*. Designamos por* E_c *la función* $E_c(t) = \exp(ct)$*. Un cálculo simple muestra que*

$$\mathcal{L}E_c(\lambda) = \int_0^\infty e^{(c-\lambda)t} dt = \frac{1}{\lambda - c},$$

si λ *satisface la condición* $\Re\lambda > \Re c$*, pues de otra manera la integral diverge. Luego,*

$$D(\mathcal{L}E_c) = \{\lambda \in \mathbf{C} : \Re\lambda > \Re c\}.$$

Proposición 5. *Dadas dos funciones* f*,* g *de* $[0, \infty[$*, con valores en* $\mathbf{C}^d$ *y localmente integrables, entonces para todo par de escalares* a*,* b *y para todo* $\lambda \in D(\mathcal{L}f) \cap D(\mathcal{L}g)$ *se cumple*

$$a\mathcal{L}f(\lambda) + b\mathcal{L}g(\lambda) = \mathcal{L}(af + bg)(\lambda). \tag{94}$$

Vale decir, la transformación de Laplace es lineal.

Ejemplo 8. Cálculo de la transformada de funciones trigonométricas.

Sean $S_\omega(t) = \operatorname{sen} \omega t$, $C_\omega(t) = \cos \omega t$. *Como:*

$$S_\omega = \frac{1}{2i}(E_{i\omega} - E_{-i\omega}),$$

$$C_\omega = \frac{1}{2}(E_{i\omega} + E_{-i\omega}),$$

el cálculo realizado en el ejemplo anterior nos da:

$$\mathcal{L}S_\omega(\lambda) = \frac{1}{2i}\left[\frac{1}{\lambda - i\omega} - \frac{1}{\lambda + i\omega}\right] = \frac{\omega}{\lambda^2 + \omega^2}. \quad (95)$$

$$\mathcal{L}C_\omega(\lambda) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\lambda - i\omega} + \frac{1}{\lambda + i\omega}\right] = \frac{\lambda}{\lambda^2 + \omega^2}. \quad (96)$$

Ejemplo 9. *Consideremos ahora las funciones*

$$f(t) = e^{\alpha t} \operatorname{sen} \omega t, \;\; g(t) = e^{\alpha t} \cos \omega t, \; (t \geq 0, \; \alpha, \omega \in \mathbf{R}).$$

En otros términos,

$$f = \frac{1}{2i} E_\alpha [E_{i\omega} - E_{-i\omega}],$$

$$g = \frac{1}{2} E_\alpha [E_{i\omega} + E_{-i\omega}].$$

En consecuencia, por la linealidad de la transformación de Laplace obtenemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}f(\lambda) &= \frac{1}{2i}\left[\frac{1}{\lambda - (\alpha + i\omega)} - \frac{1}{\lambda - i\omega}\right] \\ &= \frac{\omega}{(\lambda-\alpha)^2 + \omega^2}. \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}g(\lambda) = \frac{\lambda - \alpha}{(\lambda-\alpha)^2 + \omega^2}.$$

Funciones de orden exponencial al infinito

Definición 10. *Una función* $f : [0, \infty[\to \mathbf{C}$ *es de* **orden exponencial al infinito** *si es seccionalmente continua*[1] *y si existen dos constantes* $M, \eta > 0$ *y un valor* $t_0 > 0$ *de su dominio, tales que:*

$$|f(t)| \leq M\, e^{\eta t}, \text{ para todo } t \geq t_0. \tag{97}$$

Lo anterior se denota por comodidad en la forma

$$f(t) = O(e^{\eta t}), \text{ si } t \to \infty.$$

Proposición 6. *La transformación de Laplace existe para toda función de orden exponencial al infinito. Más aún, si* $f(t) = O(e^{\eta t})$*, entonces el dominio de su transformada de Laplace* $D(\mathcal{L}f)$ *incluye al conjunto* $\{\lambda \in \mathbf{C} : \Re\lambda > \eta\}$*.*

[1] O sea, la función es continua salvo en un número finito de puntos

Aplicación a la resolución de ecuaciones diferenciales

Hemos visto en clases († Si quiere saber más venga a clases...) que si f y f' admiten transformada de Laplace en un dominio D, entonces

$$\mathcal{L}f'(\lambda) = \lambda\mathcal{L}f(\lambda) - f(0),$$

para todo $\lambda \in D$. Esta igualdad es la clave para la aplicación de la transformada a las ecuaciones diferenciales. De manera más general se tiene el siguiente resultado:

Teorema 12. *Sea ϕ una función vectorial con derivadas continuas hasta el orden $n-1$, y de orden exponencial al infinito. Supongamos que la n–ésima derivada $\phi^{(n)}$ sea al menos seccionalmente continua. Entonces, para cada $1 \leq r \leq n$, la transformada de Laplace de la r–ésima derivada, $\mathcal{L}\phi^{(\nabla)}$, existe y está dada por:*

$$\mathcal{L}\phi^{(r)}(\lambda) = \lambda^r\mathcal{L}\phi(\lambda) - \lambda^{r-1}c_1 - \ldots - \lambda c_{r-1} - c_r, \quad (98)$$

donde $c_1 = \phi(0),\ c_2 = \phi'(0),\ \ldots, c_r = \phi^{(r-1)}(0)$.

Veamos ahora cómo el cálculo anterior puede ser aprovechado en las ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes.

Teorema 13. *Considerar la ecuación diferencial lineal*

$$X' = AX + b(t), \tag{99}$$

donde A es una matriz constante de $d \times d$ y $b(t)$ es una función vectorial de d componentes.

Si b es de orden exponencial al infinito, entonces cada solución de (99) *es del mismo orden y tiene transformada de Laplace.*

Los teoremas 12 y 13 son los esenciales para la aplicación de la transformación de Laplace a las ecuaciones diferenciales. Un corolario importante del teorema 13 es el referido a ecuaciones escalares de orden n que enunciamos a continuación.

Corolario 6. *Sea f una función escalar de tipo exponencial al infinito. Entonces, cada solución de la* *ecuación*

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} x' + a_n x = f(t), \quad (100)$$

es de orden exponencial al infinito y tiene transformada de Laplace.

Efectos especiales

Antes de estudiar las aplicaciones de los últimos resultados, estudiemos algunos procedimientos adicionales de cálculo de transformadas de Laplace.

Proposición 7. *Sea* $k \geq 1$ *un entero y* f *una función de orden exponencial al infinito. Entonces, la función* $g(t) = t^k f(t),\ (t \geq 0)$ *es, también, de orden exponencial al infinito y su transformada de Laplace está dada por la fórmula*

$$\mathcal{L}g(\lambda) = (-1)^k \frac{d^k}{d\lambda^k}\mathcal{L}f(\lambda),\ (\lambda \in D(\mathcal{L}f). \qquad (101)$$

Analicemos ahora la forma en que la integración indefinida modifica la transformada de Laplace.

Proposición 8. *Si* f *es de tipo exponencial al infinito, entonces su primitiva*

$$g(t) = \int_0^t f(u)du,\ (t \geq 0),$$

también lo es y su transformada de Laplace es

$$\mathcal{L}g(\lambda) = \frac{1}{\lambda}\mathcal{L}f(\lambda). \tag{102}$$

Ejercicio 2. *Sea f una función periódica, seccionalmente continua, de período T, definida sobre $\mathbf{R}^+$. Probar que f posee transformada de Laplace dada en la forma:*

$$\mathcal{L}f(\lambda) = \frac{\int_0^T e^{-\lambda t} f(t)dt}{1 - e^{-\lambda T}},\ (\Re\lambda > 0). \tag{103}$$

¿Existe la transformada inversa?

A menudo tendremos que identificar funciones a partir de su transformada de Laplace. No toda función queda determinada en cada punto por su transformada de Laplace, sin embargo el siguiente teorema, debido a Lerch, nos permite caracterizar funciones en sus puntos de continuidad, que es a menudo suficiente en las aplicaciones prácticas.

Teorema 14. [Lerch] *Si dos funciones f y g poseen transformadas de Laplace con igual dominio, y en él coinciden, entonces $f(t) = g(t)$ en todo punto t en que ambas funciones son continuas.*

El teorema anterior explica la dificultad que se tiene para definir la inversa de una transformada de Laplace: ella no es única.

Definición 11. *Dada una función $\phi(\lambda)$ definida sobre el plano complejo, decimos que una función $f(t)$, definida sobre $[0, \infty[$ y que posea transformada de Laplace,* *es una* transformada inversa *de ϕ si satisface*

$$\mathcal{L}f(\lambda) = \phi(\lambda). \tag{104}$$

A causa del Teorema de Lerch, una tal función f está únicamente determinada sólo sobre sus puntos de continuidad. Haciendo un abuso de lenguaje escribimos por comodidad

$$f = \mathcal{L}^{-1}\phi,$$

teniendo el cuidado de recordar que $\mathcal{L}^{-1}\phi$ representa en realidad una clase de funciones *que satisfacen la relación* (104)*.*

Estudiemos ahora un ejemplo de aplicación de la transformada de Laplace a la resolución de una ecuación diferencial lineal.

Ejemplo 10. *Resolver la ecuación homogénea*

$$x''' + 3x'' + 3x' + x = 0. \tag{105}$$

Como el segundo miembro es nulo, $f(t) = 0$, las soluciones tienen transformada de Laplace. En con-

secuencia, obtenemos la siguiente ecuación para la transformada de Laplace $\mathcal{L}x$ *de* x*:*

$$\begin{aligned}(\lambda^3+3\lambda^2+3\lambda+1)\mathcal{L}x(\lambda) &= x(0)\lambda^2 \\ &+ (x'(0)+3x(0))\lambda \\ &+ x''(0)+3x'(0)+3x(0).\end{aligned} \tag{106}$$

De esta ecuación despejamos $\mathcal{L}x(\lambda)$*. El polinomio que acompaña a* $\mathcal{L}x(\lambda)$ *en el primer miembro de* (106) *es* $(\lambda+1)^3$*, en consecuencia, al dividir por él, nos queda en el segundo miembro una fracción donde el numerador es un polinomio de grado dos y el denominador es de grado tres. Reducimos tal cuociente a una suma de fracciones parciales:*

$$\mathcal{L}x(\lambda) = \frac{A}{\lambda+1} + \frac{B}{(\lambda+1)^2} + \frac{C}{(\lambda+1)^3}. \tag{107}$$

Para calcular A*,* B*,* C*, procedemos a hacer la suma anterior e igualar el numerador que resulta,* $A(\lambda+1)^2+B(\lambda+1)+C$*, con aquel obtenido directamente de* (106)*, a saber,* $x(0)\lambda^2+(x'(0)+3x(0))\lambda+(x''(0)+$

$3x'(0)+3x(0))$. *Con este procedimiento obtenemos las ecuaciones*

$$\begin{aligned} A &= x(0) && (108)\\ 2A+B &= x'(0)+3x(0) && (109)\\ A+B+C &= x''(0)+3x'(0)+3x(0). && (110) \end{aligned}$$

De lo anterior resulta $A = x(0)$, $B = x'(0) + x(0)$, $C = x''(0) + 2x'(0) + x(0)$ *y por ende,*

$$\mathcal{L}x(\lambda) = \frac{x(0)}{\lambda+1} + \frac{x'(0)+x(0)}{(\lambda+1)^2} + \frac{x''(0)+2x'(0)+x(0)}{(\lambda+1)^3}. \tag{111}$$

Para terminar, usamos la proposición 7 para reconocer las transformadas de funciones del segundo miembro y aplicamos el Teorema de Lerch para obtener que las soluciones φ *de la ecuación inicial son de la forma:*

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \varphi(0)e^{-t} + (\varphi(0)+\varphi'(0))te^{-t}\\ &+ \frac{1}{2}(\varphi(0)+2\varphi'(0)+\varphi''(0))t^2e^{-t}. \end{aligned}$$

El método usado en el ejemplo anterior permite reobtener la forma general de las soluciones de cualquier ecuación diferencial lineal homogénea con coeficientes constantes. En efecto, consideremos la ecuación

$$L(D)x = 0, \tag{112}$$

donde $L(D) = D^n + a_1 D^{(n-1)} + \ldots + a_n I$. Aplicando transformación de Laplace obtenemos:

$$\begin{aligned} L(\lambda)\mathcal{L}x(\lambda) &= c_1\lambda^{(n-1)} + (c_2 + a_1 c_1)\lambda^{(n-2)} \qquad (113) \\ &+ \ldots + (c_n + a_1 c_{n-1} + \ldots + a_{n-1} c_1), \end{aligned}$$

donde $c_1 = x(0),\ c_2 = x'(0), \ldots,\ c_n = x^{(n-1)}(0)$.

Descomponemos el polinomio característico en la forma usual

$$L(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \cdots (\lambda - \lambda_k)^{m_k},$$

con $\sum_{i=1}^k m_i = n$, y despejamos la transformada de Laplace de (113) expresándola como suma de fracciones parciales:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}x(\lambda) &= \frac{\gamma_{1,1}}{\lambda-\lambda_1}+\ldots+\frac{\gamma_{m_1,1}}{(\lambda-\lambda_1)^{m_1}} \\ &+ \frac{\gamma_{1,k}}{\lambda-\lambda_k}+\ldots+\frac{\gamma_{m_k,k}}{(\lambda-\lambda_k)^{m_k}}.\end{aligned}$$

Al igual que en el ejemplo anterior, los coeficientes $\gamma_{i,j}$ se determinan a partir de los valores c_ℓ. Finalmente, la transformada de Laplace anterior corresponde a una función de la forma:

$$x(t)=\sum_{r=1}^{k}\left(\gamma_{1,r}+\gamma_{2,r}t+\ldots+\gamma_{m_r,r}t^{m_r-1}\right)e^{\lambda_r t},\ (t\geq 0). \tag{114}$$

Ejercicio 3. *Calcular $\mathcal{L}^{-1}\phi$ para las funciones:*

a)

$$\frac{1}{\lambda^2+2\lambda+2};$$

b)

$$\frac{\lambda+1}{\lambda^2+2\lambda+2};$$

c)

$$\frac{3\lambda+2}{\lambda^2+2\lambda+2};$$

d)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^n.$$

Ejercicio 4. *Calcular $\mathcal{L}f$ para las funciones $f(t)$ dadas por*

a) t^n;

b) $t^n e^{ct}$;

c) $t^n \operatorname{sen} \omega t$;

d) $t^n \cos \omega t$.

Truncando y desplazando funciones

Definición 12. *La* **función de Heaviside con salto en 0** *se define como*

$$H(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } t \geq 0, \\ 0 \text{ si } t < 0. \end{cases} \quad (115)$$

La **función de Heaviside con salto en** $c > 0$ *es* $H_c(t) = H(t - c), \ (t \in \mathbf{R})$.

Cálculo de transformadas de Laplace de H y H_c.

Un cálculo directo nos da

$$\begin{aligned} \mathcal{L}H(\lambda) &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} dt \\ &= \frac{1}{\lambda}, \ (\lambda > 0). \end{aligned} \quad (116)$$

Y, para todo $c > 0$,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}H_c(\lambda) &= \int_c^\infty e^{-\lambda t} dt \\ &= \frac{e^{-\lambda c}}{\lambda},\ (\lambda > 0). \end{aligned} \tag{117}$$

Consideremos ahora una función f definida sobre $\mathbf{R}$ y denotemos f_c la función desplazada en $c > 0$, vale decir, $f_c(t) = f(t-c),\ (t \in \mathbf{R})$. Entonces, el producto $H_c f_c$ es

$$H_c f_c(t) = \begin{cases} f(t-c) \text{ si } t \geq c, \\ 0 \text{ si } t < c. \end{cases} \tag{118}$$

Tenemos así el siguiente resultado.

Proposición 9. *Si la transformada de Laplace $\mathcal{L}f(\lambda)$ de la función f existe, entonces, lo mismo ocurre con aquella de $H_c f_c$ y se tiene la igualdad*

$$\mathcal{L}H_c f_c(\lambda) = e^{-\lambda c}\mathcal{L}f(\lambda). \tag{119}$$

Ejemplo 11. *Consideremos un sistema físico constituído por un bloque de masa 1 Kg. apoyado en una superficie sin roce y unido a una pared vertical por un resorte de coeficiente de elasticidad $k = 1$ Newton/m. En $t = 0$ el bloque está en posición de equilibrio y se pone en movimiento por una fuerza de 3 Newton que actúa sobre él, comprimiendo el resorte durante un segundo. Determinar la ecuación del movimiento y determinar la trayectoria descrita por el bloque.*

Asimilamos el bloque a un punto de masa unitaria y llamamos $x(t)$ a su posición en el tiempo t. Suponemos, además, que la pared vertical está ubicada a la izquierda del bloque, de modo que la fuerza $F(t)$ actúa, también, hacia la izquierda. De acuerdo al enunciado, dicha fuerza se expresa:

$$F(t) = 3(H(t-1) - H(t)).$$

En consecuencia, el problema con valores iniciales *para el bloque es*

$$
\begin{aligned}
x'' + x &= 3(H(t-1) - H(t)) && (120)\\
x(0) = x'(0) &= 0. && (121)
\end{aligned}
$$

Como $F(t)$ es, obviamente, de orden exponencial al infinito, la solución del problema con valores iniciales posee transformada de Laplace y podemos, en consecuencia, derivar la ecuación que dicha transformada satisface.

$$(\lambda^2 + 1)\mathcal{L}x(\lambda) = \frac{3}{\lambda}(e^{-\lambda} - 1). \qquad (122)$$

Observar que

$$\frac{1}{(\lambda^2 + 1)\lambda} = 3\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{\lambda}{\lambda^2 + 1}\right). \qquad (123)$$

Por ende, despejando $\mathcal{L}x(\lambda)$ de (122), obtenemos

$$\mathcal{L}x(\lambda) = 3\frac{e^{-\lambda}}{\lambda} - 3\frac{e^{-\lambda}\lambda}{\lambda^2 + 1} - \frac{3}{\lambda} + 3\frac{\lambda}{\lambda^2 + 1},$$

de donde,

$$x(t) = 3(H(t-1) - H(t)) + 3\cos t - 3H(t-1)\cos(t-1), \tag{124}$$

o equivalentemente,

$$x(t) = \begin{cases} -3 + 3\cos t, \ \textit{si}\ 0 < t < 1, \\ 3\cos t - 3\cos(t-1), \ \textit{si}\ t > 1. \end{cases} \tag{125}$$

Hemos visto que un desplazamiento en el argumento de una función modifica la transformada de Laplace con un factor exponencial. Estudiemos ahora qué ocurre si modificamos una función por un factor exponencial.

Teorema 15. *Sea f una función qu posee transformada de Laplace y sea $g(t) = e^{at} f(t)$, para todo $t \geq 0$. Entonces, la transformada de Laplace de g existe y*

$$\mathcal{L}g(\lambda) = \mathcal{L}f(\lambda - a), \tag{126}$$

para todo $\lambda \in D(\mathcal{L}f) + a$.

Producto de convolución

Definición 13. *Dadas dos funciones f y g integrables sobre $[0, \infty[$, definimos su* **producto de convolución** *$f * g$ por la expresión:*

$$f * g(t) = \int_0^t f(s)g(t-s)ds, \ (t \geq 0). \tag{127}$$

El principal interés del producto de convolución reside en el resultado siguiente que lo relaciona con el producto de transformadas de Laplace.

Teorema 16. *Sean f y g dos funciones de tipo exponencial al infinito, entonces su producto de convolución posee transformada de Laplace y se tiene*

$$\mathcal{L}f * g(\lambda) = \mathcal{L}f(\lambda)\mathcal{L}g(\lambda), \tag{128}$$

para todo $\lambda \in D(\mathcal{L}f) \cap D(\mathcal{L}g)$.

El producto de convolución no tiene unidad

Desde el descubrimiento de la transformada de Laplace, se comenzó a buscar una unidad para el producto de convolución. Hagamos algunos experimentos para ver si es posible que una tal función exista.

Nótese que una tal unidad f, satisfaciendo por definición $f * g = g = g * f$, debiera cumplir que $\mathcal{L}f(\lambda) = 1$ para todo $\lambda \in D(\mathcal{L}f)$, a consecuencia del Teorema precedente. Veamos si podemos fabricar alguna función con esa propiedad, ensayando primero una del tipo

$$1_{[0,1/n]} = H - H_{1/n}.$$

Un cálculo inmediato nos da

$$\begin{aligned}\mathcal{L}1_{[0,1/n]}(\lambda) &= \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda/n} \\ &= \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\frac{\lambda}{n} + \epsilon(n^{-2}) \\ &= \frac{1}{n} + \epsilon(n^{-2}),\end{aligned}$$

donde $\epsilon(n^{-2})$ es un término de error que tiende a 0 como n^{-2} cuando $n \to \infty$.

Este cálculo nos muestra entonces que $\mathcal{L}1_{[0,1/n]}(\lambda) \to 0$ si $n \to \infty$, pero, si definimos

$$f_n(t) = n1_{[0,1/n]}(t),$$

entonces su transformada es de la forma

$$\mathcal{L}f_n(\lambda) = 1 + n\epsilon(n^{-2}),$$

luego

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{L}f_n(\lambda) = 1.$$

Este resultado parece alentador, pero, ¿existe alguna función f que sea límite de las funciones f_n? Es fácil darse cuenta de que eso es imposible, pues una tal $f(t)$ debiera ser 0 para todo $t \neq 0$ y tomar el valor ∞ para $t = 0$!

La solución a este problema se encontró durante el pasado siglo XX cuando se desarrollaron la Teoría de la Medida, la Teoría de Distribuciones y sus correspondientes nociones de transformada de Laplace. Una *medida positiva* μ sobre la recta real generaliza la noción de longitud de intervalos: por ejemplo, habitualmente medimos un intervalo $]a, b]$ en la forma $\mu(]a, b] = b - a$. Pero no estamos forzados a medir siempre un intervalo de esta manera. Podemos cambiar μ, pero a condición de respetar ciertos principios muy básicos: una **medida** μ se define sobre una familia $\mathcal{F}$ de subconjuntos de $\mathbf{R}$ que usted puede considerar constituídos por reuniones o intersecciones a lo más numerables de intervalos, y debe satisfacer

- $\mu(\emptyset) = 0$
- $\mu(\bigcup_n A_n) = \sum_n \mu(A_n)$, para toda sucesión $(A_n)_n$

de elementos de $\mathcal{F}$ disjuntos dos a dos.

Dada una medida μ se puede dar sentido a la integral de una función f con respecto a μ (si quiere saberlo asista a los cursos avanzados de Análisis) . Se dice que la medida es finita si $\mu(\mathbf{R}) < \infty$. Para una tal medida, la función $t \mapsto \exp(-\lambda t)$ se prueba que es integrable. Definimos entonces la transformada de Laplace de μ como

$$\mathcal{L}\mu(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\mu(dt).$$

Ahora bien, dado un punto $x \in \mathbf{R}$, definamos

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1, \text{ si } x \in A \\ 0, \text{ si } x \notin A, \end{cases}$$

para cada $A \in \mathcal{F}$.

Esta medida se conoce como la *Delta de Dirac* con soporte en x. Es una medida finita ($\delta_x(\mathbf{R}) = 1$) las integrales con respecto a ella son muy fáciles:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta_x(dt) = f(x).$$

Luego, $\mathcal{L}\delta_x(\lambda) = e^{-\lambda x}$, de donde

$$\mathcal{L}\delta_0(\lambda) = 1.$$

¡Uf! ¡al fin encontramos un objeto cuya transformada de Laplace es 1!

Ejercicio 5. *Dada la ecuación*

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \cdots + a_1x' + a_0x$$

$$= b_m u^{(m)} + b_{m-1}u^{(m-1)} + \cdots + b_1u' + b_0u$$

1. *Demostrar que si $u(t) = be^{at}$, una solución particular es de la forma $x_p(t) = Ae^{at}$. Determinar A y la condición para que esto se cumpla.*

2. *Demostrar que si $u(t) = Csen(\omega t)$, una solución particular es de la forma $x_p(t) = Rsen(\omega t + \theta)$. Determinar R, θ y la condición para que esto se cumpla.*

3. *Resolver:*

   i) $x'' + 3x' + 2x = 3e^{5t} + 4e^{4t}$
   ii) $4x'' + 8x' + 5x = 4cos(\frac{1}{2}t)$

Capítulo VI: Series de Potencias y Ecuaciones Diferenciales

Temario:

1. Funciones analíticas.
2. Puntos ordinarios.
3. Puntos singulares regulares.
4. La ecuación de Bessel.

Funciones analíticas

Las series de potencias están relacionadas con la representación de una función mediante funciones más "simples", a saber, combinaciones de potencias de la variable independiente t. Vale decir, funciones que se escriben en la forma

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n.$$

Ilustremos con un ejemplo el tipo de método que queremos introducir en este capítulo, tomándonos algunas licencias con el rigor matemático.

Ejemplo 12. *Resolver el problema con valores iniciales*

$$\begin{aligned} x'' + 2tx' + 2x &= 0, && (129) \\ x(0) &= 1, && (130) \\ x'(0) &= 0. && (131) \end{aligned}$$

Supongamos que existe una solución de la forma $\varphi(t)$ *del problema anterior y que además su derivada se puede calcular derivando término a término la serie de término general* $a_n t^n$*:*

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n,\\ \varphi'(t) &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}t^n,\\ \varphi''(t) &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}t^n.\end{aligned}$$

Reemplazamos las series en la ecuación, obteniendo

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}t^n &+ 2\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}t^{n+1}\\ &+ 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\\ &= 0. \qquad (132)\end{aligned}$$

El miembro izquierdo de la ecuación (132) *es una serie de potencias de* t*; el derecho, es también una serie de potencias de* t*, donde todos los coeficientes son nulos. La única posibilidad para que esto ocurra es que los correspondientes coeficientes de* t^n *en la serie del miembro izquierdo y en aquella del lado derecho sean iguales. En consecuencia,*

$$(n+2)(n+1)a_{n+2}+2na_n+2a_n = 0, \ (n \geq 0), \quad (133)$$

de donde se obtiene la relación de recurrencia:

$$a_{n+2} = -\frac{2a_n}{n+2}, \ (n \geq 0). \quad (134)$$

Para calcular todos los coeficientes bastará entonces conocer dos de ellos: a_0 *y* a_1*. Usemos las condiciones iniciales, observando que* $\varphi(0) = a_0 = 1$, $\varphi'(0) = a_1 = 0$*. Aplicando* (134) *se obtiene que todos los coeficientes con sub–índices impares son nulos y si* $n = 2m$ *es un coeficiente con sub–índice par, entonces*

$$a_{2(m+1)} = -\frac{a_{2m}}{m+1},$$

$$a_{2(m+1)} = (-1)^{m+1}\frac{1}{(m+1)!},\ (m \geq 0). \tag{135}$$

Finalmente, la solución buscada es

$$\varphi(t) = \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{t^{2m}}{m!}. \tag{136}$$

Recordemos algunos hechos básicos sobre funciones representables en serie de potencias o *funciones analíticas*.

Definición 14. *Una función f definida en un dominio $D(f)$ de $\mathbf{R}$ y con valores en $\mathbf{C}^d$, es analítica en un punto $t_0 \in D(f)$ si existe una sucesión de coeficientes $(a_n)_n$ en $\mathbf{C}^d$ y un intervalo abierto alrededor de t_0, tal que para cada t en dicho intervalo se cumpla la igualdad*

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t-t_0)^n. \tag{137}$$

Una función f es analítica en un conjunto $I \subset D(f)$ si es analítica en cada punto de I.

Observación 1. *Recordemos que las series de potencia del tipo* (137) *tienen un* radio de convergencia $R \geq 0$ *que es el mayor número positivo tal que la serie converge para cada $t \in]t_0 - R, t_0 + R[$. Los casos extremos son $R = 0$, que corresponde a una serie divergente en todo punto; $R = \infty$, que determina una serie convergente en toda la recta real. Tal radio de convergencia queda determinado por la expresión*

$$R = \limsup_n \left(|a_n|\right)^{-1/n}. \tag{138}$$

En efecto, si $|t - t_0| < R$, entonces la serie de término general $|a_n||t - t_0|^n$ converge pues,

$$\limsup_n (|a_n||t - t_0|^n)^{1/n} < \limsup_n |A_n|^{1/n} R \leq 1$$

y basta aplicar el criterio de convergencia de d'Alembert. Más aún, si tomamos $r < R$, la con-

vergencia es uniforme sobre $|t-t_0| \leq r$. En efecto,

$$\sup_{|t-t_0|\leq r} |\sum_{n=0}^{N} a_n(t-t_0)^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t-t_0)^n| \leq |\sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| r^n,$$

que es el resto de una serie convergente.

La observación anterior permite derivar las series de potencia término a término al interior de $|t-t_0| \leq r$, con $r < R$, en el caso que $R > 0$. En efecto, sea f dada por (137), entonces, para cada $h \neq 0$, tal que $|h| \leq r < R$, se tiene

$$\frac{f(t_0+h) - f(t_0)}{h} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{h^n}{h}$$

y como la convergencia es uniforme al interior de $|t-t_0| \leq r$, podemos pasar al límite con $h \to 0$, obteniendo que la derivada de f existe en t_0 y vale

$$f'(t_0) = a_0.$$

Asimismo, se puede repetir el procedimiento anterior para las derivadas de orden superior, obteniéndose

$$f^{(n)}(t_0) = n!a_n,\ (n \geq 1).$$

Esto determina de manera biunívoca los coeficientes del desarrollo en serie de potencias de una función analítica, como ya ha sido conocido al estudiar el Teorema de Taylor:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(t_0)}{n!},\ (n \geq 0). \tag{139}$$

Puntos ordinarios

En esta sección comenzamos por estudiar las ecuaciones de la forma:

$$X' = A(t)X, \ (t \in]\alpha, \omega[), \tag{140}$$

donde $A(t)$ es una función analítica sobre todo el intervalo $]\alpha, \omega[$ con valores matrices de $d \times d$. Decimos que en cada punto del intervalo de analiticidad es un **punto ordinario**.

Teorema 17. *Bajo las hipótesis anteriores, dado un punto ordinario* $t_0 \in]\alpha, \omega[$*, toda solución de la ecuación* (140) *se puede expresar en la forma de una serie de potencias:*

$$\phi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (t - t_0)^k, \tag{141}$$

donde cada coeficiente c_i *es un vector de* $\mathbf{C}^d$ *y el radio de convergencia de la serie es menor o igual a* $\inf\{(t_0 - \alpha), (\omega - t_0)\}$*. Más aún,* $\phi(t_0) = c_0$ *y los* *otros coeficientes c_i se pueden obtener por sustitución e identificación.*

Demostración. Dado que $A(t)$ es analítica en todo punto de $]\alpha, \omega[$, se representa en la forma

$$A(t) = \sum_{k \geq 0} A_k (t - t_0)^k, \tag{142}$$

para $|t - t_0| < R = \inf\{(t_0 - \alpha), (\omega - t_0)\}$, donde los coeficientes A_k son matrices complejas de $d \times d$.

Reemplazando una serie de la forma (141) en la ecuación original, se obtiene una relación entre los coeficientes c_i y A_k. De modo que $c_0 = \phi(t_0)$, y

$$c_{k+1} = \frac{1}{k+1} \sum_{r=0}^{k} A_r c_{k-r}, \ (0 \leq k \leq d). \tag{143}$$

Demostremos que la serie de potencias de coeficientes c_k converge.

Sea $L < R$. Ya que la serie $\sum_k A_k (t - t_0)^k$ converge si $|t - t_0| < R$, entonces existe $M > 0$ tal que $|A_k(t -$

$t_0)^k| \leq M$ si $|t - t_0| \leq L$, para todo $k \geq 0$. En particular, se tiene $|A_k| \leq ML^{-k}$, para cada $k \geq 0$. Usando (143) sigue que

$$|c_{k+1}| \leq \frac{1}{k+1} M \sum_{r=0}^{k} |c_{k-r}|,$$

desigualdad que multiplicada por $(k+1)L^{k+1}$ y haciendo un cambio de índices $j = k - r$ en la suma, lleva a

$$(k+1)L^{k+1}|c_{k+1} \leq ML \sum_{j=0}^{k} L^j |c_j|, \ (k \geq 0). \quad (144)$$

La desigualdad (144) implica la convergencia buscada. En efecto, obsérvese que aplicándola recursivamente hasta el orden $k+1$ se tiene:

$$\begin{array}{rcl} |c_1| & \leq & M|c_0| \\ |c_2| & \leq & \dfrac{M}{2L}(1+ML)|c_0| \\ \ldots & & \ldots \\ |c_{k+1}| & \leq & \dfrac{ML(1+ML)\cdot(k+ML)}{(k+1)!}\dfrac{|c_0|}{L^{k+1}}. \end{array}$$

Llamemos M_{k+1} el término que aparece en el segundo miembro de la última relación. Probemos que si $|t-t_0|<L$, entonces $\sum_{k=0}^{\infty} M_k(t-t_0)^k < \infty$. En efecto, haciendo el cuociente entre dos términos sucesivos $M_{k+1}(t-t_0)^{k+1}$ y $M_k(t-t_0)^k$ se obtiene

$$|\frac{M_{k+1}(t-t_0)^{k+1}}{M_k(t-t_0)^k}| = \frac{k+ML}{k+1}\frac{|t-t_0|}{L},$$

luego, si $|t-t_0|<L$, entonces

$$\lim_{k\to\infty} |\frac{M_{k+1}(t-t_0)^{k+1}}{M_k(t-t_0)^k}| < 1, \tag{145}$$

de modo que la serie de término general $M_k|t-t_0|^k$ converge. Esto determina la convergencia de la serie de potencias que define $\phi(t)$, para $|t-t_0|<L$. $\square$

Ejemplo 13. *Resolver el problema con valores iniciales*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & 1 \\ 1 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}; \qquad (146)$$

$$\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \qquad (147)$$

En este caso, $A(t)=A_0+A_1t$*, donde*

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Usando la ecuación (143) *que permite calcular los* *coeficientes* c_k*, tenemos:*

$$
\begin{array}{rcl}
c_0 & = & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\
c_1 & = & \frac{1}{1} A_0 c_0 \\
 & = & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 & = & \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\
c_2 & = & \frac{1}{2}(A_0 c_1 + A_1 c_0) \\
 & = & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\
\ldots & & \ldots .
\end{array}
$$

Corolario 7. *Si se tiene* n *coeficientes complejos* $a_1(t), \ldots, a_n(t)$ *analíticos en el intervalo* $]\alpha, \omega[$ *y un punto* t_0 *en dicho intervalo, entonces toda solución de la ecuación*

$$
x^{(n)} + a_1(t) x^{(n-1)} + \ldots + a_n(t) x = 0, \qquad (148)
$$

se escribe en la forma de una serie de potencias,

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (t - t_0)^k, \tag{149}$$

cuyo radio de convergencia es mayor que el ínfimo entre $(t_0 - \alpha)$ *y* $(\omega - t_0)$. *Para* $k = 0, \dots, n-1$, $c_k = \varphi^{(k)}(t_0)/k!$, *y los otros coeficientes pueden ser encontrados por sustitución en la ecuación de la serie* (149) *e igualando coeficientes correspondientes a iguales potencias de* $(t - t_0)$.

Ejemplo 14. *Consideremos la ecuación*

$$x'' + \frac{1}{t}x = 0,\ 0 < t < 2, \tag{150}$$

$$x(1) = 0,\ x'(1) = 0. \tag{151}$$

Usando conocimientos elementales sobre la serie geométrica, obtenemos el desarrollo

$$\frac{1}{t} = \frac{1}{1 + (t-1)} = \sum_{k \geq 0} (-1)^k (t-1)^k, \tag{152}$$

que es válido para $|t-1|<1$*. Reemplazando la serie*

$$\varphi(t)=\sum_{k\geq 0} c_k(t-1)^k,$$

en la ecuación propuesta obtenemos

$$\sum_{k\geq 0}(k+2)(k+1)c_{k+2}(t-1)^k+\left(\sum_{k\geq 0}(-1)^k(t-1)^k\right)\times$$

$$\times\left(\sum_{k\geq 0} c_k(t-1)^k\right)=0.$$

Se llega entonces a la ecuación de recurrencia

$$c_{k+2}=-\frac{1}{(k+2)(k+1)}\sum_{r=0}^{k}(-1)^{k-r}c_r. \qquad (153)$$

Así $c_0=\varphi(1)=0$*,* $c_1=\varphi'(1)=1$*,* $c_2=-(1/12)C_0=0$*,* $c_3=-(1/6)c_1=-1/6$*,* $c_4=1/12$*,*

$c_5 = -1/24$, $c_6 = 1/40$, $\ldots$. *De modo que el desarrollo de la solución* φ *hasta el orden 5 nos da:*

$$\varphi(t) = t - 1 - \frac{(t-1)^3}{6} + \frac{(t-1)^4}{12} - \frac{(t-1)^5}{24} + \ldots. \tag{154}$$

Ejemplo 15. [Ecuación de Hermite] *Sea* ν *una constante real positiva. Resolver la ecuación debida a Hermite*

$$x'' - 2tx + 2\nu x = 0,\ (t \in \mathbf{R}). \tag{155}$$

Los coeficientes son analíticos sobre toda la recta real, escogemos el punto 0 *como centro de desarrollo para las soluciones de la ecuación:*

$$\varphi(t) = \sum_{k \geq 0} c_k t^k. \tag{156}$$

Reemplazando en la ecuación se obtiene la relación de recurrencia:

$$(k+2)(k+1)c_{k+2} - 2(k-\nu)c_k = 0,$$

de donde,

$$c_{k+2} = \frac{2(k-\nu)}{(k+2)(k+1)} c_k, \ (k \geq 0). \tag{157}$$

Conociendo los datos iniciales $c_0 = \varphi(0)$ *y* $c_1 = \varphi'(0)$, *se pueden calcular todos los coeficientes restantes usando* (157)*:*

$$c_{2k} = (-1)^k 2^k \frac{\nu(\nu-2)\cdots(\nu+2-2k)}{(2k)!} c_0, \tag{158}$$

$$c_{2k+1} = (-1)^k 2^k \frac{(\nu-1)(\nu-3)\cdots(\nu+1-2k)}{(2k+1)!} c_1, \ (k \geq 1). \tag{159}$$

Puntos singulares regulares

Un pequeño ejercicio previo: la ecuación de Euler

$$(t-\alpha)^2 x'' + (t-\alpha) b_1 x' + b_2 x = 0, \ (\alpha < t < \omega), \quad (160)$$

donde b_1 y b_2 son constantes y $\alpha \neq -\infty$.

Es una ecuación no normal. Para escribirla en forma normal, es necesario dividir por $(t-\alpha)^2$ y los nuevos coeficientes quedan:

$$a_1(t) = \frac{1}{t-\alpha} b_1, \ a_2(t) = \frac{1}{(t-\alpha)^2} b_2.$$

Ahora $a_1(t)$ y $a_2(t)$ no son analíticos. Sin embargo, un cambio de variables permite transformar esta ecuación en una con coeficientes analíticos. En efecto, si definimos

$$s = s(t) = \log(t-\alpha),$$

que es posible si $\alpha < t < \omega$, entonces la función $x(t)$ se cambia en una función $y(s)$ $(x(t) = y(s(t)))$ y aplicando la regla de la cadena para el cálculo de las derivadas obtenemos:

$$
\begin{aligned}
x'(t) &= \frac{d}{dt}x(t) \\
&= \frac{d}{dt}y(s(t)) \\
&= \frac{d}{ds}y(s)\frac{ds}{dt} \\
&= \frac{1}{t-\alpha}\frac{d}{ds}y(s). \\
x''(t) &= \frac{d}{dt}\left[\frac{d}{ds}y(s)\frac{ds}{dt}\right] \\
&= \frac{d^2}{ds^2}y(s)\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \frac{d}{ds}y(s)\frac{d^2s}{dt^2} \\
&= \frac{1}{(t-\alpha)^2}\left[\frac{d^2}{ds^2}y(s) - \frac{d}{ds}y(s)\right].
\end{aligned}
$$

Reemplazando en la ecuación original llegamos a

$$\frac{d^2}{ds^2}y(s) + (b_1 - 1)\frac{d}{ds}y(s) + b_2 y(s) = 0, \tag{161}$$

que es una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes. Para resolverla, estudiemos su ecuación característica:

$$\lambda^2 + (b_1 - 1)\lambda + b_2 = 0. \tag{162}$$

Tenemos entonces dos casos:

Caso 1: La ecuación característica tiene dos raíces simples λ_1, λ_2. Entonces, la solución $y(s)$ se escribe

$$y(s) = c_1 e^{\lambda_1 s} + c_2 e^{\lambda_2 s}, \tag{163}$$

de donde la solución a la ecuación original es de la forma

$$x(t) = c_1(t - \alpha)^{\lambda_1} + c_2(t - \alpha)^{\lambda_2}. \tag{164}$$

Caso 2: Existe una sola raíz de la ecuación característica y que tiene en consecuencia multiplicidad 2. Entonces la solución $y(s)$ es de la forma

$$y(s) = c_1 e^{\lambda s} + c_2 s e^{\lambda s} \tag{165}$$

y luego,

$$x(t) = c_1 (t-\alpha)^{\lambda} + c_2 (t-\alpha)^{\lambda} \log(t-\alpha). \tag{166}$$

Ahora sí: puntos singulares regulares

En lo que sigue consideraremos sistemas diferenciales de **dos ecuaciones**.

Definición 15. *Dada una ecuación de la forma*

$$X' = A(t)X,\ (t \in]\alpha, \omega[), \tag{167}$$

donde $A(t)$ es una función con valores en las matrices complejas de 2×2, diremos que α es un **punto singular regular** *si la función $A(t)$ puede escribirse en la forma*

$$A(t) = \frac{1}{t-\alpha} B(t), \tag{168}$$

donde $B(t)$ es una función analítica sobre todo el intervalo $[\alpha, \omega[$.

Si α es un punto de singularidad de la función $A(t)$ que no satisface la propiedad anterior, se dirá que es un punto singular **irregular**.

Ejemplo 16. *Consideremos nuevamente la ecuación de Euler del ejemplo 160. Para escribirla en forma de sistema, introduzcamos variables auxiliares de manera un poco distinta al procedimiento de reducción usual:*

$$x_1 = x; \;\; x_2 = (t-\alpha)x',$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

de modo que

$$\begin{aligned} x_1' &= \frac{x_2}{t-\alpha} \\ x_2' &= (t-\alpha)x_1'' + x_1' \\ &= (1-b_1)x' - \frac{b_2}{t-\alpha}x \\ &= -\frac{b_2}{t-\alpha}x_1 + \frac{1-b_1}{t-\alpha}x_2, \end{aligned}$$

obteniéndose:

$$X' = AX, \;\; (t \in]\alpha, \omega[). \tag{169}$$

Donde

$$A(t) = \frac{1}{t-\alpha} B(t) \qquad (170)$$

y

$$B(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b_2 & 1-b_1 \end{pmatrix}. \qquad (171)$$

Se podrá observar que la ecuación característica (162) *es exactamente*

$$det(B - \lambda I) = 0.$$

Ejemplo 17. *La ecuación general de Euler es de la forma*

$$x'' + a_1(t)x' + a_2(t)x = 0, \ (t \in]\alpha, \omega[), \qquad (172)$$

donde

$$a_1(t) = \frac{1}{t-\alpha} b_1(t), \ a_2(t) = \frac{1}{(t-\alpha)^2} b_2(t),$$

siendo los coeficientes $b_1(t)$ *y* $b_2(t)$ *analíticos. Un cambio de variables como el anterior, la transforma en*

$$X' = A(t)X, \ (t \in]\alpha, \omega[), \tag{173}$$

donde

$$A(t) = \frac{1}{t-\alpha} B(t) \tag{174}$$

y

$$B(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b_2(t) & 1 - b_1(t) \end{pmatrix}, \tag{175}$$

es una función analítica con valores matriciales, de modo que la ecuación de Euler general es también un caso particular de ecuaciones del tipo (167) *y* (168)*.*

Uno de los resultados fundamentales de esta sección es el siguiente teorema debido a Frobenius y Fuchs.

Teorema 18. *Supongamos que $B(t)$ es analítica para $\alpha \le t < \omega$ y que los valores propios λ_1 y λ_2 de $B(\alpha)$ no son iguales ni difieren por un entero. Entonces la ecuación*

$$X' = \frac{1}{t-\alpha} B(t)X, \ \alpha \le t < \omega \tag{176}$$

tiene dos soluciones de la forma

$$\phi_1(t) = (t-\alpha)^{\lambda_1} \sum_{k=0}^{\infty} c_k (t-\alpha)^k, \qquad (177)$$

$$\phi_2(t) = (t-\alpha)^{\lambda_2} \sum_{k=0}^{\infty} d_k (t-\alpha)^k \qquad (178)$$

y son linealmente independientes sobre $\alpha \leq t < \omega$. *Los coeficientes* c_k *y* d_k *pueden ser evaluados por sustitución.*

Corolario 8. *Supongamos que los coeficientes* b_1 *y* b_2 *son analíticos para* $\alpha \leq t < \omega$ *y que las raíces* λ_1 *y* λ_2 *de la ecuación indicial*

$$\lambda(\lambda-1) + \lambda b_1(\alpha) + b_2(\alpha) = 0, \qquad (179)$$

no son iguales ni difieren por un entero. Entonces la ecuación

$$(t-\alpha)^2 x'' + (t-\alpha) b_1(t) x' + b_2(t) x = 0, \qquad (180)$$

tiene dos soluciones de la forma

$$\varphi_1(t) = (t-\alpha)^{\lambda_1}\sum_{k=0}^{\infty} c_k(t-\alpha)^k \qquad (181)$$

$$\varphi_2(t) = (t-\alpha)^{\lambda_2}\sum_{k=0}^{\infty} d_k(t-\alpha)^k \qquad (182)$$

y ellas son linealmente independientes sobre $\alpha \leq t < \omega$. Los coeficientes c_k y d_k pueden ser determinados por sustitución.

Observar que la independencia lineal entre las soluciones ϕ_1 y ϕ_2 en el Teorema 18 se pierde si $\lambda_2 - \lambda_1 = r \in \mathbf{N}$. En efecto, en tal caso al escribir

$$(t-\alpha)^{\lambda_2} = (t-\alpha)^{\lambda_1}(t-\alpha)^r,$$

ambas soluciones quedan de la misma forma

$$(t-\alpha)^{\lambda_1} \times \text{una serie de potencias.}$$

Por tal motivo es necesario modificar una de las soluciones para obtener una base. Se tiene entonces el resultado siguiente:

Teorema 19. *Supongamos que B es anlítica para $\alpha \leq t < \omega$ y que los valores propios λ_1 y λ_2 de $B(\alpha)$ son ya sea iguales o bien, difieren por un entero, digamos $\lambda_2 - \lambda_1 = r \in \mathbf{N}$. Entonces,*

$$X' = \frac{1}{t-\alpha} B(t)X, \ \alpha < t < \omega, \tag{183}$$

tiene una solución de la forma

$$\phi_1(t) = (t-\alpha)^{\lambda_1} \sum_{k=0}^{\infty} c_k (t-\alpha)^k \tag{184}$$

y una segunda solución de la forma

$$\phi_2(t) = (t-\alpha)^{\lambda_2} \sum_{k=0}^{\infty} d_k (t-\alpha)^k + c\phi_1(t) \log(t-\alpha), \tag{185}$$

donde c es una constante que puede ser evaluada por sustitución al igual que los coeficientes c_k y d_k.

Corolario 9. *Supongamos que los coeficientes b_1 y b_2 son analíticos para $\alpha \leq t < \omega$ y que las raíces λ_1 y λ_2*

de la ecuación indicial

$$\lambda(\lambda-1)+\lambda b_1(\alpha)+b_2(\alpha)=0, \tag{186}$$

son iguales o difieren por un entero. Entonces la ecuación

$$(t-\alpha)^2 x''+(t-\alpha)b_1(t)x'+b_2(t)x=0, \tag{187}$$

tiene una solución de la forma

$$\varphi_1(t)=(t-\alpha)^{\lambda_1}\sum_{k=0}^{\infty} c_k(t-\alpha)^k \tag{188}$$

y una segunda solución

$$\varphi_2(t)=(t-\alpha)^{\lambda_2}\sum_{k=0}^{\infty} d_k(t-\alpha)^k + c\varphi_1(t)\log(t-\alpha), \tag{189}$$

donde c es una constante que puede ser evaluada por sustitución al igual que los coeficientes c_k y d_k.

La ecuación de Bessel

La Trigonometría puede ser vista como el estudio de las soluciones de la ecuación del oscilador armónico

$$x'' + \alpha^2 x = 0.$$

De manera similar, la teoría de las *Funciones de Bessel* se reduce al estudio de las soluciones de la ecuación

$$t^2 x'' + t x' + (t^2 - \nu^2) x = 0, \tag{190}$$

donde ν es una constante. Esta ecuación se conoce como la **Ecuación de Bessel de parámetro** ν. Tiene un punto singular regular en $t = 0$ y la teoría desarrollada hasta aquí se aplica en el intervalo $]0, \infty[$.

Supongamos por simplicidad que ν es real y ≥ 0. La ecuación indicial es en este caso

$$\lambda^2 - \nu^2 = 0, \tag{191}$$

vale decir, sus raíces son $\lambda_1 = \nu$, $\lambda_2 = -\nu$. Luego $\lambda_1 - \lambda_2 = 2\nu$ y tendremos dos casos notables: el primero, si 2ν es un número entero; el segundo, si lo anterior no ocurre.

Caso $2\nu \notin \mathbf{Z}$ **:**

En este caso hay dos soluciones de la ecuación de Bessel, linealmente independientes, que denotamos

$$\varphi_\nu(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^{k+\nu}, \tag{192}$$

$$\varphi_{-\nu}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k t^{k-\nu}. \tag{193}$$

Para calcular los coeficientes c_n y d_n, reemplazamos en la ecuación de Bessel. Obtenemos así, en el caso de los coeficientes c_n,

$$\sum_{k=0}^{\infty}(\nu+k)(\nu+k+1)c_k t^{\nu+k} + \sum_{k=0}^{\infty}(\nu+)c_k t^{\nu+k+2} - \sum_{k=0}^{\infty} \nu^2 c_k t^{\nu+k}$$

$$= (2\nu + 1)c_1 + \sum_{k=2}^{\infty} \{[(\nu + k)^2 - \nu^2]c_k + c_{k-2}\} t^{\nu+k} = 0.$$

Dado que $\nu \neq 1/2$, se tiene $c_1 = 0$. Los otros coeficientes satisfacen la ecuación recursiva

$$c_k = -\frac{c_{k-2}}{(\nu + k)^2 - \nu^2},\ (k \geq 2). \tag{194}$$

Luego, $c_k = 0$ si k es impar. Si k es par, de la forma $k = 2m$, la relación anterior conduce a

$$c_{2m} = \frac{(-1)^m c_0}{2^{2m} m! (\nu + 1) \ldots (\nu + m)},\ (m \geq 1).$$

Para simplificar la escritura de los coeficientes recurramos a la función *Gama*, $\Gamma(\nu)$, definida para $\nu > 0$ como sigue:

$$\Gamma(\nu) = \int_0^{\infty} t^{\nu-1} e^{-t} dt. \tag{195}$$

Es fácil ver que $\Gamma(1) = 1$. Además, usando la fórmula de integración por partes en la expresión integral que corresponde a $\Gamma(\nu+1)$ se obtiene la importante relación:

$$\Gamma(\nu + 1) = \nu\Gamma(\nu), \tag{196}$$

que extiende la propiedad de los factoriales. En efecto, de la propiedad precedente se tiene que $\Gamma(n + 1) = n!$ sobre los enteros. Asimismo, la ecuación (196) hace posible tabular la función gama para $\nu > 1$ sin tener que evaluar la integral de (195). En el mismo espíritu, uno *define* la función gama como $(1/\nu)\Gamma(\nu + 1)$ para ν negativo **y diferente de todo entero**. Se sabe, por ejemplo, que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$. De esto se deduce que $\Gamma(3/2) = \sqrt{\pi}/2$ y $\Gamma(-1/2) = -2\sqrt{\pi}$.

Con la función gama podemos entones escribir los productos de la forma:

$$\nu(\nu + 1) \ldots (\nu + k),$$

como

$$\frac{\Gamma(\nu+k+1)}{\Gamma(\nu)}.$$

De este modo, si se escoge el coeficiente c_0 de φ_ν según

$$c_0 = \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu+1)},$$

la correspondiente solución φ_ν es denotada por el símbolo J_ν y es conocida con el nombre de *Función de Bessel de primera especie de índice* ν. Se tiene así:

$$J_\nu(t) = \left(\frac{t}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(\nu+k+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k}. \tag{197}$$

Y si se considera la otra raíz de la ecuación indicial, $-\nu$, se llega a la función de Bessel de índice $-\nu$:

$$J_{-\nu}(t) = \left(\frac{t}{2}\right)^{-\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(-\nu+k+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k}. \tag{198}$$

La solución general φ de la ecuación de Bessel planteada tiene entonces la forma

$$\varphi(t) = \text{constante} \cdot J_\nu(t) + \text{constante} \cdot J_{-\nu}(t).$$

Caso $2\nu \in \mathbf{Z}$:

En este caso, se aplica el corolario 9 y se concluye que $J_\nu(t)$ es una solución y existe otra, linealmente independiente de ella, que tiene la forma:

$$\varphi_{-\nu}(t) = t^{-\nu} \sum_{k=0}^{\infty} d_k t^k + c J_\nu(t) \log t. \tag{199}$$

Cuando ν es un múltiplo entero impar de $1/2$, se encuentra $c = 0$ y una apropiada elección de d_0 permite reencontrar $\varphi_{-\nu}(t) = J_{-\nu}(t)$. Luego, la solución general de la ecuación de Bessel tiene la forma

$$\varphi(t) = \text{constante} \cdot J_\nu(t) + \text{constante} \cdot J_{-\nu}(t),$$

toda vez que $\nu > 0$ no sea un entero. Si $\nu \geq 0$ es un entero, no es muy díficil probar que $J_{-\nu}(t) = (-1)^\nu J_\nu(t)$, lo que implica que J_ν y $J_{-\nu}$ son linealmente dependientes.

De la misma manera que las funciones trigonométricas satisfacen identidades, también lo hacen las funciones de Bessel. Así por ejemplo,

$$J_{\nu+1}(t) = 2\nu \left(\frac{J_\nu(t)}{t} \right) - J_{\nu-1}(t),$$

para todo $\nu \neq 0, \nu \neq 1$. La existencia de identidades entre las funciones de Bessel permite tabularlas a partir de los valores de $J_\nu(t)$ y $J_{-\nu}(t)$ para $0 \leq \nu \leq 1$.

Cuando 2ν no es entero ni un múltiplo entero impar de $1/2$, entonces ν mismo debe ser un entero. El corolario 9 se aplica entonces en toda generalidad y existe una solución $\varphi_{-\nu}$ de la forma (199) con $c \neq 0$, linealmente independiente de J_ν. Reemplazando dicha forma de solución en la ecuación de Bessel para calcular los coeficientes, obtenemos:

$$2cJ'_\nu(t)+[(\nu-1)^2-\nu^2]d_1t^{1-\nu}+\sum_{k=2}^{\infty}\{[(k-\nu)^2-\nu^2]d_k+d_{k-2}\}t^{k-\nu$$

Enseguida, se puede substituir el desarrollo en serie de $J'_\nu(t)$ y nos queda:

$$-2c\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{(2m+\nu)}{m!(\nu+m)!2^{2m+\nu}}t^{2(m+\nu)}$$

$$=(1-2\nu)d_1t+\sum_{k=2}^{\infty}\{[(k-\nu)^2-\nu^2]d_k+d_{k-2}\}t^k.$$

Obsérvese que la primera serie, que corresponde al miembro izquierdo de la igualdad, no posee potencias impares de t. En consecuencia, tampoco puede haber tal tipo de potencias en el miembro derecho, de donde se desprende que $d_1=0$ y para todo $m\geq 1$:

$$[(2m+1-\nu)^2-\nu^2]d_{2m+1}+d_{2m-1}=0.$$

Lo anterior implica que para todo $m \geq 1$, se cumple $d_{2m+1} = 0$. Cambiamos en consecuencia los índices de suma a la izquierda tomando $j = m+\nu$ y a la derecha, $j = k/2$. Entonces

$$-2c\sum_{j=\nu}^{\infty}(-1)^{(j-\nu)}\frac{(2j-\nu)}{(j-\nu)!j!2^{2j-\nu}}t^{2j} = \sum_{j=1}^{\infty}\{[(2j-\nu)^2-\nu^2]d_{2j}+ \tag{200}$$

Analicemos en primer lugar el caso $\nu = 0$. Dando a la constante c el valor 1 y escogiendo $d_0 = 0$, la solución $\varphi_{-\nu}$ que resulta es conocida con el nombre de *Función de Neumann-Bessel de segunda especie de índice cero* y se denota usualmente por el símbolo $Y^{(0)}(t)$. Esta función queda, entonces, expresada por

$$Y^{(0)}(t) = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^{j+1}}{(j!)^2}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{j}\right)\left(\frac{t}{2}\right)^{2j}+J_0(t)\log t,$$

Para $\nu = 1$, la ecuación (200) nos lleva a las relaciones:

$$d_0 = -c,$$

$$d_{2j} = \frac{1}{4j(j-1)}\left[-d_{j-2} + \frac{2d_0(-1)^{j-1}(2j-1)}{(j-1)!j!2^{2j-1}}\right],\ (j \geq 2).$$

El coeficiente d_2 queda indeterminado. Escogiendo $c = 1$, $d_2 = 1/2$, se obtiene la solución llamada *Función de Neumann-Bessel de segunda especie, de índice 1*:

$$Y^{(1)}(t) = -\frac{1}{t} - \frac{t}{4} - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^j}{j!(j+1)!}\left[1 + \sum_{r=0}^{j}\frac{1}{r+1}\right]\left(\frac{t}{2}\right)^{2j+1}$$

$$+J_1(t)\log t,\ (t > 0).$$

De manera análoga se pueden obtener los desarrollos en serie de las funciones de Bessel de segunda especie de índices $\nu \in \mathbf{N}$, $(\nu \geq 2)$, denotadas $Y^{(\nu)}$.

Capítulo VII: Análisis del equilibrio en sistemas no lineales

Temario:

1. El método de Liapunov,
2. Linealización.

El método de Liapunov

Presentaremos en lo que sigue, el método de Liapunov para analizar la estabilidad de un punto de equilibrio para sistemas de ecuaciones no lineales de 2 ecuaciones. Este tiene como base la idea intuitiva de que cuando la energía de una partícula tiene un valor mínimo, entonces ella está en un estado estable. Consideremos el sistema autónomo

$$\begin{cases} x_1' = f_1(x_1, x_2) \\ x_2' = f_2(x_1, x_2) \end{cases}, \tag{201}$$

donde $f = (f_1, f_2)$ es una función definida en una región $D \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}$, con valores reales.

Suponemos que el origen $(0, 0)$ es un punto crítico del sistema, que está en el interior de D.

Una *función de Liapunov* para este sistema , es una función $E(x_1, x_2)$, de clase C^1, definida en $D \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ que verifica,

- (i) $E(0,0) = 0$ y $E(x_1, x_2) > 0$, para todo $(x_1, x_2) \in D$ con $(x_1, x_2) \neq (0,0)$.

- (ii) la función $F(x_1, x_2) = \frac{\partial E}{\partial x_1} f_1 + \frac{\partial E}{\partial x_2} f_2$ satisface $F(0,0) = 0$ y $F(x_1, x_2) \leq 0$, para todo $(x_1, x_2) \in D$ con $(x_1, x_2) \neq (0,0)$.

Una función $E(x_1, x_2)$ que satisface la propiedad (i) se llama *definida positiva o de tipo positivo*, en cambio una que verifica (ii) se llama *negativa semipositiva o de tipo seminegativo*. En forma similar, se definen las funciones negativa definida y positiva semidefinida.

Intuitivamente, si $E(x_1, x_2)$ es positiva definida, entonces el gráfico, en el espacio $\mathbf{R}^3$, de la superficie $x_3 = E(x_1, x_2)$ se parece a un paraboloide que se abre hacia arriba del plano (x_1, x_2), con vértice en el origen.

La importancia de una función de Liapunov para el sistema de ecuaciones, proviene del hecho que si $\phi(t) = (x_1(t), x_2(t))$ es una solución del mismo, entonces , a lo largo de la trayectoria $(x_1(t), x_2(t))$, la función

$e(t) = E(x_1(t), x_2(t))$ tiene derivada,

$$\frac{d}{dt}E(x_1(t), x_2(t)) = \frac{\partial E}{\partial x_1}f_1 + \frac{\partial E}{\partial x_2}f_2,$$

que es siempre negativa semidefinida, por lo que $e(t)$ es decreciente. Usando este hecho, se puede demostrar el siguiente resultado.

Teorema 20. *Si existe una función de Liapunov para el sistema (201), entonces el origen* $(0, 0)$ *es estable.*

Si además la función $F(x_1, x_2) = \frac{\partial E}{\partial x_1}f_1 + \frac{\partial E}{\partial x_2}$ *es negativa definida, entonces el origen es asintóticamente estable.*

Demostración. Supongamos que existe una función de Liapunov $E(x_1, x_2)$ para el sistema propuesto. Sea γ la circunferencia de radio ϵ centrada en el origen y supongamos que ϵ es pequeño de modo que la bola (círculo) de este radio está contenido en el interior de la región D. Como $E(x_1, x_2)$ es una función continua en γ, ella tiene un valor mínimo m en esta curva. Por otra parte, $E(0, 0) = 0$ y también por continuidad, se tiene que existe $\delta > 0$ tal que $E(x_1, x_2) < m$, para todo $x = (x_1, x_2)$ que esté en la bola B_δ de radio δ.

Sea ahora $\phi(t) = (x_1(t), x_2(t))$ una solución con dato inicial $\phi(0)$ en la bola B_δ. Por una observación previa, tenemos que $e(t) = E(x_1(t), x_2(t))$ es una función decreciente y, por lo tanto, $e(x_1(t), x_2(t)) < m$, para todo t positivo. Pero entonces la trayectoria $\phi(t) = (x_1(t), x_2(t))$ no puede cruzar la circunferencia γ y debe quedar enteramente contenida en la bola de radio ϵ. Es decir, el origen es estable. La demostración de la estabilidad asintótica, cuando $e(t)$ es estrictamente decrecienta, queda propuesta como ejercicio. $\square$

Ejemplo 18. *Consideremos el movimiento de un bloque de masa m sujeto a un resorte. Si tomamos en cuenta el roce, entonces dicho movimiento se modela por la ecuación de Newton,*

$$mx'' = -kx - cx'.$$

Esta ecuación equivale al sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1' = x_2 \\ x_2' = ax_1 + bx_2 \end{array} \right. , \tag{202}$$

donde $a = -\frac{k}{m}$ *y* $b = -\frac{c}{m}$. *El único punto crítico de esta ecuación es el origen. Además, la energía correspondiente es* $E(x_1(t), x_2(t)) = \frac{1}{2}mx_2^2 + \frac{1}{2}kx_1^2$. *Es fácil verificar que esta última es una función de Liapunov, por lo que podemos concluir que* $(0,0)$ *es estable. Notemos que la función* $F(x_1, x_2)$ *en (ii) es, en este caso, solamente positiva semidefinida, por lo que no podemos asegurar que el origen sea asintóticamente estable.*

Hacemos notar en este punto que en muchas situaciones pude resultar muy difícil encontrar funciones de Liapunov. Conviene para ello, recordar los criterios para decidir cuando una forma cuadrática $ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2$ es positiva o negativa definida.

Linealización

Consideremos nuevamente el sistema no lineal

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1' = f_1(x_1, x_2) \\ x_2' = f_2(x_1, x_2), \end{array} \right. \tag{203}$$

donde $F(x_1, x_2) = (f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2))$ es una función diferenciable que satisface $F(0,0) = (0,0)$

Cuando la función $F(x_1, x_2)$ (o cada una de sus coordenadas) es analítica, entonces el sistema pude ser escrito en la forma,

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1' = ax_1 + bx_2 + a_2x_1^2 + a_3x_2^2 + a_4x_1x_2 + \cdots \\ x_2' = cx_1 + dx_2 + b_2x_1^2 + b_3x_2^2 + b_4x_1x_2 + \cdots \ , \end{array} \right. \tag{204}$$

donde las series de potencias en las variables (x_1, x_2) no tienen términos constantes, puesto que $F(0,0) = (0,0)$.

Consideramos ahora el sistema lineal asociado,

$$\begin{cases} x_1' = ax_1 + bx_2 \\ x_2' = cx_1 + dx_2, \end{cases} \tag{205}$$

para el cual, de acuerdo a un resultado anterior, tenemos un respuesta completa al estudio de la estabilidad de la solución trivial $(0,0)$, en términos de los valores propios de la matriz de coeficientes,

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Notemos que la diferencia entre ambos sistemas, vale decir, los términos no lineales, es grande, pero, para valores de (x_1, x_2) cercanos al origen $(0,0)$, ella es despreciable. Por esta razón, resulta razonable pensar que la estabilidad de la solución trivial para la ecuación no lineal dada, esté relacionada con su estabilidad para la ecuación lineal asociada. Esta última depende sólo de los valores propios de la matriz A.

El teorema que sigue establece esencialmente este hecho. En su enunciado usaremos la notación

$$f_1(x) = ax_1 + bx_2 + a_2x_1^2 + a_3x_2^2 + a_4x_1x_2 + \cdots = ax_1 + bx_2 + g_1(x$$

$$f_2(x) = cx_1 + dx_2 + b_2x_1^2 + b_3x_2^2 + b_4x_1x_2 + \cdots = cx_1 + dx_2 + g_2(x)$$

Es decir, la función $G(x) = (g_1(x), g_2(x))$, con $x = (x_1, x_2)$, representa a los términos no lineales.

Teorema 21. *Supongamos que la función $\frac{G(x)}{||x||}$ es continua y se anula en el origen. Entonces, la solución trivial $(0,0)$ de la ecuación no lineal es asintóticamente estable (resp. inestable) si la solución trivial de la ecuación lineal asociada también es asintóticamente estable (resp. inestable).*

Demostración. Supongamos que los valores propios de la matriz A tienen su parte real negativa. Este es el caso cuando el origen es asintóticamente estable. Además, se tiene que las soluciones de la ecuación lineal asociada decrecen exponencialmente cuando $t \to \infty$, o sea,

$$||e^{At}v|| \leq ce^{-at}||v||,$$

para todo $v \in \mathbf{R}^2$. Dejamos como ejercicio la demostración de este hecho, asícomo de la desigualdad

$v \cdot Av \leq -a||v||^2$, donde $u \cdot v$ denota el producto interior de dos vectores u, v.

Sea $\phi(t)$ una solución. Demostremos primero que si el dato inicial $\phi(0)$ es suficientemente pequeño, entonces , a medida que transcurre el tiempo, esta solución se acerca al origen. Para ésto, basta demostrar que $||\phi(t)||^2$ es una función decreciente de t. Ahora bien,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(\frac{1}{2}||\phi(t)||^2) &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\phi(t)\cdot\phi(t)) \\
&= \phi(t)\cdot\frac{d}{dt}\phi(t) \\
&= \phi(t)\cdot(A\phi(t)+G(\phi(t))) \\
&\leq -a||\phi(t)||^2+\phi(t)\cdot G(\phi(t)).
\end{aligned}$$

Pero, por la hipótesis del teorema, tenemos que existe un radio $r > 0$ tal que si $||v|| < r$, entonces $||G(v)|| \leq$

$\frac{a}{2}||v||$. Luego, por la desigualdad de Cauchy Schwarz,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(||\phi(t)||^2) &\leq -a||\phi(t)||^2 + ||\phi(t)||||G(\phi(t))|| \\ &\leq -a||\phi(t)||^2 + \frac{a}{2}||\phi(t)||^2 \\ &= -\frac{a}{2}||\phi(t)||^2, \end{aligned}$$

para cada instante t para el cual $||\phi(t)|| < r$. Así, si el dato inicial es suficientemente pequeño , entonces la norma de la solución decrece en el tiempo. Por lo tanto, la solución trivial es estable. Por otra parte, de las desigualdades anteriores también se obtiene que,

$$||\phi(t)||^2 + \frac{a}{2}||\phi(t)||^2 \leq 0,$$

de donde se concluye fácilmente que la norma de la solucíon es exponencialmente decreciente y, por lo tanto, la solucíon trivial es, de hecho, asintóticamente estable.

Notemos finalmente que se demuestra en forma similar que , si la matriz A tiene un valor propio con parte real positiva, entonces, la solución trivial es inestable. $\square$

Ejemplo 19. *Consideremos el sistema*

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1' = 4x_1 - x_2 + x_1^2 + x_2^2 \\ x_2' = 2x_1 + x_2 + 3x_2^2 \end{array} \right. . \qquad (206)$$

La matriz de coeficientes del sistema linealizado es

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Como sus valores propios son números positivos, el origen es un punto de equilibrio inestable.

Notemos que el método de linearización se aplica en este caso, puesto que los términos no lineales satisfacen,

$$\frac{x_1^2 + x_2^2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2},$$

$$\frac{3x_2^2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \leq 3\sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$$

Estas últimas son funciones continuas que se anulan en el origen

Ejemplo 20. *El sistema*

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1' = x_1 + 2x_2 + x_1^3 \\ x_2' = 2x_1 + 2x_2 + 3x_2^3 \end{array} \right. . \qquad (207)$$

también puede ser estudiado usando linearización. La matriz de coeficientes del sistema linealizado es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Como sus valores propios son números -1 y -2, el origen es un punto de equilibrio asintóticamente inestable.

Capítulo VIII: Existencia y unicidad de soluciones de ecuaciones diferenciales

Existencia y unicidad de soluciones locales

Consideremos la ecuación

$$x'(t) = f(t, x) \tag{208}$$

donde $f : D \to \mathbf{R}^n$ es una función continua y $D \subset \mathbf{R}^{n+1}$ un dominio (conjunto abierto y conexo).

Cuando decimos que una función $\varphi(t)$ es una solución de la ecuación (208), implícitamente asumimos que:

- φ es una función diferenciable, con dominio en un intervalo $I \subset \mathbf{R}$, y valores en $\mathbf{R}^n$,
- para todo $t \in I$, $(t, \varphi(t)) \in D$
- $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$, para todo $t \in I$.

El primer problema es, por cierto, el de dar condiciones sobre la función f que garanticen que la ecuación (208) posee soluciones. Esto se consigue agregando una condición inicial que permita demostrar la existencia de una única solución; dado que esta condición puede ser elegida en forma casi arbitraria, podremos concluir la existencia de muchas soluciones de (208).

Escojamos pues un punto $(t_0, x_0) \in D$. El tiempo t_0 será el instante inicial y x_0, la condición inicial.

Recordemos que una *solución* del problema con valores iniciales

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{209}$$

es una función $\varphi(t)$ que satisface la ecuación 208 y que además verifica,

(i) $t_0 \in I = Dom(\varphi)$;

(ii) $\varphi(t_0) = x_0$.

El concepto de solución incluye implícitamente la existencia de un intervalo en el cual ésta verifica la ecuación. En la introducción del curso hemos definido los conceptos de extensión de soluciones y de solución maximal. Cuando el intervalo de definición de una solución es toda la recta real, ella es obviamente maximal. En ese caso decimos que la solución es *global*.

Aquí, demostraremos sólo criterios de existencia *local* de soluciones, cuyo dominio I es posiblemente pequeño.

Ejemplo 21. *La función* $\varphi(t) = -\frac{1}{t}$, $(t \in D(\varphi) =]0, \infty[)$ *es una solución (de hecho es la única solución global) del problema con valores iniciales*

$$\begin{cases} x'(t) = x^2(t), \\ x(1) = -1. \end{cases} \tag{210}$$

En este caso, $f(t,x) = x^2$ *es una función infinitamente diferenciable en todo* $\mathbf{R}^2$*, pero la solución sólo tiene sentido para* $t \in]0, \infty[$.

El siguiente es un resultado sobre **existencia** de soluciones locales. Se conoce como el Teorema de Cauchy-Peano. En este teorema, $D \subset \mathbf{R}^{n+1}$ es una región dada por :

$$\begin{aligned} D &= I \times \mathbf{R} \\ &= \{(t,x):\ t \in I, x = (x_1,..,x_n), a_i \leq x_i \leq b_i\} \end{aligned}$$

donde $I = (a,b)$ es un intervalo en $\mathbf{R}$.

Teorema 22. *Sea $(t_0,x_0) \in D$ y sea $f : D \to \mathbf{R}^n$ una función continua. Entonces, existe $\delta > 0$ tal que el problema con valor inicial:*

$$\begin{cases} x'(t) = f(t,x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{211}$$

tiene una solución $\varphi(t)$ con dominio en el intervalo $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$.

Hacemos notar que la solución $\varphi(t)$ es local y de hecho el intervalo $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ podría ser muy pequeño. Por otra parte, el teorema sólo garantiza la existencia de una solución. El ejemplo que sigue muestra que ésta, en general, no es única, aún cuando satisface una condición inicial dada.

Ejemplo 22. *Verifique que la función :*

$$\varphi_\alpha(t) = \begin{cases} 0, & \textit{si } 0 \leq t \leq \alpha \\ (\frac{2}{3}(x-\alpha))^{3/2}, & \textit{si } \alpha \leq t \leq 1, \end{cases} \tag{212}$$

es una solución del problema:

$$\begin{cases} x'(t) = x^{1/3} \\ x(0) = 0, \end{cases} \tag{213}$$

definida en el intervalo $]0, 1[$*.*

En este ejemplo la función $f(t,x) = x^{1/3}$ es continua, por lo que el Teorema de Cauchy-Peano asegura la existencia de una solución. De hecho, en este caso existen infinitas soluciones $\varphi_\alpha(t)$, pues α es una constante arbitraria en $]0, 1[$.

Retorno al método de Picard

Cuando discutimos al principio del curso sobre la existencia de soluciones para una ecuación cualquiera, introdujimos un algoritmo de construcción de soluciones conocido como *método de Picard*. Este método es de gran utilidad computacional y está basado en una expresión equivalente al problema con valor inicial (209). Esta expresión consiste de una *ecuación integral* que se obtiene integrando el problema (209).

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds. \tag{214}$$

Notemos que si $x(t)$ es una solución de la ecuación (208), entonces integrando desde t_0 a t y usando la condición inicial, se obtiene la ecuación integral (214).

Recíprocamente, si $x(t)$ es una solución de la ecuación integral, entonces evaluando en $t = t_0$ y derivando se obtiene de inmediato que ésta resuelve también (209).

La ecuación (214) es aparentemente menos restrictiva que el problema con valor inicial, pues podemos buscar sus soluciones en un conjunto (el de las funciones continuas) más amplio que el que usaríamos para una ecuación diferencial (el de las funciones derivables).

Por simplicidad, tomamos el tiempo inicial $t_0 = 0$ y busquemos soluciones definidas en un intervalo simétrico $[-\delta, \delta]$ en torno al origen. Así, es natural considerar el conjunto:

$$M_\delta = \{v : [-\delta, \delta] \to \mathbf{R}^n : \ v \text{ es continua}\}. \tag{215}$$

Dado que una función continua definida en un intervalo cerrado y acotado es automáticamente acotada, podemos usar la expresión:

$$d(u, v) = sup_{-\delta \leq t \leq \delta} |u(t) - v(t)|, \tag{216}$$

para medir la distancia entre dos elementos $u, v \in M_\delta$.

Es fácil verificar que esta función es efectivamente una *distancia (o métrica)*, es decir, que posee las propiedades:

- $d(u, v) \geq 0$, para todo $u, v \in M_\delta$,
- $d(u, v) = 0$ si y sólo si $u = v$,
- $d(u, v) = d(v, u)$
- $d(u, v) \leq d(v, w) + d(w, v)$, para todo $u, v, w \in M_\delta$.

La propiedad siguiente es mucho más profunda. Será esencial en la demostración del Teorema de Existencia y Unicidad (24) y se deja al lector verificar su demostración.

Teorema 23. *La distancia $d(u,v)$ hace de M_δ un espacio métrico completo, es decir, toda sucesión $(v_n) \subset M_\delta$ que es de Cauchy, es convergente.*

Hacemos notar que $(v_n) \subset M_\delta$ es una sucesión de Cauchy si $d(v_n, v_m)$ tiende a cero cuando n, m tienden a infinito. Esto equivale a $d(v_{n+k}, v_n)$ tiende a cero cuando n tiende a infinito, para cualquier k.

Así, $(v_n) \subset M_\delta$ es una sucesión de Cauchy si y sólo si

$$\sup_{-\delta \leq t \leq \delta} |v_{n+k}(t) - v_n(t)|$$

converge a 0, cuando n tiende a ∞.

Observemos que el lado derecho de la ecuación integral (214) define una función $T : M_\delta \to M_\delta$, dada por:

$$(Tv) = x_0 + \int_0^t f(s, v(s))ds. \tag{217}$$

Es claro que $\varphi(t)$ es una solución de la ecuación integral si y sólo si $T\varphi = \varphi$. En otras palabras, podemos formular el problema de existencia de soluciones en términos de buscar puntos fijos de T en el espacio M_δ. Esto se formula precisamente en el siguiente resultado, conocido como *Teorema de Picard*:

Teorema 24. *Supongamos que $f : D \to \mathbf{R}^n$ es continua y que satisface la llamada condición de Lipschitz:*

$$|f(t,u) - f(t,v)| \leq c|u - v|, \tag{218}$$

para todo $(t,u), (t,v) \in D$.

Entonces, si δ es suficientemente pequeño, T tiene un único punto fijo en M_δ

Demostración. Sean $u, v \in M_\delta$. La hipótesis (218) implica inmediatamente que:

$$\begin{aligned}
|Tu(t) - Tv(t)| &= |\int_0^t (f(s,u(s)) - f(s,v(s))ds| \\
&\leq \int_0^t |f(s,u(s)) - f(s,v(s))|ds \\
&\leq \int_0^t c|u(s) - v(s)|ds \\
&\leq cd(u,v)\int_0^t ds \\
&\leq c\delta d(u,v),
\end{aligned}$$

para $t \geq 0$. Para $t \leq 0$, esta desigualdad se demuestra de manera análoga, de modo que obtenemos:

$$d(Tu, Tv) \leq c\delta d(u,v)$$

Ahora, escogemos δ suficientemente pequeño de modo que: $\rho = c\delta < 1$. Entonces,

$$d(Tu, Tv) \leq \rho d(u,v). \tag{219}$$

Construyamos a continuación las *aproximaciones sucesivas*. Estas constituyen una sucesión $(\varphi_n(t)) \subset M_\delta$ que definimos de manera recursiva como sigue:

1) $\varphi_0(t) = x_0$

2) $\varphi_{n+1}(t) = x_0 + \int_0^t f(s, \varphi_n(s))ds,$

para todo $t \in [-\delta, \delta]$.

En otras palabras, tomamos φ_0 la función con valor constante $x_0, \varphi_1 = T\varphi_0, \quad \varphi_2 = T\varphi_1$ y, en general, $\varphi_{n+1} = T\varphi_n$.

La desigualdad (219) da de inmediato que:

$$d(\varphi_{n+1}, \varphi_n) \leq \rho d(\varphi_n, \varphi_{n-1})$$

Además, usando recursivamente esta relación, obtenemos:

$$d(\varphi_{n+1}, \varphi_n) \leq \rho^n d(\varphi_1, \varphi_0).$$

Por otra parte,

$$
\begin{aligned}
|\varphi_1(t) - \varphi_0(t)| &= |\int_0^t f(s, x_0) ds| \\
&\leq \int_0^t |f(s, x_0)| ds \\
&\leq L\delta,
\end{aligned}
$$

donde L es el supremo de la función $f(t, x_0)$ para $-\delta \leq t \leq \delta$, el cual es un número finito pues f es una función continua. Así,

$$
d(\varphi_{n+1}, \varphi_n) \leq \rho^n L\delta \tag{220}
$$

Por lo tanto,

$$
\begin{aligned}
d(\varphi_{n+2}, \varphi_n) &\leq d(\varphi_{n+2}, \varphi_{n+1}) + d(\varphi_{n+1}, \varphi_n) \\
&\leq \rho^{n+1} L\delta + \rho^n L\delta \\
&= (1 + \rho)\rho^n L.
\end{aligned}
$$

Análogamente,

$$\begin{aligned} d(\varphi_{n+3},\varphi_n) &\leq d(\varphi_{n+3},\varphi_{n+2}) + d(\varphi_{n+2},\varphi_n) \\ &\leq \rho^{n+2}L\delta + \rho^{n+2}L\rho + \rho^n L\delta \\ &= (1+\rho+\rho^2)\rho^n L\delta. \end{aligned}$$

En general, tenemos que:

$$d(\varphi_{n+k},\varphi_n) \leq (1+\rho+\rho^2+\cdots\rho^{k-1})L\delta.$$

Pero,

$$\begin{aligned} 1+\rho+\rho^2+\cdots\rho^{k-1} &\leq 1+\rho+\rho^2+\cdots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\rho^k \\ &= \frac{1}{1-\rho}, \end{aligned}$$

donde hemos usado que la serie geométrica converge puesto que $\rho < 1$.

Por lo tanto, para todo n, k números naturales hemos demostrado que la sucesión $\varphi_n(t)$ verifica,

$$d(\varphi_{n+k}, \varphi_n) \leq \rho^{n-1} \frac{\delta L}{1-\rho}. \tag{221}$$

Esto demuestra que $(\varphi_n(t))$ es una sucesión de Cauchy y por lo tanto converge a una función $\varphi(t) \in M_\delta$.

Sólo resta verificar que la función límite $\varphi(t)$ es el único punto fijo de T.

Tomando límite cuando k tiende a infinito en (221), obtenemos primero,

$$d(\varphi, \varphi_n) \leq \rho^{n-1} \frac{\delta L}{1-\rho}. \tag{222}$$

Usando esta relación y la estimación (219) sigue que,

$$
\begin{aligned}
d(\varphi, T\varphi) &\leq d(\varphi, \varphi_{n+1}) + d(\varphi_{n+1}, T\varphi) \\
&= d(\varphi, \varphi_{n+1}) + d(T\varphi_n, T\varphi) \\
&\leq \rho^n \frac{\delta L}{1-\rho} + \rho d(\varphi_n, \varphi) \\
&\leq \rho^n \frac{\delta L}{1-\rho} + \rho \rho^{n-1} \frac{\delta L}{1-\rho} \\
&= 2\rho^n \frac{\delta L}{1-\rho}.
\end{aligned}
$$

Tomando límite cuando n tiende a infinito, concluímos que $d(\varphi, T\varphi) = 0$, o sea $\varphi = T\varphi$. En otras palabras, $\varphi(t)$ es un punto fijo de T.

Supongamos por último que $\psi(t)$ es, también, un punto fijo de T. Entonces,

$$
\begin{aligned}
d(\varphi, \psi) &= d(T\varphi, T\psi) \\
&\leq \rho d(\varphi, \psi),
\end{aligned}
$$

de donde

$$0 \leq (1-\rho)d(\varphi, \psi) \leq 0$$

y como $\rho < 1$ obtenemos que $d(\varphi, \psi) = 0$, o sea $\varphi = \psi$. $\square$

La condición (218) es, entonces, la única hipótesis que debe verificar la función $f(t, x)$ para que el problema:

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x), \\ x(f_0) = x_0, \end{cases} \tag{223}$$

tenga una única solución, definida en algún intervalo (posiblemente pequeño) en torno a t_0.

Notemos que si $f(t, \cdot)$ está definida sobre un conjunto cerrado y acotado y es diferenciable (con respecto a la segunda variable) entonces, por el Teorema del Valor Medio, tendremos que:

$$f(t,u_1) - f(t,u_2) = \frac{\partial f}{\partial x}(t,\xi)(u_1 - u_2)$$

donde ξ es un punto entre u_1 y u_2.

Pero como $\frac{\partial f}{\partial x}(t,\cdot)$ es continua, y su dominio es un conjunto cerrado y acotado, ésta resulta ser una función acotada. Por lo tanto, existe $C > 0$ tal que,

$$|f(t,u_1) - f(t,u_2)| \leq C|u_1 - u_2|$$

En otras palabras, f es de Lipschitz.

Corolario 10. *Supongamos que $f : D \to \mathbf{R}^n$ satisface,*

i) $f(t,x)$ *es continua*

ii) $f(t,x)$ *es diferenciable con respecto a su segunda variable.*

Entonces, para δ suficientemente pequeño, el problema:

$$\begin{cases} x'(t) = f(t,x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{224}$$

tiene una única solución definida en el intervalo $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$.

Observación 2. *Tanto o más importante que la formulación del Teorema de Picard es su demostración. En efecto, en ella está contenido el método de las aproximaciones sucesivas.*

Sea c una constante de Lipchitz para $f(t,x)$, con respecto a su segunda variable. Por ejemplo, si $\frac{\partial f}{\partial x}$ existe y es continua, podemos tomar c como el supremo de $\frac{\partial f}{\partial x}$. Sea δ suficientemente pequeño, de modo que $0 < \delta < 1/c$.

Definimos entonces las iteraciones $\varphi_n : [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \to \mathbf{R}^n$ por:

i) $\varphi_0(t) = x_0$,

ii) $\varphi_{n+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi_n(s))ds$

El teorema de Picard (más bien su demostración) asegura que esta sucesión converge a la única solución de (209).

Pero, además, conocemos el orden de esta convergencia. En efecto, si $\varphi(t)$ es la solución, entonces, por (222), tenemos que:

$$|\varphi_n(t) - \varphi(t)| \leq \frac{(c\delta)^n \delta L}{1 - c\delta}, \tag{225}$$

donde L es el supremo de $f(t, x)$.

Esta es una expresión explícita del error cometido al aproximar la solución $\varphi(t)$ por la n-ésima aproximación $\varphi_n(t)$. Para estimarla, basta conocer la constante de Lipschitz c y el supremo L de la función $f(t, x)$. El radio δ del intervalo de existencia queda determinado por la relación $c\delta < 1$.

Existencia de soluciones maximales

El teorema 24, debido a Picard, asegura que si f es una función que satisface una condición de Lipschitz en un cierto dominio D y que $(t_0, x_0) \in D$, entonces existe $\delta > 0$ de modo que hay una única solución φ del PVI asociado a (t_0, x_0), sobre el intervalo $D(\varphi) =]t_0 - \delta, t_0 + \delta[$. Pero, en muchos casos una solución puede existir sobre un intervalo más grande que $]t_0 - \delta, t_0 + \delta[$. Considérese, por ejemplo, el PVI

$$\begin{cases} x' = 1 + x^2, \\ x(0) = 0. \end{cases} \tag{226}$$

del cual una solución es $\varphi(t) = \tan t$ sobre $D(\varphi) =] - \pi/2, \pi/2[$. En este caso, $f(t, x) = 1 + x^2$ no varía con t y ambas, f y $\partial f / \partial x$ son continuas sobre el plano completo $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$. Para determinar el máximo valor de δ según el procedimiento visto en la sección anterior, tomemos un rectángulo en torno al punto $(0, 0)$:

$$D = \{(t, x) : |t| \leq a,\ |x| \leq b\}.$$

Sobre D, se tiene que $|f(t,x)| = |1+x^2| \leq 1+b^2 = M$. Asimismo, $|f(t,x) - f(t,y)| = |x^2 - y^2| \leq 2b|x-y|$ sobre D, vale decir $c = 2b$ es la menor constante de Lipschitz que podemos tomar en tal dominio. La observación hecha al final de la sección precedente establece que δ se escoja, entonces, en el intervalo $]0, 1/2b[$, de modo que disponemos de soluciones únicas $\varphi_b(t)$ definidas sobre intervalos $D(\varphi_b) =]-1/2b, 1/2b[$. Debido a la unicidad probada, se tiene $\varphi_b(t) = \tan t$, sobre $]-1/2b, 1/2b[$ si $b > 1/\pi$.

Lo anterior puede parecer un problema artificial bastante molesto. Sin embargo, tal tipo de dificultades puede ser evitado gracias a la noción de *solución maximal*.

Acordemos de designar por $PVI(t_0, x_0)$ el conjunto de todas las soluciones $(D(\varphi), \varphi)$ del problema con valores iniciales

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = f(t,x), \\ x(t_0) = x_0. \end{array} \right. .$$

La función vectorial f satisface las hipótesis de la sección precedente en lo que respecta a su dominio de definición y su rango. El conjunto $PVI(t_0, x_0)$ podría obviamente ser vacío: es el caso en que el PVI no tiene solución alguna.

Si $PVI(t_0, x_0) \neq \emptyset$, una *solución maximal* $(D(\varphi), \varphi) \in PVI(t_0, x_0)$ cumple que si otra solución $(D(\psi), \psi)$ verifica $D(\varphi) \subset D(\psi)$, entonces $D(\varphi) = D(\psi)$ y ambas soluciones coinciden.

En lo que sigue diremos que una función es *localmente Lipschitz* en un dominio D si dado cualquier rectángulo $R \subset D$, existe una constante $c_R > 0$ (que en general depende de R) tal que $|f(t,x) - f(t,y)| \leq c_R|x - y|$ para todo $(t,x), (t,y) \in R$.

Teorema 25. *Sea f una función continua y localmente Lipschitz en un dominio D de $\mathbf{R}^{n+1}$. Si $(t_0, x_0) \in D$, entonces el problema con valor inicial*

$$\begin{cases} x' = f(t,x), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases},$$

tiene una única solución maximal ϕ. El dominio de *definición de ϕ es un intervalo abierto de la forma $D(\phi) =]\tau^-(t_0, x_0), \tau^+(t_0, x_0)[$.*

Ejemplo 23. *Considerar el problema con valores iniciales*

$$\begin{cases} x' = 2tx^2, \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{227}$$

Si $x_0 = 0$, la única solución maximal es $\phi(t) = 0,\ (t > 0)$. Si $x_0 \neq 0$, entonces la única solución maximal ϕ satisface

$$\frac{\phi'(t)}{\phi^2(t)} = 2t,$$

para $|t - t_0|$ suficientemente pequeño. Luego,

$$\phi(t) = \frac{1}{\frac{1}{x_0} + t_0^2 - t^2},$$

para $\tau^-(t_0, x_0) = -\sqrt{\frac{1}{x_0} + t_0^2 - t^2} < t < \tau^+(t_0, x_0) = \sqrt{\frac{1}{x_0} + t_0^2 - t^2}$.