



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

FACULTAD DE MATEMÁTICAS

ÁLGEBRAS DE CLIFFORD

ALUMNO:

Manuel Antonio Concha Moraga

DIRECTOR DEL TRABAJO:
Manuel Camilo Arenas Carmona

28 de Marzo del 2019
Santiago, Chile



Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática

Álgebras de Clifford

ALUMNO:

Manuel Antonio Concha Moraga

DIRECTOR DEL TRABAJO:
Manuel Camilo Arenas Carmona

COMISIÓN:
Olivier Bourget
Carolina Canales

28 de Marzo del 2019
Santiago, Chile



FACULTAD DE MATEMÁTICAS
PONTIFICIA UNIVERSIDAD
CATÓLICA DE CHILE

Álgebras de Clifford

ALUMNO:

Manuel Antonio Concha Moraga

DIRECTOR DEL TRABAJO:
Manuel Camilo Arenas Carmona

COMISIÓN:
Olivier Bourget
Carolina Canales

28 de Marzo del 2019
Santiago, Chile

Índice

1. Introducción	1
2. Álgebras de Clifford	5
2.1. Espacios Cuadráticos	5
2.2. Álgebras de Clifford	7
Existencia	7
Categoría	9
Elemento de Volumen	10
Ejemplos de álgebras de Clifford	11
2.3. Super Álgebras	13
Construcción de una base para $Cl(\mathfrak{h})$	15
2.4. Álgebra Geométrica	17
Operaciones geométricas	17
2.5. Involuciones	18
3. Pin y Spin	23
3.1. Grupo Ortogonal y Grupo Pin	23
3.2. Grupo Especial Ortogonal y Grupo Spin	29
4. Clasificación de álgebras de Clifford	31
4.1. Álgebras de Clifford de dimensión pequeña	31
4.2. Álgebras de Clifford Complejas	36
Clasificación	36
5. Representaciones de álgebras de Clifford	37
Caso par	39
Caso impar	39
5.1. Construcción de representaciones reales	40
5.2. Construcción de representaciones Complejas	43
Representaciones de Pauli (caso impar)	43
Representaciones de Dirac (caso par)	43
Construcción inductiva	44
5.3. Morfismos entre representaciones	44
Adjunta	45
Elemento Volumen	46
5.4. Representación Débilmente fiel	46
6. Grupo de Lipschitz de representaciones reales débilmente fieles	49
6.1. Grupo de Lipschitz Especial	50
6.2. Elementos torcidos	51
7. Estructuras Lipschitz reales y fibrados pinoriales reales	53
7.1. Variedades pseudo-Riemannianas	53
Fibrados vectoriales	53
7.2. Fibrados pinoriales reales	56
7.3. Fibrados Principales	57
7.4. Estructuras Lipschitz reales	59
8. Equivalencia entre Estructuras Lipschitz reales y fibrados pinoriales reales	60
8.1. Funtor de $ClB_w^\eta(M, g)$ a $L_\eta(M, g)$	60
8.2. Funtor de $L_\eta(M, g)$ a $ClB_w^\eta(M, g)$	61

1. Introducción

La idea de escribir esta monografía, es dar un breve recorrido por las álgebras de Clifford, dando a conocer subgrupos importantes, sus representaciones y las formas en la que se aplican en la geometría diferencial.

Nos parece importante crear divulgación respecto a este tema ya que las álgebras de Clifford son objetos bastante usados en teorías modernas de física matemática y bastante rico desde el punto puramente matemático. En este documento nos apoyamos de paper [30], en el cual, los autores trabajan las álgebras de Clifford de manera puramente algebraica para luego utilizar estas herramientas en la teoría de la geometría diferencial y física matemática.

Antes de empezar con la teoría, nos gustaría dar una introducción histórica, ya que creemos que una buena forma de comprender la importancia tanto matemática como física de estas álgebras es entender en qué contexto fueron descubiertas:

En el año 1806 el librero y matemático autodidacta **Jean-Robert Argand (1768-1822)**, introdujo una forma geométrica de representar los números complejos, en el cual asignaba el número complejo $a + bi$ con el par (a, b) en el plano cartesiano. Cuando vemos los números complejos de esta forma podemos ver que el producto es interesante geoméricamente ya que la multiplicación de dos números complejos se puede ver como una rotaciones del plano \mathbb{R}^2 , de hecho, las rotaciones pueden verse como el conjunto de números complejos de norma 1:

$$S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}.$$

Es decir, si sabemos multiplicar números complejos entonces sabemos hacer rotaciones en \mathbb{R}^2 , esto es bueno, ya que es una forma algebraica de tratar un problema geométrico y es bastante usado en diferentes áreas como la física, robótica, biología, etc.

Una pregunta interesante entonces sería si es posible encontrar una forma algebraica de entender las rotaciones en el espacio \mathbb{R}^3 , este problema es antiguo y lo resolvió **William Rowan Hamilton (1805-1865)** en el año 1844. Hamilton pensó que una forma natural de hacerlo sería crear un espacio vectorial parecido a los complejos, pero de dimensión 3 sobre \mathbb{R} , pero se dio cuenta de que es imposible crear un producto cerrado con estas características, esto lo llevó a pensar en un espacio vectorial de dimensión 4 sobre \mathbb{R} , que junto con producto dado por algunas restricciones algebraicas definen el álgebra de los cuaterniones:

$$\mathbb{H} = \{a + bi + cj + dk \mid i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1\}. \quad (1.1)$$

Aunque el producto encontrado por Hamilton no cumplía la propiedad conmutativa, a Hamilton le parecía que era esencial para describir fenomenos físicos y se dedicó el resto de su vida a aplicar el producto encontrado en las teorías físicas. Además como dijimos, con esta álgebra es posible modelar la rotaciones en el espacio \mathbb{R}^3 considerando los cuaterniones puros de norma 1, es decir,

$$S^2 = \{h = bi + cj + dk \mid i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1 \text{ y } |h| = 1\}.$$

Otra particularidad que tiene este producto, es que al considerar de esta forma los cuaterniones se tiene que el producto entre ellos es de la forma

$$ab = \langle a, b \rangle + a \times b, \quad (1.2)$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el producto escalar en \mathbb{R}^3 y \times es el producto cruz en \mathbb{R}^3 . El producto cruz nos da una forma de construir un vector perpendicular a $a, b \in \mathbb{R}^3$, este fue inmediatamente reconocido como un objeto muy útil en campos como la mecánica y el electromagnetismo, de hecho, el físico **Josiah Gibbs (1830-1903)**, profundizó la teoría del calculo vectorial conocido hasta el momento, solo utilizando la idea de producto cruz y olvidando un poco el producto de Hamilton. Pero el producto cruz tiene un problema, solo puede ser definido en \mathbb{R}^3 de manera única, ya que en \mathbb{R}^4 por ejemplo, dado dos vectores hay infinitas maneras de construir un vector perpendicular a ellos, además el producto cruz no es asociativo.

El mismo año que Hamilton descubrió los cuaterniones, **Herrman Grassmann (1809-1877)** introdujo el producto exterior o producto cuña “ \wedge ” con el fin de obtener propiedades del plano sin recurrir a la

noción de perpendicularidad, pero a diferencia del producto cruz, el producto cuña entre dos vectores es otro objeto, llamado bivector. El producto cuña tiene propiedades geometricas muy útiles, como por ejemplo, $a \wedge b$ representa el área del paralelogramo formado por los vectores a, b , pero $a \wedge b = -b \wedge a$, esto hace la diferencia entre el volumen de dos vectores con diferente orientación. Esta estructura es interesante, ya que a diferencia del álgebra vectorial, donde un vector tiene sentido, dirección y magnitud, los bivectores se caracterizan por su orientación, magnitud y plano donde viven.

El trabajo de Grassmann fue ignorado durante toda su vida, debido a su poca reputación como matemático y a su compleja forma de escribir. **William Clifford (1845-1879)** fue uno del selecto grupos de matemáticos que comprendió las ideas de Grassmann y así durante el año 1876, combinó las ideas de Hamilton utilizando las herramientas algebraicas propuestas por Grassman para poder expresar el movimiento de cuerpo rígido en espacios de dimensión arbitraria. El combinó la ecuación (1.2) con la idea de producto exterior y propuso el siguiente producto:

$$ab = \langle a, b \rangle + a \wedge b, \quad (1.3)$$

al que denominamos producto geometrico o producto de Clifford. Lamentablemente, Clifford no vivió mucho tiempo, lo que impidió que divulgara su trabajo.

En el año 1880 **Rudolph Lipschitz (1832-1903)** le da una interpretación geométrica al algebra propuesta por Clifford, encontrando en ellas conceptos geometricos como las reflexiones y rotaciones. Luego en 1913 **Élie Cartan (1869-1951)** investigando las representaciones del grupo especial ortogonal se da cuenta de que para este grupo hay representaciones que no tienen una naturaleza tensorial, si no que es posible obtenerlas del cubrimiento universal del grupo especial ortogonal el “grupo Spin”, que como veremos más adelante se construye de forma natural usando la estructura de álgebra de Clifford.

Hasta este punto las ideas algebraicas no habían tenido gran consideración en el campo de la física, de hecho, cuando Cartan estudiaba las representaciones del grupo Spin, este no era llamado con ese nombre.

En el año 1924 para poder explicar experimentos relacionados con la mecánica cuántica como el **efecto Zeeman anómalo** y el **experimento de Stern-Gerlach**, los físicos se vieron obligados a introducir un concepto cuántico que no tiene analogía en el mundo clásico, el spin de un electrón, que es un número que no depende del tiempo ni del espacio si no que tiene que considerarse como una nueva caracteristica de las partículas. Los físicos **Goudsmit, Uhlenbeck y Leiden** lo interpretaron como una especie de velocidad angular sobre el eje del electrón.

En 1925 el físico **Erwin Schrödinger (1887-1961)** con el fin de encontrar una ecuación que describiera la evolución temporal de una partícula cuántica, desarrolla la ecuación de Schrödinger:

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\varphi(r, t)\rangle = \left[\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 + V(f, t) \right] |\varphi(r, t)\rangle,$$

donde μ es la masa de la partícula, \hbar es la constante de Planck, V es su energía potencial, ∇^2 es el Laplaciano y φ es la función de onda. Esta ecuación solo dependía de las variables espaciales y temporales, sin incluir el concepto de spin. Es por esta razón que en el año 1927 el físico **Wolfgang Pauli (1900-1958)** introdujo las denominadas matrices de Pauli:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (1.4)$$

las cuales son la forma de describir esa “velocidad angular” del electrón y luego las introdujo en la ecuación de Schrödinger, encontrando la conocida ecuación no relativista del electrón:

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\varphi(r, t)\rangle = \left[\frac{1}{2\mu} \langle \sigma, p - eA \rangle^2 + eV(f, t) \right] |\varphi(r, t)\rangle,$$

donde los nuevos terminos, e es la carga eléctrica, p es el operador asociado al momento lineal, A es el vector potencial del campo electromagnetico y $\sigma = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$. Las matrices encontradas, son la forma matricial

de los generadores del álgebra de Clifford $Cl(3,0)$, descubierto por Cartan el año 1913, es decir son representaciones del cubrimiento universal del grupo ortogonal del espacio (vamos a dar más en detalle de esto en la sección 3).

Además, la ecuación de Schrodinger presentaba otro problema, la ecuación no era consistente con la teoría de la relatividad, entonces los físicos **Oskar Klein (1894-1977)** y **Walter Gordon (1893-1939)** en el año 1926 propusieron la ecuación que lleva sus nombres

$$(\partial_0^2 - \partial_1^2 - \partial_2^2 - \partial_3^2)\varphi = -m^2\varphi, \quad (1.5)$$

donde $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, m es la masa del electrón y φ es la función de onda del electrón.

Esta ecuación es consistente con la relatividad y es una generalización de la ecuación de Schrodinger, pero el concepto de spin no está presente en ella.

El físico **Paul Dirac (1902-1984)** estaba insatisfecho con la ecuación de Klein-Gordon, ya que él consideraba si esta ecuación era de segundo orden, permitía soluciones negativas para la función de onda, pero la función de onda es una función de densidad de probabilidad, es decir, no puede ser negativa. Entonces él pensaba que la ecuación debería ser de primer orden en el tiempo y, por lo tanto, como todas las coordenadas están en igualdad de condiciones en la relatividad especial, deber de primer orden en todas las coordenadas. Él consideraba que el operador diferencial debería tener la siguiente forma

$$D = \sum_{i=0}^3 (\gamma_i \partial_i). \quad (1.6)$$

Pero para que siga cumpliendo que sea invariante en la relatividad es necesario que

$$D^2 = \partial_0^2 - \partial_1^2 - \partial_2^2 - \partial_3^2, \quad (1.7)$$

así que el propuso la ecuación:

$$D\varphi = \pm im\varphi,$$

donde i es la unidad imaginaria, m es la masa del electrón y φ es la función de ondas. Entonces tenemos que encontrar los escalares γ_i que cumplan la condición (1.7). Lamentablemente no es posible encontrar estos escalares, ya que el polinomio $X_0^2 - X_1^2 - X_2^2 - X_3^2$ es irreducible en $\mathbb{C}[X_0, X_1, X_2, X_3]$. Se puede ver que la condición (1.7) es equivalente a las siguientes propiedades,

$$\gamma_1^2 = \gamma_2^2 = \gamma_3^2 = -1, \quad \gamma_0^2 = 1 \quad \text{y} \quad \gamma_i \gamma_j + \gamma_j \gamma_i = 0 \quad \text{para todo } i \neq j. \quad (1.8)$$

Veremos que estas ultimas relaciones son exactamente la definición de los generadores del Algebra de Clifford $Cl(1,3)$, que es el álgebra de Clifford correspondiente al espacio-tiempo. Dirac demostró que para que se cumplieran las relaciones (1.8) es necesario que γ_i sean matrices cuyo tamaño sea un mínimo 4×4 . Esta ecuación fue muy bien aceptada por la comunidad física, ya que se reducía a la de Schrodinger o a la de Pauli en el límite de energía cinética y se amoldaba muy bien a al concepto de spin, ya que, este necesitaba 2 grados de libertad. Como la ecuación considera mínimo matrices (4×4) , entonces la función de onda debe ser un vector de 4 coordenadas, se tiene que 2 coordenadas son para describir el spin de la partícula, entonces ¿Qué representan físicamente las otras dos coordenadas?, esta pregunta fue un dolor de cabeza para los físicos, pero el mismo Dirac la respondió introduciendo ideas respecto a la anti-materia.

Después de esto, tanto los matemáticos como los físicos pusieron su atención en las álgebras de Clifford y sus representaciones. Los elementos de los espacios donde actúa alguna representación spin son llamados spinors y los operadores que cumplen la ecuación (1.7) son llamados operadores de dirac. El hecho de que la representación spin no puede ser obtenida de tensores quiere decir que el operador de en la teoría cuántica debe actuar en campos spinoriales más que campos tensoriales.

Dirac hizo el descubrimiento definiendo su operador en una variedad (que es una estructura geométrica parecida a un \mathbb{R}^n curvado) en particular, conocida como el espacio tiempo de Minkowski, en esta variedad no hay ninguna dificultad de definir un operador de Dirac. Entonces la pregunta que se intentó resolver fue, dada una variedad cualquiera ¿Cuándo puedo definir un operador de dirac? Para efectos de la geometría

diferencial, se puede definir un operador de Dirac en una variedad del espacio-tiempo curvada si se puede definir en ella una estructura que en cada punto podemos definir una representación Spin de manera global, a dicha estructura se le llama un fibrado Spinorial.

En el año 1963 los famosos matemáticos **M. F. Atiyah (1929-2019)**, **R. Bott (1923-2005)** y **A. Shapiro** publican un paper llamado “Clifford Modules” en el cual ellos investigaran el rol de las álgebras de Clifford y los spinors en la KO-teoría, y así encuentran obstrucciones topológicas para poder definir de manera global estos fibrados spinoriales, estas obstrucciones están relacionadas con el desvanecimiento de ciertas clases de cohomología, las clases de Stiefel Whitney.

Hasta ahora sabemos que los spinors son un ingrediente fundamental en la teoría cuántica y además es posible interpretarlas en conjunto con la teoría de la relatividad. Pero sabemos que en general las teorías cuánticas con la teoría de relatividad no son consistentes, es por eso que nace la teoría de cuerdas y la teoría M. Entonces nace la siguiente pregunta ¿Cuál es la noción apropiada de spinor en la teoría de cuerdas? Para responder esta pregunta, primero se descubre que para poder definir un operador de Dirac general (en cualquier dimensión) en un fibrado vectorial S , es suficiente que en S pueda definir una multiplicación de Clifford global, lo que es equivalente a que existan un objeto definido en [30], llamado fibrado pinorial, lo que es una generalización del concepto de fibrado spinorial.

En el año 1999, el matemático **A. Trautman (1933)**, publica el artículo llamado “Spin spaces, Lipschitz groups, and spinor bundles” en el cual escribe sobre la relación que existe entre fibrados spinoriales y las llamadas estructuras Lipschitz, que son reducciones de un fibrado principal sobre el grupo de Lipschitz para representaciones de álgebras de Clifford complejas. Y en el año 2018 con el fin de generalizar las ideas de A. Trautman para el caso de representaciones de álgebras de Clifford reales, **C. I. Lazaroiu** y **C. S. Shahbazi**, publican artículo titulado Real “pinor bundles and real Lipschitz structures”, donde estudian la relación entre los fibrados pinoriales reales y las estructuras Lipschitz de forma categórica y dan obstrucciones topológicas para poder definir estos objetos.

Para confeccionar este documento nos basamos fuertemente en el artículo escrito por C. I. Lazaroiu y C. S. Shahbazi, es decir, trabajaremos con sus resultados y usaremos un lenguaje categórico para definir los conceptos. Para la mejor comprensión de las álgebras de Clifford y sus aplicaciones dividimos este documento en diferentes secciones.

Como vimos, la **primera sección** corresponde a la introducción y motivación de la tesis.

En la **segunda sección** introducimos las álgebras de Clifford y dimos una motivación.

En la **tercera sección** definiremos las álgebras de Clifford en un sentido puramente matemático, haremos una construcción general a partir de espacios cuadráticos y daremos varios ejemplos interesantes tanto en la matemática como en la física. Hablaremos un poco de las propiedades geométricas del álgebra de Clifford, definiremos una especie de norma y hablaremos de su estructura algebraica natural. Aunque entendemos que esta teoría está fuertemente relacionada con la teoría de Lie, no trabajaremos con resultados obtenidos de ella, ya que la idea de este documento es hacer una introducción a estos objetos sin necesidad de tener demasiados conocimientos previos.

En la **cuarta sección** trabajaremos con subgrupos importantes dentro de las álgebras de Clifford. Definiremos el grupo de Clifford que nace de la necesidad de ver reflexiones en el álgebra de Clifford y de este grupo definiremos el grupo Pin y Spin y veremos que son un cubrimiento de dos hojas de los grupos $O(h)$ y $SO(h)$ respectivamente.

En la **quinta sección** clasificaremos las álgebras de Clifford para cualquier dimensión de n y veremos relaciones entre ellas. Además hablaremos del caso complejo.

En la **sexta sección** hablaremos de las representaciones de álgebras de Clifford, tanto complejas como reales, daremos relaciones entre ellas, hablaremos un poco de las representaciones *Spin* y definiremos un ingrediente clave las “representaciones débilmente fiel”.

En la **séptima sección** definiremos el grupo de Lipschitz como una versión del grupo de Clifford en representaciones y veremos que en el caso de representaciones débilmente fiel hay relación con el grupo de automorfismos de representaciones de álgebras de Clifford.

En la **octava sección**, aplicaremos todo lo anterior a la teoría de geometría diferencial con el fin de poder definir operadores de Dirac en variedades no euclidianas, definiendo fibrados pinoriales reales y estructuras Lipschitz reales. Para finalizar mostraremos una equivalencia categorica entre estos dos conceptos.

2. Álgebras de Clifford

En esta sección vamos a definir álgebra de Clifford y veremos algunas propiedades geométricas básicas. Primero consideraremos una definición puramente matemática para luego ver sus propiedades geométricas. Durante todo este documento asumiremos que las álgebras A son asociativas con unidad y que los homomorfismo de álgebras llevan uno en uno.

2.1. Espacios Cuadráticos

La definición más general de álgebra de Clifford es en el contexto de espacios vectoriales en los cuales se puede definir una forma cuadrática.

Definición 2.1. Sea V un \mathbb{R} -espacio vectorial, decimos que el par (V, Φ) es un **espacio cuadrático** si la función $\Phi : V \rightarrow \mathbb{R}$ cumple las siguientes condiciones:

1. $\Phi(av) = a^2\Phi(v)$ para todo $v \in V, a \in \mathbb{R}$,
2. Al tomar la función $h : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ de la manera siguiente

$$h(x, y) = \frac{\Phi(x + y) - \Phi(x) - \Phi(y)}{2}, \quad (2.1)$$

esta define una forma bilineal simétrica.

A la función Φ la llamaremos **forma cuadrática** y se dice que h es la **forma bilineal simétrica asociada** a Φ .

Observación 2.2. De la definición anterior tenemos que una forma cuadrática define una forma bilineal simétrica. Por otro lado, dada una forma bilineal simétrica $h(x, y)$ podemos definir la forma cuadrática asociada a h como $\Phi(x) = h(x, x)$ para todo $x \in V$. Es decir, las formas bilineales simétricas y las formas cuadráticas son esencialmente lo mismo, es por esta razón que desde ahora vamos a utilizar (V, h) para referirnos a un espacio cuadrático.

Definición 2.3. La **Categoría de los espacios cuadráticos** es la categoría que denotaremos **Quad** donde:

1. Los objetos de la categoría son los espacios cuadráticos definidos en la definición 2.1 y los denotaremos Obj_{Quad} ,
2. dados dos espacios cuadráticos (V, h) y (V', h') los morfismos de la categoría son las isometrías de (V, h) a (V', h') , es decir,

$$f : V \rightarrow V' \text{ tal que } h(f(x), f(y)) = h'(x, y) \text{ para todo } x, y \in V,$$

y los denotaremos Hom_{Quad} .

Se sabe que las isometrías en espacios de dimensión finita siempre son invertibles, luego se tiene que $Quad^\times = Quad$, donde $Quad^\times$ al grupoide de **Quad**, es decir, a la categoría cuyos objetos coinciden con Obj_{Quad} y los morfismos son los isomorfismos de **Quad**.

Definición 2.4. Sean (V, h) y (V', h') dos espacios cuadráticos, definimos el espacio cuadrático **suma directa** como $(V \oplus V', h \oplus h')$ cuya forma cuadrática está definida por:

$$(h \oplus h')(v + v', v + v') = h(v, v) + h'(v', v'),$$

donde $v \in V, v' \in V'$.

La categoría de espacios cuadráticos tiene un esqueleto formado por los siguientes espacios cuadráticos:

Ejemplo 2.5. Definimos el **espacio cuadrático estándar** de signatura (p, q) como $\mathbb{R}^{p,q} = (\mathbb{R}^{p+q}, h_{p,q})$ donde,

$$h_{p,q}(x, y) = \sum_{i=1}^p x_i y_i - \sum_{j=p+1}^{p+q} x_j y_j$$

es la forma cuadrática definida en el espacio \mathbb{R}^{p+q} .

Observación 2.6. Se sabe que la signatura (p, q) es invariante bajo elección de base, una demostración de esto la puede encontrar en [32].

Definición 2.7. Decimos que un vector $v \in V$ es:

1. **Spacelike** si $h(v, v) > 0$.
2. **Timelike** si $h(v, v) < 0$.
3. **Lightlike** si $h(v, v) = 0$.

Teorema 2.8. Gram-Schmidt Sea (V, h) un espacio cuadrático no degenerado, entonces existe una base $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ de V donde los primeros p vectores son spacelike y los últimos q vectores son timelike, se tienen las siguientes relaciones:

1. $h(e_i, e_j) = 0$ para todo $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ tal que $i \neq j$,
2. $h(e_i, e_i) = 1$ para todo $i \in \{1, \dots, p\}$,
3. $h(e_j, e_j) = -1$ para todo $j \in \{p+1, \dots, n\}$.

A una base con estas características la llamaremos **base ortonormal**.

Demostración. Como h es no degenerada, existe un $v_1 \in V$ tal que $h(v_1, v_1) \neq 0$, entonces definimos

$$e_1 = \frac{v_1}{\sqrt{|h(v_1, v_1)|}},$$

notemos que

$$h(e_1, e_1) = h\left(\frac{v_1}{\sqrt{|h(v_1, v_1)|}}, \frac{v_1}{\sqrt{|h(v_1, v_1)|}}\right) = \frac{h(v_1, v_1)}{|h(v_1, v_1)|} = \pm 1.$$

Además se tiene que la transformación lineal $\phi_1 : V \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\phi_1(v) = h(e_1, v)$ es no nula, entonces consideremos $K = \text{Ker}(\phi_1) = e_1^\perp$, donde $\dim_{\mathbb{R}}(K) = n - 1$.

Luego usando inducción sobre n y reordenando la base se tiene lo pedido. \square

Observación 2.9. Dado un espacio cuadrático (V, h) no degenerado, al considerar la base dada por el teorema anterior se tiene que es isométrico al espacio $\mathbb{R}^{p,q}$ para alguna signatura (p, q) , definida por la cantidad de elementos spacelike y timelike que tenga la base encontrada.

2.2. Álgebras de Clifford

En esta sección empezaremos dando una definición de álgebra de Clifford completamente abstracta, para luego dar una construcción bastante intuitiva de estas álgebras.

Definición 2.10. Sea V un \mathbb{R} -espacio vectorial, definimos el **álgebra tensorial** como:

$$T(V) = \bigoplus_k T^k(V),$$

donde $T^k(V) = V \otimes \cdots \otimes V$ es el producto tensorial de V k -veces.

Podemos ver que el álgebra tensorial de un \mathbb{R} -espacio vectorial es un \mathbb{R} -álgebra vectorial, cuyo producto esta dado por:

$$(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) \cdot (w_1 \otimes \cdots \otimes w_m) = v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \otimes w_1 \otimes \cdots \otimes w_m.$$

Además de cumple la siguiente propiedad universal:

Sea A un álgebra, se tiene que para cada función lineal $f : V \rightarrow A$, existe un único homomorfismo de álgebras $T(f) : T(V) \rightarrow A$ que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & A \\ \downarrow i & \nearrow T(f) & \\ T(V) & & \end{array}$$

es decir, $f = T(f) \circ i$. Donde i es la inclusión canónica, es decir, $i : V \rightarrow V \subset T(V)$.

Ejemplo 2.11. Si tomamos un espacio vectorial de dimensión finita n , cuya base es $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ entonces podemos identificar el álgebra $T(V)$ como los polinomios $\mathbb{R}[x_1, x_2, \dots, x_n]$, donde la inclusión i lleva e_j en x_j y dada una transformación lineal $f : V \rightarrow A$ el homomorfismo $T(f) : \mathbb{R}[x_1, x_2, \dots, x_n] \rightarrow A$ esta dado por la evaluación.

Definición 2.12. Sea (V, h) es un espacio cuadrático de dimensión finita. Un **álgebra de Clifford** asociada a (V, h) es un par $(Cl(V, h), i_h)$ donde $Cl(V, h)$ es una \mathbb{R} -álgebra y $i_h : V \rightarrow Cl(V, h)$ una aplicación lineal que cumple la condición:

$$(i_h(v))^2 = h(v, v) \cdot 1_{Cl(V, h)} \text{ para todo } v \in V,$$

que cumplen la siguiente propiedad universal:

Dada una \mathbb{R} -álgebra A y una aplicación lineal $f : V \rightarrow A$ que cumple

$$(f(v))^2 = h(v, v) \cdot 1_A$$

existe un único homomorfismo de álgebras $\bar{f} : Cl(V, h) \rightarrow A$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & A \\ \downarrow i_h & \nearrow \bar{f} & \\ Cl(V, h) & & \end{array}$$

Es decir, se tiene la relación $\bar{f} \circ i_h = f$.

Existencia

Sea (V, h) un espacio cuadrático de dimensión finita y sea $T(V)$ su álgebra tensorial. Entonces definimos $I(h)$ como el ideal bilatero más pequeño que contiene los elementos de la forma $\{v \otimes v - h(v, v) \cdot 1_{T(V)} \mid v \in V\}$ en $T(V)$, luego definimos el cociente de la siguiente manera:

$$C_{(V, h)} = T(V)/I(h). \tag{2.2}$$

Proposición 2.13. Sea (V, h) espacio cuadrático entonces el álgebra $C_{(V, h)}$ es un álgebra de Clifford $Cl(V, h)$ asociada a (V, h) .

Demostración. Sea A una \mathbb{R} -álgebra y consideremos $f : V \rightarrow A$ lineal que cumple $(f(v))^2 = h(v, v) \cdot 1$ para todo $v \in V$.

Por la propiedad universal del álgebra tensorial $T(V)$ vista en la definición 2.10 se tiene que existe un único homomorfismo de álgebras $T(f)$ que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & A \\ \downarrow i & \nearrow T(f) & \\ T(V) & & \end{array}$$

es decir, $T(f) \circ i = f$.

Como $T(f)$ es única, para poder definir $T(f)$ en $T(V)/I$ de manera única, basta con que $I \subset \text{Ker}(T(f))$, lo que se verifica, ya que I es generado por los elementos de la forma $v_i \otimes v_i - h(v_i, v_i) \cdot 1_{T(V)} \in \text{ker}(T(f))$, por lo tanto tenemos que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} V & & \\ \downarrow i & \searrow f & \\ T(V) & \xrightarrow{T(f)} & A \\ \downarrow \pi & \nearrow \bar{f} & \\ T(V)/I & & \end{array}$$

Entonces al tomar $i_h = \pi \circ i$ se tiene que:

$$(\bar{f} \circ i_h)(v) = ((\bar{f} \circ \pi) \circ i)(v) = (T(f) \circ i)(v) = f(v),$$

luego $C_{(V, h)}$ y i_h cumplen con la definición 2.12. □

Observación 2.14. Si consideremos $f = i_h$, por la construcción anterior tenemos el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{i_h} & Cl(V, h) \\ \downarrow i_h & \nearrow id & \\ Cl(V, h) & & \end{array}$$

Es decir, la única función g que cumple $g \circ i_h = i_h$ es la identidad.

Desde ahora, cada vez que escribamos $\lambda \cdot v$ estaremos hablando del producto escalar, cuando hablemos del producto de Clifford " $v \otimes w$ " vamos solo a denotarlo como " vw " y cuando hablemos del álgebra de Clifford $Cl(V, h)$ vamos a estar hablando del álgebra $Cl_{(V, h)}$. Al considerar $(\mathbb{R}^{p+q}, h_{p, q})$ como el espacio cuadrático del ejemplo 2.5, se tiene que podemos construir un álgebra de Clifford $Cl(\mathbb{R}^{p+q}, h_{p, q})$ asociada a él y la denotaremos $Cl(h_{p, q})$.

Proposición 2.15. Para los elementos $v \in V$ se tiene que $v \perp w$ si y solo si

$$vw = -wv. \tag{2.3}$$

En particular, se tiene que para la base ortogonal del teorema 2.8 se cumple $e_i e_j = -e_j e_i$ para todo $i \neq j$.

Demostración. Consideremos la ecuación definida por

$$\begin{aligned} h(v+w, v+w) \cdot 1_{Cl(h)} &= (v+w)^2 \\ &= v^2 + vw + wv + w^2 \\ &= h(v, v) \cdot 1_{Cl(h)} + vw + wv + h(w, w) \cdot 1_{Cl(h)}. \end{aligned}$$

Por otro lado, tenemos que:

$$h(v+w, v+w) \cdot 1_{Cl(h)} = h(v, v) \cdot 1_{Cl(h)} + h(v, w) \cdot 1_{Cl(h)} + h(w, v) \cdot 1_{Cl(h)} + h(w, w) \cdot 1_{Cl(h)}, \quad (2.4)$$

de las dos ecuaciones anteriores y el hecho de que h es bilineal simétrica, obtenemos la relación

$$2h(v, w) = vw + wv. \quad (2.5)$$

De esta ecuación se deduce que $v \perp w$ si y solo si $vw = -wv$. \square

Notemos que las álgebras de Clifford no son dominio de integridad, ya que por ejemplo

$$(v - \sqrt{h(v, v)})(v + \sqrt{h(v, v)}) = v^2 - h(v, v) = 0,$$

donde $v \pm \sqrt{h(v, v)} \neq 0$, además más adelante veremos que las álgebras de Clifford son álgebras de matrices. en general $ab \neq ba$

Categoría

En este documento intentaremos dar todas las definiciones en forma categorica, esto será aprovechado en más adelante al demostrar equivalencias entre categorías.

Definición 2.16. Sean C, D dos categorías, decimos que $F : C \rightarrow D$ es un **functor** de C a D si cumplen las siguientes condiciones:

1. Si $x \in Obj_C$ entonces $F(x) \in Obj_D$,
2. si $f \in Hom_C$ entonces $F(f) \in Hom_D$,
3. para todo $x \in C$ se tiene que $F(id_x) = id_{F(x)}$,
4. Si $f, g \in Hom_C$ entonces $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$.

Proposición 2.17. Sean $(V_1, h_1), (V_2, h_2)$ espacios cuadráticos y $f_1 : V_1 \rightarrow V_2$ isometría entonces existe $Cl(f_1) : Cl(V_1, h_1) \rightarrow Cl(V_2, h_2)$ homomorfismo de álgebras (Donde $Cl(V_i, h_i)$ es algún álgebra de Clifford asociada a (V_i, h_i)) que cumple que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} V_1 & \xrightarrow{f_1} & V_2 \\ i_{h_1} \downarrow & \searrow \tilde{f}_1 & \downarrow i_{h_2} \\ Cl(V_1, h_1) & \xrightarrow{Cl(f_1)} & Cl(V_2, h_2) \end{array}$$

Demostración. Consideremos la función lineal

$$\tilde{f}_1 = i_{h_2} \circ f_1,$$

esta función cumple la relación

$$(\tilde{f}_1(v))^2 = (i_{h_2}(f_1(v)))^2 = h_2(f_1(v), f_1(v)) \cdot 1_{Cl(V_2, h_2)} = h_1(v, v) \cdot 1_{Cl(V_2, h_2)}.$$

Luego satisface la definición 2.12, entonces existe $Cl(f_1) : Cl(V_1, h_1) \rightarrow Cl(V_2, h_2)$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} V_1 & & \\ i_{h_1} \downarrow & \searrow \tilde{f}_1 & \\ Cl(V_1, h_1) & \xrightarrow{Cl(f_1)} & Cl(V_2, h_2) \end{array}$$

es decir, $\tilde{f}_1 = Cl(f_1) \circ i_{h_1}$. \square

Corolario 2.18. Sean (V_1, h_1) , (V_2, h_2) y (V_3, h_3) espacios cuadráticos y sean $f_1 : V_1 \rightarrow V_2$ y $f_2 : V_2 \rightarrow V_3$ isometrías entonces para $Cl(f_1)$ y $Cl(f_2)$ definidas en la proposición anterior se tiene que $Cl(f_2 \circ f_1) = Cl(f_2) \circ Cl(f_1)$.

Demostración. Por la proposición anterior tenemos que existen $Cl(f_1)$, $Cl(f_2)$ y $Cl(f_2 \circ f_1)$ que cumplen las relaciones

$$\tilde{f}_1 = Cl(f_1) \circ i_{h_1} \text{ y } \tilde{f}_2 = Cl(f_2) \circ i_{h_2},$$

es decir, hacen conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc} V_1 & \xrightarrow{f_1} & V_2 & \xrightarrow{f_2} & V_3 \\ \downarrow i_{h_1} & & \downarrow i_{h_2} & & \downarrow i_{h_3} \\ Cl(V_1, h_1) & \xrightarrow{Cl(f_1)} & Cl(V_2, h_2) & \xrightarrow{Cl(f_2)} & Cl(V_3, h_3) \end{array} .$$

de esto se obtiene que $Cl(f_2 \circ f_1) = Cl(f_2) \circ Cl(f_1)$. □

Definición 2.19. Un homomorfismo de álgebras $\phi : Cl(V, h) \rightarrow Cl(V', h')$ es un **homomorfismo de álgebras de Clifford** si cumple que $\phi(V) \subset V'$. Además decimos que un ϕ es isomorfismo si existe un homomorfismo de álgebras de Clifford $\psi : Cl(V', h') \rightarrow Cl(V, h)$ que cumple $\phi \circ \psi = id_{Cl(V', h')}$ y $\psi \circ \phi = id_{Cl(V, h)}$.

Observación 2.20. Notemos que la definición 2.12 y la proposición 2.17 dice que la definición de álgebras de Clifford genera un funtor entre la categoría **Quad** y la categoría de las álgebras asociativas con unidad **Alg**, ya que para cada (V, h) objeto en **Quad** se tiene que $Cl(V, h)$ es un objeto en **Alg** y cada morfismo f en **Quad** se tiene que $Cl(f)$ es un morfismo en **Alg**. Pero no todos los objetos en **Alg** son álgebras de Clifford para algún espacio cuadrático (veremos que todas las álgebras de Clifford tienen dimensión 2^n , pero no todas las \mathbb{R} -álgebras tienen esa dimensión), ni todos los homomorfismos de álgebras son un $Cl(f)$ con f isometría, es por eso que vamos a definir la categoría **Cl** como la imagen de **Quad** bajo el funtor Cl . También denotaremos **Cl** a la categoría cuyos objetos son los mismos que en **Cl** y los morfismos son los isomorfismos de **Cl**.

Corolario 2.21. Si (V, h) es isomorfo a (V', h') en **Quad** entonces $Cl(V, h)$ es isomorfo a $Cl(V', h')$ en la categoría **Cl**.

Demostración. Como (V, h) es isomorfo a (V', h') se tiene que existe una isometría $f : V \rightarrow V'$ invertible, luego por la proposición 2.17 se tiene que existe $Cl(f)$ que cumple la ecuación

$$i_{h'} \circ f = Cl(f) \circ i_h. \tag{2.6}$$

Por otro lado se tiene que existe la isometría inversa $f' : V' \rightarrow V$ que cumple $f \circ f' = id_{V'}$ y $f' \circ f = id_V$, además por la proposición 2.17, se tiene que existe $Cl(f')$ que cumple

$$i_h \circ f' = Cl(f') \circ i_{h'}. \tag{2.7}$$

Por las ecuaciones 2.6 y 2.7 se tiene que

$$Cl(f) \circ Cl(f') \circ i_{h'} = Cl(f) \circ i_h \circ f' = i_{h'} \circ f \circ f' = i_{h'} \circ id_{V'} = i_{h'}.$$

Por la observación 2.14 se tiene que $Cl(f) \circ Cl(f') = id_{Cl(h')}$, de la misma manera se tiene que $Cl(f') \circ Cl(f) = id_{Cl(h)}$ por lo tanto tenemos que $Cl(V, h) \cong Cl(V', h')$. □

Elemento de Volumen

Un elemento que es importante dentro del contexto de álgebras de Clifford, es el elemento de volumen, que consiste en la multiplicación de todos los elementos de una base dada. Este elemento es importante ya que nos da información sobre la orientación de la base B .

Definición 2.22. Si $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ es una base ortonormal de $Cl(h)$ definimos el **elemento volumen** de $Cl(h)$ asociado a la base B al elemento dado por:

$$I = e_1 \cdot e_2 \cdots e_n. \quad (2.8)$$

Observación 2.23. Si I' es el elemento volumen asociado a otra base ortogonal B' del mismo espacio cuadrático V , entonces $I = I'$ si las bases B y B' tiene la misma orientación ó $I = -I'$ si las bases B y B' tienen la orientación opuesta.

Observación 2.24. El elemento volumen depende de la signatura de la forma cuadrática y se cumple la siguiente identidad respecto a su signatura

$$I^2 = (-1)^{\frac{1}{2}(n)(n-1)} + q.$$

Ejemplo 2.25. Sea V espacio vectorial de dimensión 2 con la forma cuadrática $h_{3,0}$, sea una $B_1 = \{e_1, e_2, e_3\}$ base de V , entonces el elemento de volumen es $I_{B_1} = e_1 e_2 e_3$ y se tiene que:

$$I^2 = e_1 e_2 e_3 e_1 e_2 e_3 = -e_1^2 e_2^2 e_3^2 = -h(e_1, e_1)h(e_2, e_2)h(e_3, e_3) = -1.$$

Si consideramos ahora la base $B_2 = \{e_1, e_3, e_2\}$, se tiene que el elemento de volumen esta dado por $I_{B_2} = e_1 e_3 e_2$ y que cumple con la identidad:

$$I^2 = e_1 e_3 e_2 e_1 e_3 e_2 = -e_1^2 e_2^2 e_3^2 = -h(e_1, e_1)h(e_2, e_2)h(e_3, e_3) = -1.$$

Notemos que $I_{B_1} = e_1 e_3 e_2 = -e_1 e_2 e_3 = -I_{B_2}$, ya que las bases B_1 y B_2 tienen distinta orientación, pero se tiene que $I_{B_1}^2 = I_{B_2}^2$ ya que el cuadrado solo depende de la signatura (p, q) .

Ejemplos de álgebras de Clifford

Aunque hay una gran variedad de ejemplos de álgebras de Clifford, en este documento daremos los más relevantes para la física y los más interesantes matemáticamente.

Ejemplo 2.26. Sea $V = \mathbb{R}e$ un espacio vectorial de dimensión 1, con la forma cuadrática $h_{0,1}$ definida en el ejemplo 2.5, es decir, $e^2 = h(e, e) = -1$. Entonces si identificamos $T(V)$ con los polinomios en una variable $\mathbb{R}[x]$, por medio de la inclusión $e \rightarrow x$, el ideal I es el generado por los elementos de la forma $x^2 + 1$. Por lo tanto el álgebra de Clifford asociada es el cuociente

$$Cl_{(V,h)} = \mathbb{R}[x]/span_{\mathbb{R}}(x^2 + 1) \cong \mathbb{C}.$$

Es decir, el álgebra de Clifford $Cl(h_{1,0}) \cong \mathbb{C}$ donde \mathbb{C} corresponden a los **números complejos**.

Ejemplo 2.27. Sea $V = \mathbb{R}e$ un espacio vectorial de dimensión 1, pero ahora la forma cuadrática $h_{1,0}$ definida en el ejemplo 2.5. De la misma manera que en el ejemplo anterior tenemos que:

$$Cl_{(V,h)} = \mathbb{R}[x]/span_{\mathbb{R}}(x^2 - 1) \cong \mathbb{D}.$$

Donde \mathbb{D} son los **números hiperbólicos**, que corresponde al conjunto

$$\mathbb{D} = \{a + bj \mid a, b \in \mathbb{R} \text{ y } j^2 = 1\} \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}.$$

Aunque en el ejemplos anterior fue relativamente sencillo encontrar el álgebra de Clifford, cada vez se hace un poco más tedioso trabajar sin recurrir al concepto de base, aunque se puede intuir de la construcción del álgebra de Clifford, que la base debería consistir en el producto de los elementos de la base de V , solo podremos demostrarlo utilizando herramientas un poco más sofisticadas. Por ahora asumiremos (si quiere ver la demostración puede verla en el corolario 2.45) que la base de un álgebra de Clifford esta dada por:

$$\{1\} \cup \bigcup_{k=1}^n \{e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_k} \mid 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n\}.$$

Es decir, el producto ordenado de los elementos de la base de V . Además podemos observar que el álgebra de Clifford admite la descomposición

$$Cl(h) = Cl(h)^0 \oplus Cl(h)^1 \oplus Cl(h)^2 \oplus \cdots \oplus Cl(h)^n,$$

donde $Cl(h)^k$ es el conjunto generado por $\{e_{i_1} \cdot e_{i_2} \cdots e_{i_k} \mid 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n\}$, es decir los elementos de largo k , cuya dimensión es $\dim_{\mathbb{R}}(Cl(h)^k) = \binom{n}{k}$. Esta descomposición es interesante geoméricamente, ya que, los elementos de largo 0 representan puntos, los de largo 1 son rectas, los de largo 2 son los planos, y así sucesivamente hasta donde lo permite la dimensión de V . Esto quiere decir que las álgebras de Clifford no solo poseen la propiedad de que el producto es la forma cuadrática, si no que tienen toda la información geométrica que nos da el álgebra de Grassmann, es por esta razón que también son conocidas como **álgebra geométrica**.

Ejemplo 2.28. Sea $V = \mathbb{R}e_1 \oplus \mathbb{R}e_2$ un espacio vectorial de dimensión 2, y tomemos la forma cuadrática $h_{0,2}$, es decir, e_1 y e_2 son spacelike. Entonces el álgebra de Clifford esta generada por el conjunto $\{1, e_1, e_2, e_1e_2\}$, entonces el álgebra de Clifford tiene la forma:

$$Cl(h_{0,2}) = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}e_1 \oplus \mathbb{R}e_2 \oplus \mathbb{R}e_1e_2,$$

donde se tienen las relaciones $e_1^2 = e_2^2 = -1$ y $(e_1e_2)^2 = e_1e_2e_1e_2 = -e_1e_1e_2e_2 = -1$.

Si identificamos los elementos $e_1 \rightarrow i$, $e_2 \rightarrow j$ y $e_1e_2 \rightarrow k$ entonces tenemos el siguiente isomorfismo:

$$Cl(h_{0,2}) = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}e_1 \oplus \mathbb{R}e_2 \oplus \mathbb{R}e_1e_2 \cong \mathbb{H},$$

donde \mathbb{H} son los **cuaterniones de Hamilton**.

Ejemplo 2.29. Ahora para el mismo espacio vectorial del ejemplo anterior podemos considerar la forma cuadrática $h_{2,0}$, es decir, consideraremos que $V = \mathbb{R}e_1 \oplus \mathbb{R}e_2$ donde e_i son spacelike, entonces el álgebra de Clifford asociada es este espacio es:

$$Cl(h_{0,2}) = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}e_1 \oplus \mathbb{R}e_2 \oplus \mathbb{R}e_1e_2,$$

donde $e_i^2 = 1$ para todo $i \in \{1, 2\}$.

Este ejemplo es importante para la física, ya que es el álgebra de Clifford asociada al plano. En esta álgebra, como veremos más adelante, es posible identificar el concepto de momento angular de una partícula girando sobre un plano.

Ejemplo 2.30. Con la intención de ver el álgebra de Clifford correspondiente al espacio tridimensional, vamos a considerar el espacio vectorial $V = \mathbb{R}e_1 \oplus \mathbb{R}e_2 \oplus \mathbb{R}e_3$ con la forma cuadrática $h_{3,0}$, entonces su álgebra de Clifford es:

$$Cl(h_{3,0}) = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}e_1 \oplus \mathbb{R}e_2 \oplus \mathbb{R}e_3 \oplus \mathbb{R}e_1e_2 \oplus \mathbb{R}e_2e_3 \oplus \mathbb{R}e_1e_3 \oplus \mathbb{R}e_1e_2e_3,$$

donde $e_i^2 = 1$ para todo $i \in \{1, 2, 3\}$.

Esta álgebra también es conocida como el álgebra de Pauli, ya que su complejificación es generada por las matrices de Pauli, que representan el concepto de spin en mecánica cuántica.

Ejemplo 2.31. Un ejemplo importante es el álgebra del espacio-tiempo, que es el álgebra de Clifford asociada al espacio-tiempo de Minkowski $(\mathbb{R}^{1+3}, h_{1,3})$ utilizado para el formalismo de la relatividad. Solo por convención vamos a usar la notación que usó Dirac para representar la base de \mathbb{R}^{1+3} , es decir, la base será $\{\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$ donde γ_0 es timelike y las otras γ_i son spacelike. Entonces podemos escribir el álgebra de Clifford asociada a este espacio cuadrático de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} Cl(h_{1,3}) = & \mathbb{R} \oplus (\mathbb{R}\gamma_0 \oplus \mathbb{R}\gamma_1 \oplus \mathbb{R}\gamma_2 \oplus \mathbb{R}\gamma_3) \oplus (\mathbb{R}\mathbf{e}_1 \oplus \mathbb{R}\mathbf{e}_2 \oplus \mathbb{R}\mathbf{e}_3) \oplus (\mathbb{R}\mathbf{e}_1I \oplus \mathbb{R}\mathbf{e}_2I \oplus \mathbb{R}\mathbf{e}_3I) \\ & \oplus (\mathbb{R}\gamma_0I \oplus \mathbb{R}\gamma_1I \oplus \mathbb{R}\gamma_2I \oplus \mathbb{R}\gamma_3I) \oplus \mathbb{R}I, \end{aligned} \quad (2.9)$$

donde $\mathbf{e}_i = \gamma_i\gamma_0$ con $i \in \{1, 2, 3\}$ cumplen con $e_i^2 = 1$ y forman una base de \mathbb{R}^3 , llamada espacio relativo a γ_0 , entonces los elementos de $Cl(h_{1,3})$ se pueden escribir como:

$$x = \alpha + a + \mathbf{a} + \mathbf{b}I + bI + \beta I,$$

donde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}^{1,3}$ y \mathbf{a}, \mathbf{b} están en el espacio relativo a γ_0 .

2.3. Super Álgebras

La estructura de Super álgebras es la estructura natural que tienen las álgebras de Clifford, esta forma de entender las álgebras nos ayudará a encontrar una base para las álgebras de Clifford y nos permitirá hacer las distinción entre grupo Pin y Spin más adelante.

Además, esta teoría por si sola es muy interesante, ya que es la estructura algebraica que modela las "Super simetrías", teoría física que considera dos tipos de partículas elementales, los fermiones (spin semi-entero) y bosones (spin entero), donde las partículas compuestas por una cantidad par de fermiones se comporta como un boson y las partículas compuestas por una cantidad impar de fermiones se comportan como fermiones, este comportamiento entre partículas es básicamente la definición que daremos de super álgebras. Todas las teorías físicas conteniendo fermiones, consideran super simetrías, es decir, se formalizan con super álgebras.

Definición 2.32. Decimos que un álgebra A es un **Super Álgebra** si es un álgebra \mathbb{Z}_2 -gradada, es decir:

$$A = A_0 \oplus A_1.$$

donde el producto de A cumple con $A_i \cdot A_j \subset A_{(i+j \bmod 2)}$.

A los elementos de $A_0 \cup A_1$ los llamaremos elementos **homogeneos** y se denotan A_{Hom} , además a los elementos de A_0 les diremos **elementos pares** y a los elementos A_1 les diremos **elementos impares**.

Observación 2.33. Notemos que con esta definición A_0 es un álgebra en el sentido usual, mientras que A_1 es un A_0 -modulo.

Las álgebras Clifford $Cl(h)$ tienen una estructura de super álgebra, de hecho, podemos escribirlas como

$$Cl(h) = Cl(h)^0 \oplus Cl(h)^1, \quad (2.10)$$

donde $Cl(h)^i = \{x \in Cl(h) \mid \alpha(x) = (-1)^i x\}$ donde $i \in \{0, 1\}$.

Aunque se puede ver que el caso $Cl(h_{1,0})$ y $Cl(h_{0,1})$ no tienen una descomposición como súper álgebras interesantes, hay algunas descomposiciones de álgebras de Clifford que es interesante verlas como parte par e impar, por ejemplo:

Ejemplo 2.34. Para el caso $Cl(h_{2,0})$ y $Cl(h_{0,2})$ se tiene que los elementos son de la forma:

$$\mathbb{R} \oplus V \oplus \mathbb{R}I$$

donde $I^2 = -1$. Entonces se tiene que la descomposición como súper álgebras es:

$$Cl(h) = Cl(h)^0 \oplus Cl(h)^1 = (\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}I) \oplus V \cong \mathbb{C} \oplus V,$$

es decir, el álgebra de plano y los cuaterniones se pueden ver como el espacio vectorial más los números complejos, que sabemos, es el álgebra que hace rotar a V .

Ejemplo 2.35. Para el caso $Cl(h_{3,0})$ sigue siendo interesante, ya que el álgebra del espacio tiene la forma:

$$\mathbb{R} \oplus V \oplus (\mathbb{R}e_1e_2 \oplus \mathbb{R}e_2e_3 \oplus \mathbb{R}e_1e_3) \oplus \mathbb{R}I,$$

donde $(e_1e_2)^2 = (e_2e_3)^2 = (e_1e_3)^2 = -1$. Entonces la parte par e impar puede escribirse como:

$$Cl(h) = Cl(h)^0 \oplus Cl(h)^1 = (\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}e_1e_2 \oplus \mathbb{R}e_2e_3 \oplus \mathbb{R}e_1e_3) \oplus (V \oplus \mathbb{R}I) \cong \mathbb{H} \oplus (V \oplus \mathbb{R}I),$$

es decir, la parte impar del álgebra es el mismo espacio vectorial más el elemento de volumen y la parte par corresponde a los cuaterniones, que sabemos es el álgebra que hacer rotar nuevamente a V .

Ejemplo 2.36. En el caso del espacio tiempo $Cl(h_{1,3})$ se tiene que:

$$Cl(h_{1,3})_0 = \mathbb{R} \oplus (\mathbb{R}\mathbf{e}_1 \oplus \mathbb{R}\mathbf{e}_2 \oplus \mathbb{R}\mathbf{e}_3) \oplus (\mathbb{R}\mathbf{e}_1I \oplus \mathbb{R}\mathbf{e}_2I \oplus \mathbb{R}\mathbf{e}_3I) \oplus \mathbb{R}I,$$

donde $\mathbf{e}_1^2 = 1$, $(\mathbf{e}_iI)^2 = -1$ para todo $i \in \{1, 2, 3\}$ y $I^2 = -1$, con estas relaciones se tiene que $Cl(h_{1,3})_0 \cong Cl(h_{3,0})$.

Definición 2.37. definimos la **función paridad** como la función $|\cdot| : A_0 \cup A_1 \rightarrow \mathbb{Z}_2$ que cumple con

$$|a| = \begin{cases} 0 & \text{si } a \in A_0 \\ 1 & \text{si } a \in A_1 \end{cases}$$

Observación 2.38. La función paridad cumple la relación $|a \cdot b| = |a| + |b| \pmod{2}$.

Definición 2.39. La **Categoría de las super álgebras** es la categoría que denotaremos **Super** donde

1. Los objetos son las super álgebras definidas en 2.32 y los denotaremos Obj_{Super}
2. Sean $A = A_0 \oplus A_1$ y $B = B_0 \oplus B_1$ dos super álgebras. Definimos un morfismo entre super álgebras como una transformación lineal $T : A \rightarrow B$ que respeta la gradación, es decir,

$$|T(x)| = |x|, \text{ para todo } x \in A_{Hom}$$

y los denotaremos $Morf_{Super}$.

Definición 2.40. Una super álgebra se dice **conmutativa en la categoría Super** ó **super conmutativa** si se cumple que para todo $a, b \in A_{Hom}$ se tiene

$$ab = (-1)^{|a||b|}ba \quad (2.11)$$

Observación 2.41. Esta definición nos dice que los elementos pares conmutan entre ellos, los elementos impares anticonmutan entre ellos y los elementos de distinta paridad conmutan.

Ejemplo 2.42. Si A y B son super álgebras definimos el **super álgebra producto tensorial** como

$$A \otimes_S B = (A \otimes B)_0 \oplus (A \otimes B)_1,$$

donde la parte par e impar respectivamente son:

$$(A \otimes B)_0 = A_0 \otimes B_0 \oplus A_1 \otimes B_1,$$

$$(A \otimes B)_1 = A_0 \otimes B_1 \oplus A_1 \otimes B_0.$$

y cuyo producto esta dado por:

$$(a' \otimes b) \otimes_S (a \otimes b') = (-1)^{|a||b|} (aa') \otimes (bb'). \quad (2.12)$$

A esta álgebra, que consiste en $A \otimes B$ como espacio vectorial, pero esta dotada con el producto definido arriba, la denotaremos $A \otimes_S B$ para diferenciarla con el producto tensorial usual. Además por definición esta álgebra es súper conmutativa.

Proposición 2.43. Sea (V, h) y (V', h') dos espacios cuadráticos, consideremos el espacio suma directa $(V \oplus V', h \oplus h')$ de ellos definido en 2.4, se tiene que su álgebra de Clifford cumplen que $Cl(h \oplus h') \cong Cl(h) \hat{\otimes} Cl(h')$.

Demostración. Sea $f : V \oplus V' \rightarrow Cl(h) \otimes Cl(h')$ definida por $f(v + v') = v \otimes 1_{Cl(h')} + 1_{Cl(h)} \otimes v' \in (Cl(h) \otimes Cl(h'))_1$, notemos que f es lineal y cumple con:

$$\begin{aligned} (f(v + v'))^2 &= (v \otimes 1_{Cl(h')} + 1_{Cl(h)} \otimes v')(v \otimes 1_{Cl(h')} + 1_{Cl(h)} \otimes v'), \\ &= v \otimes v + v \otimes v' + v' \otimes v + v' \otimes v', \\ &= v \otimes v + v \otimes v' - v \otimes v' + v' \otimes v', \\ &= h(v, v) \cdot 1_{Cl(V) \otimes Cl(V')} + h(v', v') \cdot 1_{Cl(V) \otimes Cl(V')}, \\ &= (h \otimes h')(v + v', v + v') \cdot 1_{Cl(V) \otimes Cl(V')}. \end{aligned}$$

Luego f cumple con las hipotesis de 2.12, así existe $\tilde{f} : Cl(h \otimes h') \rightarrow Cl(h) \otimes Cl(h')$ homomorfismo de álgebras que cumple la relación

$$f = \tilde{f} \circ i_{h_V \oplus h_{V'}}$$

Por otro lado sabemos que $V \subset V \oplus V' \xrightarrow{i} Cl(V \oplus V')$ donde $(i(v))^2 = h(v, v) \cdot 1$ y $i(v) \in Cl(h)_1$, entonces por la definición de álgebra de Clifford existe $\bar{i} : Cl(h) \rightarrow Cl(V \oplus V')$ morfismo de super álgebras. De manera analoga para V' existe $\bar{i}' : Cl(h') \rightarrow Cl(V \oplus V')$ morfismo de super álgebra. Consideremos entonces la transformación lineal $g : Cl(h) \otimes_S Cl(h') \rightarrow Cl(h \oplus h')$ definida por:

$$g(x \otimes x') = \bar{i}(x)\bar{i}'(x')$$

esta transformación es un homomorfismo de álgebra y además cumple las relaciones

$$(g \circ \bar{f}) \circ i_{h_{V \oplus V'}}(v+v', v+v') = g(\bar{f}(v+v', v+v')) = g(v \otimes 1 + 1 \otimes v') = \bar{i}(v) + \bar{i}'(v') = i_{h_{V \oplus V'}}(v+v', v+v') = Hom_{Quad}.$$

Por la observación 2.14 se tiene que $g \circ \bar{f} = id_{Cl(h \oplus h')}$. De manera analoga se tiene que $\bar{f} \circ g = id_{Cl(h) \otimes_S Cl(h')}$. \square

Observación 2.44. Notar que esta equivalencia solo se tiene en la categoría de las super álgebras y no en las álgebras en el sentido usual ya que como (V, h) y (V', h') son ortogonales, sus elementos anticonmutan en $Cl(h \oplus h')$, pero conmutan en el producto tensorial usual $Cl(h) \otimes Cl(h')$.

Construcción de una base para $Cl(h)$

Corolario 2.45. Sea (V, h) un espacio cuadrático de dimensión n entonces $dim_{\mathbb{R}}(Cl(h)) = 2^n$ y una base para $Cl(h)$ es

$$\{1\} \cup \bigcup_{k=1}^n \{e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_k} \mid 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n\} \quad (2.13)$$

Demostración. Vamos a demostrarlo usando inducción sobre n .

Para $n = 1$ se tiene que $V = e\mathbb{R}$, luego $T(V) \cong \mathbb{R}[x]$ entonces tenemos dos casos $Cl(h_{1,0}) \cong \mathbb{R}[x]/I$ donde I es generado por $e \otimes e - 1$ con lo que se tiene que

$$Cl(h_{1,0}) \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$$

$Cl(h_{0,1}) \cong \mathbb{R}[x]/I$ donde I es generado por $e \otimes e + 1$ con lo que se tiene que

$$Cl(h_{0,1}) \cong \mathbb{C}$$

En ambos casos se tiene que $dim_{\mathbb{R}}(Cl(h)) = 1$ y que una base es $1, e$.

Supongamos ahora que $dim_{\mathbb{R}}(V) = n$ y que el teorema se cumple para todos los espacios vectoriales de dimensión menor a n .

Por Gramm-Schmidt 2.8 tenemos que (V, h) admite una base ortogonal, luego tenemos la descomposición

$$V = e\mathbb{R} \oplus V'$$

donde $dim_{\mathbb{R}}(V') = n - 1$ y $e \perp V'$, luego podemos descomponer la forma bilineal h de la siguiente manera $h = h_1 \oplus h'$, entonces por la proposición 2.43 se tiene que

$$Cl(h) = Cl(h_1 \oplus h') \cong Cl(h_1) \hat{\otimes} Cl(h').$$

Por otro lado como $dim_{\mathbb{R}}(V') = n - 1$ por hipótesis de inducción se tiene que $dim_{\mathbb{R}}(Cl(h')) = 2^{n-1}$, por lo tanto tenemos que

$$dim_{\mathbb{R}}(Cl(h)) = dim_{\mathbb{R}}(Cl(h_1)) \cdot dim_{\mathbb{R}}(Cl(h')) = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$$

Además tenemos que una base para $Cl(h')$ es

$$\{1\} \cup \bigcup_{k=1}^{n-1} \{e_{i_1} \cdots e_{i_k} \mid 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n-1\},$$

y una base de $Cl(h_1)$ es $\{1, e\}$,

luego si llamamos $e = e_n$ entonces se tiene que una base para $Cl(h)$ es el producto tensorial de las bases, es decir

$$\{1\} \cup \bigcup_{k=1}^n \{e_{i_1} \cdot e_{i_2} \cdots e_{i_k} \mid 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n\}.$$

□

Observación 2.46. del corolario anterior podemos ver que un álgebra de Clifford admite la descomposición

$$Cl(h) = Cl(h)^0 \oplus Cl(h)^1 \oplus Cl(h)^2 \oplus \cdots \oplus Cl(h)^n$$

donde $Cl(h)^k$ es generado por $\{e_{i_1} \cdot e_{i_2} \cdots e_{i_k} \mid 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n\}$, es decir los elementos de largo k , cuya dimensión es $\dim_{\mathbb{R}}(Cl(h)^k) = \binom{n}{k}$.

Definición 2.47. Llamamos **centro** de un álgebra A al conjunto

$$Z(A) = \{a \in A \mid ax = xa \text{ para todo } x \in A\}.$$

Si A es una \mathbb{K} -álgebra, decimos que A es **central** si $Z(A) = \mathbb{K}$.

Proposición 2.48. Para las álgebras de Clifford se tienen los siguientes resultados respecto a su centro

1. Si n es par, $Z(Cl(h)) = \mathbb{R}$ y $Z(Cl(h)_0) = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}I$.
2. Si n es impar, $Z(Cl(h)) = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}I$ y $Z(Cl(h)_0) = \mathbb{R}$.

Donde I es el elemento de volumen y n es la dimensión de V .

Demostración. Sea $x \in Cl(h)$ como $Cl(h)$ es super álgebra, tenemos que $x = x_0 + x_1$ donde $x_i \in Cl_i$ con $i \in \{0, 1\}$. Además se puede ver que $x \in Z(Cl(h))$ si y solo si $x_i e_k = e_k x_i$ para todo $k \in \{1, \dots, n\}$ y para todo $i \in \{0, 1\}$.

Escribamos $x_0 = a_0 + e_1 b_1$ donde $a_0 \in Cl(h)_0$ y $b_1 \in Cl(h)_1$ no contienen a e_1 en su descomposición en la base. Tomando $k = 1$ se tiene que:

$$(a_0 + e_1 b_1)e_1 = e_1(a_0 + e_1 b_1) \tag{2.14}$$

pero como a_0 es par y no contiene a e_1 se tiene que $a_0 e_1 = e_1 a_0$, por otro lado, como b_1 es impar y no contiene a e_1 se tiene que $b_1 e_1 = -e_1 b_1$, usando estas dos relaciones en la ecuación (2.14) se tiene que $-2e_1^2 b_1 = 0$, luego $b_1 = 0$, por lo tanto x_0 no contiene a e_1 en su descomposición en la base. Usando el mismo argumento para cualquier k , se tiene que $x_0 \in \mathbb{R}$.

Ahora realizaremos el mismo proceso para x_1 , tenemos que $x_1 = a_1 + e_1 b_0$ donde $a_1 \in Cl(h)_1$ y $b_0 \in Cl(h)_0$, ambos no contienen a e_1 en su descomposición en la base. Tomando $k = 1$ se tiene que:

$$(a_1 + e_1 b_0)e_1 = e_1(a_1 + e_1 b_0), \tag{2.15}$$

pero como a_1 es impar y no contiene a e_1 se tiene que $a_1 e_1 = -e_1 a_1$, por otro lado, como b_0 es par y no contiene a e_1 se tiene que $b_0 e_1 = e_1 b_0$, usando estas dos relaciones en la ecuación (2.14) se tiene que $2e_1^2 a_1 = 0$, luego se tiene que $a_1 = 0$, es decir, x_1 tiene que contener a e_1 en su descomposición en la base. Usando el mismo argumento para cualquier k se tiene que $x_1 = e_1 e_2 \cdots e_n = I$. Si n es impar tendremos que $x_1 = I$, pero si n es par tenemos un pequeño problema, ya que $x_1 \in Cl(h)_1$ y $x_1 = I \in Cl(h)_0$ con $Cl(h)_0 \cap Cl(h)_1 = \{0\}$, luego $x_1 = 0$.

Por lo tanto, si n es par se tiene que $Z(Cl(h)) = \mathbb{R}$ y si n es impar tenemos que $Z(Cl(h)) = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}I$. □

2.4. Álgebra Geométrica

Un caso especial de álgebra de Clifford es cuando tomamos la forma cuadrática $h(v, v) = 0$ para todo $v \in V$, al aplicar la construcción de álgebra de Clifford al espacio (V, h) de dimensión n se tiene que el álgebra de Clifford asociada es el álgebra de Grassmann $\bigwedge V$. Esta álgebra es de la forma:

$$\bigwedge V = \bigoplus_{i=1}^n \bigwedge^i V.$$

Además, por la elección de base, podemos ver que hay un isomorfismo de espacios vectoriales entre $\bigwedge V$ y $Cl(V, h)$ (basta llevar la base del álgebra de Grassmann a la base del álgebra de Clifford). Con esto podemos obtener todas las propiedades geométricas del álgebra de Grassmann en el álgebra de Clifford.

Hay libros en los cuales se ven los elementos de las álgebras de Clifford como el conjunto de partes $P(x)$ de un conjunto de n elementos, donde n es la dimensión del espacio cuadrático (V, h) que define el álgebra de Clifford. Por ejemplo, el elemento $e_1 e_2 e_4 e_6 \in Cl(h_{6,0})$ se puede leer como el subconjunto $\{1, 2, 4, 6\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Aunque no entraremos en detalle con esta notación, es realmente útil y natural trabajar las álgebras de Clifford como el conjunto de partes.

Operaciones geométricas

Esta notación permite crear los siguientes operaciones de manera natural

Definición 2.49. Para simplificar expresiones más adelante, vamos a definir las siguientes operaciones en $Cl(h)$:

1. Sea $x, y \in Cl(h)$ definimos el **producto exterior** entre x y y como:

$$x \wedge y = \begin{cases} xy & \text{si no existe } c \in Cl(h) \text{ tal que } y = xc, \text{ ni existe } d \in Cl(h) \text{ tal que } x = yd \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Este producto dice, multiplica a los dos elementos solo si $A \cap B \neq \emptyset$, lo que es la definición usual del producto cuña.

2. Sea $x, y \in Cl(h)$ definimos el **producto interno derecho** entre x y y como:

$$x \lrcorner y = \begin{cases} xy & \text{si existe } c \in Cl(h) \text{ tal que } x = yc \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Este producto dice, multiplica a los dos elementos solo si $A \subset B$.

3. Sea $x, y \in Cl(h)$ definimos el **producto interno izquierdo** entre x y y como:

$$x \llcorner y = \begin{cases} xy & \text{si existe } c \in Cl(h) \text{ tal que } y = xc \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Este producto dice, multiplica a los dos elementos solo si $B \subset A$.

4. Sea $x, y \in Cl(h)$ definimos el **producto interno** entre x y y como:

$$x \lrcorner y = \begin{cases} xy & \text{si existe } c \in \mathbb{R}^\times \text{ tal que } y = xc \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Este producto dice, multiplica a los dos elementos solo si $B = A$, la cual es la definición usual de $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

5. Sea $x \in Cl(h)$ definimos el **complemento** de x como

$$x^c = xI^{-1},$$

Esta operación dice, toma a x cuyo representación como subconjunto es A , entonces x^c es el elemento cuya descomposición es A^c .

Hay muchas relaciones y aplicaciones con respecto a estos productos, sin embargo nosotros utilizaremos muy poco de esto, si al lector le interesa más sobre esta forma de ver las álgebras de Clifford puede ver [32].

2.5. Involuciones

En esta sección vamos a definir algunas involuciones que nos ayudaran a caracterizar los elementos de un álgebra de Clifford y nos permitirá crear una función que llamaremos norma en el álgebra de Clifford, que es una extensión de la forma cuadrática del espacio cuadrático asociado.

Definición 2.50. Si A es un álgebra cuyo producto esta dado por:

$$\begin{aligned} A \times A &\rightarrow A \\ (a, b) &\mapsto a \cdot b \end{aligned}$$

Entonces definimos el **álgebra opuesta** a A como el álgebra A^{op} que es igual a A como espacio vectorial, pero su producto esta definido por:

$$\begin{aligned} A \times A &\rightarrow A \\ (a, b) &\mapsto b \cdot a \end{aligned}$$

Definición 2.51. Llamaremos un **anti-homomorfismo** a un homomorfismo

$$f : A \rightarrow A^{op},$$

es decir, cumple con $f(a \cdot b) = f(b) \cdot f(a)$.

Definición 2.52. Llamaremos una **involución** a un homomorfismo ó anti-homomorfismo $f : A \rightarrow A$ que cumple $f \circ f = id$.

Definición 2.53. Si tomamos la función lineal $f : V \rightarrow Cl(h)$ tal que $v \rightarrow -v$ entonces, por la propiedad universal del álgebra de Clifford. Se extiende de manera única al homomorfismo

$$\alpha : Cl(h) \rightarrow Cl(h) \text{ tal que } \alpha(v) = -v \text{ para todo } v \in V$$

a este homomorfismo lo llamaremos la **involución paridad** y este satisface la relación:

$$\alpha(v_1 \cdot v_2 \cdots v_n) = \alpha(v_1) \cdot \alpha(v_2) \cdots \alpha(v_n) = (-1)^n v_1 \cdot v_2 \cdots v_n, \quad (2.16)$$

donde $v_i \in V$.

Definición 2.54. Si tomamos la función lineal $f : V \rightarrow Cl^{op}(h)$ tal que $v \rightarrow v$ entonces, por la propiedad universal del álgebra de Clifford, se extiende de manera única al anti-homomorfismo

$$\tau : Cl(h) \rightarrow Cl(h) \text{ tal que } \tau(xy) = \tau(y)\tau(x) \text{ para todo } x, y \in Cl(h)$$

a este homomorfismo lo llamaremos la **involución reversión** y este satisface la relación

$$\tau(v_1 \cdot v_2 \cdots v_n) = \tau(v_n) \cdot \tau(v_{n-1}) \cdots \tau(v_1) = v_n \cdot v_{n-1} \cdots v_1, \quad (2.17)$$

donde $v_i \in V$.

Notar que α mide el largo de los multivectores, cosa que no cambia al aplicar τ y τ da vuelta los elementos de los multivectores lo que no es afectado al aplicar τ , es decir, si cambio los signos por α y luego invierto el orden con τ , es lo mismo que invertir el orden primero y luego cambiar los signos, por lo tanto tenemos que

$$\tau \circ \alpha = \alpha \circ \tau,$$

con estas relaciones se tiene que $\{id, \tau, \alpha, \tau \circ \alpha\}$ es $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

Definición 2.55. Definimos la **conjugación** de un elemento en $Cl(h)$ como la involución

$$\bar{x} = \tau(\alpha(x)) = \alpha(\tau(x)) \text{ para todo } x \in Cl(h).$$

Ejemplo 2.56. Para los casos $Cl(h_{0,1})$ y $Cl(h_{1,0})$ de los ejemplos 2.26 y 2.27 respectivamente, los elementos son de la forma $a + be$ donde $a, b \in \mathbb{R}$ entonces las involuciones paridad, reversión y conjugación son:

$$\alpha(a + be) = \alpha(a) + b\alpha(e) = a - be,$$

$$\tau(a + be) = a + be,$$

$$\overline{a + be} = a - be,$$

Notemos que la conjugación en $Cl(h_{0,1})$ coincide con la conjugación en \mathbb{C} .

Ejemplo 2.57. Para los casos $Cl(h_{0,2})$ y $Cl(h_{2,0})$ de los ejemplos 2.28 y 2.29 respectivamente, los elementos son de la forma $a + be_1 + ce_2 + de_1e_2$ donde $a, b \in \mathbb{R}$ entonces las involuciones paridad, reversión y conjugación son:

$$\alpha(a + be_1 + ce_2 + dI) = a + b(-1)e_1 + c(-1)e_2 + d(-1)^2e_1e_2 = a - be_1 - ce_2 + dI,$$

$$\tau(a + be_1 + ce_2 + dI) = a + be_1 + ce_2 + de_2e_1 = a + be_1 + ce_2 - dI,$$

$$\overline{a + be_1 + ce_2 + dI} = a - be_1 - ce_2 - dI,$$

Notemos que la conjugación en $Cl(h_{0,2})$ coincide con la conjugación en \mathbb{H} .

Ejemplo 2.58. Para el caso $Cl(h_{3,0})$ del ejemplo 2.30 se tiene que los elementos son de la forma $a + \mathbf{a} + \mathbf{b}I + bI$, donde $a, b \in \mathbb{R}$ y $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$, entonces las involuciones paridad, reversión y conjugación son:

$$\alpha(a + \mathbf{a} + \mathbf{b}I + bI) = a - \mathbf{a} + \mathbf{b}I - bI,$$

$$\tau(a + \mathbf{a} + \mathbf{b}I + bI) = a + \mathbf{a} - \mathbf{b}I - bI,$$

$$\overline{a + \mathbf{a} + \mathbf{b}I + bI} = a - \mathbf{a} - \mathbf{b}I + bI.$$

Ejemplo 2.59. Para el espacio tiempo $Cl(h_{3,0})$ del ejemplo 2.30 se tiene que los elementos son de la forma $x = \alpha + a + \mathbf{a} + \mathbf{b}I + bI + \beta I$, donde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}^{1,3}$ y \mathbf{a}, \mathbf{b} estan en el espacio relativo a γ_0 , entonces las involuciones paridad, reversión y conjugación son:

$$\alpha(\alpha + a + \mathbf{a} + \mathbf{b}I + bI + \beta I) = \alpha - a + \mathbf{a} + \mathbf{b}I - bI + \beta I,$$

$$\tau(\alpha + a + \mathbf{a} + \mathbf{b}I + bI + \beta I) = \alpha + a - \mathbf{a} - \mathbf{b}I - bI + \beta I,$$

$$\overline{\alpha + a + \mathbf{a} + \mathbf{b}I + bI + \beta I} = \alpha - a - \mathbf{a} - \mathbf{b}I + bI + \beta I.$$

Definición 2.60. Definimos la **norma** de un elemento en $Cl(h)$ como:

$$N(x) = \bar{x}x \tag{2.18}$$

Para la definición de paridad, reversión y conjugación, no había diferencia entre los casos $Cl(h_{p,q})$ y $Cl(h_{p,q})$ ya que no nos importaba el producto en $Cl(h)$, si no, que más bien nos interesaba la estructura de espacio vectorial. Pero para la definición de norma, el producto se convierte en el ingrediente principal. Es importante mencionar que estas normas no son normas en el sentido usual, ya que, no siempre son reales (como veremos en el ejemplo 2.65 y 2.66) y no necesariamente los elementos no nulos tienen norma no nula (casi todos los ejemplos abajo muestran esto).

Ejemplo 2.61. En el caso $Cl(h_{0,1})$ se tiene que

$$N_{0,1}(a + bi) = (a + bi)(a - bi) = a^2 - b^2i^2 = a^2 + b^2,$$

la cual coincide con la norma en \mathbb{C} . Además podemos ver que esta norma siempre es real y distinta de 0 para valores distintos de 0.

Ejemplo 2.62. En el caso $Cl(h_{1,0})$ se tiene que

$$N_{1,0}(a + bj) = (a + bj)(a - bj) = a^2 - b^2j^2 = a^2 - b^2,$$

Como en el caso anterior esta norma siempre es real, pero en este caso los elementos de la forma $a \pm aj$ son una familia de elementos cuya norma es 0.

Ejemplo 2.63. En el caso $Cl(h_{0,2})$ se tiene que:

$$N_{0,2}(x) = (a - be_1 - ce_2 - dI)(a + be_1 + ce_2 + dI) = a^2 - b^2e_1^2 - c^2e_2^2 - d^2I^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$

Ejemplo 2.64. En el caso $Cl(h_{2,0})$ se tiene que:

$$N_{2,0}(x) = (a + be_1 + ce_2 + dI)(a - be_1 - ce_2 - dI) = a^2 - b^2e_1^2 - c^2e_2^2 - d^2I^2 = a^2 - b^2 - c^2 + d^2. \quad (2.19)$$

Notemos que hasta ahora todas las normas nos entregan un número real, el caso siguiente es el primer caso en el cual no necesariamente es real.

Ejemplo 2.65. En el caso $Cl(h_{3,0})$ se tiene que:

$$N_{3,0}(x) = (a - \mathbf{a} - \mathbf{b}I + bI)(a + \mathbf{a} + \mathbf{b}I + bI) = (a^2 - b^2 + \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle - \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle) + (2ab - 2\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle)I. \quad (2.20)$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ representa el producto punto usual en \mathbb{R}^3 . En este caso se tiene que $N_{3,0}(x) \in \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}I$.

Ejemplo 2.66. Para el caso del espacio tiempo $Cl(h_{1,3})$ se tiene un caso un poco más complicado que el anterior, la norma esta dada por:

$$\begin{aligned} N_{1,3}(x) &= (\alpha - a - \mathbf{a} - \mathbf{b}I + bI + \beta I)(\alpha + a + \mathbf{a} + \mathbf{b}I + bI + \beta I) \\ &= (\alpha^2 - a^2 - \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + b^2 - \beta^2) + 2(\alpha b - \beta a - a \lrcorner \mathbf{b} + b \lrcorner \mathbf{a} - a \lrcorner \mathbf{a}^c - b \lrcorner \mathbf{b}^c)I + 2(\alpha\beta - \langle a, b \rangle - \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle)I, \end{aligned}$$

donde $(\cdot)^c$ es el complemento definido en 5 y $x \lrcorner y$ es el producto interno izquierdo definido en 3. Notemos además que $N(x)_{1,3} \in Cl(h)^0 \oplus Cl(h)^3 \oplus Cl(h)^4$.

Proposición 2.67. La norma y la conjugación cumplen las siguientes propiedades:

1. $\bar{\bar{t}} = t$ y $N(t) = t^2$ para todo $t \in \mathbb{R}$,
2. $\overline{xy} = \bar{y} \bar{x}$ para todo $x, y \in Cl(h)$,
3. $N(tx) = t^2 N(x)$ para todo $t \in \mathbb{R}, x \in Cl(h)$,
4. $N(v) = -h(v, v)$ para todo $v \in V$.

Demostración. Todos los calculos son más o menos directos

1. Sea $t \in \mathbb{R}$ entonces

$$\bar{\bar{t}} = \alpha(\tau(t)) = \alpha(t) = t,$$

entonces se tiene $N(t) = \bar{t}t = t^2$.

2. Sea $x, y \in Cl(h)$ entonces

$$\overline{xy} = \alpha(\tau(xy)) = \alpha(\tau(y)\tau(x)) = \alpha(\tau(y))\alpha(\tau(x)) = \overline{y}\overline{x}.$$

3. Sea $x \in Cl(h)$ entonces

$$N(tx) = \overline{tx}tx = \overline{t}\overline{x}tx = t^2\overline{x}x = t^2N(x).$$

4. Sea $v \in V$ entonces

$$N(v) = \overline{v}v = \alpha(\tau(v))v = -vv = -h(v, v).$$

□

Definición 2.68. Denotaremos $Cl(h)^\times$ al **grupo de elementos invertibles** del algebra de Clifford $Cl(h)$.

Observación 2.69. En general no es sencillo encontrar elementos invertibles en el álgebra de Clifford, pero la norma definida arriba nos ayudará a encontrarlos, ya que, tenemos que $\overline{xx} = N(x)$ para todo $x \in Cl(h)$, luego si $N(x) \in \mathbb{R}^\times$ se deduce que:

$$x^{-1} = \frac{\overline{x}}{N(x)}. \quad (2.21)$$

De esto podemos ver que si para todo $x \in Cl(h) - \{0\}$ se tiene que $N(x) \in \mathbb{R}^\times$ entonces $Cl(h)$ es un anillo de división.

Proposición 2.70. Si para todo $x \in Cl(h)$ se tiene que $N(x) \in \mathbb{R}$ y $N(ab) = N(a)N(b)$ entonces se cumple que:

$$x \text{ tiene inversa} \iff N(x) \neq 0$$

Demostración. si $N(x) \neq 0$ entonces por la observación 2.69 tenemos que x tiene inversa. Por otro lado si x tiene inversa, entonces existe $a \in Cl(h)$ que cumple $xa = 1$, luego se tiene que $N(xa) = N(x)N(a) = N(1) = 1$, por lo tanto $N(x)N(a) = 1$ lo que implica que $N(x) \neq 0$. □

Todas las normas que definiremos son multiplicativas, para el lector interesado en ver la demostración de esto puede ver [Dou].

Ejemplo 2.71. Sea $v \in V$, entonces la restricción de la norma en V siempre es real, ya que

$$N(v) = \overline{v}v = -v^2 = -h(v, v) \in \mathbb{R}.$$

Si $h(v, v) \neq 0$ entonces por la ecuación anterior se tiene v tiene inversa dada por

$$v^{-1} = -\frac{v}{h(v, v)}.$$

Ejemplo 2.72. Para el caso \mathbb{C} y \mathbb{H} podemos notar que la norma siempre es real y distinta de 0, de esto se obtiene que todos los elementos son invertibles, luego son anillos de división.

Ejemplo 2.73. Como vimos en el ejemplo 2.62 hay una familia de elementos, a saber $\{a + aj \mid a \in \mathbb{R}\}$ cuya norma es 0. Para estos elementos podemos observar que no hay elementos invertibles ya que si $(a \pm aj)(x + yj) = 1$ entonces se tendría que $ax \pm ay = 1$ y $ax \pm ay = 0$ lo que es imposible. Para los otros elementos podemos usar la construcción 2.69, entonces se tiene que:

$$Cl^\times(h_{1,0}) = \{x \in Cl(h_{1,0}) \mid N_{1,0}(x) \neq 0\} = \{a + bj \in Cl(h_{1,0}) \mid a^2 \neq b^2\} = \{a + bj \in Cl(h_{1,0}) \mid a \neq \pm b\}. \quad (2.22)$$

Ejemplo 2.74. Para el caso $Cl(h_{2,0})$ usando directamente el ejemplo 2.30, se tiene que los elementos invertibles son:

$$Cl^\times(h_{2,0}) = \{x \in Cl(h_{2,0}) \mid N_{2,0}(x) \neq 0\} = \{a + be_1 + ce_2 + dI \in Cl(h_{2,0}) \mid a^2 - b^2 - c^2 + d^2 \neq 0\}. \quad (2.23)$$

Ejemplo 2.75. El caso $Cl(h_{3,0})$ es un poco más interesante, ya que podemos ver que la norma del ejemplo 2.65 no es real, entonces no podemos simplemente dividir por $N_{3,0}(x)$. Pero sabemos que para todo $x \in Cl(h_{3,0})$ se tiene que $N_{3,0}(x) \in \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}I$, y además sabemos que $I^2 = -1$ entonces podemos identificar $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}I$ con los números complejos \mathbb{C} . Esto es bastante útil, ya que en \mathbb{C} tenemos una norma, a saber la norma $N_{0,1}$ del ejemplo 2.61 que llega a el conjunto de los números reales. Entonces podemos ver que la composición de la normas $h_{3,0}$ y $h_{0,1}$ es real y tiene es de la forma:

$$(N_{0,1} \circ N_{3,0})(x) = N_{0,1}((\alpha^2 - \beta^2 + \langle b, b \rangle - \langle a, a \rangle) + (2\alpha\beta - 2\langle a, b \rangle)I) = (\alpha^2 - \beta^2 + \langle b, b \rangle - \langle a, a \rangle)^2 + (2\alpha\beta - 2\langle a, b \rangle)^2 \quad (2.24)$$

Luego podemos usar la proposición 2.70 para encontrar los elementos invertibles de $Cl(h_{3,0})$ como en los casos anteriores

$$Cl^\times(h_{3,0}) = \{\alpha + a + bI + \beta I \in Cl(h_{3,0}) \mid (\alpha^2 - \beta^2 + \langle b, b \rangle - \langle a, a \rangle)^2 + (2\alpha\beta - 2\langle a, b \rangle)^2 \neq 0\}. \quad (2.25)$$

Ejemplo 2.76. Para el caso del espacio tiempo $Cl(h_{1,3})$ tenemos el mismo problema que en el caso anterior, la norma no es necesariamente real. Para solucionar esto vamos a usar una estrategia similar a la del caso anterior. Como vimos en el ejemplo 2.66 la norma $N_{1,3}(x) \in Cl^0 \oplus Cl(h)^3 \oplus Cl(h)^4$ pero a diferencia del ejemplo anterior este espacio esta muy lejos de ser los números complejos. Es por esta razon que consideraremos la función en $Cl^0 \oplus Cl(h)^3 \oplus Cl(h)^4$ dada por:

$$N(\alpha + bI + \beta I) = (\alpha - bI - \beta I)(\alpha + bI + \beta I) = \alpha^2 - b^2 + \beta^2 \in \mathbb{R}.$$

Esta función llega a los números reales y tiene dominio $Cl^0 \oplus Cl(h)^3 \oplus Cl(h)^4$, luego al componerla con la norma $N_{1,3}$ tenemos:

$$(N_{1,3} \circ N)(x) = (\alpha^2 - a^2 - \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + b^2 - \beta^2)^2 - 4(\alpha b - \beta a - a \lrcorner \mathbf{b} + b \lrcorner \mathbf{a} - a \lrcorner \mathbf{a}^c - b \lrcorner \mathbf{b}^c)^2 + 4(\alpha\beta - \langle a, b \rangle - \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle)^2.$$

Entonces los elementos invertibles de $Cl(h_{1,3})$ está dado por el conjunto:

$$Cl(h_{1,3})^\times = \{x \in Cl(h_{1,3}) \mid (N_{1,3} \circ N)(x) \neq 0\}.$$

3. Pin y Spin

En esta sección vamos a suponer que la forma bilineal es no degenerada.

Las álgebras de Clifford son muy útiles por diversas razones, pero uno de los principales motivos es que se puede encontrar una gran cantidad de subgrupos famosos en ellas. En este documento veremos como construir una versión del grupo ortogonal $O(h)$ y el grupo especial ortogonal $SO(h)$ en las álgebras de Clifford, pero en realidad hay muchos grupos importantes tanto para la física como para la matemática.

En esta sección trabajaremos con las ideas planteadas en [18] y [56], pero si al lector le interesa saber más puede leer [44] donde encuentra algunos grupos de Lie en las álgebras de Clifford o puede leer [30] donde puede encontrar otro tipos de grupos motivados por la física dentro de estas álgebras.

3.1. Grupo Ortogonal y Grupo Pin

El grupo ortogonal el grupo de transformaciones que preservan la distancia y los ángulos definidos por una forma cuadrática h y lo denotaremos $O(h)$. Es de especial interés ya que si tenemos una base ortonormal como en teorema 2.8 al aplicarle cualquier elemento de $O(h)$ sigue siendo ortonormal bajo esta misma forma cuadrática, es decir no altera nuestros sistemas de referencia. Una definición mas rigurosa sería:

Definición 3.1. Dada una forma cuadrática h , podemos definir al **grupo ortogonal** como:

$$O(h) = \{f \in \text{End}_{\mathbb{R}}(V) / h(f(x), f(y)) = h(x, y) \text{ para todo } x, y \in V\}.$$

Observación 3.2. Se sabe que el grupo ortogonal se descompone en dos componentes conexas

$$O(h) = O(h)_+ \cup O(h)_-,$$

donde $O(h)_+ = \{f \in O(h) / \det(f) = 1\}$ es el subgrupo de $O(h)$ que consiste en todas las transformaciones lineales que además de preservar la ortogonalidad de una base, también preserva su orientación. Por otro lado se tiene que $O(h)_- = \{f \in O(h) / \det(f) = -1\}$ no tiene una estructura algebraica interesante.

Definición 3.3. Definimos el **grupo especial ortogonal** como:

$$SO(h) = O_+(h) = \{f \in O(h) \mid \det(f) = 1\}.$$

Definición 3.4. Dado $v \in V/\{0\}$ un vector tal que $h(v, v) \neq 0$, definimos una **reflexión** sobre el hiperplano ortogonal al vector v como una transformación $R \in \text{End}(V)$ que fija todos los elementos en $\{v\}^\perp$ y que lleva v en $-v$, esta dada por:

$$R_v(x) = x - 2 \frac{h(x, v)}{h(v, v)} \cdot v.$$

Notar que bajo esta definición se puede inferir que $R \circ R = id$, luego se tiene que las reflexiones son invertibles y la inversa cumple $R^{-1} = R$.

Teorema 3.5. (*Cartan-Dieudonné*) Si $f \in O(h)$ entonces f se puede escribir como la composición de reflexiones. Además si $f \in SO(h)$ entonces f se puede escribir como la composición de una cantidad par de reflexiones.

Puede ver la demostración en [56, pag 175]

Observación 3.6. Este teorema dice básicamente que todo elemento de $O(h)$ y de $SO(h)$ son composiciones de reflexiones, es decir, basta con encontrar una manera de representar las reflexiones en las álgebras de Clifford para describir los elementos de estos grupos.

Sea $v \in V$ que cumple $h(v, v) \neq 0$, entonces las reflexiones sobre el hiperplano v^\perp , se ven en el álgebra

de Clifford asociada a V de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
R_v(x) &= x - 2\frac{h(x,v)}{h(v,v)} \cdot v = x - 2h(x,v) \cdot \left(\frac{1}{h(v,v)} \cdot v\right), \\
&= x - 2h(x,v) \cdot v^{-1}, \\
&= x - 2h(x,v) \cdot (1v^{-1}), \\
&= x - (2h(x,v) \cdot 1)v^{-1}, \\
&= x - (vx + xv)v^{-1}, \\
&= -v xv^{-1}, \\
&= \alpha(v)xv^{-1}.
\end{aligned}$$

Es decir, el elemento $\alpha(v)xv^{-1}$ en el álgebra de Clifford es lo más parecido a una reflexión $R_v(x)$. Pero para que sea una reflexión sobre el espacio V es necesario pedirle que sea invariante en V , esto motiva la siguiente definición:

Definición 3.7. Definimos **grupo de Clifford** al grupo

$$G(h) = \{a \in Cl^\times(h) \mid \alpha(v)av^{-1} = V\} \subset Cl^\times(h).$$

Por definición el grupo de Clifford es constituido por todos los elementos de $Cl(h)$ que son reflexiones en el espacio V . Además se puede ver que es efectivamente un grupo.

Definición 3.8. Para grupo de elementos invertibles podemos definir la **representación adjunta** como:

$$\begin{aligned}
Ad : Cl(h)^\times &\rightarrow End_{Alg}(Cl(h)) \\
Ad(a)(x) &= \alpha(a)xa^{-1}
\end{aligned} \tag{3.26}$$

para todo $a \in Cl(h)^\times$

Notemos que la función Ad es un homomorfismo de grupos, ya que dado $a, b \in Cl(h)^\times$ y $x \in Cl(h)$ tenemos que:

$$Ad(ab)(x) = \alpha(ab)x(ab)^{-1} = \alpha(a)\alpha(b)xb^{-1}a^{-1} = \alpha(a)(Ad(b)(x))a^{-1} = Ad(a)(Ad(b)(x)) = (Ad(a) \circ Ad(b))(x)$$

Además podemos restringir la representación definida en la definición 3.8 al grupo $G(h)$, es decir, $Ad : G(h) \rightarrow End_{Alg}(Cl(h))$ definida por:

$$Ad(x)(v) = \alpha(v)xv^{-1} = R_v(x). \tag{3.27}$$

Con esto, por medio de la representación adjunta, podemos asignar a cada elemento de $G(h)$ una reflexión, nos gustaría que esta representación nos diera una biyección entre los conjuntos $G(h)$ y $O(h)$, pero el resultado siguiente nos dice que lamentablemente esta representación no es fiel.

Proposición 3.9. Para la representación adjunta $Ad : G(h) \rightarrow End(Cl(h))$ se tiene que $Ker(Ad) = \mathbb{R}^\times$

Demostración. Tenemos que $ker(Ad) = \{x \in G(h) \mid Ad(x) = id\}$. Es claro que $\mathbb{R}^\times \subset Ker(G(h))$, por otro lado si $x \in Ker(Ad(x))$ por definición tenemos la relación

$$\alpha(x)v x^{-1} = v \text{ para todo } v \in V, \tag{3.28}$$

y como $Cl(h) = Cl_0 \oplus Cl_1$ podemos escribir los elementos de $Cl(h)$ como $x = x_0 + x_1$ con $x_i \in Cl(h)_i$, $i = 1, 2$, luego usando la ecuación (3.28) se tiene que:

$$x_0v = vx_0 \text{ y } -x_1v = vx_1 \text{ para todo } v \in V. \tag{3.29}$$

Prestemos nuestra atención al elemento x_0 , si escribimos el elemento x_0 en términos de la base descrita en el corolario 2.45 entonces en la descomposición de x_0 los sumandos pueden tener o no tener a e_1 en la descomposición, así podemos escribir el elemento x_0 de la siguiente manera

$$x_0 = a_0 + e_1 b_1, \text{ con } a_0 \in Cl(h)_0 \text{ y } b_1 \in Cl(h)_1, \quad (3.30)$$

donde los elementos a_0, b_1 no contiene a e_1 en la descomposición. Aplicando la ecuación (3.30) en la ecuación (3.29) y tomando $v = e_1$ tenemos que se cumplen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} (a_0 + e_1 b_1)e_1 &= e_1(a_0 + e_1 b_1), \\ a_0 e_1 + e_1 b_1 e_1 &= e_1 a_0 + e_1^2 b_1, \\ e_1 b_1 e_1 &= e_1^2 b_1, \\ -e_1^2 b_1 &= e_1^2 b_1, \\ e_1^2 b_1 &= 0, \end{aligned}$$

pero $e_1^2 = h(e_1, e_1) \neq 0$, entonces $b_1 = 0$, por lo tanto x_0 no contiene a e_1 .

Aplicando el mismo argumento para los vectores e_2, \dots, e_n de esto concluimos que x_0 no contiene a e_i , es decir, $x_0 \in \mathbb{R}^\times$.

Podemos aplicar el mismo argumento para mostrar que $x_1 \in \mathbb{R}^\times$, por lo tanto $x \in \mathbb{R}^\times$. \square

Proposición 3.10. *La restricción de la norma al grupo $G(h)$, es decir, $N|_{G(h)} : G(h) \rightarrow \mathbb{R}^\times$ es un homomorfismo y además se tiene que $N(\alpha(x)) = N(x)$ para todo $x \in G(h)$.*

Demostración. Primero veamos que es homomorfismo, sea $x, y \in G(h)$ entonces por la proposición 2.67 se tiene que:

$$N(xy) = \overline{xy}xy = \overline{y}xxy = \overline{y}N(x)y = N(x)\overline{y}y = N(x)N(y).$$

. Además se cumple la relación:

$$N(\alpha(x)) = \overline{\alpha(x)}\alpha(x) = \alpha(\overline{x})\alpha(x) = \alpha(\overline{xx}) = \alpha(N(x)) = N(x). \quad (3.31)$$

\square

Proposición 3.11. *Sea $N : Cl(h) \rightarrow Cl(h)$, la norma del álgebra de Clifford, definida en 2.60. Se tiene que $N(G(h)) \subset \mathbb{R}^\times$*

Demostración. La idea de la demostración será que para los elementos de $G(h)$ se cumple que $N(x) \in Ker(Ad) = \mathbb{R}^\times$.

Sea $x \in G(h)$ entonces $\alpha(x)vx^{-1} \in V$ luego como la involución τ definida en la definición 2.54 es la identidad en V se cumple la relación:

$$\alpha(x)vx^{-1} = \tau(\alpha(x)vx^{-1}) = \tau(x^{-1})\tau(v)\tau(\alpha(x)) = \tau(x)^{-1}v\tau(\alpha(x)).$$

Despejando v de la ecuación anterior se obtiene que:

$$v = \tau(x)\alpha(x)vx^{-1}\tau(\alpha(x))^{-1} = \alpha(\alpha(\tau(x)))\alpha(x)v(\tau(\alpha(x))x)^{-1} = \alpha(\overline{x})\alpha(x)v(\overline{xx})^{-1} = \alpha(\overline{xx})v(\overline{xx})^{-1}.$$

Con lo que se concluye que $N(x) = \overline{xx} \in Ker(Ad)$, es decir, $N(G(h)) \subset \mathbb{R}^\times$. \square

Teorema 3.12. *El homomorfismo $Ad|_{G(h)} : G(h) \rightarrow O(h)$ es sobreyectivo.*

Demostración. Sea $Ad(x) \in Ad(G(h))$, con $x \in G(h)$ luego $Ad(x)(v) = \alpha(x)vx^{-1} \in V$.

Tenemos que demostrar que $Ad(x)$ es una isometría, es decir cumple la relación $h(Ad(x)(v), h(Ad(x)(v))) = h(v, v)$ para todo $v \in V$. Pero sabemos que para todo $w \in V$ se tiene que $N(w) = \overline{ww} = -ww = -h(w, w)$, es decir, basta con demostrar que $N(Ad(x)(v)) = N(v)$. Pero para todo $v \in V$ tenemos que:

$$N(Ad_x(v)) = N(\alpha(x)vx^{-1}) = N(\alpha(x))N(v)N(x^{-1}) = N(x)N(v)N(x)^{-1} = N(v).$$

Luego se tiene que $Ad(G(h)) \subset O(h)$.

Solo falta ver que es sobreyectiva, sea $f \in O(h)$, entonces por el teorema de Cartan-Dieudonné (teorema 3.5) se tienen que:

$$f = s_1 \circ \cdots \circ s_k,$$

donde s_j son reflexiones sobre el plano H_j que es ortogonal al vector w_j para todo $j \in \{1, 2, \dots, k\}$,

Luego por la ecuación 3.27 se tiene que las reflexiones se pueden escribir como $s_j = Ad(w_j)$, entonces si consideramos $x = w_1 \cdots w_k \in G(h)$, se concluye que

$$Ad(x) = Ad(w_1 \cdot w_2 \cdots w_k) = Ad(w_1) \circ Ad(w_2) \circ \cdots \circ Ad(w_k) = s_1 \circ s_2 \circ \cdots \circ s_k = f. \quad (3.32)$$

Luego $Ad|_{G(h)}$ es sobreyectiva. \square

Podemos resumir las proposiciones 3.9 y 3.12 con la siguiente sucesión exacta:

$$1 \rightarrow \mathbb{R}^\times \rightarrow G(h) \xrightarrow{Ad|_{G(h)}} O(h) \rightarrow 1 \quad (3.33)$$

Esto quiere decir que $O(h) \cong G(h)/\mathbb{R}^\times$, es decir que, como grupos $G(h)$ tiene \mathbb{R}^\times copias de $O(h)$. Además se sabe que el grupo fundamental de $O(h)$, esta dado por $\pi_1(O(h)) \cong \mathbb{Z}_2$, eso quiere decir que el cubrimiento universal de $O(h)$ es un cubrimiento de dos hojas. Entonces $G(h)$ no es el cubrimiento universal de $O(h)$, ya que el grupo $G(h)$ es demasiado grande en comparación al grupo $O(h)$.

La siguiente proposición es un corolario de 3.12 que nos permitirá encontrar ejemplos de grupos $G(h)$ de una manera más sencilla.

Corolario 3.13. *El grupo $G(h)$ es generado por los elementos invertibles de V , que denotaremos por V^\times*

Demostración. Sea $\widetilde{G(h)} = \{v_1 \cdot v_2 \cdots v_k \mid v_i \in V^\times\}$ entonces tenemos que demostrar que $\widetilde{G(h)} = G(h)$.

Sea $x \in \widetilde{G(h)}$ entonces $x = v_1 \cdot v_2 \cdots v_k$ con $v_i \in V^\times$ y sea $v \in V$, luego se tiene

$$\begin{aligned} xvx^{-1} &= v_1 \cdot v_2 \cdots v_k \cdot v \cdot (v_1 \cdot v_2 \cdots v_k)^{-1}, \\ &= v_1 \cdots v_k \cdot v \cdot v_k^{-1} \cdots v_1^{-1}, \\ &= (-1)^k v \cdot v_1 \cdots v_k \cdot v_k^{-1} \cdots v_1^{-1}, \\ &= (-1)^k v \in V. \end{aligned}$$

De esto, tenemos que $x \in G(h)$, por lo tanto, tenemos la inclusión $\widetilde{G(h)} \subset G(h)$.

Para demostrar la otra inclusión tomamos $x \in G(h)$ entonces sabemos que $Ad_x = f \in O(h)$. Pero por el teorema de Cartan Dieudonné (teorema 3.5) se tiene que:

$$f = R_{v_1} \circ \cdots \circ R_{v_n},$$

donde R_{v_i} son reflexiones en torno al vector v_i . Pero además sabemos que $R_{v_i} = Ad(w_i)$ con $w_i \in \widetilde{G(h)}$, entonces se tiene que

$$f = Ad(w_1) \circ \cdots \circ Ad(w_n) = Ad(w_1 \cdots w_n). \quad (3.34)$$

Por lo tanto se tiene que $Ad(x) = Ad(w_1 \cdots w_n)$, lo que implica que $x(w_1 \cdots w_n)^{-1} \in Ker(Ad|_{G(h)}) = \mathbb{R}^\times$.

Por lo tanto $x = (w_1 \cdots w_n)r \in \widetilde{G(h)}$. Con esto se concluye que $\widetilde{G(h)} = G(h)$. \square

Ahora daremos algunos ejemplos de grupos de Clifford para las álgebras de Clifford que hemos usado como ejemplos. Para esto, la estrategia siempre va a ser la misma, los elementos de invertibles de V estan dados en el ejemplo 2.71, entonces solo tomamos el grupo generado por V^\times para encontrar $G(h)$.

Ejemplo 3.14. Para el álgebra de Clifford $Cl(h_{0,1})$ sabemos por el ejemplo 2.71 que

$$V^\times = \{bi \in V \mid b \neq 0\} = \mathbb{R}^\times i,$$

luego el generado como grupo de V^\times es

$$G(h_{0,1}) = \mathbb{R}^\times \cup \mathbb{R}^\times i.$$

Es decir, las reflexiones en una recta estan dadas por la imagen de $\mathbb{R}^\times \cup \mathbb{R}^\times i$ bajo la función adjunta Ad , por ejemplo veamos que hace la adjunta de un escalar al aplicarla al espacio generado por j , para esto consideremos $Ad(1)(ai) = -1(ai)1^{-1} = ai$, no le hace nada, es decir, $Ad(1) = id$. Por otro lado $Ad(i)(ai) = -iai = -ai$, es decir, envía ai en $-ai$, lo que es una reflexión en el origen.

Ejemplo 3.15. Para el álgebra de Clifford $Cl(h_{1,0})$ sabemos por el ejemplo 2.73 que los elementos invertibles de V son:

$$V^\times = \{bj \in V \mid b \neq 0\} = \mathbb{R}^\times j,$$

luego el generado como grupo de V^\times es:

$$G(h_{0,1}) = \mathbb{R}^\times \cup \mathbb{R}^\times j.$$

Este caso es bastante similar al anterior, de hecho, la función adjunta actúa de la misma manera.

Ejemplo 3.16. Para el álgebra de Clifford $Cl(h_{0,2})$ sabemos por el ejemplo 2.72 que los elementos invertibles de V deben ser de la forma:

$$V^\times = \{be_1 + ce_2 \in V \mid b^2 + c^2 \neq 0\} = V - \{0\},$$

Luego el grupo generado por $V - \{0\}$ es:

$$G(h_{2,0}) = \{ae_1 + be_2 \in V \mid a^2 + b^2 \neq 0\} \cup \{c + dI \in Cl(h_{2,0}) \mid c^2 + d^2 \neq 0\}.$$

Ejemplo 3.17. Para el álgebra de Clifford $Cl(h_{2,0})$ sabemos por el ejemplo 2.74, entonces tenemos que:

$$V^\times = \{be_1 + ce_2 \in V \mid b^2 + c^2 \neq 0\} = V - \{0\},$$

Notemos que aunque $Cl(h_{2,0}) \neq Cl(h_{0,2})$, el grupo de Clifford es el mismo en este caso:

$$G(h_{2,0}) = \{ae_1 + be_2 \in V \mid a^2 + b^2 \neq 0\} \cup \{c + dI \in Cl(h_{0,2}) \mid c^2 + d^2 \neq 0\}.$$

Observación 3.18. Notemos que $G(h_{2,0}) = G(h_{0,2})$.

Ejemplo 3.19. En el caso del álgebra de Clifford $Cl(h_{3,0})$ se tiene que por los calculos hechos en el ejemplo 2.75, los elementos invertibles de V son:

$$V^\times = \{a \in V \mid \langle a, a \rangle^2 \neq 0\} = \{xe_1 + ye_2 + ze_3 \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \neq 0\} = V - \{0\},$$

Luego por el corolario 3.13 se tiene que:

$$G(h_{3,0}) = \{xe_1 + ye_2 + ze_3 \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \neq 0\} \cup \{\alpha + bI \in Cl^0 \oplus Cl^2 \mid \alpha^2 + b^2 \neq 0\}.$$

Ejemplo 3.20. En el caso del espacio tiempo el álgebra de Clifford $Cl(h_{1,3})$ se tiene que por los calculos hechos en el ejemplo 2.76, los elementos invertibles de V son:

$$V^\times = \{a \in V \mid a^2 \neq 0\} = \{(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \in \mathbb{R}^{1+3} \mid h((\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3), (\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)) \neq 0\},$$

Luego por el corolario se tiene que:

$$G(h_{3,0}) = \mathbb{R}^\times A \cup \mathbb{R}^\times A\gamma_0 \cup \mathbb{R}^\times A\gamma_1 \cup \mathbb{R}^\times A\gamma_0\gamma_1,$$

donde el conjunto A esta dado por:

$$A = \{\alpha + a + bI \in Cl^0 \oplus Cl^2 \oplus Cl^4 \mid \alpha^2 - a^2 + b^2 - \beta^2 = 1, \alpha\beta = h(\mathbf{a}, \mathbf{b})\}.$$

Con el fin de encontrar un grupo más chico que $G(h)$ que cumpla las misma propiedades que $G(h)$, vamos a dar la siguiente definición:

Definición 3.21. Dado un espacio cuadrático (V, h) llamaremos **grupo Pin** al grupo definido por:

$$Pin(h) = \ker(|N|_{G(h)}) = \{x \in G(h) \mid |N(x)| = 1\} = \{x \in G(h) \mid N(x) = \pm 1\}$$

Notar que como $G(h)$ es grupo y la norma restringida a $G(h)$ es homomorfismo de grupos se tiene que $Pin(h)$ es efectivamente un grupo.

Al definir el grupo $Pin(h)$ de esta manera tenemos la siguiente sucesión exacta

$$1 \rightarrow Pin(h) \rightarrow G(h) \xrightarrow{|N|_{G(h)}} \mathbb{R}^\times \rightarrow 1 \quad (3.35)$$

Notemos que el grupo $Pin(h)$ es bastante más pequeño que el grupo $G(h)$, ya que nos estamos restringiendo a solo a los elementos cuyo valor absoluto de la norma es ± 1 . Sin embargo vamos mostrar que cumple casi las mismas propiedades que el grupo $G(h)$.

Teorema 3.22. $Ad|_{Pin(h)} : Pin(h) \rightarrow O(h)$ es un homomorfismo sobreyectivo y además se tiene que $ker(Ad|_{Pin(h)}) \cong \mathbb{Z}_2$.

Demostración. Para la sobreyectividad sea $f \in O(h)$, entonces bajo el mismo argumento usado en el teorema 3.12 se tiene que

$$Ad_x = Ad(w_1 \cdot w_2 \cdots w_k) = Ad(w_1) \circ Ad(w_2) \circ \cdots \circ Ad(w_k) = s_1 \circ s_2 \circ \cdots \circ s_k = f.$$

El único problema es que x pertenece a $G(h)$ y no necesariamente en $Pin(h)$, para solucionar este problema vamos a considerar los elementos $w'_j = \frac{w_j}{\sqrt{|h(w_j, w_j)|}}$ para todo $j \in \{1, 2, \dots, k\}$, para estos elemento se tiene que:

$$N(w'_j) = N\left(\frac{w_j}{\sqrt{|h(w_j, w_j)|}}\right) = \frac{N(w_j)}{|h(w_j, w_j)|} = \frac{N(w_j)}{|-N(w_j)|} = \pm 1.$$

y además como son un múltiplo de w_j sigue siendo un reflexión sobre el hiperplano w_j^\perp . Así $w_j \in Pin(h)$ y al tomar $f \in O(h)$ basta con definir $x = w'_1 w'_2 \cdots w'_k \in Pin(h)$ para obtener la relación:

$$Ad(x) = Ad(w'_1 w'_2 \cdots w'_k) = Ad(w'_1) \circ Ad(w'_2) \circ \cdots \circ Ad(w'_k) = s_1 \circ s_2 \circ \cdots \circ s_k = f.$$

Luego $Ad|_{Pin(h)} : Pin(h) \rightarrow O(h)$ es sobreyectiva.

Ahora calcularemos el kernel de Ad restringida a $Pin(h)$, para esto notemos que:

$$Ker(Ad|_{Pin(h)}) = Ker(Ad) \cap Ker(N) = \{t \in \mathbb{R}^\times \mid N(t) = \pm 1\} = \{t \in \mathbb{R}^\times \mid t^2 = \pm 1\} = \{\pm 1\} \cong \mathbb{Z}_2$$

□

El teorema 3.22 nos deja la siguiente sucesión exacta:

$$1 \rightarrow \mathbb{Z}_2 \rightarrow Pin(h) \xrightarrow{Ad|_{Pin(h)}} O(h) \rightarrow 1. \quad (3.36)$$

Luego $O(h) \cong Pin(h)/\mathbb{Z}_2$, como el grupo fundamental de $O(h)$ es \mathbb{Z}_2 entonces se tiene que el grupo $Pin(h)$ es el cubrimiento universal del grupo $O(h)$. Esta es una mucho mejor forma de ver al grupo $O(h)$ como elementos de $Cl(h)$, ya que para cada elemento en $O(h)$ hay dos elementos que lo representan en $Pin(h)$. Las sucesiones exactas anteriores se resumen en el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc} & & 1 & & 1 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 1 & \longrightarrow & \mathbb{Z}_2 & \longrightarrow & Pin(h) & \xrightarrow{Ad} & O(h) \longrightarrow 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \updownarrow \\ 1 & \longrightarrow & \mathbb{R}^\times & \longrightarrow & G(h) & \xrightarrow{Ad} & O(h) \longrightarrow 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow |N| & & \\ & & \mathbb{R}_{>0} & \longleftrightarrow & \mathbb{R}_{>0} & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 1 & & 1 & & \end{array}$$

Antes de hacer calculos, podemos notar que el teorema 3.22, nos deja una manera sencilla de calcular grupos Pin.

Corolario 3.23. *El grupo $Pin(h)$ es generado por elementos de $S^{n-1} = \{v \in V \mid N(v) = \pm 1\}$.*

Demostración. Es básicamente la misma idea usada en el corolario 3.13. □

Con esto se hace un poco más amigable encontrar ejemplos de este grupo. La estrategia para encontrar estos grupos es restringir el grupo $G(h)$ a los elementos de norma 1.

Ejemplo 3.24. Al restringir los elementos de $G(h)$ del ejemplo 3.14 a los elementos de norma 1 se obtiene que

$$Pin(h_{0,1}) = \{\pm 1, \pm i\} \cong \mathbb{Z}_4.$$

Ejemplo 3.25. Al restringir los elementos de $G(h)$ del ejemplo 3.15 a los elementos de norma 1 se obtiene que:

$$Pin(h_{1,0}) = \{\pm 1, \pm j\} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2.$$

Ejemplo 3.26. Al restringir los elementos de $G(h)$ del ejemplo 3.16 a los elementos de norma 1 se obtiene que:

$$Pin(h_{0,2}) = \{ae_1 + be_2 \in V \mid a^2 + b^2 \neq 0\} \cup \{c + dI \in Cl(h_{2,0}) \mid c^2 + d^2 \neq 0\}.$$

Observación 3.27. El caso $Cl(h_{2,0})$ tiene el mismo grupo de Clifford de $Cl(h_{0,2})$, entonces el grupo $Pin(h_{2,0}) = Pin(h_{0,2})$.

Ejemplo 3.28. Al restringir los elementos de $G(h)$ del ejemplo 3.19 a los elementos de norma 1 se obtiene que:

$$Pin(h_{3,0}) = \{xe_1 + ye_2 + ze_3 \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \cup \{\alpha + bI \in Cl^0 \oplus Cl^2 \mid \alpha^2 + b^2 = 1\}.$$

Ejemplo 3.29. Al restringir los elementos de $G(h_{1,3})$ del ejemplo 3.20 a los elementos de norma 1 se obtiene que:

$$Pin(h_{1,3}) = \pm A \cup \pm A\gamma_0 \cup \pm A\gamma_1 \cup \pm A\gamma_0\gamma_1,$$

Donde A es el conjunto definido en el ejemplo 3.20.

3.2. Grupo Especial Ortogonal y Grupo Spin

De la misma manera que construimos el grupo $Pin(h)$ nos gustaría encontrar un analogo $SO(h)$ en el álgebra de Clifford.

Definición 3.30. Dado un espacio cuadrático (V, h) llamaremos **grupo Spin** al grupo definido por:

$$Spin(h) = Pin(h) \cap Cl^0(h).$$

Proposición 3.31. $Ad|_{Spin(h)} : Spin(h) \rightarrow SO(h)$ es homomorfismo sobreyectivo y además $ker(Ad|_{Spin(h)}) \cong \mathbb{Z}_2$.

Demostración. La idea de la demostración es la misma que la demostración de la proposición 3.22, considerando la descomposición $G(h) = G(h)_0 \oplus G(h)_1$. □

Luego como en el caso anterior se tiene la siguiente sucesión exacta:

$$1 \rightarrow \mathbb{Z}_2 \rightarrow Spin(h) \xrightarrow{Ad|_{Spin(h)}} SO(h) \rightarrow 1. \quad (3.37)$$

Es decir, $SO(h) \cong Spin(h)/\mathbb{Z}_2$, lo que nos dice que $Spin(h)$ es el cubrimiento universal de dos hojas del grupo $SO(h)$. Aquí tenemos un diagrama similar al del grupo Pin:

$$\begin{array}{ccccccc}
& & 1 & & 1 & & \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \\
1 & \longrightarrow & \mathbb{Z}_2 & \longrightarrow & Spin(h) & \xrightarrow{Ad} & SO(h) \longrightarrow 1 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \updownarrow \\
1 & \longrightarrow & \mathbb{R}^\times & \longrightarrow & G^0(h) & \xrightarrow{Ad} & SO(h) \longrightarrow 1 \\
& & \downarrow & & \downarrow |N| & & \\
& & \mathbb{R}_{>0} & \longleftrightarrow & \mathbb{R}_{>0} & & \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \\
& & 1 & & 1 & &
\end{array}$$

Corolario 3.32. El grupo $Spin(h)$ es generado por una cantidad par de elementos en $S^{n-1} = \{v \in V \mid N(v) = \pm 1\}$.

Demostración. Es básicamente la misma idea usada en el corolario 3.23. □

Ejemplo 3.33. Por la definición del grupo $Spin$ y por el calculo hecho en 3.24, se tiene que:

$$Spin(h_{0,1}) = Cl(h_{0,1})_0 \cap Pin(h_{0,1}) = \{\pm 1\} \cong \mathbb{Z}_2.$$

Ejemplo 3.34. Por la definición 3.30 y por la descripción del grupo Pin en (3.25) tenemos que:

$$Spin(h_{1,0}) = Cl(h_{1,0})_0 \cap Pin(h_{1,0}) = \{\pm 1\} \cong \mathbb{Z}_2.$$

Observación 3.35. Notar que $Pin(h_{1,0}) \not\cong Pin(h_{0,1})$, pero $Spin(h_{1,0}) \cong Spin(h_{0,1})$

Ejemplo 3.36. Por la definición del grupo $Spin$ y por el calculo hecho en (??) se obtiene:

$$Spin(h_{2,0}) = Cl(h_{2,0})_0 \cap Pin(h_{2,0}) = \{c + dI \in Cl(h_{2,0}) \mid c^2 + d^2 = 1\} \cong U(1).$$

Observación 3.37. Por el mismo argumento de la observación 3.18 se tiene que $Spin(h_{2,0}) = Spin(h_{0,2})$.

Ejemplo 3.38. Por la definición del grupo $Spin$ y por el calculo hecho en (3.28) se obtiene:

$$Spin(h_{3,0}) = Cl(h_{3,0})_0 \cap Pin(h_{3,0}) = \{\alpha + bI \in Cl^0 \oplus Cl^2 \mid \alpha^2 + b^2 = 1\} \cong SU(2).$$

Ejemplo 3.39. Por la definición del grupo $Spin$ y por el calculo hecho en (3.29) se obtiene:

$$Spin(h_{1,3}) = Cl(h_{1,3})_0 \cap Pin(h_{1,3}) = \pm A \cup \pm A\gamma_0\gamma_1,$$

Donde A es el conjunto definido en el ejemplo 3.20.

El grupo $Pin(h)$ y $Spin(h)$ son grupos bastante interesantes topologicamente, ya que son un cubrimiento de dos hojas para el grupo $O(h)$ y $SO(h)$ respectivamente. Además $Spin(h)$ es simplemente conexo, esto es muy útil, ya que en la teoría de Lie las funciones definidas en grupos simplemente conexos estan en correspondencia con las funciones definidas en las álgebras de Lie asociadas a esos grupos, de manera única. Es decir, estudiar las homomorfismos de grupos de $Spin(h)$ es esencialmente lo mismo que estudiar las homomorfismos del álgebra de Lie del álgebra $\mathfrak{spin}(h)$, que tiene un estructura bastante más rica que la del grupo de Lie.

para tener más información sobre esto, es recomendable leer [18, pag 37]

4. Clasificación de álgebras de Clifford

Aunque ya hemos visto ejemplos de álgebras de Clifford, nos gustaría conocer todas las álgebras de Clifford. En esta sección daremos a conocer las álgebras de Clifford para dimensiones pequeñas y luego daremos una clasificación de todas las álgebras de Clifford.

Sabemos por el teorema 2.8 que para cada espacio cuadrático (V, h) no degenerado, podemos encontrar una base $\{e_1, \dots, e_{p-1}, e_p, e_{p+1}, \dots, e_{p+q}\}$ donde los primeros p elementos son spacelike y los siguientes q vectores son timelike. Esto clasifica los espacios cuadráticos no degenerados, ya que estos deben ser isométricos al espacio cuadrático $(V, h_{p,q})$ definido en la definición 2.5. Como las álgebras de Clifford son únicamente construidas a partir de un espacio cuadrático, entonces para encontrarlas todas basta tomar la clasificación de espacios cuadráticos y hacer la construcción vista en la proposición 2.13.

4.1. Álgebras de Clifford de dimensión pequeña

Vamos a mostrar todos los espacios cuadráticos asociados a V dependiendo de la dimensión de V y construiremos el álgebra de Clifford respectiva:

1. Si $\dim(V) = 1$, entonces las posibles formas bilineales son $h_{1,0}$ y $h_{0,1}$, luego por los ejemplos 2.27 y 2.26 respectivamente tenemos que

- a) $Cl(h_{1,0}) \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} := 2\mathbb{R}$,
- b) $Cl(h_{0,1}) \cong \mathbb{C}$.

2. Si $\dim(V) = 2$, entonces las posibles formas bilineales son $h_{2,0}$, $h_{1,1}$ y $h_{0,2}$,

- a) por el ejemplo 2.29 sabemos que:

$$Cl(h_{2,0}) = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}e_1 \oplus \mathbb{R}e_2 \oplus \mathbb{R}e_1e_2.$$

Tomando la el isomorfismo de álgebras dado por:

$$f(a + be_1 + ce_2 + de_1e_2) = \begin{pmatrix} a + c & b + d \\ b - d & a - c \end{pmatrix},$$

se tiene que $Cl(h_{2,0}) \cong M_2(\mathbb{R})$.

- b) por el ejemplo 2.28 sabemos que $Cl(h_{0,2}) \cong \mathbb{H}$,
- c) para $Cl(h_{1,1})$ tenemos un vector spacelike e_+ y un timelike e_- , luego el álgebra de Clifford tiene la forma:

$$Cl(h_{1,1}) = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}e_1 \oplus \mathbb{R}e_2 \oplus \mathbb{R}e_1e_2,$$

donde $e_1^2 = -1$, $e_2^2 = -1$ y $(e_1e_2)^2 = -1$. Tomando la identificación:

$$\begin{aligned} 1 &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ e_1 &\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ e_2 &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \\ e_1e_2 &\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

se tiene que $Cl(h_{1,1}) \cong M_2(\mathbb{R})$.

Por ahora vamos a asumir las siguientes relaciones para así encontrar las álgebras de Clifford en para espacios vectoriales de dimensión más grande

relación 1 $Cl(h_{p+1,q+1}) \cong \mathbb{M}_2(Cl(h_{p,q}))$,

relación 2 $Cl(h_{p,q}) \cong Cl(h_{q+1,p-1})$, $p \geq 1$,

relación 3 $Cl(h_{p,q}) \cong Cl(h_{p-4,q+4})$, $p \geq 4$.

3. Si $\dim(V) = 3$, entonces las posibles formas bilineales son $h_{3,0}$, $h_{2,1}$, $h_{1,2}$ y $h_{3,0}$

a) ya conoemos a $Cl(h_{3,0})$ en el ejemplo 2.30, pero queremos verla como matrices sobre \mathbb{R} , \mathbb{C} ó \mathbb{H} , usando las relaciones anteriores.

Por la **relación 2** tenemos que $Cl(h_{3,0}) \cong Cl(h_{1,2})$, luego por la **relación 1** tenemos que:

$$Cl(h_{3,0}) \cong Cl(h_{1,2}) \cong \mathbb{M}_2(Cl(h_{0,1})) \cong \mathbb{M}_2(\mathbb{C}).$$

b) Para $Cl(h_{2,1})$ volvemos a usar la **relación 1** y tenemos que

$$Cl(h_{2,1}) \cong \mathbb{M}_2(Cl(h_{1,0})) \cong 2\mathbb{M}_2(\mathbb{R}) = \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) \oplus \mathbb{M}_2(\mathbb{R}).$$

c) Para $Cl(h_{1,2})$ usando la **relación 1** se tiene que:

$$Cl(h_{1,2}) \cong \mathbb{M}_2(Cl(h_{0,1})) \cong \mathbb{M}_2(\mathbb{C}).$$

d) Por último para $Cl(h_{0,3})$ tomando la siguiente identificación:

$$\begin{aligned} f(1) &= (1, 1), \\ f(e_1) &= (i, -i), \\ f(e_2) &= (j, -j), \\ f(e_3) &= (k, -k), \end{aligned}$$

se tiene que $Cl(h_{0,3}) \cong \mathbb{H} \oplus \mathbb{H} = 2\mathbb{H}$.

4. Si $\dim(V) = 4$, entonces las posibles formas bilineales son $h_{4,0}$, $h_{3,1}$, $h_{2,2}$, $h_{1,3}$ y $h_{0,4}$. Para esta dimensión solo mostraremos dos casos

a) Para $Cl(h_{4,0})$ usando la **relación 2** tenemos que $Cl(h_{4,0}) \cong Cl(h_{1,3})$, ahora usando la **relación 1** se tiene que:

$$Cl(h_{4,0}) \cong Cl(h_{1,3}) \cong \mathbb{M}_2(Cl(h_{0,2})) \cong \mathbb{M}_2(\mathbb{H}).$$

b) Para $Cl(h_{0,4})$ vamos a usar la **relación 3** se tiene que:

$$Cl(h_{0,4}) \cong Cl(h_{4,0}) \cong \mathbb{M}_2(\mathbb{H}).$$

Vamos a resumir todas estas relaciones en la siguiente tabla, donde la barra de arriba es la diferencia de la signatura $s = p - q$ y la barra lateral es la dimensión de V .

n s	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
0						\mathbb{R}					
1					\mathbb{C}		$2\mathbb{R}$				
2				\mathbb{H}		$\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$		$\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$			
3			$2\mathbb{H}$		$\mathbb{M}_2(\mathbb{C})$		$2\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$		$\mathbb{M}_2(\mathbb{C})$		
4		$\mathbb{M}_2(\mathbb{H})$		$\mathbb{M}_2(\mathbb{H})$		$\mathbb{M}_4(\mathbb{R})$		$\mathbb{M}_4(\mathbb{R})$		$\mathbb{M}_2(\mathbb{H})$	
5	$\mathbb{M}_4(\mathbb{C})$		$2\mathbb{M}_2(\mathbb{H})$		$\mathbb{M}_4(\mathbb{C})$		$2\mathbb{M}_4(\mathbb{R})$		$\mathbb{M}_4(\mathbb{C})$		$2\mathbb{M}_2(\mathbb{H})$

Cuadro 1: Álgebras de Clifford, donde la primera columna es la dimensión de V y la primera fila representa la diferencia $p - q$

Por lo hablado anteriormente tenemos la clasificación hasta la dimensión 3 y algunos casos de dimensión 4, pero esto es suficiente ya que, por la **relación 1** nos dice que al aumentar en 2 la dimensión del espacio vectorial V sin que afecte la resta $p - q$, el álgebra de Clifford asociada a V será la misma álgebra de matrices pero cuyo tamaño es duplicado, es decir,

$$Cl(h_{p+n, q+n}) \cong \mathbb{M}_2(Cl(h_{p+(n-1), q+(n-1)})) \cong \cdots \cong \mathbb{M}_{2^n}(Cl(h_{p, q})).$$

Como se ven en las columnas de la tabla de abajo.

Por la **relación 2** se tiene que la diferencia de las signaturas se identifican de la siguiente manera $p - q \longleftrightarrow q - p + 2$, es decir la tabla es simétrica respecto a $p - q = 1$.

Por último, la **relación 3** nos dice que se tiene la siguiente relación entre las signaturas $p - q \longleftrightarrow p - q - 8$, es decir, la tabla es 8-periodica, es decir, basta conocer las columnas del -4 hasta el 3, esto junto a la **relación 1** que nos dice que basta conocer hasta la dimensión $n = 4$, nos permite concluir que para conocer todas las álgebra de Clifford, basta con conocer el cuadrado de columnas -4 a 3 y de filas 0 a 4, que es lo que vimos previamente. Lo siguiente que haremos es dar la demostración de las relaciones usadas.

Proposición 4.1. *Se tiene los siguientes isomorfismos:*

1. $Cl(h_{p+1, q+1}) \cong \mathbb{M}_2(Cl(h_{p, q}))$,
2. $Cl(h_{p, q}) \cong Cl(h_{q+1, p-1})$, $p \geq 1$,
3. $Cl(h_{p, q}) \cong Cl(h_{p-4, q+4})$, $p \geq 4$.

Demostración. 1. Sea $\{e_1, e_2, \dots, e_n, e_+, e_-\}$ la base ortogonal de $Cl(h_{p+1, q+1})$ donde $e_+^2 = 1$ y $e_-^2 = -1$, entonces la siguiente función lleva los generadores de $(V, h_{p+1, q+1})$ en los generadores de $Cl(h_{p, q} \otimes Cl(h_{1, 1}))$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} f(e_i) &= e_i \otimes e_+ e_- \text{ si } 1 \leq i \leq n, \\ f(e_+) &= 1 \otimes e_+, \\ f(e_-) &= 1 \otimes e_-, \end{aligned}$$

y además cumple que $f(e)^2 = h(e, e) \cdot 1$ para todo e en la base de $(V, h_{p+1, q+1})$, entonces se extiende al homomorfismo de álgebra $\bar{f} : Cl(h_{p+1, q+1}) \rightarrow Cl(h_{p, q} \otimes Cl(h_{1, 1}))$, esta función es sobreyectiva y se tiene por el corolario 2.45 que:

$$\dim_{\mathbb{R}}(Cl(h_{p+1, q+1})) = 2^{2+p+q} = 2^2 \cdot 2^{p+q} = \dim_{\mathbb{R}}(Cl(h_{p, q} \otimes \dim_{\mathbb{R}}(Cl(h_{p, q})) \cdot Cl(h_{1, 1})))$$

Por lo tanto, se tiene que $Cl(h_{p+1, q+1}) \cong Cl(h_{p, q} \otimes Cl(h_{1, 1}))$.

Pero sabemos que $Cl(h_{1, 1}) \cong \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$, luego por (1) tenemos que:

$$Cl(h_{p+1, q+1}) \cong Cl(h_{p, q}) \otimes \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) \cong \mathbb{M}_2(Cl(h_{p, q})).$$

2. Sea $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ la base ortogonal de $(V, h_{p, q})$, entonces la siguiente función lleva los generadores de $(V, h_{p, q})$ en los generadores de $Cl(h_{q+1, p-1})$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} f(e_i) &= e_i e_1 \text{ si } 2 \leq i \leq n, \\ f(e_1) &= e_1, \end{aligned}$$

y además cumple que $f(e)^2 = h(e, e) \cdot 1$ para todo e en la base de $(V, h_{p, q})$, entonces se extiende al homomorfismo de álgebra $\bar{f} : Cl(h_{p, q}) \rightarrow Cl(h_{q+1, p-1})$, esta función es sobreyectiva y se tiene por el corolario 2.45 que

$$\dim_{\mathbb{R}}(Cl(h_{p, q})) = 2^{p+q} = \dim_{\mathbb{R}}(Cl(h_{q+1, p-1})).$$

Por lo tanto, se tiene que $Cl(h_{p, q}) \cong Cl(h_{q+1, p-1})$.

3. Sea $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ la base ortogonal de $(V, h_{p,q})$, entonces la siguiente función lleva los generadores de $(V, h_{p,q})$ en los generadores de $Cl(h_{p-4,q+4})$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} f(e_i) &= e_i e_1 e_2 e_3 e_4, \text{ si } i \in \{1, 2, 3, 4\} \\ f(e_i) &= e_i, \text{ si } 5 \leq i \leq n \end{aligned}$$

y además cumple que $f(e)^2 = h(e, e) \cdot 1$ para todo e en la base de $(V, h_{p,q})$, entonces se extiende al homomorfismo de álgebra $\bar{f} : Cl(h_{p,q}) \rightarrow Cl(h_{p-4,q+4})$, esta función es sobreyectiva y se tiene por el corolario 2.45 que

$$\dim_{\mathbb{R}}(Cl(h_{p,q})) = 2^{p+q} = \dim_{\mathbb{R}}(Cl(h_{p-4,q+4}))$$

Por lo tanto, se tiene que $Cl(h_{p,q}) \cong Cl(h_{p-4,q+4})$. □

Volviendo a la tabla 2, podemos ver de que solo son importantes las primeras 8 álgebras de Clifford, las otras van a ser isomorfas a ellas o a matrices con coeficientes en ellas. Esto nos motiva a dar la siguiente definición:

Definición 4.2. Se dice que dos álgebras A y A' son del mismo **tipo** \mathbb{K} si existen $n, n' \in \mathbb{N}$ tal que

$$A \cong M_n(\mathbb{K}) \cong M_{n'}(\mathbb{K}) \cong A'.$$

Luego como en la tabla 2 se tiene que todas las álgebras de Clifford son matrices sobre \mathbb{R}, \mathbb{C} o \mathbb{H} , se tiene que los únicos tipos de álgebras de Clifford son **reales**, **complejas** o **cuaterniónicas** y además se tiene que depende del índice $p - q$ de la siguiente manera

Proposición 4.3. *Un álgebra de Clifford es del tipo:*

1. *real, si $p - q \equiv 0, 1, 2$ modulo 8,*
2. *compleja, si $p - q \equiv 3, 7$ modulo 8,*
3. *cuaterniónica, si $p - q \equiv 4, 5, 6$ modulo 8.*

El siguiente resultado nos dará una relación entre las álgebras de Clifford y la parte par de una de signatura mayor.

Proposición 4.4. *Se tiene las siguientes relaciones:*

1. $Cl(h_{p,q})_0 \cong Cl(h_{p,q-1})$.
2. $Cl(h_{p,q})_0 \cong Cl(h_{q,p-1})$.
3. $Cl(h_{p,q})_0 \cong Cl(h_{q,p})_0$.

Demostración. 1. Sea $\{e_1, e_2, \dots, e_{n-1}\}$ la base ortogonal de $(V, h_{p,q-1})$, entonces la siguiente función lleva los generadores de $(V, h_{p,q-1})$ en los generadores de $Cl(h_{p,q})_0$ de la siguiente manera:

$$f(e_i) = e_i e_n \text{ si } 1 \leq i \leq n - 1.$$

y además cumple que $f(e)^2 = h(e, e) \cdot 1$ para todo e en la base de $(V, h_{p,q-1})$, entonces se extiende al homomorfismo de álgebra $\bar{f} : Cl(h_{p,q-1}) \rightarrow Cl(h_{p,q})_0$, esta función es sobreyectiva y se tiene por el corolario 2.45 que:

$$\dim_{\mathbb{R}}(Cl(h_{p,q-1})) = 2^{p+q-1} = \dim_{\mathbb{R}}(Cl(h_{p,q})_0).$$

Por lo tanto, se tiene que $Cl(h_{p,q-1}) \cong Cl(h_{p,q})_0$.

2. Sea $\{e_1, e_2, \dots, e_{n-1}\}$ la base ortogonal de $(V, h_{q,p-1})$, entonces la siguiente función lleva los generadores de $(V, h_{q,p-1})$ en los generadores de $Cl(h_{p,q})_0$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} f(e_i) &= e_{p+i}e_p \text{ si } 1 \leq i \leq q, \\ f(e_i) &= e_{i-q}e_p \text{ si } q+1 \leq i \leq n-1, \end{aligned}$$

y además cumple que $f(e)^2 = h(e, e) \cdot 1$ para todo e en la base de $(V, h_{q,p-1})$, entonces se extiende al homomorfismo de álgebra $\bar{f} : Cl(h_{q,p-1}) \rightarrow Cl(h_{p,q})_0$, esta función es sobreyectiva y se tiene por el corolario 2.45 que

$$\dim_{\mathbb{R}}(Cl(h_{q,p-1})) = 2^{q+p-1} = \dim_{\mathbb{R}}(Cl(h_{p,q})_0)$$

Por lo tanto, se tiene que $Cl(h_{q,p-1}) \cong Cl(h_{p,q})_0$.

3. tenemos que $Cl(h_{p,q})_0 \cong Cl(h_{p,q-1}) \cong Cl(h_{q,p})_0$. □

Observación 4.5. Podemos notar que por la afirmación 3 de la proposición 4.4 se tiene que $Spin(p, q) \cong Spin(q, p)$, que es algo que podíamos intuir en los ejemplos encontrados.

Si abreviamos una super álgebra $A = A_0 \oplus A_1$ con el simbolo $A_0 \rightarrow A$, entonces por la proposición anterior tenemos que

$$\begin{aligned} Cl(h_{p,q-1}) &\rightarrow Cl(h_{p,q}), \\ Cl(h_{q,p-1}) &\rightarrow Cl(h_{p,q}). \end{aligned}$$

Esto junto a la tabla anterior se puede resumir en el siguiente reloj, que clasifica todos los tipos de super álgebras:

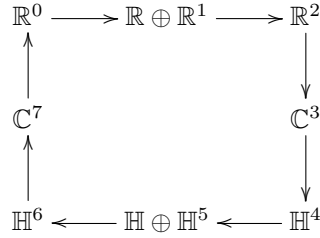


Figura 1: Reloj que identifica los tipos de super álgebras, donde el número en la esquina identifica el tipo de álgebra de Clifford

Es decir, si para una super álgebra se tiene que $p - q = 3 \pmod{8}$, entonces es una álgebra de Clifford de tipo compleja cuya parte par es de tipo real ($p - q = 2 \pmod{8}$).

4.2. Álgebras de Clifford Complejas

Hasta ahora la definición de álgebras de Clifford es para formas cuadráticas reales (formas bilineales reales). Si queremos una definición de álgebras de Clifford complejas, podemos hacerlo tomando \mathbb{C} -espacios vectoriales con formas bilineales definidas en \mathbb{C} , con esto, podemos definir álgebras de Clifford complejas usando la misma propiedad universal que en el caso real y podemos hacer la misma construcción llegando a obtener las álgebras de Clifford complejas como el cuociente de $T(V)_{\mathbb{C}}/I_{\mathbb{C}}$, de hecho, podemos hacer toda la teoría vista hasta este momento pero usando escalares complejos. Una definición más directa de álgebra de Clifford compleja

Definición 4.6. Si (V, h) es un espacio cuadrático real, entonces $(V \otimes \mathbb{C}, h \otimes \mathbb{C})$ es un espacio cuadrático complejo y se tiene el siguiente isomorfismo:

$$\mathbb{C} \otimes Cl(V, h) = Cl(\mathbb{C} \otimes V, \mathbb{C} \otimes h) = Cl(V, h),$$

como álgebras \mathbb{C} gradadas.

Una forma cuadrática real h de signatura (p, q) al extender sus escalares a los números complejos \mathbb{C} pierde la signatura, ya que si tenemos elementos de la base con signatura negativa, es decir, e_i tales que $e_i^2 = -1$ se puede redefinir la base tomando $\tilde{e}_i = ie_i$ donde $\tilde{e}_i^2 = 1$. Entonces se tiene la siguiente relación:

$$Cl(h_{p,q}) \otimes \mathbb{C} \cong Cl(h_{p+q})$$

Es decir, en el caso complejo no tenemos el concepto de signatura, así que solo nos importa la dimensión del espacio V .

Clasificación

Notemos que todas las relaciones anteriores se mantienen para el caso complejo, ya que es solo estamos considerando una extensión de escalares, luego la siguiente tabla clasifica las álgebras de Clifford complejas.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$Cl(V, h)$	\mathbb{C}	$2\mathbb{C}$	$M_2(\mathbb{C})$	$2M_2(\mathbb{C})$	$M_4(\mathbb{C})$	$2M_4(\mathbb{C})$	$M_8(\mathbb{C})$	$2M_8(\mathbb{C})$	$M_{16}(\mathbb{C})$

Cuadro 2: Álgebras de Clifford complejas, donde la primera columna es la dimensión de V

5. Representaciones de álgebras de Clifford

Una representación de álgebras de Clifford es un homomorfismo del álgebra de Clifford al álgebra de endomorfismos End . En dimensión finita esto es equivalente a ver el álgebra como matrices, como las álgebras de Clifford son álgebras de dimensión finita entonces usaremos $M_n(S)$ ó $End(S)$ como sea conveniente. En la sección anterior vimos que las álgebras de Clifford son esencialmente álgebras de matrices sobre algún anillo de división.

Entonces podríamos preguntarnos ¿que sentido tiene ver representaciones de matrices para álgebras de matrices?, es un hecho conocido que una representación de álgebras es lo mismo que una acción del álgebra sobre un espacio vectorial S , entonces cada vez que encontramos una representación, encontramos una forma en la que el álgebra actúa en el espacio vectorial S . Esto es lo que busca la teoría de representaciones de álgebras, lo que encontramos en la sección anterior es "una" manera de representar las álgebras de Clifford.

Definición 5.1. Una \mathbb{K} -representación de álgebras de Clifford es un \mathbb{K} -homomorfismo de álgebras

$$\gamma : Cl(V, h) \rightarrow End_{\mathbb{K}}(S),$$

donde S es un espacio vectorial de dimensión finita sobre $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

Además decimos que una representación es **fiel** si la función γ es inyectiva.

Observación 5.2. Las álgebras de Clifford pertenecen a la categoría **Alg**, luego podemos usar todas las herramientas que tenemos de la teoría de representaciones de álgebras.

Si A es una \mathbb{K} -álgebra entonces por teoría de representaciones de álgebras tenemos que la operación multiplicación por la izquierda $l : A \rightarrow End_{\mathbb{K}}(A)$ definida por $l_a(b) = ab$ y la representación multiplicación por la derecha $r : A \rightarrow End_{\mathbb{K}}(A)$ definida por $r_a(b) = ba$. Por ejemplo tenemos que:

Ejemplo 5.3. La representación multiplicación del álgebra $Cl(h_{1,0})$, es una representación que actúa en \mathbb{R}^2 y se escribe en forma matricial (usando la base canónica en \mathbb{R}^2) como

$$\gamma(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\gamma(j) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

es decir, $\gamma(a + bj) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$.

Observación 5.4. Notemos que como $Cl(h_{1,0})$ es conmutativa entonces la multiplicación por la derecha es igual a la multiplicación por la izquierda, por lo tanto $l = r = \gamma$.

Además, podemos ver que $\gamma(j)^2 = id_{\mathbb{R}^2}$, esto es debido a que como son representaciones de álgebras, el producto en la imagen de $Cl(h)$ bajo γ , es decir, $\gamma(Cl(h))$ se comporta de la misma manera que el producto en $Cl(h)$.

Ejemplo 5.5. Un ejemplo similar es la representación multiplicación del álgebra $Cl(h_{0,1})$, esta también es una representación que actúa en \mathbb{R}^2 y se escribe en forma matricial (usando la base canónica en \mathbb{R}^2) como

$$\gamma(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\gamma(j) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

es decir, $\gamma(a + bi) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$. La cual es una representación conocida de \mathbb{C} .

Ejemplo 5.6. Otro ejemplo conocido es la representación multiplicación izquierda de los cuaterniones $Cl(h_{0,2})$, la cual es:

$$L(a + bi + cj + dk) = \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix}.$$

Mientras que la representación multiplicación derecha es

$$R(a + bi + cj + dk) = \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{pmatrix}.$$

Notemos que ambas son representaciones fieles.

Definición 5.7. Decimos que dos representaciones $\rho : Cl(h) \rightarrow End_{\mathbb{K}}(S)$ y $\rho' : Cl(h) \rightarrow End_{\mathbb{K}}(S')$ son **equivalentes** si se cumple que existe un isomorfismo lineal $f : S \rightarrow S'$ tal que, para todo $x \in Cl(h)$ se cumple que:

$$\rho'(x) \circ f = f \circ \rho(x). \quad (5.1)$$

Definición 5.8. Un representación γ se dice **reducible** si S se puede escribir como suma propia de espacios invariantes, es decir,

$$S = S_1 \oplus S_2 \text{ y además } \gamma_x(S_i) \subset S_i \text{ para todo } x \in Cl(h)$$

Además decimos que una representación es **irreducible** si no es reducible.

Observación 5.9. Se sabe de la teoría de representaciones de álgebras asociativas que cualquier \mathbb{K} -representación γ se puede descomponer de la siguiente manera:

$$\gamma = \gamma_1 \oplus \gamma_2 \oplus \cdots \oplus \gamma_k$$

donde γ_i son representaciones irreducibles.

Teorema 5.10. (Teorema de Wedderburn) Sea A un \mathbb{K} -álgebra simple de dimensión finita sobre \mathbb{K} entonces es isomorfa al \mathbb{K} -álgebra sobre algún anillo de división D , es decir,

$$A \cong M_n(D).$$

Corolario 5.11. Sea A un \mathbb{K} -álgebra simple de dimensión finita sobre \mathbb{K} , entonces existe una representación fiel e irreducible y única salvo equivalencia.

Demostración. Por la hipótesis pedidas se tiene que se cumple el teorema de Wedderburn, luego existe $\phi : A \rightarrow M(D)$ isomorfismo, entonces existe una representación $\rho : A \rightarrow End_{\mathbb{K}}(D^n)$

$$\rho(a)(v) = \phi(a).v,$$

donde $.$ es la multiplicación matricial. Como ϕ es isomorfismo, entonces se tiene que la representación es fiel y además se tiene que $dim_{\mathbb{K}}(A) = dim_{\mathbb{K}}(End(S^n))$. Además es irreducible, ya que no puede existir V subespacio propio de D^n que quede invariante bajo todas las matrices $M(D)$. \square

Definición 5.12. Un álgebra A se denomina **álgebra simple** si sus únicos ideales bilateros son $\{0\}$ y A

Proposición 5.13. Para las álgebras de Clifford se tienen los siguientes resultados respecto a su simplicidad:

1. Si n es par entonces $Cl(h)$ es simple.
2. Si n es impar entonces $Cl(h)_0$ es simple.

Demostración. Podemos ver en la 2 que si n es par el álgebra de Clifford corresponde a un álgebra de matrices, que son simples. Por otro lado, si n es impar, hay casos en el que el álgebra de Clifford correspondiente es suma de álgebras de matrices, luego solo una parte es simple, pero podemos notar que esa parte coincide con la parte par de álgebra, ya que sabemos que $Cl(V)_0$ es isomorfa al álgebra de Clifford de dimensión menor. \square

Proposición 5.14. *Dada una \mathbb{R} -álgebra A que es central y simple entonces la complejificación es una \mathbb{C} -álgebra central y simple.*

Ahora aplicaremos el teorema de Wedderburn para el caso de álgebras de Clifford. Sabemos que si $\dim_{\mathbb{K}}(V) = n$ entonces la simplicidad del álgebra de Clifford esta dada por la proposición 5.13, la cual nos obliga a separar las álgebras de Clifford en dos casos:

Caso par

en el caso $n = 2m$ las álgebras de Clifford $Cl(h)$ son simples entonces hay un \mathbb{K} -espacio vectorial S y una única salvo equivalencia representación fiel e irreducible $\rho : Cl(h) \rightarrow End_{\mathbb{K}}(S)$, además la dimensión de S esta dada por como ρ es isomorfismo se tiene que

$$2^{2m} = \dim_{\mathbb{K}}(Cl(h)) = \dim_{\mathbb{K}}(End_{\mathbb{K}}(S)) = (\dim_{\mathbb{K}}(S))^2,$$

luego se tiene que $\dim_{\mathbb{K}}(S) = 2^m$.

Caso impar

en el caso $n = 2m + 1$ las álgebras de Clifford $Cl(h)_0$ son simples entonces hay un \mathbb{K} -espacio vectorial S_0 y una única salvo equivalencia representación $\rho : Cl(h)_0 \rightarrow End_{\mathbb{K}}(S_0)$, además la dimensión de S_0 esta dada por como ρ_0 es isomorfismo entonces se cumple que

$$2^{2m} = \dim_{\mathbb{K}}(Cl(h)_0) = \dim_{\mathbb{K}}(End_{\mathbb{K}}(S_0)) = (\dim_{\mathbb{K}}(S_0))^2,$$

luego se tiene que $\dim_{\mathbb{K}}(S_0) = 2^m$

Proposición 5.15. *La representación de Pauli se puede extender a una representación $\gamma : Cl(V, h) \rightarrow End_{\mathbb{K}}(S_0)$ del álgebra $Cl(h)$.*

Demostración. Notemos que si n es impar se tiene que $Cl(h)^1 = Cl(h)^0 \cdot I$, luego basta definir la representación para el elemento volumen I .

Sea $\gamma(I) = \text{id}_{S_0}$, entonces se extiende de manera única a un homomorfismo del álgebra de Clifford completa $\gamma(a_0 + b_0 I) = \gamma(a_0) + \gamma(b_0) \text{id}_{S_0}$ donde $a_0, b_0 \in Cl(h)_0$. \square

Ya sabemos teóricamente que existen representaciones irreducibles y fieles para dimensiones pares (las representaciones de Dirac) y representaciones irreducibles para dimensiones impar (las representaciones de Pauli) y además sabemos que son únicas bajo equivalencia. En lo que sigue, vamos a construir ejemplos de estas representaciones de álgebras de Clifford. Para esto notemos que por la definición de álgebras de Clifford que si tenemos una función lineal $f : V \rightarrow End_{\mathbb{K}}(S)$ que cumple $f(v)^2 = h(v, v) \cdot \text{id}_S$, donde id_S es la función identidad de $End_{\mathbb{K}}(S)$. Entonces podemos extenderla a un homomorfismo de álgebra $\gamma : Cl(V, h) \rightarrow End_{\mathbb{K}}(S)$. Es decir, para fabricar representaciones, basta con fabricar funciones lineales cumpliendo la relación $f(v)^2 = h(v, v) \cdot \text{id}_{End_{\mathbb{K}}}$, definidas en los elementos de la base $\{e_1, \dots, e_n\}$.

Definición 5.16. Motivados por la definición 2.7 a las matrices que cumplen la relación $A^2 = 1$ las llamaremos **matrices spacelike** y a las matrices que cumplen la relación $A^2 = -1$ las llamaremos **matrices timelike**.

La idea es entonces tomar una base ortogonal de $Cl(h)$ e identificarlas con matrices que cumplan las relaciones de $Cl(h)$.

5.1. Construcción de representaciones reales

Bajo la observación anterior, tenemos que buscar matrices que cumplan las relaciones

$$A^2 = 1,$$

entonces se tiene que A debe ser de la forma:

$$A_0 = id_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

cumplen que $A_0^2 = A_1^2 = A_2^2 = id_{2 \times 2}$. Para el caso timelike necesitamos matrices que cumplan las relaciones

$$A^2 = -1,$$

entonces se tiene que A debe ser de la forma:

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 5.17. Para el caso $Cl(h_{0,1})$, basta con identificar i con una matriz $A = \gamma(i)$ que cumpla $A^2 = -id$, si tomamos la identificación:

$$i \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

tenemos que es una función lineal $\gamma : span_{\mathbb{R}}(i) \rightarrow End_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2)$ que cumple $\gamma(i)^2 = h(i, i) \cdot id_{2 \times 2} = -id_{2 \times 2}$. Luego se extiende a una representación $\gamma : Cl(h_{0,1}) \rightarrow End_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2)$ y de hecho, es la representación multiplicación vista en el ejemplo 5.5.

Este caso fue poco interesante, ya que nos dio la misma representación anterior y no podemos encontrar más con esta construcción ya que si $A \in M_2(\mathbb{R})$ que cumple $A^2 = -id$, entonces $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Pero matrices $A \in M_2(\mathbb{R})$ que son spacelike hay más, a saber:

Ejemplo 5.18. Para el álgebra $Cl(h_{1,0})$ podemos encontrar las siguientes representaciones

1. Si identificamos $i \rightarrow id$ se extiende a la representación

$$a + bj \rightarrow \begin{pmatrix} a + b & 0 \\ 0 & a + b \end{pmatrix},$$

2. Si identificamos $i \rightarrow A_1$ se extiende a la representación

$$a + bj \rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix},$$

3. Si identificamos $i \rightarrow A_2$ se extiende a la representación

$$a + bj \rightarrow \begin{pmatrix} a + b & 0 \\ 0 & a - b \end{pmatrix}.$$

Esta construcción nos da 3 representaciones, notar que la primera no es fiel, mientras que las últimas dos si lo son. Esto porque en el primer caso se identifica j con id y esto implica que 1 se identifica también con id , para evitar este tipo de problemas podemos pedirle la condición de ortogonalidad $AB = -BA$ de la proposición 2.15 a las matrices, así tendremos que la representación será fiel, ya que enviará elementos de la base ortogonal de $Cl(h)$ en elementos ortogonales en End .

Ejemplo 5.19. Para el álgebra $Cl(2, 0)$ recordemos que es contruida con dos elementos spacelike, es decir, necesitamos dos matrices que cumplan $A_i = id_{2 \times 2}$, así que tomaremos A_1 y A_2 definidas anteriormente, que además cumplen la condición $A_1 A_2 = -A_2 A_1$. Así tomamos la identificación $e_1 \rightarrow A_1$ y $e_2 \rightarrow A_2$, lo que nos genera la representación:

$$\begin{aligned} \gamma(a + be_1 + ce_2 + de_1e_2) &= a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ b-d & a-c \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Que es la representación vista en la clasificación de álgebras de Clifford de dimensión 2.

Ejemplo 5.20. Para el caso $Cl(h_{0,2})$ vamos a usar la misma construcción, es decir, necesitamos dos matrices que cumplan $A_i^2 = -id_{2 \times 2}$, pero lamentablemente solo tenemos una matriz de tamaño 2×2 que cumpla esas condiciones, entonces buscaremos matrices 4×4 . Para solucionar este problema vamos a proceder de la siguiente manera, tomaremos las matrices A_0, A_1, A_2, A_3 definidas arriba y definiremos las matrices

$$A_{03} = I \otimes A_3 = \begin{pmatrix} 0 & -id_{2 \times 2} \\ id_{2 \times 2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se sabe que el producto tensorial cumple la igualdad $(A \otimes B)(C \otimes D) = AB \otimes BD$, entonces tenemos que

$$A_{03}^2 = (id_{2 \times 2} \otimes A_3)(id_{2 \times 2} \otimes A_3) = id_{2 \times 2}^2 \otimes A_3^2 = id_{2 \times 2} \otimes -id_{2 \times 2} = -id_{4 \times 4},$$

es decir, A_{03} es una matriz timelike. De la misma manera podemos ver que el producto tensorial entre cualquier matriz spacelike con una matriz timelike nos da una matriz timelike.

Para este caso necesitamos 2 matrices timelike, entonces tenemos las siguientes representaciones

1. Con la identificación $i \rightarrow A_{03}$ y $j \rightarrow A_{13}$ tenemos que:

$$\begin{aligned} \gamma(a + bi + cj + dk) &= a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} a & -d & -b & -c \\ -d & a & -c & -b \\ b & c & a & -d \\ c & b & -d & a \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2. Con la identificación $i \rightarrow A_{03}$ y $j \rightarrow A_{23}$, se tiene que:

$$\begin{aligned} \gamma(a + bi + cj + dk) &= a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} a+d & 0 & c-b & 0 \\ 0 & a-d & 0 & -b-c \\ b-c & 0 & a+d & 0 \\ 0 & b+c & -0 & a-d \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

3. Con la identificación $i \rightarrow A_{13}$ y $j \rightarrow A_{23}$, se tiene:

$$\begin{aligned} \gamma(a + bi + cj + dk) &= a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} a & -d & c & -b \\ d & a & -b & -c \\ -c & b & a & -d \\ b & c & d & a \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Además notemos que $A_{03} \neq A_{30}$, pero A_{30} también cumple $A_{30}^2 = -id_{4 \times 4}$, es decir, podemos generar más representaciones usando esta construcción. Además notemos que son representaciones fieles.

Ejemplo 5.21. Para el caso $Cl(h_{3,0})$, necesitamos 3 matrices spacelike, tomando:

$$\begin{aligned} e_1 \rightarrow A_1 \otimes A_0 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ e_2 \rightarrow A_4 \otimes A_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ e_3 \rightarrow A_2 \otimes A_0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ejemplo 5.22. Para el álgebra del espacio tiempo $Cl(h_{1,3})$ necesitamos 1 matriz spacelike y 3 timelike, para esto consideremos

$$\begin{aligned} \gamma_0 \rightarrow A_0 \otimes A_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \\ \gamma_1 \rightarrow A_1 \otimes A_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \gamma_2 \rightarrow A_3 \otimes A_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \gamma_3 \rightarrow A_2 \otimes A_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Además como estas matrices cumplen la relación $\gamma_i \gamma_j + \gamma_j \gamma_i = 0$ para todo $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ entonces esta representación es fiel.

5.2. Construcción de representaciones Complejas

Representaciones de Pauli (caso impar)

A esta representación se le llama **Representación de Pauli** en honor al físico Wolfgang Ernst Pauli, que introdujo esta representación en el caso $Cl(h_{3,0})$ para explicar el comportamiento del spin en el formalismo de la mecánica cuántica. Sea $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ una base de V definimos las **matrices de Pauli** a $\gamma_\mu = \gamma e_\mu$.

Ejemplo 5.23. Para $Cl(h_{3,0})$ tenemos las famosas matrices encontrada por Pauli el año 1926, que son efectivamente una representación compleja del álgebra $Cl(h_{3,0})$, donde la representación es generada por la identificación

$$\begin{aligned} e_1 &\rightarrow \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ e_2 &\rightarrow \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \\ e_3 &\rightarrow \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

donde $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = id_{2 \times 2}$, lo que genera la representación compleja sobre el álgebra $Cl(h_{3,0})$.

Representaciones de Dirac (caso par)

A esta representación se le llama **Representación de Dirac** en honor al físico Paul Dirac, que introdujo esta representación en el caso $Cl(h_1)$ para expresar la ecuación relativista del electrón (ver introducción). Sea $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ una base de V definimos las **matrices de Dirac** a $\gamma_\mu = \gamma e_\mu$.

Ejemplo 5.24. Para $Cl(h_{1,3})$ tenemos las famosas matrices encontrada por Dirac el año 1928, que son efectivamente una representación compleja del álgebra $Cl(h_{1,3})$, donde la representación es generada por la identificación:

$$\begin{aligned} e_0 &\rightarrow \gamma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \\ e_1 &\rightarrow \gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ e_2 &\rightarrow \gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ e_3 &\rightarrow \gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

donde $\gamma_0 = id_{4 \times 4}$ y $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = -id_{4 \times 4}$, lo que genera la representación compleja sobre el álgebra $Cl(h_{1,3})$.

Notemos que se tiene la siguiente relación con las matrices de Pauli

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} id_{2 \times 2} & 0 \\ 0 & id_{2 \times 2} \end{pmatrix}, \quad \gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_x \\ -\sigma_x & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_y \\ -\sigma_y & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_z \\ -\sigma_z & 0 \end{pmatrix}.$$

Construcción inductiva

Vamos a dar una construcción inductiva para fabricar matrices de Pauli y de Dirac. Esto se va a hacer por inducción sobre $\dim_{\mathbb{K}}(V) = n$.

1. Si $n = 1$ entonces tomamos $\sigma_1 = 1$.
2. Si $n = 2$ entonces tomamos $\gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_1 \\ \sigma_1 & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
3. Si $n = 3$ entonces tomamos las mismas matrices del caso $n = 2$, pero añadiendo la matriz $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
4. Si $n = 4$ entonces tomamos $\gamma_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}$ con $i \in \{1, 2, 3\}$ y tomamos $\gamma_4 = \begin{pmatrix} id_{2 \times 2} & \\ 0 & id_{2 \times 2} \end{pmatrix}$, donde σ_i las matrices del caso $n = 3$.

En general, dada las matrices de Pauli $\sigma_1, \dots, \sigma_{2m-1}$, construimos las matrices de Dirac tomando:

$$\gamma_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix},$$

$$\gamma_{2m} = \begin{pmatrix} 0 & -id_{m \times m} \\ id_{m \times m} & 0 \end{pmatrix}.$$

donde $i \in \{1, \dots, 2m-1\}$ y $id_{m \times m}$ es la matriz identidad de dimensión m .

Y dadas las matrices de Dirac $\gamma_1, \dots, \gamma_{2m}$, construimos las matrices de Pauli tomando

$$\sigma_i = \gamma_i,$$

$$\sigma_{2m+1} = \begin{pmatrix} id_{m \times m} & \\ 0 & -id_{m \times m} \end{pmatrix}.$$

donde $i \in \{1, \dots, 2m\}$ y $id_{m \times m}$ es la matriz identidad de dimensión m .

Todas estas matrices por construcción son reales, pero podemos hacerlas complejas multiplicando cualquier σ_i ó γ_i por la unidad imaginaria i y nos dará una representación del álgebra de Clifford de signatura correspondiente. Por ejemplo, las matrices de Pauli que representan el álgebra de Clifford $Cl(h_{3,0})$ son las matrices $\{\sigma_1, i\sigma_2, \sigma_3\}$ y las matrices de Dirac que representan el álgebra de Clifford $Cl(h_{1,3})$ son las matrices $\{\gamma_1, i\gamma_2, \gamma_3, \gamma_4\}$.

Observación 5.25. Como \mathbb{C} es un \mathbb{R} -espacio vectorial entonces podemos ver cualquier \mathbb{C} representación como una \mathbb{R} -representación. Al proceso de transformar una \mathbb{C} -representación a una \mathbb{R} -representación, se le llama **realificación** de una representación compleja.

5.3. Morfismos entre representaciones

Definición 5.26. Dadas dos \mathbb{K} -representaciones $\gamma : Cl(V, h) \rightarrow End(S)$ y $\gamma' : Cl(V', h') \rightarrow End(S')$ un morfismo de γ a γ' es el par (f_0, f) que satisface

1. $f_0 : V \rightarrow V'$ es una isometría de (V, h) a (V', h') ,
2. $f : S \rightarrow S'$ es una función \mathbb{K} -lineal,
3. la siguiente relación

$$\gamma'(Cl(f_0)(x)) \circ f = f \circ \gamma(x) \tag{5.2}$$

para todo $x \in Cl(V, h)$.

Observación 5.27. Para que se cumpla esta condición basta probarla para los elementos $v \in V$, es decir, para todo $v \in V$ se tiene:

$$\gamma'(f_0(v)) \circ f = f \circ \gamma(v). \tag{5.3}$$

Definición 5.28. La **Categoría de las \mathbb{K} -representaciones de álgebras de Clifford** es la categoría que denotaremos $\mathbb{K}\text{-ClRep}$ donde los objetos (Obj_{ClRep}) son los definidos en la definición 5.1 y los morfismos (Hom_{ClRep}) son los definidos en 5.26, donde la composición esta dada por $(f'_0, f') \circ (f_0, f) = (f'_0 \circ f_0, f' \circ f)$. Además, denotamos ClRep^\times al grupoide de ClRep .

Definición 5.29. Definimos los homomorfismos de álgebras **composición izquierda** y **composición derecha** respectivamente como:

1. $L_f : End(S) \rightarrow Hom(S, S')$ tal que $L_f(\phi) = f \circ \phi$.
2. $R_f : End(S') \rightarrow Hom(S, S')$ tal que $R_f(\psi) = \psi \circ f$.

entonces la propiedad 5.2 de la definición 5.28 es equivalente a que el siguiente diagrama conmute:

$$\begin{array}{ccc}
 Cl(V', h') & \xrightarrow{\gamma'} & End_{\mathbb{R}}(S') \\
 \uparrow Cl(f_0) & & \downarrow R_f \\
 & & Hom(S, S') \\
 & & \uparrow L_f \\
 Cl(V, h) & \xrightarrow{\gamma} & End_{\mathbb{R}}(S)
 \end{array}$$

Es decir, la ecuación 5.2 de la definición 5.28 se puede reescribir como

$$R_f \circ \gamma' \circ Cl(f_0) = L_f \circ \gamma. \quad (5.4)$$

Observación 5.30. Luego por la definición 5.29 la ecuación (5.3) anterior es equivalente a

$$R_f \circ \gamma' \circ f_0 = L_f \circ \gamma|_V. \quad (5.5)$$

Adjunta

Definición 5.31. si $(f, f_0) \in ClRep^\times$, definimos la función adjunta $Ad(f) : End_{\mathbb{R}}(S) \rightarrow End_{\mathbb{R}}(S')$ como $Ad(f) = L_f \circ R_f^{-1}$, es decir

$$Ad(f)(\varphi) = f \circ \varphi \circ f^{-1}, \quad (5.6)$$

para todo $\varphi \in End_{\mathbb{R}}(S)$.

Observación 5.32. $Ad(f)$ es un homomorfismo de álgebras con unidad.

Proposición 5.33. Sea $(f_0, f) : \gamma \xrightarrow{\sim} \gamma'$ un isomorfismo de representaciones, entonces se tiene que:

1. $Ad(f)(\gamma(V)) = \gamma'(V')$.
2. Para los elementos de V se cumple la relación:

$$\gamma' \circ f_0 = Ad(f) \circ \gamma|_V.$$

3. En general para los elementos de $Cl(V, h)$ se cumple la ecuación:

$$\gamma' \circ Cl(f_0) = Ad(f) \circ \gamma,$$

es decir, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc}
 Cl(V', h') & \xrightarrow{\gamma'} & End_{\mathbb{R}}(S') \\
 \uparrow Cl(f_0) & & \uparrow Ad_f \\
 Cl(V, h) & \xrightarrow{\gamma} & End_{\mathbb{R}}(S)
 \end{array}$$

Demostración. Los enunciados 1 y 2 se demuestran directamente usando 5.5 y el hecho de que f tiene inversa. Para la ecuación 3 basta tomar la ecuación 5.4 y aplicar f^{-1} . □

Proposición 5.34. *Existe un funtor F de la categoría $\mathbb{R}\text{-ClRep}$ a la categoría Quad dado por:*

1. *Envía $\gamma : Cl(V, h) \rightarrow End_{\mathbb{R}}(S) \in Obj_{ClRep}$ al objeto $(V, h) \in Obj_{Quad}$.*
2. *Envía $(f, f_0) \in Hom_{ClRep}$ al morfismo $f_0 \in Hom_{Quad}$.*

Demostración. Tenemos que el funtor olvidadizo $\Pi : ClRep \rightarrow Cl$ que toma $\gamma : Cl(V, h) \rightarrow End_{\mathbb{R}}(S) \in Obj_{ClRep}$ y lo lleva a $Cl(V, h)$ y (f, f_0) lo lleva a $Cl(f_0)$, es el funtor que olvida la estructura de representación y deja solo la estructura de álgebra de Clifford. Notemos que cada fibra de este funtor sobre un álgebra de Clifford $Cl(V, h)$ es la categoría usual de representaciones de álgebras $Rep(Cl(V, h))$, donde los objetos son las representaciones base y los morfismos son la relación de equivalencia definida en 5.7.

Por otro lado tenemos el funtor Cl definido en la definición 2.17, así que definimos $F : ClRep \rightarrow Quad$ como

$$F = Cl^{-1} \circ \Pi. \quad (5.7)$$

□

Elemento Volumen

Definición 5.35. Sea $\gamma : Cl(h) \rightarrow End(S)$ una representación de álgebras de Clifford y I el elemento volumen de $Cl(h)$, definimos el **elemento de volumen pinorial** al elemento $\omega = \gamma(I) \in End_{\mathbb{K}}$.

Observación 5.36. Se tiene que $\omega^2 = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} id_S$, entonces se tiene que $Ad(\omega)$ es un automorfismo involutivo de $End_{\mathbb{K}}$, es decir,

$$Ad(\omega)^2 = id_S. \quad (5.8)$$

Luego por la proposición **referencia volumen gradado** se tiene que $End_{\mathbb{K}}(S)$ es naturalmente una super álgebra cuya gradación está dada por

$$\begin{aligned} End_{\mathbb{K}}(S) &= End_{\mathbb{K}}^0(S) \oplus End_{\mathbb{K}}^1(S), \\ End_{\mathbb{K}}^0(S) &= \{a \in End_{\mathbb{K}} \mid a\omega = \omega a\}, \\ End_{\mathbb{K}}^1(S) &= \{a \in End_{\mathbb{K}} \mid a\omega = -\omega a\}. \end{aligned}$$

5.4. Representación Débilmente fiel

En esta sección vamos a trabajar con un tipo especial de representaciones de álgebras de Clifford y nos vamos a limitar al caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, así que solamente denotaremos $End(S)$.

Sabemos que una representación fiel es interesante ya que $Cl(h)$ es isomorfo a un subálgebra de $End_{\mathbb{R}}(S)$, pero en el contexto de álgebras de Clifford el espacio cuadrático base (V, h) es el que juega un rol fundamental, es por esta razón que vamos a debilitar la definición de representación fiel para poder reconocer solamente al espacio cuadrático dentro de $End_{\mathbb{R}}(S)$.

Definición 5.37. Decimos que una representación de Clifford es **débilmente fiel** si la restricción a V , $\gamma|_V : V \rightarrow End_{\mathbb{R}}(S)$ es inyectiva. Además, se dice rígida si $\gamma|_V = id_V$.

Observación 5.38. Notemos que si una representación $\gamma : Cl(V, h) \rightarrow End(S)$ fiel entonces es inyectiva, en particular $\gamma|_V : Cl(V, h) \rightarrow End(S)$ es inyectiva. Es decir una representación es fiel es débilmente fiel. Pero el recíproco no es cierto en general, tomemos por ejemplo la representación de $Cl(h_{1,0})$ dada por:

$$a + bj \rightarrow \begin{pmatrix} a+b & 0 \\ 0 & a+b \end{pmatrix},$$

esta representación no es fiel, ya que $\gamma(a - aj) = \gamma(b - bj)$ para $a \neq b$. Pero al restringir la representación al espacio $V = \text{span}(j)$ tenemos que la representación es:

$$bj \rightarrow \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix},$$

que es claramente inyectiva.

Lo que hizo que la representación de arriba sea debilmente fiel y no fiel, es que en ese caso generamos V con una matriz que sabíamos a priori que sería utilizada para un elemento del álgebra de Clifford, a saber, generamos V con la identidad, pero la identidad corresponde a la unidad en el álgebra de Clifford. En general si consideramos las matrices A_1, \dots, A_n linealmente independientes, para generar V , donde hay algún A_i que se escribe como producto de las otras matrices, entonces esa representación será debilmente fiel y no fiel.

Todos los ejemplos vistos de representaciones fiel sirven para esta sección, pero como mencionamos recién, hay muchos más.

Ejemplo 5.39. las representaciones de Pauli no son fieles, pero son debilmente fiel.

Observación 5.40. Cuando tenemos que una representación es débilmente fiel podemos identificar $V \cong \gamma(V) := W(\gamma)$ como \mathbb{R} -espacios vectoriales y además podemos llevar la forma cuadrática de V a $W(\gamma)$ de la manera siguiente:

$$g_\gamma(w_1, w_2) = h((\gamma|_V)^{-1}(w_1), (\gamma|_V)^{-1}(w_2)) \text{ para todo } w_1, w_2 \in W(\gamma). \quad (5.9)$$

Con esta forma cuadrática el espacio $(W(\gamma), g_\gamma)$ es un espacio cuadrático.

Definición 5.41. Consideremos los grupos $G(h)$, $Pin(h)$ y $Spin(h)$ definidos en la sección **Grupos Pin y Spin**, entonces definimos los grupos:

$$\begin{aligned} G(\gamma) &= \gamma(G(h)). \\ Pin(\gamma) &= \gamma(Pin(h)). \\ Spin(\gamma) &= \gamma(Spin(h)). \end{aligned}$$

Observación 5.42. Son efectivamente grupos ya que γ es una representación de álgebras y $G(h)$, $Pin(h)$ y $Spin(h)$ son grupos.

Proposición 5.43. si γ es débilmente fiel entonces las siguientes relaciones se mantienen:

1. $G(\gamma) \cong G(h)$,
2. $Pin(\gamma) \cong Pin(h)$,
3. $Spin(\gamma) \cong Spin(h)$,
4. $Spin(\gamma) \subset Pin(\gamma) \subset G(\gamma)$.

Demostración. por el corolario 3.13 se tiene que $G(h)$ es generado por V^\times (como grupos), luego como γ es homomorfismo de álgebras $G(\gamma)$ es generado por $\gamma(V^\times) \cong V^\times$, entonces se tiene que $(\gamma) \cong G(h)$. De la misma manera se tiene por los corolarios 3.23 y 3.32 que $Pin(\gamma) \cong Pin(h)$ y $Spin(\gamma) \cong Spin(h)$. Por último si $a \in Spin(\gamma)$ entonces $a = \gamma(b)$ con $b \in Spin(h) \subset Pin(h)$, luego $a \in Pin(h)$. Con lo que queda demostrada la proposición. \square

Definición 5.44. Llamaremos $ClRep_w$ a la subcategoría full de $ClRep$ donde los objetos son representaciones débilmente fiel y $ClRep_w^\times$ al grupoide de $ClRep_w$.

Proposición 5.45. Sean γ y γ' son representaciones débilmente fiel. Si $(f, f_0) : \gamma \rightarrow \gamma'$ es isomorfismo entonces f_0 es únicamente determinada por f y se tiene la relación:

$$f_0 = (\gamma'|_V)^{-1} \circ Ad(f) \circ \gamma|_V. \quad (5.10)$$

Recíprocamente, si un isomorfismo $f : S \rightarrow S'$ que satisface $Ad(f)(\gamma(V)) = \gamma'(V)$ determina un isomorfismo de espacios cuadráticos $f_0 : (V, h) \rightarrow (V', h')$ dado por la ecuación (5.10) que cumple que $(f_0, f) \in Hom_{ClRep^\times}(\gamma, \gamma')$.

Demostración. Si $(f, f_0) : \gamma \rightarrow \gamma'$ es isomorfismo entonces por la afirmación (1) de la proposición 5.33 se tiene que $Ad(f)(\gamma(V)) = \gamma'(V)$. Además como γ' y γ son débilmente fiel se tiene que $\gamma'|_V$ y $\gamma|_V$ son isomorfismos, luego por la ecuación (2) de la proposición 5.33 se tiene que:

$$f_0 = (\gamma'|_{V'})^{-1} \circ Ad(f) \circ \gamma|_V, \quad (5.11)$$

luego f_0 es únicamente determinada por f .

Por otro lado, si tenemos un isomorfismo $f : S \rightarrow S'$ que satisface $Ad(f)(\gamma(V)) = \gamma'(V')$. Primero notemos que por la condición $Ad(f)(\gamma(V)) = \gamma'(V')$ tenemos que:

$$Ad(f)(\gamma(v))^2 = g_{\gamma'}(Ad(f)(\gamma(v)), Ad(f)(\gamma(v))). \quad (5.12)$$

Como $Ad(f)$ es homomorfismo de álgebras tenemos que:

$$Ad(f)(\gamma(v)^2) = Ad(f)(\gamma(v))^2. \quad (5.13)$$

y por último por la construcción de g_γ (ver ecuación (5.9)) se tiene que:

$$\gamma(v)^2 = g_\gamma(\gamma(v), \gamma(v)) \cdot id_S. \quad (5.14)$$

Si juntamos las ecuaciones (5.12),(5.13) y (5.14) tenemos que:

$$\begin{aligned} g_{\gamma'}(Ad(f)(\gamma(v)), Ad(f)(\gamma(v))) \cdot id_{S'} &= Ad(f)(\gamma(v))^2, \\ &= Ad(f)(\gamma(v)^2), \\ &= Ad(f)(g_\gamma(\gamma(v), \gamma(v)) \cdot id_S), \\ &= g_\gamma(\gamma(v), \gamma(v)) \cdot Ad(f)(id_S), \\ &= g_\gamma(\gamma(v), \gamma(v)) \cdot id_S. \end{aligned}$$

Usando la identidad de polarización para formas bilineales simétricas tenemos que:

$$g_{\gamma'}(Ad(f)(\gamma(v)), Ad(f)(\gamma(w))) \cdot id_{S'} = g_\gamma(\gamma(v), \gamma(w)) \cdot id_S,$$

es decir, $Ad(f)$ es isometría. Entonces si definimos f_0 usando la relación (5.11) es un isomorfismo de espacios cuadráticos ya que

$$\begin{aligned} h'(f_0(v), f_0(w)) &= h'((\gamma'|_{V'})^{-1} \circ Ad(f) \circ \gamma|_V(v), (\gamma'|_{V'})^{-1} \circ Ad(f) \circ \gamma|_V(w)) \\ &= g_{\gamma'}(Ad(f)(\gamma(v)), Ad(f)(\gamma(w))) \\ &= g_\gamma(\gamma(v), \gamma(w)) \\ &= h(\gamma|_V(\gamma(v)), \gamma|_V(\gamma(w))) \\ &= h(v, w) \end{aligned}$$

y se tiene que (f_0, f) es un isomorfismo de $ClRep$ ya que por la construcción de f_0 , se cumple la relación $\gamma'(Cl(f_0)(x)) \circ f = f \circ \gamma(x)$. □

Observación 5.46. De la proposición 5.45 se tiene que en $ClRep_w$ un isomorfismo (f_0, f) es determinado por un isomorfismo $f : S \rightarrow S'$ de espacios vectoriales que cumple $Ad(f)(\gamma(V)) = \gamma'(V')$, es decir, si $\gamma, \gamma' \in Obj_{ClRep_w}$ se tiene que:

$$Hom_{ClRep_w^\times}(\gamma, \gamma') = \{f \in Hom_{Vect^\times}(S, S') \mid Ad(f)(\gamma(V)) = \gamma'(V')\}$$

donde $Hom_{Vect^\times}(S, S')$ son los isomorfismos entre espacios vectoriales S y S' .

6. Grupo de Lipschitz de representaciones reales débilmente fieles

La idea de esta sección es encontrar reflexiones en el espacio $End(S)$. En la sección anterior vimos que para las representaciones débilmente fieles, se puede definir a los grupos $G(\gamma)$, $Pin(\gamma)$ y $Spin(\gamma)$, estos grupos son grupos de reflexiones (en la literatura se conocen como grupos spinors), pero no necesariamente contienen todas las reflexiones de $End(S)$. Esto motiva a definir el grupo de Lipschitz, que es el subgrupo de $End(S)$ más pequeño que contiene todas las reflexiones de V . En esta sección vamos a suponer que γ es una representación real débilmente fiel $\gamma : Cl(V, h) \rightarrow End(S)$.

Definición 6.1. Si γ es una representación débilmente fiel de $Cl(h)$, llamaremos **Grupo de Lipschitz real** al grupo

$$L(\gamma) = \{a \in Aut_{\mathbb{R}}(S) / Ad(a)(W(\gamma)) \subset W(\gamma)\}.$$

Definición 6.2. La **representación vectorial** de $L(\gamma)$ es el homomorfismo de grupo $Ad_0^\gamma : L(\gamma) \rightarrow O(W(\gamma), g_\gamma)$ dado por

$$Ad_0^\gamma(a) = Ad(a)|_W. \quad (6.15)$$

Observación 6.3. Notemos que la representación vectorial de $L(\gamma)$ esta bien definida, ya que para cada $a \in L$ y cualquier $w \in W$, se tiene que $Ad(a)(w) \in W$ y que $Ad(a)(w)^2 = Ad(a)(w^2)$. Como se tiene que $w^2 = g(w, w)id_S$ y que $Ad(a)(w)^2 = g(Ad(a)(w), Ad(a)(w))id_S$, esto implica que $Ad_{(a)}|_W \in O(W, g)$ (para más detalles ver la demostración de la proposición 5.45).

Proposición 6.4. Si $w \in W$ es un vector no degenerado. Entonces $w \in L$ y $Ad_0(w)$ es menos la reflexión ortogonal de (W, g) es el hiperplano ortogonal, es decir,

$$Ad_0(w) = -R_w.$$

Demostración. Tenemos que

$$\begin{aligned} -R_w(x) &= -x + 2 \frac{h(x, v)}{h(v, v)} \cdot v = -x + 2h(x, v) \cdot \left(\frac{1}{h(v, v)} \cdot v \right), \\ &= -x + 2h(x, w) \cdot w^{-1}, \\ &= -x + 2h(x, w) \cdot (1 \cdot w^{-1}), \\ &= -x + (2h(x, w) \cdot 1)w^{-1}, \\ &= -x + (wx + xw)w^{-1}, \\ &= wxw^{-1}, \\ &= wxw^{-1}, \\ &= Ad_0(w)(x). \end{aligned}$$

□

Proposición 6.5. Los grupos definidos en la definición 5.41 son subgrupos del grupo de Lipschitz.

Demostración. Basta ver que $G(\gamma) \subset L(\gamma)$ ya que $Spin(\gamma) \subset (\gamma) \subset G(\gamma)$. Sea $x \in G(\gamma)$, entonces $x = \gamma(g)$ donde $g \in G(h)$, entonces dado $\gamma(v) \in W$ se cumple la relación

$$x\gamma(v)x^{-1} = \gamma(g)\gamma(v)\gamma(g)^{-1} = \gamma(gvg^{-1}) = \gamma(v') \subset W,$$

donde la última igualdad se tiene que, ya que $x \in G(h)$. Por lo tanto $x \in L(\gamma)$. □

Proposición 6.6. Sea γ una representación. Entonces el grupo de Lipschitz $L(\gamma)$ es isomorfo con el grupo de automorfismos $Aut_{ClRep_w^\times}(\gamma)$ de γ en la categoría $ClRep_w$. En particular la clase de isomorfismos de $L(\gamma)$ depende solo de la clase de isomorfismos de γ en la categoría $ClRep_w$

Demostración. Sea $a \in L$, entonces por la ecuación (5.10) se tiene que existe una isometría invertible $a_0 \in O(V, h)$, definida por

$$a_0 = (\gamma|_V)^{-1} \circ Ad_0^\gamma(a) \circ (\gamma|_V) \in O(V, h),$$

lo que implica que:

$$\gamma \circ Cl(a_0) = Ad(a) \circ \gamma.$$

Así (a_0, a) es el único automorfismo de γ en la categoría **ClRep** cuya segunda componente es a . Por otro lado, si tenemos $a \in L(\gamma)$, para cualquier $(a_0, a) \in Aut_{ClRep_w}(\gamma) = Aut_{ClRep}(\gamma)$ (ver la proposición (5.33) donde a_0 es descrito por la ecuación (5.10) (ver proposición 5.45). Entonces la función $F_1 : Aut_{ClRep}(\gamma) \rightarrow L(\gamma)$ dado por $F_1(a_0, a) = a$ es un isomorfismo de grupos, por lo tanto $L(\gamma) \cong Aut_{ClRep}(\gamma)$. \square

6.1. Grupo de Lipschitz Especial

El grupo de Lipschitz tiene una descomposición natural heredada de la estructura de super álgebras de $End_{\mathbb{R}}$, a saber:

$$L = L^0 \oplus L^1,$$

donde se tiene que:

$$L^i = L \cap End_{\mathbb{R}}^i(S),$$

para $i \in \mathbb{F}_2$.

Definición 6.7. Llamamos **grupo de Lipschitz especial** al grupo L^0 .

Proposición 6.8. $Ad(a)(\omega) = det(Ad_0(a))a$ para todo $a \in L$, donde $det : O(W, g) \rightarrow \mathbb{F}_2$ es el determinante definido en 3.1.

Demostración. Sea $\{e_1, \dots, e_d\}$ una base orientada de (W, g) y su elemento volumen $\omega = e_1 \cdots e_d$, definimos $\epsilon_i = (\gamma|_V)^{-1}(e_i)$ para $i \in \{1, \dots, d\}$.

Notemos que el conjunto $\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_d\}$ es una base orientada de (V, h) cuyo elemento volumen está dado por $I = \epsilon_1 \cdots \epsilon_d$. Entonces para cualquier $a \in L$ definimos $\omega' = Ad(a)(\omega)$ y como $Ad_0(a) \in O(W, g)$ definimos la siguiente base ortonormal $e'_i = Ad_0(a)e_i \in W$ para todo $i \in \{1, \dots, d\}$ y se tiene:

$$\omega' = Ad(a)(\omega) = Ad_0(a)(e_1) \cdots Ad_0(a)(e_d) = e'_1 \cdots e'_d. \quad (6.16)$$

Definimos ahora $\epsilon'_i = (\gamma|_V)^{-1}(e'_i) \in (V, h)$ para todo $i \in \{1, \dots, d\}$, entonces por la ecuación 5.10 se cumple que:

$$\epsilon'_i = (\gamma|_V)^{-1}(e'_i) = (\gamma|_V)^{-1} \circ Ad_0(a) \circ \gamma(e_i) = a_0(e_i),$$

Luego $a_0 : V \rightarrow V$ lleva la base $\epsilon_1, \dots, \epsilon_d$ en la base $\epsilon'_1, \dots, \epsilon'_d$ y al definir el elemento volumen $I' = \epsilon'_1 \cdots \epsilon'_d$ se tiene que

$$I' = \epsilon'_1 \cdots \epsilon'_d = det(a_0)\epsilon_1 \cdots \epsilon_d = det(a_0)I.$$

Ahora aplicando γ obtenemos

$$\omega' = \gamma(I') = det(a_0)\gamma(I) = det(a_0)\omega'.$$

Luego por la ecuación 5.10 se tiene que

$$det(Ad_0) = det((\gamma|_V)^{-1} \circ Ad_0(a) \circ \gamma) = det((\gamma|_V))^{-1} det(Ad_0(a)) det(\gamma) = det(a_0). \quad (6.17)$$

Luego por las ecuaciones 6.1 y 6.17 se tiene que $Ad(a)(\omega) = det(Ad_0(a))\omega$. Luego se tiene que $Ad(\omega)(a) = det(Ad_0(a))a$. \square

Corolario 6.9. Los elementos homogéneos del grupo de Lipschitz tiene la siguiente caracterización:

$$L^0 = \{a \in L \mid det(Ad_0(a)) = +1\} = Ad_0^{-1}(SO(W, g)).$$

$$L^1 = \{a \in L \mid det(Ad_0(a)) = -1\} = Ad_0^{-1}(O_-(W, g)).$$

Demostración. Sea $D^i = \{a \in L \mid \det(Ad_0(a)) = (-1)^i\}$ con $i \in \mathbb{F}_2$ y sea $a \in D^i$ entonces

$$\omega a \omega^{-1} = Ad(\omega)(a) = (-1)^i a,$$

es decir $a\omega = (-1)^i \omega a$, entonces $a \in \text{End}^i(S)$, por lo tanto $D^i \subset \text{End}^i(S)$.

Como $\det(Ad_0(a)) = \det(a_0) \in \{\pm 1\}$ ya que $a_0 \in O(W, g)$, entonces se tiene que L es la union disjunta de D^0 y D^1 y por lo tanto $D^i = L^i$ para $i \in \mathbb{F}_2$. \square

Observación 6.10. Por el corolario anterior, se tiene que $Ad_0|_{L^0} : L^0 \rightarrow SO(W, g)$ esta bien definida.

6.2. Elementos torcidos

Hasta ahora tenemos que $Ad_0 : L \rightarrow O(W, g)$ y por el corolario 6.9 tenemos que $Ad_0|_{L^0} : L^0 \rightarrow SO(W, g)$ estan bien definidas. Nos gustaría encontrar una secuencia exacta para el grupo de Lipschitz como las que tenemos para los grupos $Pin(h)$ y $Spin(h)$, esto nos permitirá comparar el grupo de Lipschitz con el grupo ortogonal $O(W, g)$. A diferencia del caso del grupo $Pin(h)$ veremos que el kernel de la representación vectorial Ad_0 es álgebra de Schur \mathbb{S} y que no siempre se tiene que Ad_0 es sobreyectiva, esto motiva a definir los elementos torcidos que nos permitirán encontrar condiciones para la sobreyectividad de Ad_0 en $O(W, g)$.

Proposición 6.11. $\text{Ker}(Ad_0) = \mathbb{S}^\times$ donde \mathbb{S} denota el álgebra de Schur de γ definida por:

$$\mathbb{S}(\gamma) = \{a \in \text{End}(S) \mid aw = wa \text{ para todo } w \in W = \gamma(V)\}.$$

Demostración. Si $a \in \mathbb{S}^\times$, entonces para todo $w \in W$ se tiene

$$Ad_0(a)(w) = awa^{-1} = waa^{-1} = w,$$

Si y solo si, $Ad_0(a) = id_W$, por lo tanto $\text{Ker}(Ad_0) = \mathbb{S}^\times$. \square

Definición 6.12. Llamamos el **subespacio anticonmutante** de una representación de Clifford γ al subespacio de $\text{End}(S)$ definido por:

$$\begin{aligned} A(\gamma) &= \{a \in \text{End}(S) \mid aw = -wa \text{ para todo } w \in W\}, \\ &= \{a \in \text{End}(S) \mid a\gamma(v) = -\gamma(v)a \text{ para todo } v \in V\}, \\ &= \{a \in \text{End}(S) \mid a\gamma(x) = \gamma(\pi(x))a \text{ para todo } x \in Cl(V, h)\}, \end{aligned}$$

Ya que consideramos una representación fija, vamos a denotar al subespacio anticonmutante simplemente por A .

Definición 6.13. Decimos que la representación γ admite **elementos torcidos** si cumple que $A(\gamma) \cap \text{Aut}(S) \neq \emptyset$, en ese caso se dice que μ es un **elemento torcido** si $\mu \in A(\gamma) \cap \text{Aut}(S)$.

Proposición 6.14. Sea μ un elemento torcido y $w \in W$ un vector no degenerado entonces $\mu w \in L$ y se cumple la siguiente relación

$$Ad_0(\mu w) = +R_w.$$

Demostración. Sin perdida de generalidad supongamos que w es unitario, es decir, supondremos que $g(w, w) = \epsilon \in \pm 1$. Entonces tenemos que:

$$w^2 = g(w, w)id_S,$$

luego w es invertible con inversa $w^{-1} = \epsilon w$, luego por la proposición 6.4 y asumiendo que μ es un elemento torcido tenemos que todo $x \in W$ cumple:

$$Ad(\mu w)(x) = Ad(\mu)(wxw^{-1}) = \epsilon Ad(\mu)(wxw) = -\epsilon wxw = wxw^{-1} = -Ad(w)(x) = +R_w \in W,$$

entonces $\mu w \in L$ y se tiene la relación pedida. \square

Teorema 6.15. *Si d es par o γ admite un elemento torcido. Entonces la representación vectorial de L Ad_0 es sobreyectiva y se tiene la siguientes secuencia exacta:*

$$1 \rightarrow \mathbb{S}^\times \rightarrow L \xrightarrow{Ad_0} O(W, g) \rightarrow 1. \quad (6.18)$$

Demostración. Sabemos que los elementos de L son no degenerados, luego por la proposición 6.4 tenemos que para todo $w \in L$, se cumple:

$$Ad_0(w) = -R_w.$$

como ya sabemos por la proposición 6.11 que $ker(Ad_0) = \mathbb{S}^\times$, entonces solo falta demostrar la sobreyectividad, para esto vamos a considerar dos casos:

1. Si γ tiene un elemento torcido μ . entonces por proposición 6.14 se tiene que $Ad_0(L)$ contiene las reflexiones $R_w = Ad_0(\mu w)$, luego por el teorema 3.5 se tiene que Ad_0 es sobreyectiva.
2. Si d es par, entonces $det(-R_w) = -1$ y ellos generan $O(W, g)$, entonces se tiene que $Ad_0(L) = O(W, g)$.

□

Teorema 6.16. *$Ad_0(L^0) = SO(W, g)$ y tenemos la siguiente sucesión exacta*

$$1 \rightarrow \mathbb{S}^\times \rightarrow L \xrightarrow{Ad_0} SO(W, g) \rightarrow 1. \quad (6.19)$$

Demostración. independiente de la elección de d se tiene que $det(-R_w) \in \{\pm 1\}$, en cualquiera de los casos se tiene que genera a $SO(W, g)$, luego $SO(W, g) \subset Ad_0(L)$. Luego por la observación 6.10 sabemos que $Ad_0(L^0) \subset SO(W, g)$ y $Ad_0(L^1) \subset O_-(W, g)$ y además son disjuntos, entonces se tiene que $Ad_0(L^0) = SO(W, g)$.

□

7. Estructuras Lipschitz reales y fibrados pinoriales reales

7.1. Variedades pseudo-Riemannianas

Definición 7.1. Una **variedad Pseudo-Riemanniana** es el par (M, g) donde M es una variedad diferencial y g es un tensor métrico, es decir, para cada $m \in M$ se tiene que $g_m : T_m M \times T_m M \rightarrow \mathbb{R}$ es una forma bilineal no degenerada, simétrica y que varía diferenciablemente respecto a m , donde TM es el espacio tangente asociado a la variedad diferencial M .

Observación 7.2. Como el tensor métrico es no degenerado entonces la signatura (p, q) de g_m debe ser la misma en cada punto de la variedad M . Así llamaremos (p, q) la **signatura del tensor métrico** g .

Ejemplo 7.3. El espacio pseudo Euclideo $\mathbb{R}^{p,q}$ del ejemplo 2.5 es una variedad diferencial, cuyo espacio tangente en un punto $m \in \mathbb{R}^{p,q}$ es $T_m \mathbb{R}^{p,q} = \mathbb{R}^{p,q}$, además si lo dotamos con el tensor métrico que a cada $m \in T\mathbb{R}^{p,q}$ le asigna la forma bilineal simétrica $g_m(X, Y) = h_{p,q}(X, Y)$ forma una variedad pseudo Riemanniana.

Ejemplo 7.4. Sea M la misma variedad diferencial $\mathbb{R}^{p,q}$, si la dotamos con el tensor métrico dado por:

$$g_m(X, Y) = \frac{4}{(1 + h_{p,q}(m, m)^2)} h_{p,q}(X, Y),$$

entonces $(\mathbb{R}^{p,q}, g)$ es una variedad pseudo Riemanniana de dimensión $p + q$, denominada **esfera perforada**.

Ejemplo 7.5. Consideremos la bola abierta en $\mathbb{R}^{p,q} \mathbb{H}^m$ (no confundir \mathbb{H}^m con los cuaterniones de Hamilton), dada por:

$$\mathbb{H}^m = \{x \in \mathbb{R}^{p,q} \mid h_{p,q}(x, x) \leq 1\},$$

y tomemos el tensor métrico dado por:

$$g_m(X, Y) = \frac{4}{(1 + h_{p,q}(m, m)^2)} h_{p,q}(X, Y),$$

entonces (\mathbb{H}^m, g) es una variedad pseudo Riemanniana de dimensión $p + q$, que es denominada **espacio hiperbólico**.

Definición 7.6. Sea (M, g) una variedad pseudo Riemanniana y sea N una subvariedad de M , entonces la restricción de la métrica $g|_N$ define una variedad pseudo Riemanniana en N . Se dice que $g|_N$ es la **métrica inducida** por g .

Ejemplo 7.7. La **esfera** definida como:

$$\mathbb{S}^{p+q} = \{v \in \mathbb{R}^{p+q+1} \mid h_{p,q}(v, v) = \pm 1\} \subset \mathbb{R}^{p+q+1},$$

es una variedad diferencial y para cada $m \in \mathbb{S}^{p+q}$ su espacio tangente esta dado por:

$$T_m \mathbb{S}^{p+q} = \{y \in \mathbb{R}^{p+q+1} \mid my + ym = 0\},$$

forma una variedad Riemanniana con el tensor métrico es el inducido por la variedad Riemanniana pseudo Euclidea (\mathbb{R}^{p+q+1}, g) .

Fibrados vectoriales

Definición 7.8. Un **fibrado topológico** es la estructura (X, E, π, F) donde X, E, F son espacios topológicos y $\pi : E \rightarrow X$ es una función continua y sobreyectiva que cumplen las siguientes condiciones:

1. para cada $x \in X$ se tiene que $\pi^{-1}(x)$ es homeomorfo a F ,

2. Si U_i es un cubrimiento por abiertos de M entonces existen homeomorfismos $\phi : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times F$ que cumplen que el siguiente diagrama conmute:

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\phi} & U \times F \\ \pi \downarrow & \swarrow \pi_1 & \\ U & & \end{array}$$

donde $\pi_1(x, y) = x$.

Denominamos a X como **espacio base**, a E **espacio total**, a F **fibra**, a π **proyección** y decimos que (U, ϕ) es la **trivialización local** del fibrado.

Un fibrado se dice que es **trivial** si hay una carta (X, ϕ) que llamaremos "trivialización global", es quiere decir que la proyección π se asemeja la proyección $X \times F \rightarrow X$.

Definición 7.9. Un fibrado topológico (X, E, π, V) se llama **fibrado vectorial**, donde V es un \mathbb{R} -espacio vectorial de dimensión finita n . Unos de los casos más importantes de fibrados vectoriales son los siguientes:

1. Podemos definir el **fibrado tangente** de una variedad diferencial M tomando las fibras como el espacio $T_m M$ para cada $m \in M$, es decir,

$$TM = \coprod_{m \in M} T_m M,$$

donde \coprod es la union disjunta de los espacios $T_m M$.

2. Sea $T_m M$ espacio tangente de una variedad diferencial en un punto $m \in M$, entonces podemos definir el **fibrado cotangente** de M como el espacio dual de $T_m M$, es decir,

$$T_m^* M = \{f : T_m M \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ lineal}\}.$$

Se define el **fibrado cotangente** de M como el fibrado cuyas fibras son el espacio $T_m^* M$ para cada $m \in M$, es decir,

$$T^* M = \coprod_{m \in M} T_m^* M.$$

Definición 7.10. Sea E un fibrado vectorial sobre una variedad pseudo Riemanniana M con tensor métrico g . El **fibrado de Clifford** de E es el fibrado topológico cuyas fibras son álgebras de Clifford generadas por las fibras de E .

$$Cl(E) = \coprod_{m \in M} Cl(E_m, g_m)$$

Ejemplo 7.11. Sea M variedad diferencial, y sea $T^* M$ es fibrado cotangente asociado a M , definimos el **fibrado de álgebras exteriores** como el fibrado topológico cuyas fibras son álgebras exteriores sobre $T^* M$, es decir,

$$\bigwedge T^* M = \coprod_{m \in M} \bigwedge^k (T_m^* M, g_m^*).$$

Ejemplo 7.12. Sea TM es fibrado tangente definido en la definición 7.9. Sabemos que si una variedad es de dimensión m , entonces el espacio tangente con el tensor métrico forman un espacio cuadrático $(T_m M, g_m)$, luego en cada $m \in M$ podemos tomar el álgebra de Clifford $Cl(T_m M, g_m)$ y así contruir el **fibrado de Clifford tangente** como:

$$Cl(TM, g) = \coprod_{m \in M} Cl(T_m M, g_m).$$

Ejemplo 7.13. Sea $T_m M$ espacio tangente de una variedad pseudo Riemanniana en un punto $m \in M$ y sea $T_m^* M$ el fibrado cotangente definido en la definición 7.9 como las fibras son el espacio dual de $T_m M$, dada una base B de $T_m M$ podemos asignarle al espacio $T_m^* M$ la base dual B^* , esto es un isomorfismo ya que

$T_m M$ es de dimensión finita, así los vectores $x, y \in T_m m^* M$ son asociado a los vectores $V_x, V_y \in T_m M$, y así podemos definir la métrica:

$$g_m^*(x, y) = g_m(V_x, V_y).$$

Entonces para cada $m \in M$ se tiene que $(T_m^* M, g^*)$ es un espacio cuadrático y podemos construir el **fibrado de Clifford cotangente** como:

$$Cl(T^* M, g^*) = \coprod_{m \in M} Cl(T_m^* M, g_m^*).$$

Definición 7.14. Sean (X, E, π) y (X, E', π') dos fibrados, definimos **morfismo entre fibrados** de igual base X , es la función continua $f : E \rightarrow E'$ y que cumple que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & E' \\ & \searrow \pi & \swarrow \pi' \\ & & X \end{array}$$

es decir $\pi = \pi' \circ f$,

En realidad, la definición de morfismos entre fibrados es más general, ya que el espacio base no necesariamente es el mismo. La definición que aquí damos es la definición de morfismo base entre fibrados. En este documento será suficiente con esta definición.

Definición 7.15. Dada una variedad Riemanniana (M, g) un **fibrado de módulos de Clifford** es un par (S, γ) que consiste en un fibrado vectorial no nulo de dimensión finita S y un morfismo de fibrados vectoriales $\gamma : Cl(TM, g) \rightarrow End(S)$ tal que para $m \in M$ se tiene que $\gamma_m : Cl(T_m M, g) \rightarrow End(S_m)$ es una \mathbb{K} -representación de álgebras de Clifford.

En otras palabras, cada fibra $S \neq 0$ es un módulo de dimensión finita sobre el álgebra de Clifford $Cl(TM, g)$.

Observación 7.16. Para construir un fibrado de módulos sobre el álgebra de Clifford sobre una variedad Riemanniana (M, g) , para cada $m \in M$ necesitamos una representación sobre el álgebra de Clifford $Cl(T_m M, g_m)$, para esto, como vimos en la sección anterior basta con encontrar una función lineal $f : T_m M \rightarrow End(S_m)$ que cumpla la propiedad de Clifford, es decir $f(v)^2 = g_m(v, v) \cdot id_{S_m}$ para todo $v \in T_m M$.

Ejemplo 7.17. Consideremos (M, g) una variedad pseudo Riemanniana y sea $S = \bigwedge T^* M$ el fibrado de álgebras exteriores definido en el ejemplo 7.11. Entonces definimos $f_m : T_m M \rightarrow End(S_m)$ como:

$$f_m(v)w = v \lrcorner w + g_m(v) \wedge w$$

donde $v \in T_m M$ y $w \in S_m$. Notemos que se cumple la relación:

$$f_m(v)^2 w = g_m(v)w = g_m(v)id_S,$$

entonces se extiende al homomorfismo de álgebras $\gamma_m : Cl(T_m M, g_m) \rightarrow End(S_m)$

Definición 7.18. Dado un fibrado $\pi : E \rightarrow M$, una **sección** es una función diferencial $s : M \rightarrow E$ que satisface

$$\pi \circ s = id_M.$$

El conjunto de sección se denota $\Gamma(M, F)$, donde F es la fibra del fibrado. Uno puede definir secciones de manera local, es decir, dado un abierto $U \subset M$, podemos definir la **sección local** como $s : U \rightarrow E$, al conjunto de las secciones locales definidas en el abierto U se le denota por $\Gamma(U, F)$.

7.2. Fibrados pinoriales reales

Como vimos en la introducción, un operador de Dirac en \mathbb{R}^n es de la forma:

$$D = \sum_{i=0}^3 (\gamma_i \partial_i) \quad (7.1)$$

ver ecuación (1.6), donde γ_i las matrices de Dirac (ver ejemplo ??). Es decir, D actúa en espacio de funciones

$$f : \mathbb{R}^{3,1} \rightarrow S, \quad (7.2)$$

la cual es una función de valores reales.

Para generalizar este concepto de operador a una variedad Riemanniana (M, g) , tenemos que cambiar algunos conceptos por algunos más generales. Notemos que dada una variedad Riemanniana tenemos el fibrado de Clifford asociado a (M, g) (ver ejemplo 7.10) y este actúa por medio de las representaciones de Clifford en un fibrado vectorial S , lo que define un fibrado sobre módulos de álgebras de Clifford (ver ejemplo 7.15). En este fibrado en cada punto tenemos un espacio en el cual actúa el álgebra de Clifford, es decir, en cada punto tenemos un espacio en el cual podemos usar la multiplicación del álgebra de Clifford. Luego una sección en este fibrado es una función $s : M \rightarrow S$ que le asigna a cada punto en M un punto de dicho espacio vectorial (note la semejanza con la ecuación (7.2)). También es natural reemplazar $\frac{\partial}{\partial x_i}$ por la conexión ∇_{e_i} , luego el operador de Dirac de la ecuación 7.1 debería ser de la forma:

$$D = \gamma_i \nabla_{e_i},$$

donde la multiplicación es la multiplicación de Clifford y el operador de Dirac esta definido en las secciones definidas en un abierto de M , es decir $\Gamma(U, S)$.

Entonces dada un variedad Riemanniana (M, g) , una pregunta natural sería, ¿Cuándo podemos definir un operador de Dirac $D : \Gamma(M, S) \rightarrow \Gamma(M, S)$ de manera global? (notemos que las secciones estan definidas globalmente).

Se sabe que se puede definir el operador de Dirac de manera local cuando en M puedo construir un fibrado spinorial.

En el caso de una sección global $\Gamma(M, S)$, se puede definir un operador de Dirac si y solo si existe una multiplicación de Clifford $TM \otimes S \rightarrow S$, lo que es equivalente a que S sea un fibrado de módulos sobre el fibrado de Clifford $Cl(TM)$ (ver definición 7.15).

Es esta la importancia de trabajar con fibrados de módulos sobre álgebras de Clifford, ya que es una generalización de la acción de grupo *spin*. En el paper [30] se trabaja con este objetos asignandoles representaciones reales, debido a que las estructuras de Supergravedad requieren representaciones reales. A los fibrados de módulos sobre álgebras de Clifford reales les denominan fibrados pinoriales y a los elementos de S les denominan *pinors* por generalizando el concepto de *spinors*.

Definición 7.19. Un **Fibrado pinorial real** es un par (S, γ) que consiste en un \mathbb{R} fibrado vectorial no nulo de dimensión finita S y un morfismo de fibrados vectoriales $\gamma : Cl(T^*M, g^*) \rightarrow End(S)$ tal que para $m \in M$ se tiene que $\gamma_m : Cl(T_m^*, g_m^*) \rightarrow End_{\mathbb{R}}(S_m)$ es una representación de álgebras de Clifford.

Decimos que un fibrado pinorial real es **débilmente fiel** si las representaciones γ_m son representaciones débilmente fiel. Además definimos un **fibrado pinorial real del tipo η** al fibrado pinorial real cuyas representaciones son isomorfias en la categoría $ClRep$ a alguna representación fija $\eta : Cl(h) \rightarrow End_{\mathbb{R}}(S_0)$

Notemos que para cada morfismo base de vector bundles suave $f \in Hom(S, S')$ podemos siempre tomar el morfismo de vector bundle $L_f : End(S) \rightarrow Hom(S, S')$ definido por:

$$L_f(\phi)_m = f_m \circ \phi,$$

para todo $\phi \in End_{\mathbb{R}}(S_m)$. Y el morfismo de vector bundle $R_f : End(S) \rightarrow Hom(S, S')$ definido por:

$$R_f(\phi)_m = \phi' \circ f_m,$$

para todo $\phi' \in End_{\mathbb{R}}(S'_m)$.

Definición 7.20. Dados (S, γ) y (S', γ') dos fibrados pinoriales reales, definimos un **morfismo de fibrados pinoriales reales** como la función $f : (S, \gamma) \rightarrow (S', \gamma')$ donde $f : S \rightarrow S'$ es un morfismo de fibrados vectoriales que cumplen la condición:

$$L_f \circ \gamma = R_f \circ \gamma'$$

En otras palabras, para cada $m \in M$ se tiene que $f_m : S_m \rightarrow S'_m$ es un morfismo base de representaciones de $\gamma : Cl(T_m^*M, g_m^*) \rightarrow End_{\mathbb{R}}(S_m)$ a $\gamma' : Cl(T_m^*M, g_m^*) \rightarrow End_{\mathbb{R}}(S'_m)$

Definición 7.21. La **Categoría de los fibrados pinoriales reales sobre (M, g)** es la categoría que denotaremos $CLB(M, g)$ donde:

1. los objetos de la categoría son fibrados pinoriales reales definidos en 7.19 y los denotaremos $Obj_{CLB(M, g)}$,
2. Los morfismos de la categoría son los morfismos de fibrados pinoriales reales definidos en 7.20 y los denotaremos $Morf_{CLB}$.

Denotaremos $CLB_W(M, g)$ a la sub-categoría de $CLB(M, g)$ que consiste en todos los fibrados pinoriales reales débilmente fiel y $CLB_W^\eta(M, g)$ a la sub-categoría de $CLB_w(M, g)$ que consiste en todos los fibrados pinoriales reales débilmente fiel de tipo η , para una representación η fija.

7.3. Fibrados Principales

Dada una variedad diferencial y dada una base B del espacio tangente T_mM , entonces el grupo $Gl(n)$, cuyos elementos son matrices cuadradas invertibles de dimensión $n \times n$, transforma la base B en otra base B' del espacio tangente T_mM , es decir, el grupo $Gl(n)$ actúa en las fibras de fibrado tangente TM , a esto se le denomina **G1(n)-estructura**. Además si consideramos una variedad Riemanniana (M, g) , podemos tomar una base ortogonal del espacio tangente T_mM , entonces el grupo $O(h)$ transforma bases ortogonales en bases ortogonales, a esta estructura se le denomina **O(h)-estructura**. De la misma manera si tomamos una base orientada de T_mM el grupo $SO(h)$ actúa sobre este espacio. Esta acción sobre el espacio tangente motiva a la siguiente definición.

Definición 7.22. Sea M variedad diferencial y G un grupo de Lie, decimos que P es un **G-fibrado principal** sobre M si se cumplen las siguientes propiedades:

1. P es un fibrado sobre M donde $\pi : P \rightarrow M$ es la proyección,
2. existe una acción continua $P \times G \rightarrow P$ libre y transitiva tal que si $y \in \pi^{-1}(x)$ entonces $yg \in \pi^{-1}(x)$.

Ejemplo 7.23. Un **fibrado frame pseudo-ortogonal** $P_{O(h)}(M, g)$ de (M, g) con modelo local (V, h) se define como el fibrado:

$$P_{O(V, h)} = \coprod_{m \in M} Hom_{Quad^\times}((V, h), (T_mM, g_m)),$$

donde la $O(h)$ -acción esta definida por:

$$r \cdot R = r \circ R.$$

La acción esta bien definida, ya que $R \in O(V, h)$ y $r : V \rightarrow T_mM \in Hom_{Quad^\times}((V, h), (T_mM, g_m))$.

Ejemplo 7.24. Un **fibrado coframe pseudo-ortogonal** $P_{O(V, h)}(M, g)$ de (M, g) con modelo local (V, h) se define como el fibrado principal coframe:

$$P_{O(V, h)} = \coprod_{m \in M} Hom_{Quad^\times}((V, h), (T_m^*M, g_m^*)),$$

donde la $O(V, h)$ -acción esta definida por:

$$r \cdot R = r \circ R.$$

Notemos que la acción esta bien definida, ya que $R \in O(V, h)$ y $r : V \rightarrow T_m^*M \in Hom_{Quad^\times}((V, h), (T_m^*M, g_m^*))$. Además $O(T_m^*, g_m^*)$ actúa en cada fibra $\pi^{-1}(m)$ para todo $m \in M$.

Teorema 7.25. Sea G un grupo de Lie y $\rho : G \rightarrow Gl_n(V)$ una representación de G sobre el espacio V .
Entonces

Dado un fibrado G -principal puedo encontrar un **fibrado vectorial asociado** al fibrado G -principal.

Dado un fibrado vectorial puedo encontrar un **fibrado G -principal asociado** al fibrado vectorial.

Demostración. Sea el fibrado G -principal $P \xrightarrow{\pi} M$, entonces definimos el fibrado vectorial asociado a P como el fibrado cuyo espacio total es $E = P \times_{\rho} V$, donde \times_{ρ} es la relación de equivalencia dada por:

$$[u, v] = [ug, \rho(g)^{-1}v] \text{ para todo } u \in P, v \in V. \quad (7.3)$$

La proyección $\pi_E : E \rightarrow M$ esta definida por $\pi_E([u, v]) = \pi(u)$ y esta bien definida, ya que π es una G -acción por la derecha, entonces $\pi(ug) = \pi(u)$ lo que implica que

$$\pi_E([ug, \rho(g)^{-1}v]) = \pi(ug) = \pi(u) = \pi_E(u, v),$$

además es continua ya que π es continua. Las fibras son el espacio vectorial V , la trivialización local esta dada por las funciones $\phi_i : U_i \times V \rightarrow \pi_E^{-1}(U_i)$, definidas por $\phi_i(u, v) = [u, v]$ y las funciones de transición estan dadas por $\rho(t_{ij}(p))$ donde $t_{ij}(p)$ son las funciones de transición del fibrado principal P .

Por otro lado, dado un fibrado vectorial $E \xrightarrow{\pi} M$ cuyas fibras son \mathbb{R} -espacios vectoriales de dimensión $n \in \mathbb{N}$. Definimos el fibrado $Gl_n(V)$ -principal tomando el espacio total como:

$$P = (U_i \times V) / \sim,$$

donde U_i es el cubrimiento de M y la relación de evivalencia esta dada por:

$$[u, v] \sim [u, t_{ij}(u)v],$$

donde t_{ij} son las funciones de transición del fibrado vectorial. La proyección esta dada por:

$$\pi([u, v]) = u,$$

y la trivialización local esta dada por las funciones $\phi_i : U_i \times V \rightarrow \pi^{-1}(U_i)$, definidas por $\phi(u, v) = [u, v]$. Notemos que $Gl_n(V)$ actúa en el fibrado ya que las funciones de transición $t_{ij} \in Gl_n(V)$, luego la acción esta dada por la multiplicación por la derecha, la cuál es libre, transitiva y continua. □

Definición 7.26. Sea (M, g) una variedad Riemanniana con modelo local (V, h) . Sea P un G -fibrado principal sobre M y $\phi : H \rightarrow G$ un homomorfismo de grupo, decimos que P admite una ϕ -reducción a H , si existe un H -fibrado principal y un morfismo de fibrados $\tau : Q \rightarrow P$ que cumple:

$$\begin{array}{ccc} H & \longrightarrow & Q \\ \phi \downarrow & & \downarrow \tau \\ G & \longrightarrow & P \end{array} \xrightarrow{\pi_p} (M, g), \quad \begin{array}{c} \nearrow \pi_q \\ \searrow \end{array}$$

es decir, se cumple que $\tau(qh) = \tau(q)\phi(h)$.

Tambien se dice que (Q, τ) es una ϕ -reducción de P a H .

Definición 7.27. Dadas dos ϕ -reducciones (Q, τ) y (Q', τ') de P a H un **isomorfismo** de ϕ -reducción es un isomorfismo base de H -fibrados principales $f : Q \rightarrow Q'$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} Q & & \\ \downarrow f & \searrow \tau & \nearrow \tau' \\ & P & \longrightarrow M \\ & \nearrow \tau' & \searrow \tau \end{array}$$

es decir, $\tau' \circ f = \tau$.

7.4. Estructuras Lipschitz reales

Definición 7.28. Sea P un $O(V, h)$ -fibrado principal sobre M , definimos una **Estructura de Lipschitz real** relativa a η a la Ad_0 -reducción (Q, τ) de P a $L(\eta)$. Esto se resume en el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 L(\eta) & \longrightarrow & Q \\
 Ad_0 \downarrow & & \downarrow \tau \\
 O(V, h) & \longrightarrow & P \xrightarrow{\pi_p} (M, g)
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \searrow \pi_q \\
 \end{array}$$

Donde la función Ad_0 es la definida en 6.2.

Cuando tenemos una estructura de Lipschitz real en $P_{O(V, h)}(M, g)$ relativa a η solo decimos que es una estructura de Lipschitz real en (M, g) relativa a η .

Definición 7.29. Sea (Q, τ) y (Q', τ) dos estructuras Lipschitz relativas a η , decimos que f es un **isomorfismo de estructuras Lipschitz** si f es un isomorfismo de Ad_0 -reducción de $O(V, h)$ a $L(\eta)$.

Definición 7.30. El **grupoide de estructuras Lipschitz reales sobre (M, g)** relativas a η es el grupoide que denotaremos $L(\eta)^\times(M, g)$ donde:

1. los objetos de la categoría son estructuras Lipschitz reales definidas en 7.28 y los denotaremos Obj_{L_η} ,
2. Los isomorfismos del grupoide son los isomorfismos de estructuras Lipschitz reales relativas a η definidos en 7.29 y los denotaremos $Morf_{L_\eta}$.

8. Equivalencia entre Estructuras Lipschitz reales y fibrados pinoriales reales

En esta sección vamos a mostrar que un fibrado pinorial real debilmente fiel de tipo $[\eta]$ sobre (M, g) es básicamente lo mismo que una estructura Lipschitz real relativa a η sobre (M, g) . Para esto vamos a mostrar primero que existe un funtor Q_η entre la categoría $CLB_w^\eta(M, g)$ a $L_\eta(M, g)$ (Teorema 1), luego demostraremos que hay un funtor S_η de la categoría $L_\eta(M, g)$ hacia la categoría $CLB_w^\eta(M, g)$ (Teorema 2) y por último veremos que estos funtores son cuasi-inversos (Teorema 3). Para esto, en esta sección vamos a considerar siempre una variedad pseudo-Riemanniana (M, g) con modelo local (V, h) y una representación débilmente fiel η fija.

8.1. Funtor de $CLB_w^\eta(M, g)$ a $L_\eta(M, g)$

Primero, dado un objeto en $CLB_w^\eta(M, g)$ vamos a construir un objeto en $L_\eta(M, g)$. Es decir, dado un fibrado pinoreal real de tipo η (S, γ) , vamos a construir a partir de esto una estructura Lipschitz real de tipo η .

Por la definición 7.19 sabemos que S es un fibrado vectorial real y

$$\gamma : Cl(T^*M, g^*) \rightarrow End(S),$$

cumple que para cada $m \in M$ la fibra

$$\gamma_m : Cl(T_m^*M, g_m^*) \rightarrow End(S_m),$$

es equivalente en la categoría $ClRep$ a

$$\eta : Cl(V, h) \rightarrow End(S_0).$$

Entonces necesitamos un par (Q, τ) donde Q es un $L(\eta)$ -fibrado y una función $\tau : Q \rightarrow P$ que cumpla $\tau(qh) = \tau(q)Ad_0(h)$.

Lema 8.1. *El conjunto*

$$Q_\eta = \coprod_{m \in M} Hom_{ClRep^\times}(\eta, \gamma_m), \quad (8.4)$$

es un $L(\eta)$ -fibrado principal, donde la proyección $\pi : Q_\eta \rightarrow M$ es la definida por:

$$\pi(q) = m, \quad \text{si } q \in Q_m$$

Donde $Q_m = Hom_{ClRep^\times}(\eta, \gamma_m)$ para todo $m \in M$, y cuya acción es:

$$q.g = q \circ g \quad (8.5)$$

donde $q \in Q_\eta$, $g \in L(\eta) = End_{ClRep^\times}(\eta)$.

Demostración. la definición 7.22 se tiene que cumplir que 8.4 sea un fibrado, para esto notemos que para cada $m \in M$ se tiene que la fibra es $Q_m = Hom_{ClRep^\times}(\eta, \gamma_m)$, lo realmente interesante es encontrar su trivialización local, pero notemos que como S es un fibrado vectorial entonces si U_i es un cubrimiento por abiertos de M , entonces existen homeomorfismos $\phi_i : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times S_0$, donde S_0 es la fibra típica de S . Luego se tiene que Q_η es un fibrado.

Ahora tenemos que ver que la acción dada en 8.5 cumple lo pedido en la definición 7.22, como es una composición de funciones, entonces es libre, transitiva y continua, así solo nos queda demostrar la última propiedad de la definición 7.22. Sea $p \in \pi^{-1}(m) = Q_m = Hom_{ClRep^\times}(\eta, \gamma_m)$, sea $g \in L(\eta) = End_{ClRep^\times}(\eta)$ entonces se tiene que

$$p.g = p \circ g \in Hom_{ClRep^\times}(\eta, \gamma_m) = \pi(m)^{-1}.$$

Luego Q_η cumple con las condiciones pedidas en 7.22, es decir Q_η es un $L(\eta)$ -fibrado principal. \square

Lema 8.2. Sea $\tau_\eta : Q_\eta \rightarrow P_{O(V,h)}(M, g)$ es la función definida por:

$$\tau(q)_\eta = F(q) = q_0,$$

donde $F : ClRep^\times \rightarrow Quad^\times$ es el funtor definido en 5.34, entonces (Q_η, τ) es una estructura Lipschitz real relativa a η .

Demostración. Notemos que para todo $q \in Q_\eta$ se tiene que:

$$\tau_\eta(q) = F(q) = q_0 \in Hom((V, h), (T_m^*, g_m^*)) = P_{O(V,h)}(M, g)_m,$$

luego la función esta bien definida.

Ahora tenemos que ver que τ_η es un morfismo base de fibrados y que cumple la relación dada en la definición 7.26, para esto notemos que es claramente continua, ya que Q_η tiene la topología del producto y F es una proyección en la segunda componente. Además se cumple que:

$$\tau(\pi(q)) = \tau(m) = m = \pi'(q),$$

donde π es la proyección de Q y π' es la proyección del fibrado coframe, notar que τ no afecta en M , luego es continua. con esto se tiene que τ_η es un morfismo de fibrados, solo queda demostrar la relación en 7.26, para esto tomemos $q \in Q_m = Hom_{ClRep^\times}(\eta, \gamma_m)$ y $g \in L(\eta) = End(\eta)$ entonces se tiene que:

$$\tau_\eta(q.g) = \tau(q \circ g) = (q \circ g)_0 = q_0 \circ g_0 = q_0 \circ Ad_0(g) = \tau(q).Ad_0(g),$$

donde $Ad_0(g) = g_0$ ya que $g \in L(\eta)$, con esto tenemos que (Q_η, τ_η) es una estructura Lipschitz real relativa a η . \square

Por el lema 8.2 tenemos que hay una construcción que nos lleva objetos de $CLB_w^\eta(M, g)$ en objetos de $L(\eta)$, ahora tenemos que hacer lo mismo para los morfismos. Entonces sea $f : (S, \gamma) \rightarrow (S', \gamma')$ un isomorfismo en $CLB_w^\eta(M, g)$ entonces tenemos que

Lema 8.3. La función

$$Q_\eta(f) : (Q_\eta(S, \gamma), \tau_\eta(S, \gamma)) \rightarrow (Q_\eta(S', \gamma'), \tau_\eta(S', \gamma'))$$

definida por:

$$Q_\eta(f)_m(q) = (id_{T^*_m M}, f_m) \circ q,$$

es un isomorfismos de estructuras Lipschitz reales relativa a η .

Demostración. Caramente es un morfismo de fibrados principales que cumple $\tau' \circ f = \tau$ luego es un morfismo de fibrado de los espacios $Q = Q_\eta(S, \gamma)$ y $Q' = Q_\eta(S', \gamma')$ Por otro lado si $\tau = \tau_\eta(S, \gamma)$ y $\tau' = \tau_\eta(S', \gamma')$ entonces se tiene la relación:

$$\tau' \circ f = \tau.$$

Con todo esto se tiene que la función $Q_\eta(f)$ es un isomorfismo de espacios Lipschitz. \square

Estos 3 lemas demuestran el siguiente teorema

Teorema 8.4. Existe un funtor $CLB_w^\eta(M, g)^\times \rightarrow L_\eta(M, g)$

Es decir, a cada fibrado pinorial le podemos asociar una estructura Lipschitz categoricamente hablando.

8.2. Funtor de $L_\eta(M, g)$ a $CLB_w^\eta(M, g)$

Ahora dado un objeto en $L_\eta(M, g)$ vamos a construir un objeto en $CLB_w^\eta(M, g)$. Es decir, dado (Q, τ) una estructura Lipschitz real fibrado pinoreal real en (M, g) relativa a η , vamos construir a partir de esta estructura un fibrado pinorial real de tipo η . Además vamos a suponer que $\rho_\eta : L \rightarrow Aut_{\mathbb{R}}(S_0)$ es una representación del grupo de Lipschitz como grupo de Lie.

Por la definición 7.28 sabemos que Q es una fibrado $L(\eta)$ -principal y τ es una Ad_0 -reducción.

Lema 8.5. Sea $S = Q \times_{\rho_\eta} S_0$ donde la relación de equivalencia \times_{ρ_η} esta definida en la ecuación (7.3), es un fibrado vectorial.

Demostración. Como Q es un fibrado $L(\eta)$ -principal y ρ_η es una representación de $L(\eta)$ en $Aut_{\mathbb{R}}(S_0)$ entonces por el teorema 7.25 se tiene que $S = Q \times_{\rho_\eta} S_0$ es su fibrado vectorial asociado. \square

Lema 8.6. La función $\gamma : Cl(T^*M, g^*) \rightarrow End(S)$ definida por:

$$\gamma_m(x)([q, s]) = [q, \eta(Cl(\tau_m(q))^{-1}(x))(s)],$$

para todo $x \in Cl(T_m^*M, g_m^*)$, para todo $q \in Q_m$ y $s \in S_0$.

Se tiene que:

$$\gamma_m : Cl(T_m^*M, g_m^*) \rightarrow End(S_m),$$

es una representación de álgebras de Clifford.

Demostración. Veamos primero que la función γ_m esta bien definida para todo $m \in M$, para eso usaremos las relaciones $Ad(a) \circ \eta = \eta \circ Cl(Ad_0(a))$ para todo $a \in L(\eta)$, también tenemos que $[Cl(\tau_m(q))]^{-1} = Cl(\tau_m(q)^{-1})$ y que $Ad_0(a^{-1}) = Ad_0(a)^{-1}$, estas relaciones implican que

$$\begin{aligned} Ad(a^{-1}) \circ \eta \circ Cl(\tau_m(q)^{-1}) &= \eta \circ Cl(Ad_0(a^{-1}) \circ \tau_m(q)^{-1}), \\ &= \eta \circ [Cl(\tau_m(q) \circ A_0(a))]^{-1}. \end{aligned}$$

Usando que $\tau_m(qa) = \tau_m(q)Ad_0(a)$ se tiene que

$$Ad(a^{-1}) \circ \eta \circ Cl(\tau_m(q)^{-1}) = \eta \circ Cl(\tau_m(qa)^{-1})$$

para todo $a \in L(\eta)$. Entonces se tiene que

$$\begin{aligned} [qa^{-1}, \eta(Cl(\tau_m(qa^{-1})^{-1})(x))(as)] &= [q, a^{-1}\eta(Cl(\tau_m(qa^{-1})^{-1})(x))(as)], \\ &= [q, (Ad(a^{-1}) \circ \eta \circ Cl(\tau_m(qa^{-1})^{-1}))(x)(s)], \\ &= [q, \eta(Cl(\tau_m(q)^{-1})(x))(s)]. \end{aligned}$$

Lo que implica que esta bien definida. Por otro lado γ_m es homomorfismo de álgebras para todo $m \in M$, ya que todas las funciones involucradas son homomorfismos de álgebras. \square

Lema 8.7. El par (S, γ) definido en los lemas 8.5 y 8.6 es un fibrado pinorial real de tipo η sobre (M, g) .

Demostración. Puede encontrar la demostración de esto en [30] \square

Por el lema 8.2 tenemos que hay una construcción que nos lleva objetos de $L(\eta)$ en objetos de ClB_w^η , ahora tenemos que hacer lo mismo para los morfismos. Entonces dado un isomorfismo de estructuras Lipschitz $f : (Q, \tau) \rightarrow (Q', \tau')$ relativo a η , se tiene el siguiente lema:

Lema 8.8. La función $Q_\eta(f) = (S_\eta(Q, \tau), \gamma_\eta(Q, \tau)) \rightarrow (S_\eta(Q', \tau'), \gamma_\eta(Q', \tau'))$ definida por

$$S_\eta(f)_m([q, a]) = [f_m(q), s]$$

para todo $q \in Q_m$, para todo $s \in S_0$

es un isomorfismo base de fibrados pinoriales reales.

Demostración. Puede encontrar la demostración de esto en [30] \square

Estos 3 lemas demuestran el siguiente teorema:

Teorema 8.9. Existe un funtor $L_\eta(M, g) \rightarrow ClB_w^\eta(M, g)^\times$

Es decir, a cada estructura Lipschitz podemos asociarle un fibrado pinorial real categoricamente hablando.

Referencias

- [1] J. Alcalá, *Supergrupos de Lie*.
- [2] R. Andres and C. Lafuente, *A Geometric Algebra Approach to n-Qubit Systems* (2007).
- [3] M. Atiyah, R. Bott, and Shapiro A., *Clifford Modules* (1963).
- [4] C. Bar, *Real Killing Spinors and Holonomy*.
- [5] A. Bilge, S. Kocak, and S. Uguz, *Canonical bases for real representations of Clifford algebras*.
- [6] M. Bobiński and A. Trautman, *Pin^c and Lipschitz structures on products of manifolds* (1991).
- [7] S. Bravyi and A. Kitaev, *Universal quantum computation with ideal Clifford gates and noisy ancillas* (2008).
- [8] J. Caballero, *Dirac, la antimateria*.
- [9] A. Debray, *Spin Geometry* (2016).
- [10] N. Degirmenci and N. Ozdemir, *The construction of Maximum Independent Set of Matrices via Clifford Algebras* (2000).
- [11] C. Doran and A. Lasenby, *Physical Applications of Geometric Algebra* (2000).
- [12] U. Ertem, *Spin Geometry and Some Applications* (2018).
- [13] J. Figueroa, *Spin Geometry* (2017).
- [14] T. Friedrich, *Dirac operators in Riemannian geometry* (2014).
- [15] T. Friedrich and A. Trautman, *Spin spaces, Lipschitz groups, and spinor bundles* (1999).
- [16] T. Friedrich, *Cartan Spinor Bundles on Manifolds* (1998).
- [17] A. Fosner and Fosner M., *On superalgebras*.
- [18] J. Gallier, *Clifford Algebras, Clifford Groups, and a Generalization of the Quaternions: The Pin and Spin Groups*.
- [19] P. Grozman, D. Leites, and I. Shchepochkina, *Lie superalgebras of string theories*.
- [20] B. Hanke, M. Upmeyer, and U. Augsburg, *Spin Geometrie* (2016).
- [21] T. Havel and C. Doran, *Geometric Algebras in Quantum Information Processing* (2001).
- [22] Z. Hamaker, *Clifford Algebra Representations*.
- [23] P. Henselder, A. Hirshfeld, and T. Spornat, *Star Products and Geometric Algebra* (2008).
- [24] G. Hile, *Matrix Representations of Clifford Algebras*.
- [25] Kronheimer P., *Clifford modules*.
- [26] M. Lachieze-Rey, *Spin and Clifford algebras, an introduction* (2009).
- [27] H. Lawson and M. Michelsohn, *Spin Geometry*, 1989.
- [28] C. Lazaroiu and C. Shahbazi, *Complex Lipschitz structures and bundles of complex Clifford modules* (2017).
- [29] ———, *On the spin geometry of supergravity and string theory* (2016).
- [30] ———, *Real pinor bundles and real Lipschitz structures* (2018).
- [31] C. Lazaroiu and Babalic E., *Geometric algebra and M-theory compactifications* (2018).
- [32] D. Lundholm and L. Svensson, *Clifford algebra, geometric algebra and applications* (2009).
- [33] D. Lundholm, *Geometric (Clifford) algebra and its applications* (2006).
- [34] R. Marcos and A. Arcodía, *Álgebras y grupos de Clifford, espinores algebraicos y aplicaciones a la física* (2018).
- [35] A. Mathew, *The Dirac Operator*.
- [36] A. Miemiec and I. Schnakenburg, *Basics of M-Theory* (2005).
- [37] A. Moroianu, *Parallel and Killing Spinors on $Spin^c$ Manifolds*.
- [38] A. Moroianu and U. Semmelmann, *Generalized Killing Spinors on Einstein Manifolds*.
- [39] C. Notte, *Álgebras y Fibrados de Clifford con Aplicaciones*.
- [40] K. Potamianos, *Relativistic Electron Theory, The Dirac Equation*.
- [41] M. Rausch de Traubenberg, *Clifford Algebras in Physics*.
- [42] J. Rooney, *William Kingdon Clifford*.
- [43] J. Sánchez, *Historias de Matemáticas, Hamilton y el Descubrimiento de los Cuaterniones* (2011).
- [44] D. Shirokov, *Calculation of elements of spin groups using generalizad Pauli's theorem*.
- [45] ———, *Clifford Algebras and their applications to lie groups and spinors*.
- [46] ———, *Symplectic, orthogonal and linear Lie groups in Clifford algebra*.
- [47] M. Siegmund, *Spin structures*.
- [48] A. Soigune, *Geometric algebra, qubits, geometric evolution, and all that* (2015).

- [49] M. Spinel, *Álgebra de Clifford*.
- [50] A. Steane, *An introduction to spinors* (2013).
- [51] G. Torres del Castillo, *Espinorens en espacios de dimensión arbitraria* (1989).
- [52] C. Lazaroiu and C. Shahbazi, *Spin^o structures and semilinear (S)pinor bundles*.
- [53] A. Trautman, *Clifford Algebras and their Representations* (2005).
- [54] ———, *Spinors and the Dirac operator on hypersurfaces. I. General theory* (1992).
- [55] ———, *Connections and the Dirac operator on spinor bundles*.
- [56] V. Varadarajan, *Supersymmetry for Mathematicians: And Introduction*.
- [57] A. Yu, *Quantum Gates and Clifford Algebras* (1999).
- [58] Z. Hamaker, *Clifford álgebras representations* (2008).