



FACULTAD DE MATEMÁTICAS
PONTIFICIA UNIVERSIDAD
CATÓLICA DE CHILE

ANÁLOGOS A LA CURVATURA DE RICCI EN
ESPACIOS MÉTRICOS DISCRETOS

por

VÍCTOR ALEKSANDAR MIJAILOVIC NIKOLIC

Tesis presentada a la Facultad de Matemáticas
de la Pontificia Universidad Católica de Chile,
como un requisito para optar al grado académico
de Magíster en Matemática.

Profesor guía : Mircea Petrache
Comisión : Roberto Cominetti
Pedro Gaspar

Abril, 2025
Santiago, Chile

AGRADECIMIENTOS

Deseo expresar mi más sincero agradecimiento al profesor Mircea Petrache, quien fue mi profesor, guía y una constante voz de apoyo durante mi magíster. Más allá de su vasto conocimiento y paciencia, es una persona excepcional. Con toda sinceridad, si él no hubiera sido mi profesor de tesis, este trabajo no habría alcanzado su forma final.

También extendo mi profundo agradecimiento a los profesores Roberto Cominetti y Pedro Gaspar, miembros del comité evaluador, cuyos valiosos consejos ayudaron a perfeccionar la expresión de las ideas presentes en esta investigación.

Finalmente, quiero agradecer a mis amigos, especialmente a mis amigos más cercanos Guillermo Núñez, Yoseph Barrera y Jaime Negrete. Fueron un pilar fundamental en esta etapa tan compleja de mi vida. Sin su apoyo constante, completar esta tesis (y muchos otros objetivos) habría sido imposible. Les debo más de lo que las palabras pueden expresar y los llevaré siempre en mi corazón.

Índice

1	Introducción	4
1.1	Motivación	4
1.2	Resumen	5
1.3	Problema de Transporte Óptimo	6
1.4	Curvatura de Ollivier	8
2	Curvatura de Lin-Lu-Yau	11
2.1	Introducción	11
2.2	Trabajos Relacionados	14
2.3	Primeros ejemplos	16
2.3.1	Árboles	16
2.3.2	Grafos con un Solo Ciclo.	17
2.4	Matriz de Distancia	23
2.5	Grafos Controlados y Bien Separados	26
2.6	Grafos Dóciles	37
2.6.1	Ejemplos	47
3	Convergencia Entre Curvaturas	51
3.1	Introducción	51
3.2	Distancia de Gromov-Hausdorff	52
3.3	Convergencia Gromov-Hausdorff a la Curvatura de Ricci	53
4	Investigaciones a Futuro	57

1. Introducción

1.1. Motivación

En geometría Riemanniana, la curvatura ha sido un tópico de bastante interés sobre la cual se pueden concluir bastantes propiedades sobre una variedad. Existen varias nociones de curvatura para dichas variedades, de las cuales una que destaca es la curvatura de Ricci. Algunos resultados que involucran a esta curvatura son el teorema de Bonnet-Myers, el cual establece una cota para el diámetro del espacio en función de una cota positiva para dicha curvatura, el teorema de Lichnerowicz para el hueco espectral del Laplaciano, el cual entrega un control sobre las propiedades de mezcla del movimiento Browniano y el teorema de Lévy-Gromov para desigualdades isoperimétricas y concentración de medida.

La motivación de este trabajo entonces sería estudiar una noción de curvatura que tenga sentido en espacios métricos, la cual permita extender los resultados anteriormente mencionados a espacios más generales. En particular, nos gustaría usar resultados de estas características a espacios discretos, como por ejemplo, grafos. Estos últimos son objetos de estudio muy importantes, sobre todo para nuestra época, con objetos como las redes sociales, redes neuronales, discretización de superficies, etc.

En particular, nos enfocaremos en: Primero, encontrar expresiones explícitas para la curvatura en grafos que tengan propiedades que nos permitan hacer esto (ver teoremas 2.9, 2.11, 2.16). Segundo, encontrar una familia de grafos que puedan adoptar estas expresiones explícitas de su curvatura y que estas expresiones se comporten bien bajo aplicaciones como, por ejemplo, productos cartesianos entre grafos (ver teoremas 2.20, 2.21, 2.25). Tercero, encontrar condiciones para poder comparar, mediante una convergencia de curvaturas, la curvatura de Ricci de una variedad M y la curvatura de un grafo cuyos vértices son puntos que no necesariamente están en la variedad M (ver teorema 3.8).

1.2. Resumen

Para el primer capítulo, haremos una introducción a la teoría de transporte óptimo, rescatando solamente lo esencial para poder definir cómodamente la distancia de Wasserstein y así poder dar una noción de curvatura para espacios métricos, la que llamaremos curvatura de Ollivier. Dicha curvatura estará inspirada (y, en realidad, tendrá una conexión importante) en la curvatura de Ricci para variedades.

En el segundo capítulo, se estudiará la curvatura de Lin-Lu-Yau, la cual es una curvatura de Ollivier bastante conveniente para el estudio de curvatura en grafos con distancia geodésica. Partiremos definiendo dicha curvatura, mencionaremos algunos trabajos realizados sobre ella y haremos el contraste de las diferencias que hay entre estos trabajos y esta tesis. Luego de esto, veremos algunos ejemplos para obtener este tipo de curvaturas (árboles y grafos con un solo ciclo), en los cuales para grafos de un solo ciclo definiremos la matriz de distancia entre dos vértices x, y . Generalizando esta matriz para cualquier grafo, se obtiene toda la información necesaria para calcular la curvatura de Lin-Lu-Yau de forma exacta. Sin embargo, estudiar este tipo de matrices es sumamente complejo, por lo que se estudiarán grafos específicos a los cuales sea factible obtener su curvatura.

A partir de acá estudiaremos la definición de grafos controlados y grafos separables, la cual es una que introducimos desde cero. Para esto necesitaremos hacer una partición de los vecinos de un vértice x con respecto a otro vértice y . Con estas nociones ya definidas, podremos obtener una fórmula de la curvatura de Lin-Lu-Yau de forma explícita a partir de la partición hecha anteriormente. Luego de hecho este cálculo, nos inspiraremos en un teorema de Lin-Lu-Yau, el cual menciona el cálculo de curvaturas en el producto cartesiano de dos grafos, para definir la noción de grafo dócil, que también es una nueva noción de grafos. Las principales ventajas de este tipo de grafos son que es relativamente sencillo calcular su curvatura y son cerrados bajo producto cartesiano.

Para el último capítulo, ya viendo lo complicado que se vuelve dicho estudio de esta curvatura, haremos una aproximación de las curvaturas de Ollivier de un espacio métrico con respecto a la curvatura de Ricci de una variedad suficientemente cercana. Para esto, primero describiremos la noción de que dos espacios métricos sean cercanos mediante la distancia de Gromov-Hausdorff para luego usar la noción de convergencia en el sentido de Gromov-Hausdorff de espacios métricos (especialmente grafos) a una variedad. El teorema final de este trabajo sería dar una condición de esta convergencia de Gromov-Hausdorff de espacios métricos a una variedad, para que podamos establecer una convergencia entre las curvaturas de Ollivier con la de Ricci de la variedad misma.

1.3. Problema de Transporte Óptimo

Todo lo descrito en esta sección fue estudiado a partir del trabajo de Villani [15] y de Figalli-Glaudo [7]. Consideraremos que todas las medidas son Borel medibles y todos los mapeos son Borel. X siempre será un espacio métrico completo, separable y localmente compacto. Consideraremos también al conjunto de medidas de probabilidad sobre el espacio X por $\mathcal{P}(X)$ y la clase de conjuntos Borel medibles por $\mathcal{B}(X)$.

Definición 1.1. Sea $T : X \rightarrow Y$ un mapeo y una medida de probabilidad $\mu \in \mathcal{P}(X)$. Definimos la medida de probabilidad pushforward $T_{\#}\mu \in \mathcal{P}(Y)$ como

$$(T_{\#}\mu)(A) := \mu(T^{-1}(A)) \quad \text{para todo } A \in \mathcal{B}(Y).$$

Definición 1.2. Dado $\mu \in \mathcal{P}(X)$ y $\nu \in \mathcal{P}(Y)$, un mapa $T : X \rightarrow Y$ se llama *mapa de transporte* de μ a ν si $T_{\#}\mu = \nu$.

Definición 1.3. Llamamos *plan de transporte* a una medida $\gamma \in \mathcal{P}(X \times Y)$ de μ y ν si $(\pi_X)_{\#}\gamma = \mu$ y $(\pi_Y)_{\#}\gamma = \nu$, donde $\pi_X(x, y) = x$ y $\pi_Y(x, y) = y$ para todo $(x, y) \in X \times Y$. Definimos $\Pi(\mu, \nu)$ como el conjunto de planes de transporte de μ y ν .

Observación 1.4. Sea $T : X \rightarrow Y$ tal que $T_{\#}\mu = \nu$ y consideremos el mapa $Id \times T : X \rightarrow X \times Y$ por $x \mapsto (x, T(x))$. Definimos

$$\gamma_T := (Id \times T)_{\#}\mu \in \mathcal{P}(X \times Y).$$

Entonces tenemos

$$(\pi_X)_{\#}\gamma_T = (\pi_X)_{\#}(Id \times T)_{\#}\mu = (\pi_X \circ (Id \times T))_{\#}\mu = Id_{\#}\mu = \mu,$$

$$(\pi_Y)_{\#}\gamma_T = (\pi_Y)_{\#}(Id \times T)_{\#}\mu = (\pi_Y \circ (Id \times T))_{\#}\mu = T_{\#}\mu = \nu.$$

Por lo que $\gamma_T \in \Pi(\mu, \nu)$, así el mapa de transporte T induce un plan de transporte γ_T . Sin embargo, el converso no es cierto, es decir, un plan de transporte no necesariamente induce un mapa de transporte.

Fijando $\mu \in \mathcal{P}(X)$, $\nu \in \mathcal{P}(Y)$ y $c : X \times Y \rightarrow [0, +\infty]$ semicontinua inferior, es decir, $\liminf_{k \rightarrow \infty} c(x_k) \geq c(x)$ cuando $x_k \rightarrow x$. Los *problemas de Monge* (C_M) y *Kantorovich* (C_K) se pueden plantear de la siguiente manera:

$$C_M(\mu, \nu) := \inf \left\{ \int_X c(x, T(x)) d\mu(x) : T_{\#}\mu = \nu \right\},$$

$$C_K(\mu, \nu) := \inf \left\{ \int_{X \times Y} c(x, y) d\gamma(x, y) : \gamma \in \Pi(\mu, \nu) \right\}.$$

Si $T_{\#}\mu = \nu$, entonces $\gamma_T := (Id \times T)_{\#}\mu \in \Pi(\mu, \nu)$, así que

$$\int_X c(x, T(x)) d\mu(x) = \int_X c \circ (Id \times T)(x) d\mu(x) = \int_{X \times Y} c(x, y) d\gamma_T(x, y).$$

Es decir, cualquier mapa de transporte T induce un plan de transporte con el mismo costo. Así podemos deducir que $C_M(\mu, \nu) \geq C_K(\mu, \nu)$.

Teorema 1.5. Sea $c : X \times Y \rightarrow [0, +\infty]$ una función semicontinua inferior, $\mu \in \mathcal{P}(X)$ y $\nu \in \mathcal{P}(Y)$, entonces existe un plan de transporte $\tilde{\gamma} \in \Pi(\mu, \nu)$ que minimiza el problema de Kantorovich C_K .

Este teorema nos asegura que siempre existe un plan de transporte que minimiza el costo para el problema de Kantorovich, pero no nos dice cuál es y si es único. De hecho, en general, este plan de transporte no es único y tampoco necesariamente es inducido por un mapa de transporte.

Definición 1.6. Sea (X, d) un espacio métrico localmente compacto y separable. Dado $1 \leq p < \infty$ definimos

$$\mathcal{P}_p(X) := \left\{ \mu \in \mathcal{P}(X) : \int_X d(x, x_0)^p d\mu(x) < \infty \text{ para algún } x_0 \in X \right\}$$

como el conjunto de medidas de probabilidad con p -momento finito.

Observación 1.7. El punto $x_0 \in X$ en la definición de $\mathcal{P}_p(X)$ no es relevante, pues si $x_1 \in X$, tenemos

$$d(x, x_1)^p \leq (d(x, x_0) + d(x_0, x_1))^p \leq 2^{p-1}(d(x, x_0)^p + d(x_0, x_1)^p).$$

Así, si $\mu \in \mathcal{P}(X)$ cumple que $\int_X d(x, x_0)^p d\mu(x) < \infty$, entonces $\int_X d(x, x_1)^p d\mu(x) < \infty$. Por el mismo argumento, si $\mu, \nu \in \mathcal{P}_p(X)$, entonces para todo $\gamma \in \Pi(\mu, \nu)$ se cumple

$$\int_{X \times X} d(x, y)^p d\gamma \leq 2^{p-1} \left(\int_X d(x, x_0)^p d\mu + \int_X d(y, x_0)^p d\nu \right) < \infty.$$

Definición 1.8. Dados $\mu, \nu \in \mathcal{P}_p(X)$, definimos la p -distancia de Wasserstein como

$$W_p(\mu, \nu) := \left(\inf_{\gamma \in \Pi(\mu, \nu)} \int_{X \times X} d(x, y)^p d\gamma(x, y) \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Por la observación anterior, W_p es finita en $\mathcal{P}_p(X) \times \mathcal{P}_p(X)$. Es más, el nombre de p -distancia es por el siguiente teorema.

Teorema 1.9. W_p es una distancia en el espacio $\mathcal{P}_p(X)$.

En esta tesis trabajaremos solamente con $p = 1$ para la distancia de Wasserstein, por lo que denotaremos $W(\mu, \nu) := W_1(\mu, \nu)$. Con toda esta información, estamos listos para entender una noción de curvatura para espacios métricos, la cual se da en la siguiente sección.

1.4. Curvatura de Ollivier

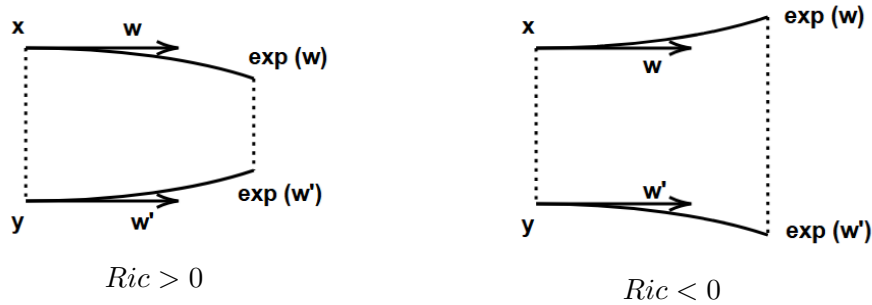
En geometría Riemanniana, la curvatura de Ricci se caracteriza por el hecho de que “las esferas están más cerca o alejadas (en distancia de transporte) que sus centros”. De forma más precisa, consideremos dos puntos cercanos x e y , sea w un vector tangente en x y w' el vector obtenido por transporte paralelo de w desde x a y a lo largo de una geodésica minimizante entre x e y . Si seguimos las geodésicas que salen de x y y , usando los vectores w y w' , respectivamente, obtenemos que si la curvatura es positiva, las geodésicas se acercarán, mientras que en el caso de curvatura negativa, las geodésicas se separarán. La curvatura de Ricci a lo largo de $\log_x(y)$ es justamente este fenómeno, promediado en todas las direcciones w en x , lo cual se justifica con el siguiente resultado.

Teorema 1.10. [12] *Sea (X, d) una variedad Riemanniana suave y completa. Sean v, w vectores tangentes unitarios en $x \in X$. Sean $\varepsilon, \delta > 0$. Sea $y = \exp_x(\delta v)$ y sea w' el vector tangente en y obtenido por transporte paralelo de w a lo largo de la geodésica $\exp_x(tv)$. Entonces*

$$d(\exp_x(\varepsilon w), \exp_y(\varepsilon w')) = \delta \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2} K(v, w) + O(\varepsilon^3 + \varepsilon^2 \delta) \right)$$

Cuando $(\varepsilon, \delta) \rightarrow 0$. Donde $K(v, w)$ es la curvatura seccional en el plano tangente (v, w) .

Si pensamos en la dirección w en x como un punto de una pequeña esfera S_x centrada en x , entonces, en promedio, la curvatura de Ricci controla la distancia entre un punto de S_x y su punto correspondiente en S_y . En un contexto más general, se usa una medida de probabilidad m_x dependiendo de x como análogo de la esfera S_x centrada en x .



Definición 1.11. Sea (X, d) un espacio métrico localmente compacto y separable, equipado con su σ -álgebra de Borel. Un *random walk* m en X es una familia de medidas de probabilidad m_x en X para cada $x \in X$, que satisface las siguientes dos suposiciones:

1. La medida m_x depende de manera medible del punto x .
2. Cada medida m_x tiene un primer momento finito, es decir, para algún $z \in X$, se cumple que:

$$\int d(z, y) dm_x(y) < \infty.$$

En lugar de “puntos correspondientes” entre dos esferas cercanas, usaremos distancias de transporte entre medidas, que es justamente la misma definición descrita en la sección anterior.

Definición 1.12. [12] Sea (X, d) un espacio métrico con un random walk m y sean $x, y \in X$ dos puntos distintos. La *curvatura de Ollivier* de (X, d, m) a lo largo de los puntos x e y es:

$$\kappa(x, y) := 1 - \frac{W(m_x, m_y)}{d(x, y)}.$$

Durante los siguientes ejemplos y el siguiente capítulo utilizaremos la distancia geodésica en grafos, por lo que la definiremos desde un principio.

Definición 1.13. Dado un grafo $G = (V, E)$ no dirigido, la *distancia geodésica* en G está definida por:

$$d(x, y) = \min\{n \in \mathbb{N} : \exists v_0, \dots, v_n, x = v_0, y = v_n, (v_i, v_{i+1}) \in E \forall 0 \leq i \leq n-1\}.$$

Si dicho mínimo no existe, entonces diremos que $d(x, y) = \infty$. En otras palabras, la distancia geodésica cuenta la mínima cantidad de aristas que hay entre un camino que une a dos vértices $x, y \in V$.

Ejemplo 1.14. $X = \mathbb{Z}^n$, considerando las aristas dadas por vértices cuya distancia euclidiana es 1, equipado con la distancia geodésica y m el random walk simple (los m_x son invariantes e independientes de x). Entonces, para cualesquiera $x, y \in \mathbb{Z}^n$ se cumple $\kappa(x, y) = 0$. Esto es porque solamente realizamos una traslación entre las medidas, lo cual define un mapa de transporte óptimo. Esto es que $W(m_x, m_y) = d(x, y)$.

Ejemplo 1.15. $X = \{0, 1\}^n$ el hipercubo discreto equipado con la distancia geodésica y sea m la random walk descrita por $m_x(x) = 1/2$ y $m_x(z) = 1/2n$ si $x \sim z$. Entonces, $\kappa(x, y) = 1/n$, para todo par de vecinos x, y .

Ejemplo 1.16. $X = \{-n, -n+1, \dots, n-1, n\}$ equipado con la métrica definida por $d(x, y) = |x - y|$ y sea m el random walk en X dado por:

$$m_k(k) = \frac{1}{2}, \quad m_k(k+1) = \frac{1}{4} - \frac{k}{4n}, \quad m_k(k-1) = \frac{1}{4} + \frac{k}{4n} \quad \text{si } -n < k < n.$$

$$m_n(n) = m_n(n-1) = \frac{1}{2}, \quad m_{-n}(-n) = m_{-n}(-n+1) = \frac{1}{2}.$$

Entonces $\kappa(x, y) = \frac{1}{2n}$, para todo x, y con $d(x, y) = 1$.

Seguramente el ejemplo más importante y que habla del porqué comparamos la curvatura de Ollivier con la curvatura de Ricci es por el siguiente hecho, el cual más adelante se detallará como un teorema (ver teorema 3.4): Sea (X, d) una variedad Riemanniana N -dimensional suave y completa y $\varepsilon > 0$. Tomando la cadena de Markov m^ε definida por

$$dm_x^\varepsilon := \frac{1}{\text{vol}(B(x, \varepsilon))} d\text{vol}(y)$$

si $y \in B(x, \varepsilon)$ y 0 en otro caso. Sea $x \in X$ y v un vector tangente unitario en x . Sea y un punto en la geodésica que sale de x con dirección v y con $d(x, y)$ suficientemente pequeño, entonces

$$\kappa(x, y) = \frac{\varepsilon^2 \text{Ric}_x(v, v)}{2(N+2)} + O(\varepsilon^3 + \varepsilon^2 d(x, y)).$$

Esto nos da una intuición de que en espacios métricos, si la curvatura de Ollivier es positiva, entonces las “geodésicas” tienden a juntarse, mientras que con curvatura de Ollivier negativa, las “geodésicas” tienden a separarse, que va a ser la propiedad que nos gustaría captar en espacios más generales que una variedad.

Es clave notar que estas curvaturas dependen no solo del espacio métrico X , sino que también del random walk m que elegimos. Entonces, si queremos estudiar esta curvatura en espacios métricos, en nuestro caso serían grafos, necesitamos escoger un random walk que sea lo más natural posible. En la siguiente sección, escogeremos un random walk que tiene esta propiedad.

2. Curvatura de Lin-Lu-Yau

2.1. Introducción

En todo este capítulo vamos a considerar $G = (V, E)$ un grafo simple, conexo, localmente finito y no dirigido, donde V es el conjunto de vértices y E el conjunto de aristas entre estos vértices. Si dos vértices $x, y \in V$ están unidos por una arista, lo denotaremos $x \sim y$. También usaremos la distancia geodésica para cada uno de los grafos de este capítulo y denotaremos por $[x, y]$ al conjunto de vértices de todas las geodésicas entre x e y , incluyendo a x e y .

Consideremos distribuciones de probabilidad sobre V , es decir, mapeos $m : V \rightarrow [0, 1]$ tales que $\sum_{x \in V} m(x) = 1$. Suponiendo que tenemos dos distribuciones de probabilidad m_1, m_2 con soporte finito, un *plan de transporte* es una función $A : V \times V \rightarrow [0, 1]$ con soporte finito tal que

$$\sum_{y \in V} A(x, y) = m_1(x) \quad \text{y} \quad \sum_{x \in V} A(x, y) = m_2(y).$$

En este sentido la *distancia de Wasserstein* para grafos entre dos distribuciones de probabilidad m_1 y m_2 quedará definida como

$$W(m_1, m_2) = \inf_A \sum_{x, y \in V} A(x, y) d(x, y),$$

donde el ínfimo se elige entre todos los planes de transporte A entre m_1 y m_2 . También diremos que una función ϕ sobre V es C -Lipschitz si

$$|\phi(x) - \phi(y)| \leq C d(x, y)$$

para todo $x, y \in V$. Según el teorema de dualidad de Kantorovich [15], la distancia de Wasserstein también se puede escribir de la siguiente manera:

$$W(m_1, m_2) = \sup_{\phi} \sum_{x \in V} \phi(x) (m_1(x) - m_2(x)),$$

donde el supremo se toma sobre todas las funciones ϕ que son 1-Lipschitz.

Para cada vértice $x \in V$, definimos el conjunto de vecinos de x por

$$\Gamma(x) = \{v \in V : v \sim x\},$$

y denotamos $d_x = |\Gamma(x)|$. Notemos que al considerar solamente grafos simples, no puede ocurrir que $x \sim x$, es decir, x no es vecino de sí mismo. Para cada $\alpha \in [0, 1]$ y cada vértice $x \in V$ definimos la medida de probabilidad m_x^α como

$$m_x^\alpha(v) = \begin{cases} \alpha & \text{si } v = x, \\ \frac{1-\alpha}{d_x} & \text{si } v \in \Gamma(x), \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Un pequeño argumento del porqué usamos estas medidas de probabilidad m_x^α para calcular la curvatura es por la simplicidad que tienen implícitamente, ya que estamos considerando solo los vecinos más cercanos de un vértice x y todos sus vecinos tienen un mismo peso. Aparte, para los cálculos que haremos más adelante, es muy conveniente que la gran mayoría de la masa que se encuentra en m_x^α esté en el vértice central x . Además, como veremos más adelante, es posible calcular dicha curvatura de forma explícita para ciertos casos.

Definición 2.1. Para $x, y \in V$, definimos la α -curvatura de Ricci κ_α como

$$\kappa_\alpha(x, y) = 1 - \frac{W(m_x^\alpha, m_y^\alpha)}{d(x, y)}.$$

Lema 2.2. [9]. Para dos vértices cualesquiera x, y , $\kappa_\alpha(x, y)$ es cóncava en $[0, 1]$ respecto a α .

Lema 2.3. [9]. Para cualquier $\alpha \in [0, 1]$ y cualesquiera x, y vértices, se tiene

$$\kappa_\alpha(x, y) \leq \frac{2(1 - \alpha)}{d(x, y)}.$$

Demostración. Por desigualdad tenemos que

$$W(m_x^\alpha, m_y^\alpha) \geq W(\delta_x, \delta_y) - W(\delta_x, m_x^\alpha) - W(\delta_y, m_y^\alpha) = d(x, y) - 2(1 - \alpha),$$

donde $\delta_z(w) = 1$ si $w = z$ y es 0 en otro caso. Luego, usando la definición, obtenemos

$$\kappa_\alpha(x, y) = 1 - \frac{W(m_x^\alpha, m_y^\alpha)}{d(x, y)} \leq \frac{2(1 - \alpha)}{d(x, y)}.$$

□

El lema 2.1 implica que $h(\alpha) = \kappa_\alpha(x, y)/(1 - \alpha)$ es una función creciente con respecto a α en $[0, 1)$ y el lema 2.2 dice que $h(\alpha)$ es acotada. Por lo tanto, el límite $\lim_{\alpha \rightarrow 1} \kappa_\alpha(x, y)/(1 - \alpha)$ existe.

Definición 2.4. Dado un grafo $G = (V, E)$ con α -curvatura de Ricci $\kappa_\alpha(x, y)$. Definimos la *curvatura de Lin-Lu-Yau* por

$$\kappa_{LLY}(x, y) := \lim_{\alpha \rightarrow 1} \frac{\kappa_\alpha(x, y)}{1 - \alpha}.$$

Lo primero que podemos notar es que esta curvatura solo tiene valores entre $(-2, 2]$. El porqué se cumple que $-2 < \kappa_{LLY}$ es por el hecho de que podemos construir grafos donde todos los vecinos de x y y estén lo más alejados posible (esto sería a una distancia $d(x, y) + 2$ entre ellos, sin contar a los vecinos dentro de $[x, y]$). Cuando tenemos solo una geodésica, obtenemos el caso de que el grafo sea un árbol, en el cual calculamos la curvatura de forma explícita en el teorema 2.9, que claramente está acotada por debajo por -2 . Para evitar problemas al hacer cálculos de esta curvatura, enunciamos la siguiente proposición, la cual nos da una gran libertad para tomar un valor de α suficientemente cercano a 1.

Teorema 2.5. [5]. Sea $G = (V, E)$ un grafo y sean $x \neq y \in V$, entonces

$$\kappa_{LLY}(x, y) = \frac{\kappa_\alpha(x, y)}{1 - \alpha}$$

para todo $\alpha \in [\frac{1}{2}, 1)$.

En particular, si consideramos α suficientemente cercano a 1, entonces $h(\alpha) = \frac{\kappa_\alpha(x, y)}{1 - \alpha}$ es eventualmente constante, por lo que desde ahora en adelante supondremos que α es suficientemente cercano a 1. Esto servirá sobre todo cuando veamos el producto cartesiano entre grafos.

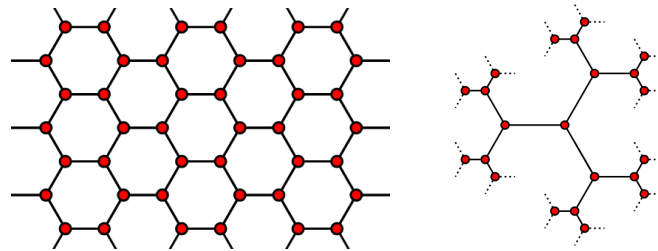
Proposición 2.6. [9]. Si $\kappa_{LLY}(x, y) \geq \kappa_0$ para cada $x \sim y$, entonces $\kappa_{LLY}(x, y) \geq \kappa_0$ para cada par de vértices $x, y \in V$.

De esta proposición se puede rescatar que

$$\inf_{x, y \in V} \kappa_{LLY}(x, y) = \inf_{x \sim y} \kappa_{LLY}(x, y).$$

Así podemos saber que si $\kappa_{LLY}(x, y) \geq \kappa_0 > 0$ para todo $x \sim y$, entonces $\kappa_{LLY}(x, y) > 0$ para todo $x, y \in V$. Por esto mismo, muchos autores estudian este tipo de curvatura solamente teniendo en cuenta cuando $x \sim y$ y combinándolo con el hecho anterior, hay mucho estudio sobre este tipo de grafos con curvatura estrictamente positiva. Sin embargo, no es fácil encontrar información sobre grafos de curvatura negativa, ya que las cotas por arriba de $\kappa_{LLY}(x, y)$ no son comunes y las que hay son cotas estrictamente positivas.

Pero tomemos en cuenta los siguientes ejemplos. Para cada uno de los grafos consideramos solamente $x \sim y$, entonces es posible obtener que $\kappa_{LLY}(x, y) = -2/3$ en ambos grafos (con las herramientas presentadas más adelante se vuelve un trabajo sencillo obtener de forma rápida y precisa este valor), pero el primer grafo es un teselado del plano euclidiano, así que esperamos que se vea como algo plano (curvatura nula, es más, los teselados del plano con cuadrados o triángulos nos dan curvatura nula, es por eso que esperamos que la curvatura no siempre sea negativa), pero el grafo de la derecha es un árbol, el cual esperamos que sea hiperbólico (curvatura negativa).



Esto invita a no solamente estudiar la curvatura $\kappa_{LLY}(x, y)$ cuando $x \sim y$, sino a ser un poco más generales. En las siguientes secciones se tratará de abordar estrategias para poder calcular de forma explícita estas curvaturas, es decir, estudiaremos las curvaturas de $\kappa_{LLY}(x, y)$ a gran escala.

2.2. Trabajos Relacionados

Sobre la curvatura de Lin-Lu-Yau hay varios trabajos, los cuales usan técnicas diferentes a la usada en este trabajo y que son, al igual que para nosotros, para grafos específicos. En estos se utilizan técnicas de combinatoria, transporte óptimo, teoría de grupos, entre otros.

En el trabajo de Cushing, Kamtue, Kangaslampi et al. [6] estudian dos distintas nociones de curvaturas discretas, las cuales son la de Bakry-Émery y la que más nos importa, la de Ollivier, en grafos de Cayley. Mientras que en el trabajo de Mizukai y Sako [11] se estudia la curvatura de Ollivier en grafos de Cayley, más específicamente en grupos diedrales, grupos generalizados de cuaterniones y grupos cíclicos con un conjunto generador de a lo más 4 elementos. Ambos trabajos, cuando buscan la curvatura de Ollivier, usan la noción presentada por Lin-Lu-Yau, pero solamente cuando $x \sim y$.

Por otro lado, en el trabajo de Smith [13] menciona que esta curvatura de Ollivier, exactamente la curvatura de Lin-Lu-Yau, es un buen candidato a ser un invariante de isomorfismo, incluyendo un diagrama logístico para ayuda computacional o de visualización. Además, identificó dos clases de grafos infinitos con dicha curvatura positiva y da una condición para poder calcular de forma explícita la curvatura de Lin-Lu-Yau.

Un trabajo reciente de Chen, Liu y Zhang [4] confirma la conjetura de Bonini et al. [2] que calcula el valor exacto de grafos fuertemente regulares con parámetros $(4\gamma + 1, 2\gamma, \gamma - 1, \gamma)$ para $\gamma \geq 2$. En el trabajo de Loisel y Romon [10] se describe un método computacional para obtener la curvatura de Lin-Lu-Yau en superficies poliédricas.

Un trabajo más cercano sería el de Bhattacharya y Mukherjee [1], quienes entregan valores exactos de la curvatura de Lin-Lu-Yau mediante particiones de los vecinos de vértices x, y , esto en el caso en que los grafos son bipartitos. Para ver una similitud con nuestro trabajo, revisemos uno de sus teoremas: En primer lugar, cuando se refieren a que un grafo G es bipartito, se refieren a que no hay ciclos de largo impar dentro de G . Consideramos que $x \sim y$ y denotan por $N_G(x)$ y $N_G(y)$ al conjunto de vecinos de x e y , respectivamente, y particionan $N_G(x) = N_0(x) \cup N_1(x) \cup \{y\}$, donde

$$N_1(x) := \{z \in N_G(x) \setminus \{y\} : d_G(z, N_G(y)) = 1\}, \quad N_0(x) = N_G(x) \setminus (N_1(x) \cup \{y\}).$$

Aquí $N_1(x)$ sería entonces el conjunto de vecinos de x tales que están en un 4-ciclo soportado en (x, y) . De forma similar, se puede particionar $N_G(y)$. También diremos que un grafo $H = (V', E')$ es un subgrafo inducido de $G = (V, E)$ por un subconjunto $V' \subseteq V$ si para cada $w, z \in V'$, $w \sim z$ en H solo si $w \sim z$ en G . Definimos

$$P_G(x, y) := \{v \in V : d_G(x, v) = d_G(y, v) = 2\}, \quad V_{(x,y)} := N_G(x) \cup N_G(y) \cup P_G(x, y).$$

Ahora, asumiendo que los vértices $x \sim y$ no tienen vecinos en común y que el conjunto de vértices a distancia 2 de x e y es vacío, denotando $m_+ := \max\{b, 0\}$, se cumple lo siguiente:

Teorema 2.7. [1]. Sea $G = (V(G), E(G))$ un grafo bipartito no ponderado (sin peso en las aristas) y sean $x \sim y$. Supongamos que $R(x, y)$ es el subgrafo de $G_{(x,y)}$ inducido por $N_1(x) \cup N_1(y)$ y $R_1(x, y), R_2(x, y), \dots, R_q(x, y)$ las componentes conectadas de $R(x, y)$. Si $U_a(x) = V(R_a(x, y)) \cap N_1(x)$ y $U_a(y) = V(R_a(x, y)) \cap N_1(y)$ para $a \in \{1, 2, \dots, q\}$, entonces

$$\kappa(x, y) = -2 \left(1 - \frac{1}{d_x} - \frac{1}{d_y} - \frac{|N_1(y)|}{d_y} + \sum_{a=1}^q \left(\frac{|U_a(y)|}{d_y} - \frac{|U_a(x)|}{d_x} \right)_+ \right)_+.$$

Otro resultado al que llegan es mediante el uso de la cintura $g(G)$, que denota el largo del ciclo más corto en G . Usando la notación $a \wedge b = \min\{a, b\}$ y usando la partición $N_G(x) = N_0(x) \cup N_2(x) \cup \{y\}$, donde

$$N_2(x) := \{z \in N_G(x) \setminus \{y\} : d_G(z, N_G(y)) = 2\},$$

se obtiene el siguiente resultado.

Teorema 2.8. [1]. Sea $G = (V(G), E(G))$ un grafo no ponderado, localmente finito y con $g(G) \geq 5$. Sean $x \sim y$ y supongamos que $Q(x, y)$ es el subgrafo de $G_{(x,y)}$ inducido por $N_2(x) \cup N_2(y) \cup P_G(x, y)$, y sean $Q_1(x, y), Q_2(x, y), \dots, Q_q(x, y)$ las componentes conexas de $Q(x, y)$. Si $L_a(x) = V(Q_a(x, y)) \cap N_2(x)$ y $L_a(y) = V(Q_a(x, y)) \cap N_2(y)$ para todo $a \in \{1, 2, \dots, q\}$. Entonces $\kappa(x, y) = \kappa_0(x, y) \wedge \kappa_1(x, y)$, donde κ_0 y κ_1 están dados por

$$\kappa_0(x, y) = - \left(1 - \frac{1}{d_x} - \frac{1}{d_y} \right)_+ \\ \kappa_1(x, y) = -2 \left(1 - \frac{1}{d_x} - \frac{1}{d_y} - \frac{|N_2(x)|}{2d_x} + \frac{1}{2} \sum_{a=1}^q \left(\frac{|L_a(x)|}{d_x} - \frac{|L_a(y)|}{d_y} \right)_+ \right)_+.$$

El trabajo hecho en esta tesis tiene el contraste de que, en primer lugar, como mencionamos en la sección anterior, cuando queremos estudiar curvaturas, no necesariamente queremos considerar la curvatura entre vértices $x \sim y$, sino que también nos gustaría ver curvaturas de puntos un poco más alejados. Veremos que el problema es más difícil de lo que parece, así que tomaremos grafos de los que sea factible calcular su curvatura, dando una fórmula explícita. Luego exigiremos un poco más al grafo, definiendo así los grafos dóciles, los cuales, como veremos, son muy sencillos o directos de obtener su curvatura, aparte de poder hacer operaciones con ellos y que sigan preservando esta cualidad de que su curvatura sea muy sencilla de obtener.

2.3. Primeros ejemplos

2.3.1. Árboles

El caso más simple para calcular curvatura es cuando tenemos un árbol, ya que tenemos un único camino que conecta a dos puntos. Aquí dejamos el cálculo explícito.

Teorema 2.9. *Sea $G = (E, V)$ un árbol, entonces, dados dos vértices $x, y \in V$ se tiene*

$$\kappa_{LLY}(x, y) = \frac{1}{d(x, y)} \left(-2 + \frac{2}{d_x} + \frac{2}{d_y} \right).$$

Demostración. Tomemos primero el caso donde $d(x, y) \geq 2$. Como G es un árbol, existe un único camino entre x e y . Así existen únicos $x' \in [x, y] \cap \Gamma(x)$ e $y' \in [x, y] \cap \Gamma(y)$ tales que

$$W(m_x^\alpha, m_y^\alpha) = W(m_x^\alpha, \delta_{x'}) + W(\delta_{x'}, \delta_{y'}) + W(\delta_{y'}, m_y^\alpha).$$

La igualdad se da por el hecho de que el grafo es un árbol, y por lo tanto solo existe un único camino de transportar la masa desde los vecinos de x y x mismo a x' , luego de x' a y' y finalmente de y' a los vecinos de y e y mismo. Luego $W(m_x^\alpha, \delta_{x'})$ es el coste de mover la masa que va desde $\Gamma(x) \setminus \{x'\}$ a x y a eso se le suma el coste de mover la masa que nos queda en x a x' . De forma más explícita

$$W(m_x^\alpha, \delta_{x'}) = \left[\frac{(d_x - 1)(1 - \alpha)}{d_x} \right] + \left[1 - \frac{1 - \alpha}{d_x} \right] = 2 - \alpha - 2 \frac{1 - \alpha}{d_x}.$$

El mismo argumento se puede aplicar para $W(\delta_{y'}, m_y^\alpha)$, obteniendo

$$\begin{aligned} W(m_x^\alpha, m_y^\alpha) &= W(m_x^\alpha, \delta_{x'}) + W(\delta_{x'}, \delta_{y'}) + W(\delta_{y'}, m_y^\alpha) \\ &= \left(2 - \alpha - 2 \frac{1 - \alpha}{d_x} \right) + (d(x, y) - 2) + \left(2 - \alpha - 2 \frac{1 - \alpha}{d_y} \right) \\ &= (1 - \alpha) \left(2 - \frac{2}{d_x} - \frac{2}{d_y} \right) + d(x, y). \end{aligned}$$

Ocupando la definición de la α -curvatura de Ricci, obtenemos

$$\kappa_\alpha(x, y) = 1 - \frac{W(m_x^\alpha, m_y^\alpha)}{d(x, y)} = \frac{(1 - \alpha)}{d(x, y)} \left(-2 + \frac{2}{d_x} + \frac{2}{d_y} \right).$$

$$\kappa_{LLY}(x, y) = \lim_{\alpha \rightarrow 1^-} \frac{\kappa_\alpha(x, y)}{1 - \alpha} = \frac{1}{d(x, y)} \left(-2 + \frac{2}{d_x} + \frac{2}{d_y} \right).$$

En el caso de $d(x, y) = 1$, tenemos que $x \in \Gamma(y)$. Luego $W(m_x^\alpha, m_x^\alpha)$, es el costo de mover la masa de todos los vértices de $\Gamma(x) \setminus \{y\}$ a x , luego mover esta masa que queda en x a y , menos la masa de un vecino de y (queremos que se quede en x), el cual es $(1 - \alpha)/d_y$, y finalmente mover la respectiva masa que tenemos en y a $\Gamma(y) \setminus \{x\}$.

$$W(m_x^\alpha, m_x^\alpha) = \left[\frac{(d_x - 1)(1 - \alpha)}{d_x} \right] + \left[1 - \frac{(1 - \alpha)}{d_x} - \frac{(1 - \alpha)}{d_y} \right] + \left[\frac{(d_y - 1)(1 - \alpha)}{d_y} \right]$$

$$= 3 - 2\alpha - 2 \left(\frac{1 - \alpha}{d_x} + \frac{1 - \alpha}{d_x} \right).$$

Aplicando la definición, obtenemos

$$\kappa_\alpha(x, y) = (1 - \alpha) \left(-2 + \frac{2}{d_x} + \frac{2}{d_y} \right) \Rightarrow \kappa_{LLY}(x, y) = \left(-2 + \frac{2}{d_x} + \frac{2}{d_y} \right).$$

□

Lo que podemos ver de este resultado es que en un árbol la curvatura es casi siempre negativa (siempre y cuando $d_x, d_y \geq 3$). Sin embargo, cuando tenemos más “conexiones” dentro de nuestro grafo, el mismo argumento en nuestra demostración no aplica, ya que eliminamos esta unicidad en que podemos transportar la masa. En otras palabras, los vecinos de x no necesariamente tienen que usar la geodésica $[x, y]$ para que el transporte sea óptimo si en el grafo existen ciclos. Para ver qué tanto se aumenta la complejidad del problema, consideremos solamente el caso en donde nuestro grafo tiene un solo ciclo.

2.3.2. Grafos con un Solo Ciclo.

Para esta sección consideraremos solo grafos G que tienen un solo ciclo de largo $n \geq 3$. Definimos el *ciclo* de largo n por

$$\mathcal{C} := \{x \in V : \exists \{x_i\}_{i=0}^n \text{ tal que } x_0 = x_n = x, x_i \sim x_{i+1} \forall 0 \leq i < n, x_i \neq x_j \forall i < j < n\},$$

y dado $x \in \mathcal{C}$, introducimos la noción de la *raíz del vértice* x por

$$\mathcal{R}(x, \mathcal{C}) := \{y \in V \setminus \mathcal{C} : d(y, x) < d(y, z) \forall z \in \mathcal{C} \setminus \{x\}\}.$$

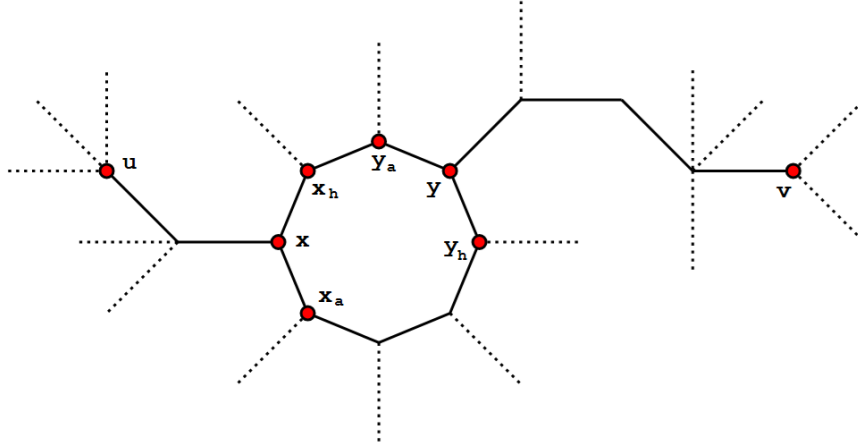
Notemos que si G tiene un solo ciclo, se cumple que

$$V = \mathcal{C} \cup \left(\bigcup_{x \in \mathcal{C}} \mathcal{R}(x, \mathcal{C}) \right),$$

además, esta unión es disjunta. Dado que solo existe un único ciclo en nuestro grafo, podemos dotar a su ciclo con una orientación, es decir, dado $x \in \mathcal{C}$, este tendrá dos vecinos que estarán también dentro del ciclo, los cuales estarán en sentido *horario* y *antihorario* de x , que llamaremos x_h y x_a , respectivamente.

Observación 2.10. Para el cálculo de $\kappa_{LLY}(x, y)$ no es relevante escoger una orientación. Esto es con el fin de simplificar la notación y tener una mejor intuición de lo que debe pasar en el grafo.

En el siguiente esquema tenemos un ejemplo de vértices en un grafo con un ciclo de largo 8, donde $x, y \in \mathcal{C}$, $u \in \mathcal{R}(x, \mathcal{C})$, $v \in \mathcal{R}(y, \mathcal{C})$ y x, y tienen sus respectivos vecinos horarios y antihorarios.



A partir de esto definimos la *matriz de distancia con puntos principales* x, y como:

$$D_{x,y} := \begin{bmatrix} d(x, y) & d(x, y_h) & d(x, y_a) & d(x, \mathcal{R}(y, \mathcal{C})) \\ d(x_h, y) & d(x_h, y_h) & d(x_h, y_a) & d(x_h, \mathcal{R}(y, \mathcal{C})) \\ d(x_a, y) & d(x_a, y_h) & d(x_a, y_a) & d(x_a, \mathcal{R}(x, \mathcal{C})) \\ d(\mathcal{R}(x, \mathcal{C}), y) & d(\mathcal{R}(x, \mathcal{C}), y_h) & d(\mathcal{R}(x, \mathcal{C}), y_a) & d(\mathcal{R}(x, \mathcal{C}), \mathcal{R}(y, \mathcal{C})) \end{bmatrix}.$$

Donde $d(w, \mathcal{R}(z, \mathcal{C}))$ es la distancia entre w y cualquier vecino de z que esté en su raíz. Lo mismo para $d(\mathcal{R}(w, \mathcal{C}), \mathcal{R}(z, \mathcal{C}))$, la cual sería la distancia entre cualquier elemento de la raíz de w y un elemento de la raíz de z . Por estas mismas definiciones tenemos $d(w, \mathcal{R}(z, \mathcal{C})) = d(w, z) + 1$ y $d(\mathcal{R}(w, \mathcal{C}), \mathcal{R}(z, \mathcal{C})) = d(w, z) + 2$.

Sin embargo, esto solo tiene sentido si $x, y \in \mathcal{C}$. Si y está en una raíz, entonces no tiene vecinos horarios y antihorarios, pero tiene un único vecino en $[x, y]$. En este caso, vamos a usar la misma matriz de 4×4 (más adelante veremos que esto en realidad cambia), pero teniendo en cuenta que si y no está en \mathcal{C} , entonces $y_h = y_a$. Esto se traduce a que vamos a repetir una columna o fila, que para efectos de ejemplificar, no produce ningún daño a ningún cálculo.

Para el caso en que $x, y \in \mathcal{C}$, se cumple que $d(x_h, y_h) = d(x_a, y_a) = d(x, y)$. Sin pérdida de generalidad, podemos asumir $d(x_a, y_h) \leq d(x_h, y_a)$. Si no sucede esto, podemos calcular la matriz traspuesta y esto cambia la orientación del ciclo, pero no nos afecta en nada para cuando queramos calcular la curvatura del grafo. Así $x_a, y_h \in [x, y]$, por lo que $d(x_a, y_h) = d(x, y) - 2$, $d(x, y_h) = d(x_a, y)$ y $d(x_h, y) = d(x, y_a)$. Por otro lado, si $d(x, y_a) = d(x, y) - 1$, entonces $x_h, y_a \in [x, y]$, por lo que $d(x_h, y_a) = d(x, y) - 2$. Si $d(x, y_a) = d(x, y)$, entonces $d(x_h, y_a) = d(x, y) - 1$. Por último, si $d(x, y_a) = d(x, y) + 1$, entonces $d(x_h, y_a)$ puede ser $d(x, y)$, $d(x, y) + 1$ o $d(x, y) + 2$.

En el caso de que $x \in \mathcal{C}$ e $y \notin \mathcal{C}$, entonces $y_h = y_a$. Consideraremos sin pérdida de generalidad que $x_a \in [x, y]$. Así, las filas 1, 3 y 4 de la matriz están bien determinadas en cuanto a sus valores, pero en la fila 2, tendremos 3 opciones, las cuales son que $d(x_h, y) = -1$,

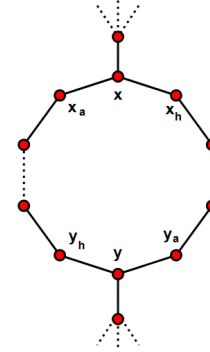
0 o 1. En cualquiera de los casos tendríamos $d(x_h, y_h) = d(x_h, y_a) = d(x_h, y) - 1$. El caso $y \in \mathcal{C}$ e $x \notin \mathcal{C}$ es análogo, tomando la matriz traspuesta.

Por último, si $x, y \notin \mathcal{C}$, entonces la matriz completa está determinada, puesto que el único camino que va desde un vértice a otro sería una geodésica entre estos dos puntos. Además, tendríamos que $x_h = x_a$ e $y_h = y_a$.

Usando la notación $[\mathbf{d}]$ para la matriz 4×4 cuyas entradas son todas $d(x, y)$, podemos escribir la matriz de distancia con puntos principales x, y con los siguientes casos:

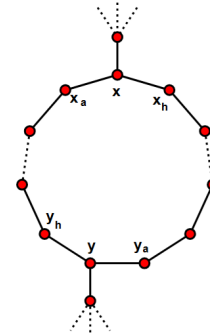
Caso 1: $x, y \in \mathcal{C}$, $|\mathcal{C}| = 2k$, $d(x, y) = k$.

$$D_{x,y} = [\mathbf{d}] + \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$



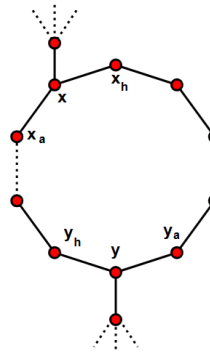
Caso 2: $x, y \in \mathcal{C}$, $|\mathcal{C}| = 2k + 1$, $d(x, y) = k$.

$$D_{x,y} = [\mathbf{d}] + \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$



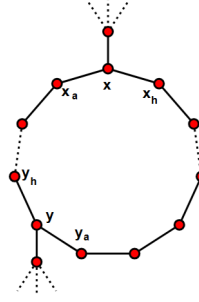
Caso 3: $x, y \in \mathcal{C}$, $|\mathcal{C}| = 2k$, $d(x, y) = k - 1$.

$$D_{x,y} = [\mathbf{d}] + \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$



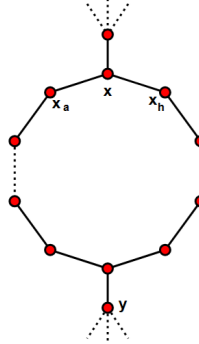
Caso 4: $x, y \in \mathcal{C}$, $|\mathcal{C}| = 2k + 1$, $d(x, y) = k - 1$.

$$D_{x,y} = [\mathbf{d}] + \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$



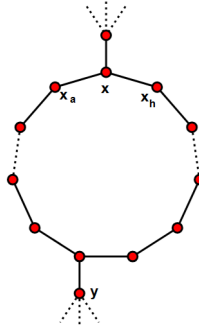
Caso 5: $x \in \mathcal{C}$, $|\mathcal{C}| = 2k$, $y \in \mathcal{R}(z, \mathcal{C})$ donde $d(x, z) = k$.

$$D_{x,y} = [\mathbf{d}] + \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -2 & 0 \\ -1 & -2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$



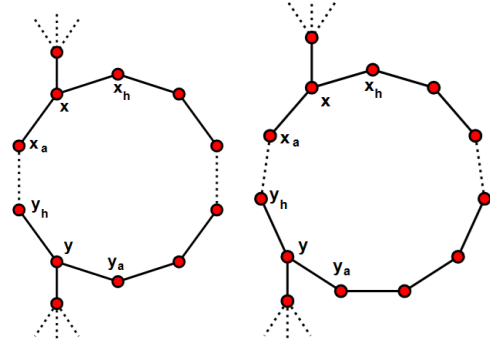
Caso 6: $x \in \mathcal{C}$, $|\mathcal{C}| = 2k + 1$, $y \in \mathcal{R}(z, \mathcal{C})$ donde $d(x, z) = k$.

$$D_{x,y} = [\mathbf{d}] + \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$



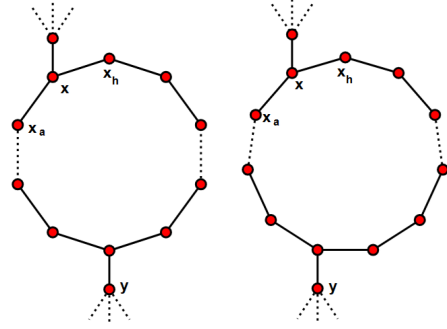
Caso 7: $x, y \in \mathcal{C}$, $|\mathcal{C}| = 2k$ o $|\mathcal{C}| = 2k + 1$, $d(x, y) \leq k - 2$.

$$D_{x,y} = [\mathbf{d}] + \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$



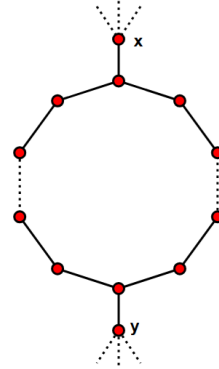
Caso 8: $x \in \mathcal{C}$, $|\mathcal{C}| = 2k$ o $|\mathcal{C}| = 2k + 1$, $y \in \mathcal{R}(z, \mathcal{C})$ donde $d(x, z) \leq k - 1$.

$$D_{x,y} = [\mathbf{d}] + \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$



Caso 9: $x, y \notin \mathcal{C}$.

$$D_{x,y} = [\mathbf{d}] + \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -2 & 0 \\ -1 & -2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$



De los 9 casos posibles, hay algunos que son análogos a otros, por ejemplo, el caso 7, 8 y 9 son análogos a ver un árbol. Sin embargo, aparecen muchos casos nuevos comparados con un árbol, pues aquí la masa se puede “separar” al pasar de m_x^α a m_y^α . Para los demás casos, podemos calcular la curvatura de forma explícita, lo cual está enunciado en el siguiente teorema.

Teorema 2.11. Sea $G = (E, V)$ grafo con un ciclo \mathcal{C} y vértices $x, y \in V$, entonces la curvatura de Lin-Lu-Yau $\kappa_{LLY}(x, y)$ se puede calcular como:

Caso 1: $n = 2k$ con $k \geq 2$, $d(x, y) = k$, $x, y \in \mathcal{C}$.

$$\kappa_{LLY}(x, y) = \frac{1}{d(x, y)} \left(-2 + \frac{4}{d_x} + \frac{4}{d_y} \right).$$

Caso 2: $n = 2k + 1$ con $k \geq 1$, $d(x, y) = k$, $x, y \in \mathcal{C}$.

$$\kappa_{LLY}(x, y) = \frac{1}{d(x, y)} \left(-2 + \frac{3}{d_x} + \frac{3}{d_y} + \min \left\{ \frac{1}{d_x}, \frac{1}{d_y} \right\} \right).$$

Caso 3: $n = 2k$ con $k \geq 2$, $d(x, y) = k - 1$, $x, y \in \mathcal{C}$.

$$\kappa_{LLY}(x, y) = \frac{1}{d(x, y)} \left(-2 + \frac{3}{d_x} + \frac{3}{d_y} - \left| \frac{1}{d_x} - \frac{1}{d_y} \right| \right).$$

Caso 4: $n = 2k + 1$ con $k \geq 1$, $d(x, y) = k$, $x, y \in \mathcal{C}$.

$$\kappa_{LLY}(x, y) = \frac{1}{d(x, y)} \left(-2 + \frac{3}{d_x} + \frac{3}{d_y} - \max \left\{ \frac{1}{d_x}, \frac{1}{d_y} \right\} \right).$$

Caso 5: $n = 2k$ con $k \geq 2$, $x \in \mathcal{C}$, $y \in \mathcal{R}(z)$ donde $d(x, z) = k$.

$$\kappa_{LLY}(x, y) = \frac{1}{d(x, y)} \left(-2 + \frac{4}{d_x} + \frac{2}{d_y} \right).$$

Caso 6: $n = 2k + 1$ con $k \geq 2$, $x \in \mathcal{C}$, $y \in \mathcal{R}(z)$ donde $d(x, z) = k$.

$$\kappa_{LLY}(x, y) = \frac{1}{d(x, y)} \left(-2 + \frac{3}{d_x} + \frac{2}{d_y} \right).$$

Caso 7: En cualquier otro caso.

$$\kappa_{LLY}(x, y) = \frac{1}{d(x, y)} \left(-2 + \frac{2}{d_x} + \frac{2}{d_y} \right).$$

La demostración de este teorema se omitirá, ya que los grafos de un solo ciclo son un caso particular de los grafos que estudiaremos más adelante, los cuales serán los grafos controlados y bien separados. Solo los incluimos para tener una noción de cercanía entre los vecinos de x y y , además de explotar lo complicado que puede ser calcular la curvatura solo viendo la matriz de distancia $D_{x,y}$.

2.4. Matriz de Distancia

La matriz de distancia que se definió en la sección anterior en realidad se puede extender a cualquier grafo. Basta ver cómo se comportan los vecinos entre dos vértices $x, y \in V$, con solo esta información y la distancia $d(x, y)$ deberíamos ser capaces de calcular la curvatura $\kappa_{LLY}(x, y)$. Sin embargo, esta relación no es para nada directa y en realidad es un problema bastante complejo de resolver. Igualmente, una de las cosas que podríamos preguntarnos es cuáles son las posibles matrices de distancia que pueden aparecernos en un caso más general. Partamos eligiendo un grafo $G = (V, E)$ con $x, y \in V$ y $\{x_1, \dots, x_m\}, \{y_1, \dots, y_n\}$ vecinos de x e y , respectivamente, donde $m = d_x$ y $n = d_y$. Definimos la matriz de distancia $D_{x,y}$ como la siguiente:

$$D_{x,y} := \begin{bmatrix} d(x, y) & d(x, y_1) & \cdots & d(x, y_n) \\ d(x_1, y) & d(x_1, y_1) & \cdots & d(x_1, y_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d(x_m, y) & d(x_m, y_1) & \cdots & d(x_m, y_n) \end{bmatrix}.$$

Esta matriz se puede escribir como la suma de $[\mathbf{d}]$ y una matriz residual, es decir, cada entrada de la primera fila se puede escribir como $d(x, v) = d(x, y) + i$, con $i \in \{-1, 0, 1\}$ y $v \in \Gamma(y)$. Lo mismo pasa para la primera columna, y las demás entradas se pueden escribir como $d(x_i, y_j) = d(x, y) + i$ donde $i \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Las posibles matrices residuales son las siguientes:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & \{-2, -1, 0\} & \{-1, 0\} & 0 \\ 0 & \{-1, 0\} & \{-1, 0, 1\} & \{0, 1\} \\ 1 & 0 & \{0, 1\} & \{0, 1, 2\} \end{bmatrix}.$$

Esto quiere decir que, por ejemplo, cada vez que veamos un -1 en la primera fila, entonces en la columna de esta entrada encontraremos valores entre $-2, -1, 0$. Si en la primera fila aparece un 0 , entonces en su columna solo pueden aparecer valores $-1, 0, 1$. Por otro lado, no necesariamente aparecerán los valores 0 ó 1 en la primera fila y/o columna, pero sí debe aparecer al menos un -1 en la primera fila y primera columna, puesto que existe al menos una geodésica entre x e y . Además, podemos hacer las combinaciones entre valores de la primera columna y primera fila, por ejemplo, si tenemos un 0 en entrada $(1, n)$ (primera fila) y un 1 en la entrada $(m, 1)$ (primera columna), entonces en la entrada (m, n) solo podemos tener valores entre 0 ó 1 .

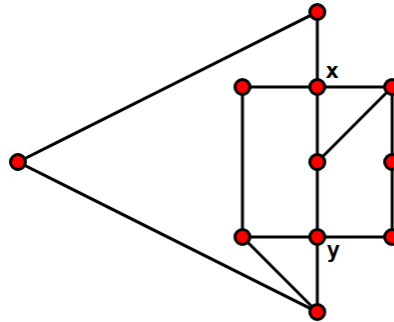
Hay que recalcar que esta matriz está escrita como 4×4 , pero no necesariamente es una matriz 4×4 , sino que debería ser $(d_x + 1) \times (d_y + 1)$, pero la escribimos así para ver las posibles opciones que tenemos según los valores que tenemos en la primera fila y columna. Aquí la primera entrada $A_{1,1}$ siempre sería $d(x, y) - d(x, y) = 0$. La primera fila corresponde a $d(x, v) - d(x, y) = i \in \{-1, 0, 1\}$ donde $v \in \Gamma(y)$, de forma análoga creamos la primera columna. Las demás entradas las rellenamos con las posibles opciones que tenemos para $d(u, v) - d(x, y)$ con $u \in \Gamma(x)$ y $v \in \Gamma(y)$.

El problema es que aunque tengamos estas opciones, hay matrices que se escriben con estas entradas y no pueden ser matrices de distancia, es decir, las matrices de distancia deben tener la forma descrita anteriormente, pero una matriz con esta forma no necesariamente es una matriz de distancia. Por ejemplo, la siguiente matriz no puede ser una matriz de distancia:

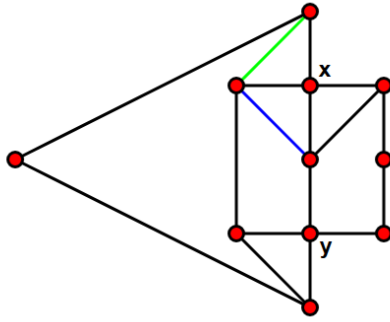
$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Pero si no sabemos qué está mal en esta matriz, es un poco complejo saber dónde está el error. En este caso, el error es que la coordenada $A_{3,2}$ no puede ser 0, debería ser de forma obligada un -1. Supongamos que esta entrada corresponde a $d(x, y) - d(u, v)$, donde $u \in \Gamma(x)$ y $v \in \Gamma(y)$. La primera fila y columna nos dan la información de que $d(u, y) = -1$ y $d(x, v) = 0$, pero de todos los $y_j \in \Gamma(y)$ tales que $d(x, y_j) = 0$, ninguno cumple que $d(x_i, y_j) = -1$ para algún $x_i \in \Gamma(x)$, lo cual parece una condición extraña, pero que debe suceder. Es más, si solo cambiamos esta entrada por -1, entonces podríamos dar un ejemplo de un grafo con vértices x, y tales que la matriz de distancia cumple con esta matriz dada:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$



Sin embargo, hay entradas que sí las podemos modificar y solo nos agrega o elimina una arista dentro del grafo, pero sigue siendo una matriz que es matriz de distancia de un grafo entre dos vértices. Por ejemplo, en la matriz anterior, si cambiamos la entrada $A_{4,2}$ (de color azul) a -1 , o la entrada $A_{5,3}$ (de color verde), entonces añadimos las aristas azules y verdes respectivamente, quedando el siguiente grafo:



Todo esto asumiendo que $d(x, y) = 2$, pero esto no importa para el cálculo de esta matriz. Aparte de que no es directo obtener la curvatura $\kappa_{LLY}(x, y)$ a partir solo de la matriz de distancia entre los puntos x, y , estas matrices tienen ciertas restricciones que se desconocen, más allá de lo que se pudo expresar en el ejemplo de que una entrada debería ser -1 y no 0 . Además, puede que agregar o quitar solo una arista (que en la matriz de distancia puede ser cambiar unos valores de un par de entradas) cambie de forma drástica la curvatura. Por lo que, para intentar calcular la curvatura de un grafo, requerimos ser más específicos en qué tipo de grafos podemos calcular o no su curvatura de forma “sencilla”, que es el tema del cual hablaremos en las secciones siguientes.

2.5. Grafos Controlados y Bien Separados

Ya viendo qué es lo que pasa con algunos grafos, es natural preguntarse qué es lo que sucede cuando aumentamos la cantidad de ciclos en un grafo, la cual es una pregunta muy complicada de responder en el caso general, como vimos en la sección anterior. Para ello deberíamos ser capaces de tener una forma de, a partir de la matriz de distancia $D_{x,y}$, calcular la distancia de Wasserstein directamente de las entradas de esta matriz.

Por lo antes mencionado, nos enfocaremos a pensar alguna estrategia para saber calcular la curvatura de algunos grafos que cumplan alguna propiedad. Esto quiere decir que queremos que los vecinos de los vértices x e y cumplan ciertas propiedades de proximidad. Por ejemplo, cuando consideramos un grafo con un ciclo, teníamos uno o dos vecinos para x o y que estuvieran en la geodésica que va desde x a y , lo que hacía que la curvatura cambiara. Así que nos gustaría saber qué tanto afecta la curvatura cuando los vecinos de x están más o menos cerca de y y viceversa.

Para esto tomemos $w, z \in V$ y definamos los siguientes subconjuntos de $\Gamma(z)$ que dependerán del punto w y sus vecinos $\Gamma(w)$:

$$\begin{aligned}\Gamma_w^g(z) &:= \Gamma(z) \cap [w, z]. \\ \Gamma_w^*(z) &:= \{u \in \Gamma(z) : d(u, w) = d(w, z)\} \\ \Gamma_w^+(z) &:= \{u \in \Gamma(z) : d(u, w) = d(w, z) + 1\} \\ \Gamma_w^{-1}(z) &:= \{u \in \Gamma_w^*(z) : \exists v \in \Gamma_z^*(w) : d(u, v) = d(w, z) - 1\} \\ \Gamma_w^0(z) &:= \{u \in \Gamma_w^+(z) : \exists v \in \Gamma_z^+(w) : d(u, v) = d(w, z)\} \\ \Gamma_w^1(z) &:= \{u \in \Gamma_w^+(z) : \exists v \in \Gamma_z^+(w) \setminus \Gamma_z^0(w) : d(u, v) = d(w, z) + 1\} \\ \Gamma_w^R(z) &:= \Gamma_w^*(z) \setminus \Gamma_w^{-1}(z) \\ \Gamma_w^h(z) &:= \Gamma_w^+(z) \setminus (\Gamma_w^0(z) \cup \Gamma_w^1(z))\end{aligned}$$

Observación 2.12. Los vértices v que se ocupan en la definición de los conjuntos $\Gamma_w^{-1}(z)$, $\Gamma_w^0(z)$ y $\Gamma_w^1(z)$, si es que existen, entonces viven en $\Gamma_z^{-1}(w)$, $\Gamma_z^0(w)$ y $\Gamma_z^1(w)$ respectivamente. Además, por la construcción de estos conjuntos, siempre es posible hacer una unión disjunta de $\Gamma(z)$ en relación a otro vértice $w \in V$ tal que $z \neq w$, es decir, siempre es posible escribir $\Gamma(z)$ como

$$\Gamma(z) = \Gamma_w^g(z) \cup \Gamma_w^h(z) \cup \Gamma_w^R(z) \cup \Gamma_w^{-1}(z) \cup \Gamma_w^0(z) \cup \Gamma_w^1(z).$$

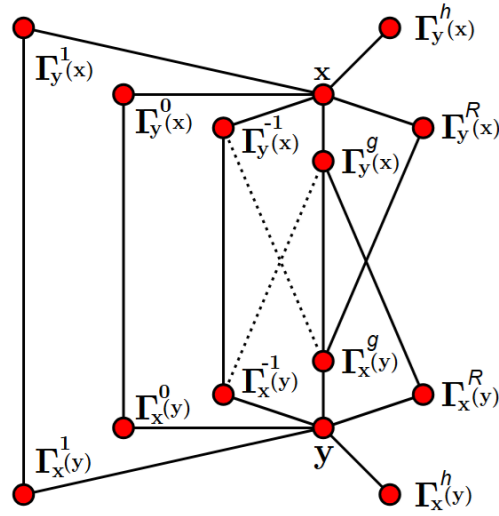
En resumen, salvo detalles explícitos en las definiciones, hacemos la partición de $\Gamma(z)$ según la distancia que tienen cada uno de los vértices de este conjunto con respecto a w y sus vecinos $\Gamma(w)$. Así, para cada $u \in \Gamma_w^i(z)$, debe existir $v \in \Gamma_z^i(w)$ tal que $d(u, v) = d(w, z) + i$ y viceversa para cada $i \in \{-1, 0, 1\}$. El conjunto Γ^g son los vecinos dentro de las geodésicas $[w, z]$, Γ^R y Γ^h son los conjuntos sobrantes de estos Γ^i .

Definición 2.13. Dados $w, z \in V$ decimos que un grafo $G = (E, V)$ es un *grafo bien separado* en w, z si:

1. $d(u, v) = d(w, z) + 1$ para todo $u \in \Gamma_w^*(z), v \in \Gamma_z^+(w)$.
2. $d(u, v) = d(w, z) + 2$ para todo $u \in \Gamma_w^0(z), v \in \Gamma_z^1(w)$.

Diremos que G es un *grafo bien separado* si es bien separado en cada par de vértices $w, z \in V$.

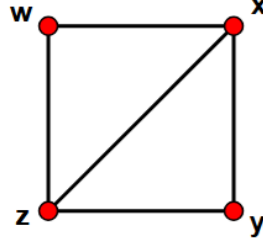
Un esquema que nos permita visualizar de mejor manera esta partición es el siguiente.



Como se mencionó antes, aquí para cada $u \in \Gamma_y^i(x)$ existe $v \in \Gamma_x^i(y)$ tales que $d(u, v) = d(x, y) + i$ para cada $i \in \{-1, 0, 1\}$. Así que las aristas de la izquierda del esquema representan estas distancias. Podemos notar que los conjuntos Γ^g están en las geodésicas $[x, y]$. Los vértices de $\Gamma_x^R(x)$ tienen una distancia $d(x, y) - 1$ a un elemento de $\Gamma_y^g(y)$ (respectivamente para $\Gamma_x^R(y)$) y el conjunto $\Gamma_y^h(x)$ son los vértices “más alejados” de los vecinos de y (respectivamente para $\Gamma_x^h(y)$). Las líneas punteadas representan que los elementos de $\Gamma_y^{-1}(x)$ pueden estar a una distancia $d(x, y) - 1$ de algún elemento de $\Gamma_y^g(y)$ o no (lo mismo pasa para $\Gamma_x^{-1}(y)$).

Observación 2.14. Es posible traducir la propiedad de que un grafo sea bien separado a la matriz de distancia; basta verificar que algunas entradas sean 1 o 2 (dichas entradas están dadas por los conjuntos implicados en la misma definición de grafo separado).

Un pequeño ejemplo de un grafo que no es bien separado sería el siguiente:



En este caso $\Gamma(x) = \{w, y, z\}$, $\Gamma(y) = \{x, z\}$ y sus respectivas particiones serían

$$\Gamma_y^g(x) = \{y\}, \quad \Gamma_y^h(x) = \{w\}, \quad \Gamma_y^R(x) = \emptyset, \quad \Gamma_y^{-1}(x) = \{z\}, \quad \Gamma_y^0(x) = \emptyset, \quad \Gamma_y^1(x) = \emptyset.$$

$$\Gamma_x^g(y) = \{x\}, \quad \Gamma_x^h(y) = \emptyset, \quad \Gamma_x^R(y) = \emptyset, \quad \Gamma_x^{-1}(y) = \{z\}, \quad \Gamma_x^0(y) = \emptyset, \quad \Gamma_x^1(y) = \emptyset.$$

El problema es que $w \in \Gamma_y^h(x)$, $z \in \Gamma_x^{-1}(y)$ y $d(w, z) = 1$, lo que contradice la primera propiedad que pedimos para un grafo bien separado. Sin embargo, el grafo sí es bien separado si consideramos los pares de vértices x, z o w, y .

Ahora para permitir que los cálculos sean precisos, necesitaremos la siguiente propiedad. Supongamos que para cierto valor $i \in \{-1, 0, 1\}$ se tiene que $\Gamma_w^i(z) \neq \emptyset$. En dicho caso consideramos la distribución uniforme $\mu_{\Gamma_w^i(z)} : 2^{\Gamma_w^i(z)} \rightarrow [0, 1]$ como

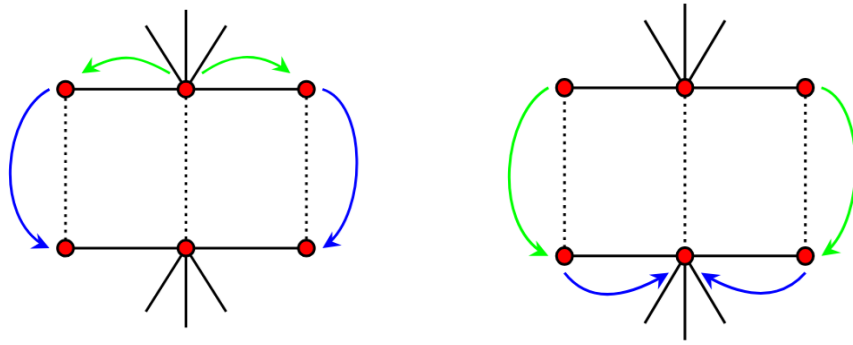
$$\mu_{\Gamma_w^i(z)}(A) = \frac{|A|}{|\Gamma_w^i(z)|}, \quad \forall A \subseteq \Gamma_w^i(z).$$

Definición 2.15. Decimos que un grafo $G = (E, V)$ es un *grafo controlado* en $w, z \in V$ si se cumple que

$$W(\mu_{\Gamma_w^i(z)}, \mu_{\Gamma_z^i(w)}) = d(w, z) + i, \quad \forall i \in \{-1, 0, 1\} \text{ tal que } \Gamma_w^i(z) \neq \emptyset.$$

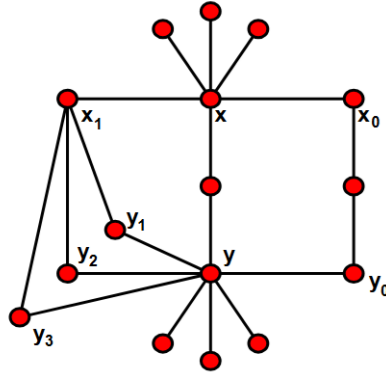
Diremos que el grafo G es *controlado* si es controlado en cada par de vértices $w, z \in V$.

Lo que nos permite hacer esta última definición es dar la característica de que cuando escojamos un plan de transporte entre m_x^α y m_y^α , vamos a enviar toda la masa de $\Gamma_y^{-1}(x)$ a $\Gamma_x^{-1}(y)$, de $\Gamma_y^0(x)$ a $\Gamma_x^0(y)$ y de $\Gamma_y^1(x)$ a $\Gamma_x^1(y)$ (combinándolo con que el grafo sea bien separado), teniendo en cuenta que si falta masa, entonces sacaremos lo que falta desde x y si sobra, entonces enviaremos el sobrante a y . Explicado con un diagrama, lo que intentamos definir es que la masa primero hace la acción en verde y luego la azul (ver imagen adjunta).



En donde el primer esquema indica que falta masa, así que compensaremos con masa desde el punto central x . En cambio, en el esquema de la derecha sobra, así que la masa que sobra se va al punto central y . Esto es posible hacerlo por el hecho de que para α suficientemente cercano a 1, la gran mayoría de la masa de m_z^α se encuentra en z .

También es posible tener combinaciones de estas propiedades para los diferentes i . Para esto, veamos el siguiente grafo.



En este caso $d(x, y) = 2$, así que $\Gamma_y^{-1}(x) = \{x_1\}$, $\Gamma_x^{-1}(y) = \{y_1, y_2, y_3\}$, $\Gamma_y^0(x) = \{x_0\}$ y $\Gamma_x^0(y) = \{y_0\}$. También tenemos que $d_x = 6$, $d_y = 8$. Así la masa de $\Gamma_y^{-1}(x)$ y $\Gamma_x^{-1}(y)$ son $(1 - \alpha)/6$ y $(1 - \alpha)3/8$, respectivamente, y la masa de $\Gamma_y^0(x)$ y $\Gamma_x^0(y)$ son $(1 - \alpha)/6$ y $(1 - \alpha)/8$, respectivamente. Por lo tanto, cuando transportamos la masa desde m_x^α a m_y^α , va a faltar cuando consideramos los conjuntos Γ^{-1} y va a sobrar si consideramos los conjuntos Γ^0 . Esto no es problema, puesto que en la definición de grafo controlado, ver que se cumple la propiedad para los conjuntos Γ^{-1} y los Γ^0 es de forma separada.

Teniendo todo esto en cuenta, podemos ver que los grafos con un solo ciclo son controlados, ya que uno de los valores de $|\Gamma_y^{-1}(x)|$, $|\Gamma_y^0(x)|$, $|\Gamma_x^{-1}(y)|$ será 1, y el resto será 0. Esto nos dice que los grafos de un solo ciclo son grafos controlados. Además, por la separación que tienen los vecinos de cada vértice, también es un grafo bien separado. En conclusión, los grafos de un solo ciclo son grafos bien separados y controlados. Más precisamente, para los 7 posibles casos que encontramos en el 2.11 podemos calcular una partición de los vecinos de x e y , lo que nos da lo siguiente:

- Caso 1: $|\Gamma_y^g(x)| = |\Gamma_x^g(y)| = 2$, $|\Gamma_y^h(x)| = d_x - 2$, $|\Gamma_x^h(y)| = d_y - 2$, $|\Gamma_y^{-1}(x)| = |\Gamma_x^{-1}(y)| = |\Gamma_y^0(x)| = |\Gamma_x^0(y)| = |\Gamma_y^1(x)| = |\Gamma_x^1(y)| = |\Gamma_x^R(y)| = |\Gamma_y^R(x)| = 0$.
- Caso 2: $|\Gamma_y^g(x)| = |\Gamma_x^g(y)| = 1$, $|\Gamma_y^{-1}(x)| = |\Gamma_x^{-1}(y)| = 1$, $|\Gamma_y^h(x)| = d_x - 2$, $|\Gamma_x^h(y)| = d_y - 2$, $|\Gamma_y^0(x)| = |\Gamma_x^0(y)| = |\Gamma_y^1(x)| = |\Gamma_x^1(y)| = |\Gamma_x^R(y)| = |\Gamma_y^R(x)| = 0$.
- Caso 3: $|\Gamma_y^g(x)| = |\Gamma_x^g(y)| = 1$, $|\Gamma_y^0(x)| = |\Gamma_x^0(y)| = 1$, $|\Gamma_y^h(x)| = d_x - 2$, $|\Gamma_x^h(y)| = d_y - 2$, $|\Gamma_y^{-1}(x)| = |\Gamma_x^{-1}(y)| = |\Gamma_y^1(x)| = |\Gamma_x^1(y)| = |\Gamma_x^R(y)| = |\Gamma_y^R(x)| = 0$.
- Caso 4: $|\Gamma_y^g(x)| = |\Gamma_x^g(y)| = 1$, $|\Gamma_y^1(x)| = |\Gamma_x^1(y)| = 1$, $|\Gamma_y^h(x)| = d_x - 2$, $|\Gamma_x^h(y)| = d_y - 2$, $|\Gamma_y^{-1}(x)| = |\Gamma_x^{-1}(y)| = |\Gamma_y^0(x)| = |\Gamma_x^0(y)| = |\Gamma_x^R(y)| = |\Gamma_y^R(x)| = 0$.
- Caso 5: $|\Gamma_y^g(x)| = 2$, $|\Gamma_x^g(y)| = 1$, $|\Gamma_y^h(x)| = d_x - 2$, $|\Gamma_x^h(y)| = d_y - 1$, $|\Gamma_y^{-1}(x)| = |\Gamma_x^{-1}(y)| = |\Gamma_y^0(x)| = |\Gamma_x^0(y)| = |\Gamma_y^1(x)| = |\Gamma_x^1(y)| = |\Gamma_x^R(y)| = |\Gamma_y^R(x)| = 0$.
- Caso 6: $|\Gamma_y^g(x)| = 1$, $|\Gamma_x^g(y)| = 1$, $|\Gamma_y^h(x)| = d_x - 2$, $|\Gamma_x^h(y)| = d_y - 1$, $|\Gamma_y^R(x)| = 1$, $|\Gamma_y^{-1}(x)| = |\Gamma_x^{-1}(y)| = |\Gamma_y^0(x)| = |\Gamma_x^0(y)| = |\Gamma_y^1(x)| = |\Gamma_x^1(y)| = |\Gamma_x^R(y)| = 0$.
- Caso 7: $|\Gamma_y^g(x)| = |\Gamma_x^g(y)| = 1$, $|\Gamma_y^h(x)| = d_x - 1$, $|\Gamma_x^h(y)| = d_y - 1$, $|\Gamma_y^{-1}(x)| = |\Gamma_x^{-1}(y)| = |\Gamma_y^0(x)| = |\Gamma_x^0(y)| = |\Gamma_y^1(x)| = |\Gamma_x^1(y)| = |\Gamma_x^R(y)| = |\Gamma_y^R(x)| = 0$.

Teorema 2.16. Sea $G = (V, E)$ un grafo controlado y bien separado. Sean $x, y \in V$, entonces su curvatura de Lin-Lu-Yau es

$$\kappa_{LLY}(x, y) = \frac{1}{d(x, y)} \left(\frac{|\Gamma_y^g(x)| - |\Gamma_y^h(x)|}{d_x} + \frac{|\Gamma_x^g(y)| - |\Gamma_x^h(y)|}{d_y} + \min \left\{ \frac{|\Gamma_y^{-1}(x)|}{d_x}, \frac{|\Gamma_x^{-1}(y)|}{d_y} \right\} - \left| \frac{|\Gamma_y^0(x)|}{d_x} - \frac{|\Gamma_x^0(y)|}{d_y} \right| - \max \left\{ \frac{|\Gamma_y^1(x)|}{d_x}, \frac{|\Gamma_x^1(y)|}{d_y} \right\} \right).$$

Demostración. Consideremos un plan de transporte A tabulando los valores de $A(w, z)$ para vértices $w, z \in V$ que están en los respectivos conjuntos:

$w \setminus z$	x	$\Gamma_y^g(x)$	$\Gamma_y^{-1}(x)$	$\Gamma_y^0(x)$	$\Gamma_y^1(x)$	$\Gamma_y^R(x)$	$\Gamma_y^h(x)$
y	\star_0	$ \Gamma_y^g(x) \frac{1-\alpha}{d_x}$	\star_1	\star_2	\star_3	$\Gamma_y^R(x) \frac{1-\alpha}{d_x}$	$ \Gamma_y^h(x) \frac{1-\alpha}{d_x}$
$\Gamma_x^g(y)$	$ \Gamma_x^g(y) \frac{1-\alpha}{d_y}$	0	0	0	0	0	0
$\Gamma_x^{-1}(y)$	\star_4	0	\star_7	0	0	0	0
$\Gamma_x^0(y)$	\star_5	0	0	\star_8	0	0	0
$\Gamma_x^1(y)$	\star_6	0	0	0	\star_9	0	0
$\Gamma_x^R(y)$	$ \Gamma_x^R(y) \frac{1-\alpha}{d_y}$	0	0	0	0	0	0
$\Gamma_x^h(y)$	$ \Gamma_x^h(y) \frac{1-\alpha}{d_y}$	0	0	0	0	0	0

Donde los valores de \star_i , para $0 \leq i \leq 9$, son los siguientes:

- $\star_0 = \alpha - \frac{1}{2}(|\Gamma_y^g(x)|^{\frac{1-\alpha}{d_x}} + |\Gamma_x^g(y)|^{\frac{1-\alpha}{d_y}}) - \frac{1}{2}(|\Gamma_y^h(x)|^{\frac{1-\alpha}{d_x}} + |\Gamma_x^h(y)|^{\frac{1-\alpha}{d_y}})$
 $-\frac{1}{2}(|\Gamma_y^R(x)|^{\frac{1-\alpha}{d_x}} + |\Gamma_x^R(y)|^{\frac{1-\alpha}{d_y}}) - \frac{1}{2} \sum_{k=-1}^1 \left| |\Gamma_x^k(y)|^{\frac{1-\alpha}{d_y}} - |\Gamma_y^k(x)|^{\frac{1-\alpha}{d_x}} \right|$
- $\star_1 = \max\{0, |\Gamma_y^{-1}(x)|^{\frac{1-\alpha}{d_x}} - |\Gamma_x^{-1}(y)|^{\frac{1-\alpha}{d_y}}\}.$
- $\star_2 = \max\{0, |\Gamma_y^0(x)|^{\frac{1-\alpha}{d_x}} - |\Gamma_x^0(y)|^{\frac{1-\alpha}{d_y}}\}.$
- $\star_3 = \max\{0, |\Gamma_y^1(x)|^{\frac{1-\alpha}{d_x}} - |\Gamma_x^1(y)|^{\frac{1-\alpha}{d_y}}\}.$
- $\star_4 = \max\{0, |\Gamma_x^{-1}(y)|^{\frac{1-\alpha}{d_y}} - |\Gamma_y^{-1}(x)|^{\frac{1-\alpha}{d_x}}\}.$
- $\star_5 = \max\{0, |\Gamma_x^0(y)|^{\frac{1-\alpha}{d_y}} - |\Gamma_y^0(x)|^{\frac{1-\alpha}{d_x}}\}.$
- $\star_6 = \max\{0, |\Gamma_x^0(y)|^{\frac{1-\alpha}{d_y}} - |\Gamma_y^0(x)|^{\frac{1-\alpha}{d_x}}\}.$
- $\star_7 = \min\{|\Gamma_y^{-1}(x)|^{\frac{1-\alpha}{d_x}}, |\Gamma_x^{-1}(y)|^{\frac{1-\alpha}{d_y}}\}.$
- $\star_8 = \min\{|\Gamma_y^0(x)|^{\frac{1-\alpha}{d_x}}, |\Gamma_x^0(y)|^{\frac{1-\alpha}{d_y}}\}.$
- $\star_9 = \min\{|\Gamma_y^1(x)|^{\frac{1-\alpha}{d_x}}, |\Gamma_x^1(y)|^{\frac{1-\alpha}{d_y}}\}.$

Donde cada celda corresponde a la masa que envía cada conjunto de vértices a otro y $A(w, z) = 0$ para cualquier otra combinación de vértices $w, z \in V$. Por ejemplo, cada vértice de $\Gamma_y^g(x)$ tiene una masa de $\frac{1-\alpha}{d_x}$, así que la masa que se envía desde este conjunto a y es un total de $|\Gamma_y^g(x)|^{\frac{1-\alpha}{d_x}}$. Podemos considerar este plan de transporte porque como el grafo es controlado, entonces toda la masa que se encuentra en $\Gamma_y^{-1}(x)$, $\Gamma_y^0(x)$ y $\Gamma_y^1(x)$ se transporta hacia $\Gamma_x^{-1}(y)$, $\Gamma_x^0(y)$ y $\Gamma_x^1(y)$ respectivamente. Ahora bien, como la masa puede sobrar o faltar, usamos justamente estos valores de \star_i para compensar esto con la masa de los puntos x e y , ya que como consideramos α suficientemente cercano a 1, entonces no llegamos a tener ningún problema.

Notemos que A de hecho es un plan de transporte ya que la suma de cada columna y fila da justamente la medida de los vértices que se encuentran en $\Gamma(x)$ y $\Gamma(y)$ respectivamente, solo que para ahorrar notación se escribe como un plan de transporte desde conjuntos a conjuntos (a excepción de la primera fila y la primera columna, que debemos sumar ambas al mismo tiempo para obtener $m_x^\alpha(x)$ y $m_y^\alpha(y)$ por la proyección del plan de transporte). Con esto en cuenta, tenemos la siguiente desigualdad:

$$\begin{aligned}
W(m_x^\alpha, m_y^\alpha) &= \inf_A \sum_{w, z \in V} A(w, z) d(w, z) \\
&\leq \left(|\Gamma_y^g(x)|^{\frac{1-\alpha}{d_x}} + |\Gamma_x^g(y)|^{\frac{1-\alpha}{d_y}} + \star_7 \right) (d(x, y) - 1) \\
&\quad + \left(|\Gamma_y^R(x)|^{\frac{1-\alpha}{d_x}} d(x, y) + |\Gamma_x^R(y)|^{\frac{1-\alpha}{d_y}} + \star_0 + \star_1 + \star_4 + \star_8 \right) d(x, y) \\
&\quad + \left(|\Gamma_y^h(x)|^{\frac{1-\alpha}{d_x}} + |\Gamma_x^h(y)|^{\frac{1-\alpha}{d_y}} + \star_2 + \star_3 + \star_5 + \star_6 + \star_9 \right) (d(x, y) + 1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \alpha \cdot d(x, y) - \left(|\Gamma_y^g(x)|^{\frac{1-\alpha}{d_x}} + |\Gamma_x^g(y)|^{\frac{1-\alpha}{d_y}} \right) + \left(|\Gamma_y^h(x)|^{\frac{1-\alpha}{d_x}} + |\Gamma_x^h(y)|^{\frac{1-\alpha}{d_y}} \right) \\
&\quad - \min\{|\Gamma_y^{-1}(x)|^{\frac{1-\alpha}{d_x}}, |\Gamma_x^{-1}(y)|^{\frac{1-\alpha}{d_y}}\} + \left| |\Gamma_y^0(x)|^{\frac{1-\alpha}{d_x}} - |\Gamma_x^0(y)|^{\frac{1-\alpha}{d_y}} \right| \\
&\quad + \min\{|\Gamma_y^1(x)|^{\frac{1-\alpha}{d_x}}, |\Gamma_x^1(y)|^{\frac{1-\alpha}{d_y}}\} + \left| |\Gamma_y^1(x)|^{\frac{1-\alpha}{d_x}} - |\Gamma_x^1(y)|^{\frac{1-\alpha}{d_y}} \right| \\
&\quad + \frac{d(x, y)}{2} \left(|\Gamma_y^g(x)|^{\frac{1-\alpha}{d_x}} + |\Gamma_x^g(y)|^{\frac{1-\alpha}{d_y}} + |\Gamma_y^h(x)|^{\frac{1-\alpha}{d_x}} + |\Gamma_x^h(y)|^{\frac{1-\alpha}{d_y}} + |\Gamma_y^R(x)|^{\frac{1-\alpha}{d_x}} d(x, y) \right. \\
&\quad + |\Gamma_x^R(y)|^{\frac{1-\alpha}{d_y}} + \left| |\Gamma_y^{-1}(x)|^{\frac{1-\alpha}{d_x}} - |\Gamma_x^{-1}(y)|^{\frac{1-\alpha}{d_y}} \right| + \left| |\Gamma_y^0(x)|^{\frac{1-\alpha}{d_x}} - |\Gamma_x^0(y)|^{\frac{1-\alpha}{d_y}} \right| \\
&\quad + \left| |\Gamma_y^1(x)|^{\frac{1-\alpha}{d_x}} - |\Gamma_x^1(y)|^{\frac{1-\alpha}{d_y}} \right| \left. \right) + \left(\min\{|\Gamma_y^{-1}(x)|^{\frac{1-\alpha}{d_x}}, |\Gamma_x^{-1}(y)|^{\frac{1-\alpha}{d_y}}\} \right. \\
&\quad + \min\{|\Gamma_y^0(x)|^{\frac{1-\alpha}{d_x}}, |\Gamma_x^0(y)|^{\frac{1-\alpha}{d_y}}\} + \min\{|\Gamma_y^1(x)|^{\frac{1-\alpha}{d_x}}, |\Gamma_x^1(y)|^{\frac{1-\alpha}{d_y}}\} \left. \right) d(x, y) \\
&= \alpha \cdot d(x, y) - \left(|\Gamma_y^g(x)|^{\frac{1-\alpha}{d_x}} + |\Gamma_x^g(y)|^{\frac{1-\alpha}{d_y}} \right) + \left(|\Gamma_y^h(x)|^{\frac{1-\alpha}{d_x}} + |\Gamma_x^h(y)|^{\frac{1-\alpha}{d_y}} \right) \\
&\quad - \min\{|\Gamma_y^{-1}(x)|^{\frac{1-\alpha}{d_x}}, |\Gamma_x^{-1}(y)|^{\frac{1-\alpha}{d_y}}\} + \left| |\Gamma_y^0(x)|^{\frac{1-\alpha}{d_x}} - |\Gamma_x^0(y)|^{\frac{1-\alpha}{d_y}} \right| \\
&\quad + \min\{|\Gamma_y^1(x)|^{\frac{1-\alpha}{d_x}}, |\Gamma_x^1(y)|^{\frac{1-\alpha}{d_y}}\} + \left| |\Gamma_y^1(x)|^{\frac{1-\alpha}{d_x}} - |\Gamma_x^1(y)|^{\frac{1-\alpha}{d_y}} \right| \\
&\quad + \frac{d(x, y)}{2} 2(1 - \alpha) \\
&= d(x, y) - \left(|\Gamma_y^g(x)|^{\frac{1-\alpha}{d_x}} + |\Gamma_x^g(y)|^{\frac{1-\alpha}{d_y}} \right) + \left(|\Gamma_y^h(x)|^{\frac{1-\alpha}{d_x}} + |\Gamma_x^h(y)|^{\frac{1-\alpha}{d_y}} \right) \\
&\quad - \min\{|\Gamma_y^{-1}(x)|^{\frac{1-\alpha}{d_x}}, |\Gamma_x^{-1}(y)|^{\frac{1-\alpha}{d_y}}\} + \left| |\Gamma_y^0(x)|^{\frac{1-\alpha}{d_x}} - |\Gamma_x^0(y)|^{\frac{1-\alpha}{d_y}} \right| \\
&\quad + \max\{|\Gamma_y^1(x)|^{\frac{1-\alpha}{d_x}}, |\Gamma_x^1(y)|^{\frac{1-\alpha}{d_y}}\}.
\end{aligned}$$

Ahora para la desigualdad contraria usaremos lo siguiente: Dados $x, y \in V$, consideremos las funciones $\varphi_{x,y}$, $\psi_{x,y}$ y $\zeta_{x,y}$, de la siguiente forma:

- Si $\frac{|\Gamma_y^{-1}(x)|}{d_x} \geq \frac{|\Gamma_x^{-1}(y)|}{d_y}$, entonces

$$\varphi_{x,y}(z) := \begin{cases} d(x, y) & \text{si } z \in \Gamma_y^{-1}(x), \\ 1 & \text{si } z \in \Gamma_x^{-1}(y), \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases}$$

De lo contrario tomamos

$$\varphi_{x,y}(z) := \begin{cases} d(x, y) - 1 & \text{si } z \in \Gamma_y^{-1}(x), \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases}$$

- Si $\frac{|\Gamma_y^0(x)|}{d_x} \geq \frac{|\Gamma_x^0(y)|}{d_y}$, entonces

$$\psi_{x,y}(z) := \begin{cases} d(x, y) + 1 & \text{si } z \in \Gamma_y^0(x), \\ 1 & \text{si } z \in \Gamma_x^0(y), \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases}$$

De lo contrario tomamos

$$\psi_{x,y}(z) := \begin{cases} d(x,y) - 1 & \text{si } z \in \Gamma_y^0(x), \\ -1 & \text{si } z \in \Gamma_x^0(y), \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases}$$

- Si $\frac{|\Gamma_y^1(x)|}{d_x} \geq \frac{|\Gamma_x^1(y)|}{d_y}$, entonces

$$\zeta_{x,y}(z) := \begin{cases} d(x,y) + 1 & \text{si } z \in \Gamma_y^1(x), \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases}$$

De lo contrario tomamos

$$\zeta_{x,y}(z) := \begin{cases} d(x,y) & \text{si } z \in \Gamma_y^1(x), \\ -1 & \text{si } z \in \Gamma_x^1(y), \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Ahora consideremos la función $\phi : V \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$\phi(z) := \begin{cases} -1 & \text{si } z \in \Gamma_x^h(y), \\ 0 & \text{si } z \in \{y\} \cup \Gamma_x^R(y), \\ 1 & \text{si } z \in \Gamma_x^g(y), \\ d(x,y) - 1 & \text{si } z \in \Gamma_y^g(x), \\ d(x,y) & \text{si } z = \{x\} \cup \Gamma_y^R(x), \\ d(x,y) + 1 & \text{si } z \in \Gamma_y^h(x), \\ \varphi_{x,y}(z) & \text{si } z \in \Gamma_y^{-1}(x) \cup \Gamma_x^{-1}(y), \\ \psi_{x,y}(z) & \text{si } z \in \Gamma_y^0(x) \cup \Gamma_x^0(y), \\ \zeta_{x,y}(z) & \text{si } z \in \Gamma_y^1(x) \cup \Gamma_x^1(y). \end{cases}$$

Por inspección se puede ver que para cualquier elección que tengamos de las funciones $\varphi_{x,y}$, $\psi_{x,y}$ y $\zeta_{x,y}$ se cumplirá que ϕ es 1-Lipschitz. Esto se debe a que el grafo es bien separado, así no enviamos masa de un vértice desde un conjunto Γ^i a otro Γ^j . Luego, la dualidad de Kantorovich nos da la otra desigualdad recordando que $W(m_x^\alpha, m_y^\alpha) = \sup_\phi \sum_{z \in V} \phi(z)(m_x^\alpha(z) - m_y^\alpha(z))$, donde el supremo se toma sobre las funciones 1-Lipschitz.

$$\begin{aligned} W(m_x^\alpha, m_y^\alpha) &\geq (d(x,y) - 1)|\Gamma_y^g(x)| \frac{1-\alpha}{d_x} + d(x,y) \left(\alpha + |\Gamma_y^R(x)| \frac{1-\alpha}{d_x} \right) + (d(x,y) + 1)|\Gamma_y^h(x)| \frac{1-\alpha}{d_x} \\ &\quad - \left(-|\Gamma_x^h(y)| \frac{1-\alpha}{d_y} + |\Gamma_x^g(y)| \frac{1-\alpha}{d_y} \right) + \underbrace{\sum_{z \in \Gamma_y^{-1}(x) \cup \Gamma_y^0(x) \cup \Gamma_y^1(x)} (\varphi_{x,y}(z) + \psi_{x,y}(z) + \zeta_{x,y}(z)) \frac{1-\alpha}{d_x}}_{\clubsuit} \\ &\quad - \underbrace{\sum_{z \in \Gamma_x^{-1}(y) \cup \Gamma_x^0(y) \cup \Gamma_x^1(y)} (\varphi_{x,y}(z) + \psi_{x,y}(z) + \zeta_{x,y}(z)) \frac{1-\alpha}{d_y}}_{\clubsuit} \end{aligned}$$

El valor de $\spadesuit - \clubsuit$ tiene 8 opciones posibles, dependiendo de los casos de φ , ψ y ζ .

- *Caso 1:* $\frac{|\Gamma_y^{-1}(x)|}{d_x} \geq \frac{|\Gamma_x^{-1}(y)|}{d_y}$, $\frac{|\Gamma_y^0(x)|}{d_x} \geq \frac{|\Gamma_x^0(y)|}{d_y}$ y $\frac{|\Gamma_y^1(x)|}{d_x} \geq \frac{|\Gamma_x^1(y)|}{d_y}$:

$$\begin{aligned} \spadesuit - \clubsuit &= |\Gamma_y^{-1}(x)| \frac{1-\alpha}{d_x} d(x, y) + |\Gamma_y^0(x)| \frac{1-\alpha}{d_x} (d(x, y) + 1) + |\Gamma_y^1(x)| \frac{1-\alpha}{d_x} (d(x, y) + 1) \\ &\quad - \left(|\Gamma_x^{-1}(y)| \frac{1-\alpha}{d_y} + |\Gamma_x^0(y)| \frac{1-\alpha}{d_y} \right) \\ &= |\Gamma_y^{-1}(x)| \frac{1-\alpha}{d_x} d(x, y) + |\Gamma_y^0(x)| \frac{1-\alpha}{d_x} d(x, y) + |\Gamma_y^1(x)| \frac{1-\alpha}{d_x} d(x, y) \\ &\quad - \min\{|\Gamma_y^{-1}(x)| \frac{1-\alpha}{d_x}, |\Gamma_x^{-1}(y)| \frac{1-\alpha}{d_y}\} + \max\{|\Gamma_y^1(x)| \frac{1-\alpha}{d_x}, |\Gamma_x^1(y)| \frac{1-\alpha}{d_y}\} \\ &\quad + \left| |\Gamma_y^0(x)| \frac{1-\alpha}{d_x} - |\Gamma_x^0(y)| \frac{1-\alpha}{d_y} \right|. \end{aligned}$$

- *Caso 2:* $\frac{|\Gamma_y^{-1}(x)|}{d_x} \geq \frac{|\Gamma_x^{-1}(y)|}{d_y}$, $\frac{|\Gamma_y^0(x)|}{d_x} \geq \frac{|\Gamma_x^0(y)|}{d_y}$ y $\frac{|\Gamma_y^1(x)|}{d_x} < \frac{|\Gamma_x^1(y)|}{d_y}$:

$$\begin{aligned} \spadesuit - \clubsuit &= |\Gamma_y^{-1}(x)| \frac{1-\alpha}{d_x} d(x, y) + |\Gamma_y^0(x)| \frac{1-\alpha}{d_x} (d(x, y) + 1) + |\Gamma_y^1(x)| \frac{1-\alpha}{d_x} d(x, y) \\ &\quad - \left(|\Gamma_x^{-1}(y)| \frac{1-\alpha}{d_y} + |\Gamma_x^0(y)| \frac{1-\alpha}{d_y} - |\Gamma_x^1(y)| \frac{1-\alpha}{d_y} \right) \\ &= |\Gamma_y^{-1}(x)| \frac{1-\alpha}{d_x} d(x, y) + |\Gamma_y^0(x)| \frac{1-\alpha}{d_x} d(x, y) + |\Gamma_y^1(x)| \frac{1-\alpha}{d_x} d(x, y) \\ &\quad - \min\{|\Gamma_y^{-1}(x)| \frac{1-\alpha}{d_x}, |\Gamma_x^{-1}(y)| \frac{1-\alpha}{d_y}\} + \max\{|\Gamma_y^1(x)| \frac{1-\alpha}{d_x}, |\Gamma_x^1(y)| \frac{1-\alpha}{d_y}\} \\ &\quad + \left| |\Gamma_y^0(x)| \frac{1-\alpha}{d_x} - |\Gamma_x^0(y)| \frac{1-\alpha}{d_y} \right|. \end{aligned}$$

- *Caso 3:* $\frac{|\Gamma_y^{-1}(x)|}{d_x} \geq \frac{|\Gamma_x^{-1}(y)|}{d_y}$, $\frac{|\Gamma_y^0(x)|}{d_x} < \frac{|\Gamma_x^0(y)|}{d_y}$ y $\frac{|\Gamma_y^1(x)|}{d_x} \geq \frac{|\Gamma_x^1(y)|}{d_y}$:

$$\begin{aligned} \spadesuit - \clubsuit &= |\Gamma_y^{-1}(x)| \frac{1-\alpha}{d_x} d(x, y) + |\Gamma_y^0(x)| \frac{1-\alpha}{d_x} (d(x, y) - 1) + |\Gamma_y^1(x)| \frac{1-\alpha}{d_x} (d(x, y) + 1) \\ &\quad - \left(|\Gamma_x^{-1}(y)| \frac{1-\alpha}{d_y} - |\Gamma_x^0(y)| \frac{1-\alpha}{d_y} \right) \\ &= |\Gamma_y^{-1}(x)| \frac{1-\alpha}{d_x} d(x, y) + |\Gamma_y^0(x)| \frac{1-\alpha}{d_x} d(x, y) + |\Gamma_y^1(x)| \frac{1-\alpha}{d_x} d(x, y) \\ &\quad - \min\{|\Gamma_y^{-1}(x)| \frac{1-\alpha}{d_x}, |\Gamma_x^{-1}(y)| \frac{1-\alpha}{d_y}\} + \max\{|\Gamma_y^1(x)| \frac{1-\alpha}{d_x}, |\Gamma_x^1(y)| \frac{1-\alpha}{d_y}\} \\ &\quad + \left| |\Gamma_y^0(x)| \frac{1-\alpha}{d_x} - |\Gamma_x^0(y)| \frac{1-\alpha}{d_y} \right|. \end{aligned}$$

- *Caso 4:* $\frac{|\Gamma_y^{-1}(x)|}{d_x} \geq \frac{|\Gamma_x^{-1}(y)|}{d_y}$, $\frac{|\Gamma_y^0(x)|}{d_x} < \frac{|\Gamma_x^0(y)|}{d_y}$ y $\frac{|\Gamma_y^1(x)|}{d_x} < \frac{|\Gamma_x^1(y)|}{d_y}$:

$$\begin{aligned} \spadesuit - \clubsuit &= |\Gamma_y^{-1}(x)| \frac{1-\alpha}{d_x} d(x, y) + |\Gamma_y^0(x)| \frac{1-\alpha}{d_x} (d(x, y) - 1) + |\Gamma_y^1(x)| \frac{1-\alpha}{d_x} d(x, y) \\ &\quad - \left(|\Gamma_x^{-1}(y)| \frac{1-\alpha}{d_y} - |\Gamma_x^0(y)| \frac{1-\alpha}{d_y} - |\Gamma_x^1(y)| \frac{1-\alpha}{d_y} \right) \\ &= |\Gamma_y^{-1}(x)| \frac{1-\alpha}{d_x} d(x, y) + |\Gamma_y^0(x)| \frac{1-\alpha}{d_x} d(x, y) + |\Gamma_y^1(x)| \frac{1-\alpha}{d_x} d(x, y) \\ &\quad - \min\{|\Gamma_y^{-1}(x)| \frac{1-\alpha}{d_x}, |\Gamma_x^{-1}(y)| \frac{1-\alpha}{d_y}\} + \max\{|\Gamma_y^1(x)| \frac{1-\alpha}{d_x}, |\Gamma_x^1(y)| \frac{1-\alpha}{d_y}\} \\ &\quad + \left| |\Gamma_y^0(x)| \frac{1-\alpha}{d_x} - |\Gamma_x^0(y)| \frac{1-\alpha}{d_y} \right|. \end{aligned}$$

- *Caso 5:* $\frac{|\Gamma_y^{-1}(x)|}{d_x} < \frac{|\Gamma_x^{-1}(y)|}{d_y}$, $\frac{|\Gamma_y^0(x)|}{d_x} \geq \frac{|\Gamma_x^0(y)|}{d_y}$ y $\frac{|\Gamma_y^1(x)|}{d_x} \geq \frac{|\Gamma_x^1(y)|}{d_y}$:

$$\begin{aligned}
\spadesuit - \clubsuit &= |\Gamma_y^{-1}(x)| \frac{1-\alpha}{d_x} (d(x, y) - 1) + |\Gamma_y^0(x)| \frac{1-\alpha}{d_x} (d(x, y) + 1) + |\Gamma_y^1(x)| \frac{1-\alpha}{d_x} (d(x, y) + 1) \\
&\quad - |\Gamma_x^0(y)| \frac{1-\alpha}{d_y} \\
&= |\Gamma_y^{-1}(x)| \frac{1-\alpha}{d_x} d(x, y) + |\Gamma_y^0(x)| \frac{1-\alpha}{d_x} d(x, y) + |\Gamma_y^1(x)| \frac{1-\alpha}{d_x} d(x, y) \\
&\quad - \min\{|\Gamma_y^{-1}(x)| \frac{1-\alpha}{d_x}, |\Gamma_x^{-1}(y)| \frac{1-\alpha}{d_y}\} + \max\{|\Gamma_y^1(x)| \frac{1-\alpha}{d_x}, |\Gamma_x^1(y)| \frac{1-\alpha}{d_y}\} \\
&\quad + \left| |\Gamma_y^0(x)| \frac{1-\alpha}{d_x} - |\Gamma_x^0(y)| \frac{1-\alpha}{d_y} \right|.
\end{aligned}$$
- *Caso 6:* $\frac{|\Gamma_y^{-1}(x)|}{d_x} < \frac{|\Gamma_x^{-1}(y)|}{d_y}$, $\frac{|\Gamma_y^0(x)|}{d_x} \geq \frac{|\Gamma_x^0(y)|}{d_y}$ y $\frac{|\Gamma_y^1(x)|}{d_x} < \frac{|\Gamma_x^1(y)|}{d_y}$:

$$\begin{aligned}
\spadesuit - \clubsuit &= |\Gamma_y^{-1}(x)| \frac{1-\alpha}{d_x} (d(x, y) - 1) + |\Gamma_y^0(x)| \frac{1-\alpha}{d_x} (d(x, y) + 1) + |\Gamma_y^1(x)| \frac{1-\alpha}{d_x} d(x, y) \\
&\quad - \left(|\Gamma_x^0(y)| \frac{1-\alpha}{d_y} - |\Gamma_x^1(y)| \frac{1-\alpha}{d_y} \right) \\
&= |\Gamma_y^{-1}(x)| \frac{1-\alpha}{d_x} d(x, y) + |\Gamma_y^0(x)| \frac{1-\alpha}{d_x} d(x, y) + |\Gamma_y^1(x)| \frac{1-\alpha}{d_x} d(x, y) \\
&\quad - \min\{|\Gamma_y^{-1}(x)| \frac{1-\alpha}{d_x}, |\Gamma_x^{-1}(y)| \frac{1-\alpha}{d_y}\} + \max\{|\Gamma_y^1(x)| \frac{1-\alpha}{d_x}, |\Gamma_x^1(y)| \frac{1-\alpha}{d_y}\} \\
&\quad + \left| |\Gamma_y^0(x)| \frac{1-\alpha}{d_x} - |\Gamma_x^0(y)| \frac{1-\alpha}{d_y} \right|.
\end{aligned}$$
- *Caso 7:* $\frac{|\Gamma_y^{-1}(x)|}{d_x} < \frac{|\Gamma_x^{-1}(y)|}{d_y}$, $\frac{|\Gamma_y^0(x)|}{d_x} < \frac{|\Gamma_x^0(y)|}{d_y}$ y $\frac{|\Gamma_y^1(x)|}{d_x} \geq \frac{|\Gamma_x^1(y)|}{d_y}$:

$$\begin{aligned}
\spadesuit - \clubsuit &= |\Gamma_y^{-1}(x)| \frac{1-\alpha}{d_x} (d(x, y) - 1) + |\Gamma_y^0(x)| \frac{1-\alpha}{d_x} (d(x, y) - 1) + |\Gamma_y^1(x)| \frac{1-\alpha}{d_x} (d(x, y) + 1) \\
&\quad - \left(-|\Gamma_x^0(y)| \frac{1-\alpha}{d_y} \right) \\
&= |\Gamma_y^{-1}(x)| \frac{1-\alpha}{d_x} d(x, y) + |\Gamma_y^0(x)| \frac{1-\alpha}{d_x} d(x, y) + |\Gamma_y^1(x)| \frac{1-\alpha}{d_x} d(x, y) \\
&\quad - \min\{|\Gamma_y^{-1}(x)| \frac{1-\alpha}{d_x}, |\Gamma_x^{-1}(y)| \frac{1-\alpha}{d_y}\} + \max\{|\Gamma_y^1(x)| \frac{1-\alpha}{d_x}, |\Gamma_x^1(y)| \frac{1-\alpha}{d_y}\} \\
&\quad + \left| |\Gamma_y^0(x)| \frac{1-\alpha}{d_x} - |\Gamma_x^0(y)| \frac{1-\alpha}{d_y} \right|.
\end{aligned}$$
- *Caso 8:* $\frac{|\Gamma_y^{-1}(x)|}{d_x} < \frac{|\Gamma_x^{-1}(y)|}{d_y}$, $\frac{|\Gamma_y^0(x)|}{d_x} < \frac{|\Gamma_x^0(y)|}{d_y}$ y $\frac{|\Gamma_y^1(x)|}{d_x} < \frac{|\Gamma_x^1(y)|}{d_y}$:

$$\begin{aligned}
\spadesuit - \clubsuit &= |\Gamma_y^{-1}(x)| \frac{1-\alpha}{d_x} (d(x, y) - 1) + |\Gamma_y^0(x)| \frac{1-\alpha}{d_x} (d(x, y) - 1) + |\Gamma_y^1(x)| \frac{1-\alpha}{d_x} d(x, y) \\
&\quad - \left(-|\Gamma_x^0(y)| \frac{1-\alpha}{d_y} - |\Gamma_x^1(y)| \frac{1-\alpha}{d_y} \right) \\
&= |\Gamma_y^{-1}(x)| \frac{1-\alpha}{d_x} d(x, y) + |\Gamma_y^0(x)| \frac{1-\alpha}{d_x} d(x, y) + |\Gamma_y^1(x)| \frac{1-\alpha}{d_x} d(x, y) \\
&\quad - \min\{|\Gamma_y^{-1}(x)| \frac{1-\alpha}{d_x}, |\Gamma_x^{-1}(y)| \frac{1-\alpha}{d_y}\} + \max\{|\Gamma_y^1(x)| \frac{1-\alpha}{d_x}, |\Gamma_x^1(y)| \frac{1-\alpha}{d_y}\} \\
&\quad + \left| |\Gamma_y^0(x)| \frac{1-\alpha}{d_x} - |\Gamma_x^0(y)| \frac{1-\alpha}{d_y} \right|.
\end{aligned}$$

En conclusión, tenemos

$$\begin{aligned}
W(m_x^\alpha, m_y^\alpha) &\geq (d(x, y) - 1)|\Gamma_y^g(x)|^{\frac{1-\alpha}{d_x}} + d(x, y) \left(\alpha + |\Gamma_y^R(x)|^{\frac{1-\alpha}{d_x}} \right) + (d(x, y) + 1)|\Gamma_y^h(x)|^{\frac{1-\alpha}{d_x}} \\
&\quad - \left(-|\Gamma_x^h(y)|^{\frac{1-\alpha}{d_y}} + |\Gamma_x^g(y)|^{\frac{1-\alpha}{d_y}} \right) + |\Gamma_y^{-1}(x)|^{\frac{1-\alpha}{d_x}} d(x, y) + |\Gamma_y^0(x)|^{\frac{1-\alpha}{d_x}} d(x, y) \\
&\quad + |\Gamma_y^1(x)|^{\frac{1-\alpha}{d_x}} d(x, y) - \min\{|\Gamma_y^{-1}(x)|^{\frac{1-\alpha}{d_x}}, |\Gamma_x^{-1}(y)|^{\frac{1-\alpha}{d_y}}\} + \max\{|\Gamma_y^1(x)|^{\frac{1-\alpha}{d_x}}, |\Gamma_x^1(y)|^{\frac{1-\alpha}{d_y}}\} \\
&\quad + \left| |\Gamma_y^0(x)|^{\frac{1-\alpha}{d_x}} - |\Gamma_x^0(y)|^{\frac{1-\alpha}{d_y}} \right| \\
&= d(x, y) \left(|\Gamma_y^g(x)|^{\frac{1-\alpha}{d_x}} + |\Gamma_y^R(x)|^{\frac{1-\alpha}{d_x}} + |\Gamma_y^h(x)|^{\frac{1-\alpha}{d_x}} + |\Gamma_y^1(x)|^{\frac{1-\alpha}{d_x}} + |\Gamma_y^{-1}(x)|^{\frac{1-\alpha}{d_x}} + |\Gamma_y^0(x)|^{\frac{1-\alpha}{d_x}} \right) \\
&\quad + \alpha \cdot d(x, y) - |\Gamma_y^g(x)|^{\frac{1-\alpha}{d_x}} + |\Gamma_y^h(x)|^{\frac{1-\alpha}{d_x}} + |\Gamma_x^h(y)|^{\frac{1-\alpha}{d_y}} - |\Gamma_x^g(y)|^{\frac{1-\alpha}{d_y}} \\
&\quad - \min\{|\Gamma_y^{-1}(x)|^{\frac{1-\alpha}{d_x}}, |\Gamma_x^{-1}(y)|^{\frac{1-\alpha}{d_y}}\} + \max\{|\Gamma_y^1(x)|^{\frac{1-\alpha}{d_x}}, |\Gamma_x^1(y)|^{\frac{1-\alpha}{d_y}}\} \\
&\quad + \left| |\Gamma_y^0(x)|^{\frac{1-\alpha}{d_x}} - |\Gamma_x^0(y)|^{\frac{1-\alpha}{d_y}} \right| \\
&= d(x, y) - \left(|\Gamma_y^g(x)|^{\frac{1-\alpha}{d_x}} + |\Gamma_x^g(y)|^{\frac{1-\alpha}{d_y}} \right) + \left(|\Gamma_y^h(x)|^{\frac{1-\alpha}{d_x}} + |\Gamma_x^h(y)|^{\frac{1-\alpha}{d_y}} \right) \\
&\quad - \min\{|\Gamma_y^{-1}(x)|^{\frac{1-\alpha}{d_x}}, |\Gamma_x^{-1}(y)|^{\frac{1-\alpha}{d_y}}\} + \max\{|\Gamma_y^1(x)|^{\frac{1-\alpha}{d_x}}, |\Gamma_x^1(y)|^{\frac{1-\alpha}{d_y}}\} \\
&\quad + \left| |\Gamma_y^0(x)|^{\frac{1-\alpha}{d_x}} - |\Gamma_x^{-1}(y)|^{\frac{1-\alpha}{d_y}} \right|.
\end{aligned}$$

Así tenemos

$$\begin{aligned}
W(m_x^\alpha, m_y^\alpha) &= d(x, y) - \left(|\Gamma_y^g(x)|^{\frac{1-\alpha}{d_x}} + |\Gamma_x^g(y)|^{\frac{1-\alpha}{d_y}} \right) + \left(|\Gamma_y^1(x)|^{\frac{1-\alpha}{d_x}} + |\Gamma_x^1(y)|^{\frac{1-\alpha}{d_y}} \right) \\
&\quad - \min\{|\Gamma_y^{-1}(x)|^{\frac{1-\alpha}{d_x}}, |\Gamma_x^{-1}(y)|^{\frac{1-\alpha}{d_y}}\} + \left| |\Gamma_y^0(x)|^{\frac{1-\alpha}{d_x}} - |\Gamma_x^{-1}(y)|^{\frac{1-\alpha}{d_y}} \right|.
\end{aligned}$$

Usando la definición de $\kappa_\alpha = 1 - \frac{W(m_x^\alpha, m_y^\alpha)}{d(x, y)}$ y $\kappa_{LLY}(x, y) = \lim_{\alpha \rightarrow 1} \frac{\kappa_\alpha(x, y)}{1-\alpha}$ obtenemos lo pedido. \square

La ventaja entonces de este tipo de grafos bien separados y controlados es que tenemos una fórmula precisa para calcular su curvatura. Pero, sigue siendo una fórmula un tanto complicada y, como veremos en la siguiente sección, estas propiedades no se mantienen cuando agregamos aristas y vértices, como por ejemplo, cuando aplicamos un producto cartesiano.

2.6. Grafos Dóviles

De la sección anterior, ya tenemos una familia de grafos que son controlados, pero una pregunta buena para hacerse es si es complicado crear familias de grafos que sean controlados. Para ello, hablaremos del producto cartesiano entre grafos.

Dados dos grafos $G = (V_G, E_G)$ y $H = (V_H, E_H)$, su producto cartesiano $G \square H$ es un grafo sobre el conjunto de vértices $V_G \times V_H$, donde $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$ si $x_1 \sim x_2$ o $y_1 \sim y_2$. Para el caso en que los grafos G y H son regulares, es decir, todos los vértices tienen la misma cantidad de vecinos, entonces se puede calcular la curvatura para su producto cartesiano en vértices vecinos con el siguiente teorema.

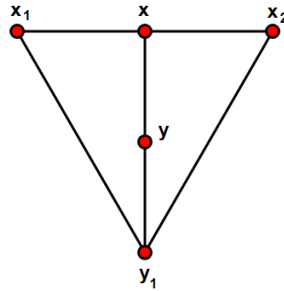
Teorema 2.17. [9]. *Supongamos que G es d_G -regular y H es d_H -regular. Entonces, la curvatura de $G \square H$ está dada por*

$$\kappa_{LLY}^{G \square H}((x_1, y), (x_2, y)) = \frac{d_G}{d_G + d_H} \kappa_{LLY}^G(x_1, x_2),$$

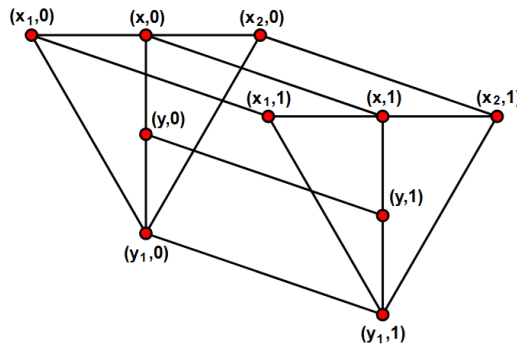
$$\kappa_{LLY}^{G \square H}((x, y_1), (x, y_2)) = \frac{d_H}{d_G + d_H} \kappa_{LLY}^H(y_1, y_2).$$

Donde $x \in V_G$, $y \in V_H$, $x_1 \sim x_2$ e $y_1 \sim y_2$.

Inspirándonos en esto, consideremos el siguiente caso:



Este grafo es controlado en x, y , donde $\Gamma_y^0(x) = \{x_1, x_2\}$ y $\Gamma_x^0(y) = \{y_1\}$. Si consideramos hacerle producto cartesiano con el grafo más simple que podamos, que sería $\{0, 1\}$, nos da lo siguiente:



En este caso $\Gamma_{(y,0)}^0((x,0)) = \{(x_1,0), (x_2,0), (x,1)\}$ y $\Gamma_{(x,0)}^0(y,0) = \{(y_1,0), (y,1)\}$. Antes, la masa de $\Gamma_y^0(x)$ era $(1-\alpha) \cdot 2/3$ y la de $\Gamma_x^0(y)$ era $(1-\alpha) \cdot 1/2$, por lo que, si consideramos que la masa la enviamos de m_x^α a m_x^α , la masa sobraba. Sin embargo, ahora la masa que está en el punto $(x,1)$ debe ir a la de $(y,1)$ para que mantengamos la propiedad de ser controlado. Pero en $(x,1)$ tenemos una masa de $(1-\alpha) \cdot 1/4$ y en $(y,1)$ es $(1-\alpha) \cdot 1/3$, por lo que faltaría masa. Así nos encontramos con el problema de que el grafo original es controlado, pero si le hacemos un producto cartesiano con cualquier otro grafo que contenga al menos una arista, entonces deja de serlo.

Algo en particular que nos gustaría de un tipo de grafos es que no pase este fenómeno, de que por un lado la masa sobra y por otro falta cuando añadimos al menos un elemento en los conjuntos Γ^i , lo que nos lleva a la siguiente definición.

Definición 2.18. Decimos que un grafo $G = (V, E)$ es *dócil* en w, z si se cumplen las siguientes propiedades:

- G es controlado en w, z .
- $|\Gamma_w^i(z)| = |\Gamma_z^i(w)|$ para cada $i \in \{-1, 0, 1\}$.
- $d_w = d_z$.

Diremos que el grafo G es dócil si es dócil para cualquier par de puntos $w, z \in V$.

Si construimos la matriz de distancia, sería de la siguiente forma:

$$D_{x,y} = \begin{bmatrix} d(x,y) & [d(x,\Gamma_x^g(y))] & [d(x,\Gamma_x^R(y))] & [d(x,\Gamma_x^{-1}(y))] & [d(x,\Gamma_x^0(y))] & [d(x,\Gamma_x^1(y))] & [d(x,\Gamma_x^h(y))] \\ [d(y,\Gamma_y^g(x))] & * & * & * & * & * & * \\ [d(y,\Gamma_y^R(x))] & * & * & * & * & * & * \\ [d(y,\Gamma_y^{-1}(x))] & * & * & A_{-1} & * & * & * \\ [d(y,\Gamma_y^0(x))] & * & * & * & A_0 & * & * \\ [d(y,\Gamma_y^1(x))] & * & * & * & * & A_1 & * \\ [d(y,\Gamma_y^h(x))] & * & * & * & * & * & * \end{bmatrix}.$$

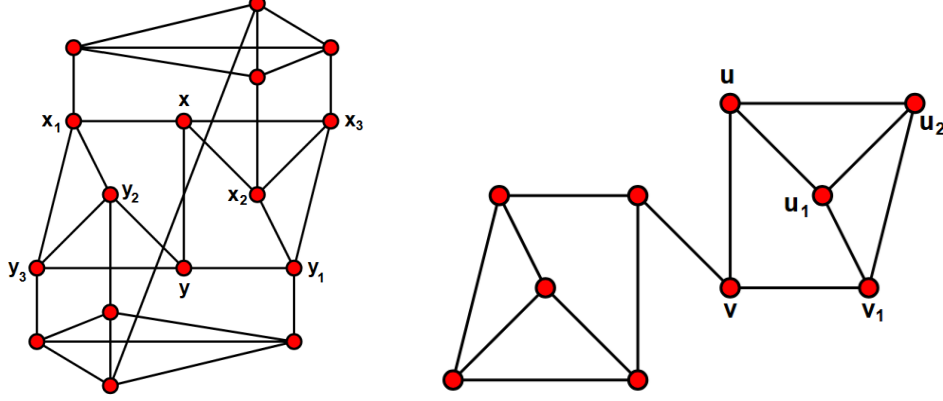
Aquí $d(x, \Gamma_x^i(y)) = d(x, z)$, con $z \in \Gamma_x^i(y)$, así que reordenamos las filas y columnas para que nos queden ordenadas según la partición que construimos para $\Gamma(x)$ y $\Gamma(y)$ y así obtenemos submatrices A_i con $i \in \{-1, 0, 1\}$. Usamos la notación $[d(x, \Gamma_x^i(y))]$ para representar una matriz $1 \times m$ (filas) o $m \times 1$ (columnas) con valores $d(x, \Gamma_x^i(y)) = d(x, z)$, con $z \in \Gamma_x^i(y)$ (aquí i también puede ser g, h o R).

Proposición 2.19. *Un grafo es dócil en x, y si y solo si su matriz de distancia $D_{x,y}$, descrita anteriormente, cumple con lo siguiente:*

1. La matriz $D_{x,y}$ es cuadrada.
2. Las matrices A_i son cuadradas para cada $i \in \{-1, 0, 1\}$.
3. Para cada matriz A_i construimos una matriz del mismo tamaño B_i tal que si $(A_i)_{jk} = d(x, y) + i$, entonces $(B_i)_{jk} = 1$ y 0 en otro caso. Entonces cada B_i , mediante intercambios de columnas y filas, es equivalente a una matriz con diagonal principal llena de 1's.

La gracia de este proceso es que estamos haciendo una biyección entre los conjuntos $\Gamma_y^i(x)$ y $\Gamma_x^i(y)$, lo cual reduce enormemente la complejidad de esta matriz de distancia.

Por definición, cualquier grafo dócil es automáticamente regular. Por esto mismo, si queremos hacer referencia al grado d_G de un grafo dócil G , diremos que G es un grafo d_G -dócil. Sin embargo, no es cierto el converso. Algunos ejemplos de esto son los siguientes:



En ambos ejemplos los grafos son regulares. Notemos que para el primero, si consideramos los puntos x, y , tenemos

$$\Gamma_y^g(x) = \{y\}, \quad \Gamma_y^h(x) = \emptyset, \quad \Gamma_y^R(x) = \emptyset, \quad \Gamma_y^{-1}(x) = \emptyset, \quad \Gamma_y^0(x) = \{x_1, x_2, x_3\}, \quad \Gamma_y^1(x) = \emptyset.$$

$$\Gamma_x^g(y) = \{x\}, \quad \Gamma_x^h(y) = \emptyset, \quad \Gamma_x^R(y) = \emptyset, \quad \Gamma_x^{-1}(y) = \emptyset, \quad \Gamma_x^0(y) = \{y_1, y_2, y_3\}, \quad \Gamma_x^1(y) = \emptyset.$$

Pero nos encontramos con el problema de que $W(\mu_{\Gamma_x^0(y)}, \mu_{\Gamma_y^0(x)}) > 1 = d(x, y)$, así que este grafo no sería controlado en x, y . En cambio, el segundo grafo cumple que $\Gamma_v^0(u) = \{u_1, u_2\}$, pero $\Gamma_u^0(v) = \{v_1\}$. Así $|\Gamma_v^0(u)| \neq |\Gamma_u^0(v)|$.

Algunas de las ventajas que tiene este tipo de grafos es que, en primer lugar, no necesitamos que el grafo sea bien separado para poder ocupar la fórmula de la curvatura escrita en el teorema 2.16. En segundo lugar, esta misma fórmula se simplifica considerablemente. Denotando $|\Gamma^i| := |\Gamma_x^i(y)| = |\Gamma_y^i(x)|$ para grafos dóciles, obtenemos lo siguiente:

Corolario 2.20. *Sea $G = (V, E)$ un grafo dócil y sean $x, y \in V$, entonces*

$$\kappa_{LLY}(x, y) = \frac{1}{d_G \cdot d(x, y)} \left(|\Gamma_y^g(x)| + |\Gamma_x^g(y)| - |\Gamma_y^h(x)| - |\Gamma_x^h(y)| + |\Gamma^{-1}| - |\Gamma^1| \right).$$

Es posible usar el teorema 2.16 en este tipo de grafos por el hecho de que, en el plan de transporte de la demostración, todos los mínimos/máximos se eliminan, ya que el grafo es regular y se cumple $|\Gamma_w^i(z)| = |\Gamma_z^i(w)|$. Esto también aporta a que al hacer el transporte, no falte ni sobre masa, así que no hay necesidad de alejar tanto los vértices de los grafos, lo cual es lo que usamos cuando pedimos que el grafo sea bien separado. En otras palabras, lo que se quiere rescatar en la propiedad de un grafo dócil es que

antes hablábamos de que cierta masa sobra o falta, ahora eso no puede pasar, es decir, toda la masa que va desde $\Gamma_y^i(x)$ tiene que llegar a $\Gamma_x^i(y)$, sin que sobre ni que falte. Esto nos da una ventaja, ya que a partir de este tipo de grafos podemos construir otros del mismo tipo haciendo un producto cartesiano entre estos, lo que queda más claro en el siguiente teorema:

Teorema 2.21. *El producto cartesiano es una operación cerrada para grafos dóciles, es decir, si G y H son grafos dóciles, entonces su producto cartesiano $G \square H$ es dócil. Además, para el caso en que G, H sean dóciles en puntos $x_1, x_2 \in V_G$, $y_1, y_2 \in V_H$ respectivamente (no necesariamente distintos) se cumple que*

$$\kappa_{LLY}^{G \square H}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \frac{d_G \cdot d_G(x_1, x_2) \cdot \kappa_{LLY}^G(x_1, x_2) + d_H \cdot d_H(y_1, y_2) \cdot \kappa_{LLY}^H(y_1, y_2)}{(d_G + d_H) \cdot d_{G \square H}((x_1, y_1), (x_2, y_2))}.$$

Observación 2.22. Cuando nos referimos a que los puntos $x_1, x_2 \in V_G$, $y_1, y_2 \in V_H$ no son necesariamente distintos es porque podemos tener el caso en que $x_1 = x_2$ o $y_1 = y_2$, pero no ambos al mismo tiempo. En cuyo caso consideraremos $\kappa_{LLY}^G(x_1, x_2) = 0$, $\kappa_{LLY}^H(y_1, y_2) = 0$ respectivamente.

Las ventajas que hay de este teorema con respecto al teorema 2.17 es que podemos calcular la curvatura de cualquier par de vértices en el producto cartesiano de forma explícita, no necesariamente entre vecinos y que además podemos crear nuevos grafos que tengan la propiedad de ser dóciles. La desventaja más obvia es que ser dócil es una propiedad más restrictiva que simplemente ser regular.

Para la demostración del teorema usaremos la siguiente propiedad del producto cartesiano:

Lema 2.23. [8]. *Sean $(g, h), (g', h') \in V_{G \square H}$, entonces*

$$d_{G \square H}((g, h), (g', h')) = d_G(g, g') + d_H(h, h').$$

Ahora procedemos con la demostración del teorema.

Demostración. Partamos con el hecho de que el producto cartesiano de grafos regulares también es regular. Ahora sean G, H grafos dóciles y tomemos primero $v_1, v_2 \in V_H$ distintos y $u \in V_G$. Luego

$$d_{G \square H}((u, v_1), (u, v_2)) = d_G(u, u) + d_H(v_1, v_2) = d_H(v_1, v_2).$$

Sea $u' \in \Gamma(u)$ arbitrario, luego $(u', v_1) \in \Gamma(u, v_1)$ y $(u', v_2) \in \Gamma(u, v_2)$ y cumplen

$$d_{G \square H}((u', v_1), (u, v_2)) = 1 + d_{G \square H}((u, v_1), (u, v_2)).$$

Así $(u', v_1) \in \Gamma_{(u, v_2)}^+(u, v_1)$. Además, se cumple que

$$d_{G \square H}((u', v_1), (u, v_2)) = d_{G \square H}((u, v_1), (u', v_2)).$$

Donde $(u', v_2) \in \Gamma_{(u, v_1)}^+(u, v_2)$, esto dice entonces que $(u', v_1) \in \Gamma_{(u, v_2)}^0(u, v_1)$. Como u' era arbitrario, entonces esto nos dice que $(u', v_1) \in \Gamma_{(u, v_2)}^0(u, v_1)$ para cada $u' \in \Gamma(u)$. Así $\Gamma(u, v_1)$ se puede escribir como una unión disjunta de los conjuntos

$$\begin{aligned}\Gamma(u, v_1) &= \{u\} \times \left(\Gamma_{v_2}^g(v_1) \cup \Gamma_{v_2}^h(v_1) \cup \Gamma_{v_2}^R(v_1) \cup \Gamma_{v_2}^{-1}(v_1) \cup \Gamma_{v_2}^1(v_1) \right) \cup \left(\Gamma(u) \times \{v_1\} \cup \{u\} \times \Gamma_{v_2}^0(v_1) \right) \\ &= \Gamma_{(u, v_2)}^g(u, v_1) \cup \Gamma_{(u, v_2)}^h(u, v_1) \cup \Gamma_{(u, v_2)}^R(u, v_1) \cup \Gamma_{(u, v_2)}^{-1}(u, v_1) \cup \Gamma_{(u, v_2)}^0(u, v_1) \cup \Gamma_{(u, v_2)}^1(u, v_1).\end{aligned}$$

De forma análoga podríamos hacer lo mismo para $\Gamma(u, v_2)$. Las propiedades de ser dócil se mantienen para los conjuntos Γ^{-1} y Γ^1 , ya que no cambiamos la cardinalidad de estos conjuntos y los grafos dóciles no se ven afectados con la propiedad de ser controlados si dicha cardinalidad no cambia. Por otro lado, tenemos que $\Gamma_{(u, v_2)}^0(u, v_1) = \Gamma(u) \times \{v_1\} \cup \{u\} \times \Gamma_{v_2}^0(v_1)$ y $\Gamma_{(u, v_1)}^0(u, v_2) = \Gamma(u) \times \{v_2\} \cup \{u\} \times \Gamma_{v_1}^0(v_2)$. Como H es dócil, entonces la masa de $\Gamma_{v_1}^0(v_2)$ la podemos llevar a $\Gamma_{v_2}^0(v_1)$ y enviamos de forma obvia la masa va desde $\Gamma(u) \times \{v_1\}$ a $\Gamma(u) \times \{v_2\}$. Así $G \square H$ es dócil en (u, v_1) y (u, v_2) .

Tomemos ahora $u_1, u_2 \in V_G$ y $v_1, v_2 \in V_H$ distintos. Tomemos sin pérdida de generalidad $u' \in \Gamma(u_1)$, luego tendremos varias posibles opciones:

Caso 1: $u' \in \Gamma_{u_2}^g(u_1)$:

$$\begin{aligned}d_{G \square H}((u', v_1), (u_2, v_2)) &= d_G(u', u_2) + d_H(v_1, v_2) \\ &= d_G(u_1, u_2) - 1 + d_H(v_1, v_2) \\ &= d_{G \square H}((u_1, v_1), (u_2, v_2)) - 1.\end{aligned}$$

Por lo tanto $(u', v_1) \in \Gamma_{(u_2, v_2)}^g(u_1, v_1)$.

Caso 2: $u' \in \Gamma_{u_2}^*(u_1)$:

$$\begin{aligned}d_{G \square H}((u', v_1), (u_2, v_2)) &= d_G(u', u_2) + d_H(v_1, v_2) \\ &= d_G(u_1, u_2) + d_H(v_1, v_2) \\ &= d_{G \square H}((u_1, v_1), (u_2, v_2)).\end{aligned}$$

Por lo tanto $(u', v_1) \in \Gamma_{(u_2, v_2)}^*(u_1, v_1)$.

Caso 3: $u' \in \Gamma_{u_2}^+(u_1)$:

$$\begin{aligned}d_{G \square H}((u', v_1), (u_2, v_2)) &= d_G(u', u_2) + d_H(v_1, v_2) \\ &= d_G(u_1, u_2) + 1 + d_H(v_1, v_2) \\ &= d_{G \square H}((u_1, v_1), (u_2, v_2)) + 1.\end{aligned}$$

Por lo tanto $(u', v_1) \in \Gamma_{(u_2, v_2)}^+(u_1, v_1)$.

Dentro de los casos 2 y 3 tenemos subcasos, los cuales son los siguientes:

Caso 2.1: $u' \in \Gamma_{u_2}^{-1}(u_1)$. Luego existe $u'' \in \Gamma_{u_1}^*(u_2)$ con $d_G(u', u'') = d(u_1, u_2) - 1$. Luego

$$\begin{aligned} d_G \square_H((u', v_1), (u'', v_2)) &= d_G(u', u'') + d_H(v_1, v_2) \\ &= d_G(u_1, u_2) - 1 + d_H(v_1, v_2) \\ &= d_G \square_H((u_1, v_1), (u_2, v_2)) - 1. \end{aligned}$$

Por lo tanto $(u', v_1) \in \Gamma_{(u_2, v_2)}^{-1}(u_1, v_1)$.

Caso 3.1: $u' \in \Gamma_{u_2}^0(u_1)$. Luego existe $u'' \in \Gamma_{u_1}^+(u_2)$ con $d_G(u', u'') = d(u_1, u_2)$. Luego

$$\begin{aligned} d_G \square_H((u', v_1), (u'', v_2)) &= d_G(u', u'') + d_H(v_1, v_2) \\ &= d_G(u_1, u_2) + d_H(v_1, v_2) \\ &= d_G \square_H((u_1, v_1), (u_2, v_2)). \end{aligned}$$

Por lo tanto $(u', v_1) \in \Gamma_{(u_2, v_2)}^0(u_1, v_1)$.

Caso 3.2: $u' \in \Gamma_{u_2}^1(u_1)$. Luego existe $u'' \in \Gamma_{u_1}^*(u_2)$ con $d_G(u', u'') = d(u_1, u_2) + 1$. Luego

$$\begin{aligned} d_G \square_H((u', v_1), (u'', v_2)) &= d_G(u', u'') + d_H(v_1, v_2) \\ &= d_G(u_1, u_2) + 1 + d_H(v_1, v_2) \\ &= d_G \square_H((u_1, v_1), (u_2, v_2)) + 1. \end{aligned}$$

Por lo tanto $(u', v_1) \in \Gamma_{(u_2, v_2)}^1(u_1, v_1)$.

Para $\Gamma_{(u_2, v_2)}^R(u_1, v_1)$ y $\Gamma_{(u_2, v_2)}^h(u_1, v_1)$ no hay necesidad de hacer el mismo procedimiento porque son los elementos sobrantes de $\Gamma_{(u_2, v_2)}^*(u_1, v_1)$ y $\Gamma_{(u_2, v_2)}^+(u_1, v_1)$ respectivamente. Así obtenemos que

$$\begin{aligned} \Gamma_{(u_2, v_2)}^g(u_1, v_1) &= \Gamma_{u_2}^g(u_1) \times \{v_1\} \cup \{u_1\} \times \Gamma_{v_2}^g(v_1). \\ \Gamma_{(u_2, v_2)}^{-1}(u_1, v_1) &= \Gamma_{u_2}^{-1}(u_1) \times \{v_1\} \cup \{u_1\} \times \Gamma_{v_2}^{-1}(v_1). \\ \Gamma_{(u_2, v_2)}^R(u_1, v_1) &= \Gamma_{u_2}^R(u_1) \times \{v_1\} \cup \{u_1\} \times \Gamma_{v_2}^R(v_1). \\ \Gamma_{(u_2, v_2)}^0(u_1, v_1) &= \Gamma_{u_2}^0(u_1) \times \{v_1\} \cup \{u_1\} \times \Gamma_{v_2}^0(v_1). \\ \Gamma_{(u_2, v_2)}^1(u_1, v_1) &= \Gamma_{u_2}^1(u_1) \times \{v_1\} \cup \{u_1\} \times \Gamma_{v_2}^1(v_1). \\ \Gamma_{(u_2, v_2)}^h(u_1, v_1) &= \Gamma_{u_2}^h(u_1) \times \{v_1\} \cup \{u_1\} \times \Gamma_{v_2}^h(v_1). \end{aligned}$$

Y podemos repetir el mismo proceso para $\Gamma(u_2)$, $\Gamma(v_1)$ y $\Gamma(v_2)$. Ahora, dado $i \in \{-1, 0, 1\}$ se cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned} W \left(\mu_{\Gamma_{(u_2, v_2)}^i}(u_1, v_1), \mu_{\Gamma_{(u_1, v_1)}^i}(u_2, v_2) \right) &= W \left(\mu_{(\{u_1\} \times \Gamma_{v_2}^i(v_1)) \cup (\Gamma_{u_2}^i(u_1) \times \{v_1\})}, \mu_{(\{u_2\} \times \Gamma_{v_1}^i(v_2)) \cup (\Gamma_{u_1}^i(u_2) \times \{v_2\})} \right) \\ &= d_G \square_H((u_1, v_1), (u_2, v_2)) + i. \end{aligned}$$

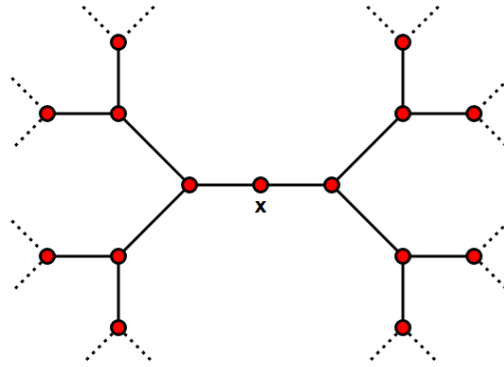
Esto sucede por el hecho de que los grafos son dóciles, entonces si aumentamos la cantidad de vecinos de u_1, u_2, v_1, v_2 (sin modificar los conjuntos Γ^i), estos siguen siendo controlados en esos puntos. Así concluimos entonces que el grafo $G \square H$ es controlado. Por otro lado, como $|\Gamma_{(u_2, v_2)}^i(u_1, v_1)| = |\Gamma_{u_2}^i(u_1)| + |\Gamma_{v_2}^i(v_1)|$, y $d_{G \square H} = d_G + d_H$, entonces concluimos que el grafo es dócil.

El cálculo de la curvatura $\kappa_{LLY}^{G \square H}((x_1, y_1), (x_2, y_2))$ es directo con lo anterior descrito usando que $|\Gamma_{(u_2, v_2)}^i(u_1, v_1)| = |\Gamma_{u_2}^i(u_1)| + |\Gamma_{v_2}^i(v_1)|$ para cualquier valor de $i \in \{-1, 0, 1\}$ y lo mismo sucede con los conjuntos Γ^h y Γ^g . \square

Otra construcción interesante que mantiene la propiedad de ser un grafo dócil es la que se describe a continuación. Para esto, primero definamos lo que son los árboles centrados.

Definición 2.24. Para $n \geq 3$ decimos que un grafo $G = (V, E)$ es un n -árbol centrado en un vértice $x \in V$ si G es un árbol donde todos sus vértices tienen n vecinos, excepto x que tiene $n - 1$ vecinos.

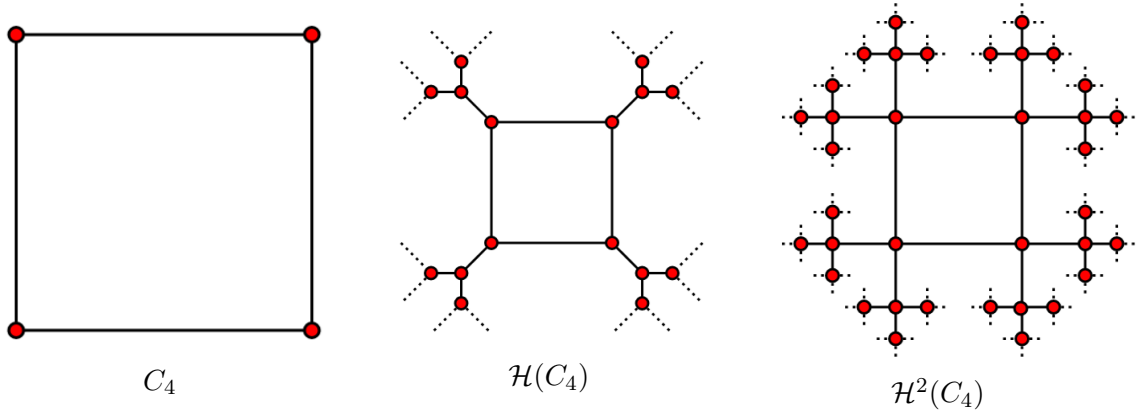
El ejemplo más simple sería un 3-árbol centrado en un vértice x , el cual tiene la siguiente representación:



Ahora para la construcción consideremos un grafo d -regular $G = (V, E)$ y una colección $\{G^i = (V^i, E^i)\}_i$ de $(d + 1)$ -árboles centrados en x_i , donde cada $v_i \in V$ está asociado a su propio grafo G^i . Construimos el grafo $\mathcal{H}(G) = (\tilde{V}, \tilde{E})$ donde $\tilde{V} = V \cup \bigcup_i V^i$ y el conjunto de aristas está dado por E, E^i y para cada $v_i \in V$ consideramos $v_i \sim x_i$. Esta construcción se puede repetir las veces que uno quiera (siempre y cuando sea finito para mantener la propiedad de que los grafos sean localmente finitos), por lo que denotaremos

$$\mathcal{H}^n(G) := \mathcal{H}(\mathcal{H}(\dots \mathcal{H}(G) \dots)).$$

Donde la composición se hace n veces. A este tipo de grafos los llamaremos n -ésima representación hiperbólica del grafo G . Con esto ya definido, podemos representar un pequeño ejemplo de lo que sucede con el ciclo C_4 :



El nombre de n -ésima representación hiperbólica del grafo G tiene un cierto sentido, ya que sabemos que los árboles tienen curvatura negativa en la gran mayoría de los casos, pero esta construcción también nos permite jugar con la curvatura de un grafo sin cambiar su estructura original, además de que la propiedad de ser dócil se puede mantener.

Teorema 2.25. *Sea G un grafo dócil y $n \in \mathbb{N}$, entonces $\mathcal{H}^n(G)$ es un grafo dócil.*

Demostración. Por composición, basta probar que si G es un grafo dócil, entonces $\mathcal{H}(G)$ también lo es. Supongamos entonces que $G = (V, E)$ es un grafo dócil y tomemos la partición de $\Gamma(u)$ dentro del grafo $\mathcal{H}(G)$ como

$$\tilde{\Gamma}(u) = \tilde{\Gamma}_v^g(u) \cup \tilde{\Gamma}_v^h(u) \cup \tilde{\Gamma}_v^R(u) \cup \tilde{\Gamma}_v^{-1}(u) \cup \tilde{\Gamma}_v^0(u) \cup \tilde{\Gamma}_v^1(u).$$

Entonces tenemos 4 casos:

Caso 1: $u, v \notin V$. En dicho caso los conjuntos Γ^i son todos vacíos, por lo que las propiedades de ser dócil son directas.

Caso 2: $u, v \in V$. En dicho caso podemos hacer una partición de $\Gamma(u)$ dentro del grafo G como

$$\Gamma(u) = \Gamma_v^g(u) \cup \Gamma_v^h(u) \cup \Gamma_v^R(u) \cup \Gamma_v^{-1}(u) \cup \Gamma_v^0(u) \cup \Gamma_v^1(u).$$

Así podemos comparar los conjuntos $\tilde{\Gamma}_v^1(u)$ y $\Gamma_v^1(u)$, que son los mismos salvo el centro del árbol centrado que le agregamos a cada vértice, es decir, $|\tilde{\Gamma}_v^1(u)| = |\Gamma_v^1(u)| + 1$. Sin embargo, esto tampoco cambia en absoluto a los conjuntos Γ^i , por lo que la propiedad de ser dócil se mantiene.

Caso 3: $u \in V, v \notin V, \min_{v' \in V} d(u, v') = d(u, v)$. En este caso los conjuntos Γ^i son todos vacíos, por lo que las propiedades de ser dócil son directas.

Caso 4: $u \in V, v \notin V, \min_{v' \in V} d(u, v') < d(u, v)$. Sea $v' \in V$ tal que el mínimo se alcanza, luego haciendo la partición de $\Gamma(u)$ dentro del grafo G tenemos

$$\Gamma(u) = \Gamma_{v'}^g(u) \cup \Gamma_{v'}^h(u) \cup \Gamma_{v'}^R(u) \cup \Gamma_{v'}^{-1}(u) \cup \Gamma_{v'}^0(u) \cup \Gamma_{v'}^1(u).$$

Y se cumple que

$$\begin{aligned} |\tilde{\Gamma}_v^g(u)| &= |\Gamma_{v'}^g(u)| \\ |\tilde{\Gamma}_v^R(u)| &= |\Gamma_{v'}^*(u)| \\ |\tilde{\Gamma}_v^h(u)| &= |\Gamma_{v'}^+(u)| + 1. \end{aligned}$$

El resto de conjuntos es vacío por esta misma construcción, por lo que el grafo es dócil automáticamente.

Así entonces concluimos que el grafo $\mathcal{H}(G)$ es dócil. \square

Con ese proceso modificamos la curvatura de todo el grafo G por igual. Como acabamos de ver, si tomamos $x, y \in V$ y vemos su imagen en el grafo $\mathcal{H}(G)$, obtenemos un vértice extra en los conjuntos Γ^h , así que la nueva curvatura será:

$$\kappa_{LLY}^{\mathcal{H}(G)}(x, y) = \frac{d_G \cdot \kappa_{LLY}^G(x, y) - \frac{2}{d(x, y)}}{d_G + 1},$$

Y de forma inductiva podemos llegar al siguiente resultado.

Corolario 2.26. *Sea $G = (V, E)$ un grafo dócil y sean $x, y \in V$ con curvatura $\kappa_{LLY}^G(x, y)$, entonces*

$$\kappa_{LLY}^{\mathcal{H}^n(G)}(x, y) = \frac{d_G \cdot \kappa_{LLY}^G(x, y) - \frac{2n}{d(x, y)}}{d_G + n}.$$

Esto nos permite dar algunas pequeñas conclusiones sobre grafos con curvatura estrictamente negativa, pero manteniendo la propiedad de ser grafos dóciles.

Corolario 2.27. *Sea $G = (V, E)$ un grafo dócil finito y $\kappa_0 \in (-2/\text{diam}(G), 2)$ fijo, entonces G es un subgrafo de un grafo dócil H tal que $\kappa^H(x, y) < \kappa_0$ para todo $x, y \in V$.*

Demostración. Basta considerar que la función $f(x) = \frac{a-2x/d}{b+x}$, con a, b, d fijos y $d > 0$, tiene una asíntota horizontal en $y = -2/d$, por lo que eventualmente será menor que cualquier valor mayor que $-2/d$. \square

Corolario 2.28. *Sea $G = (V_G, E_G)$ un grafo dócil, entonces G es un subgrafo de un grafo $H = (V_H, E_H)$ dócil tal que $\kappa^H(x, y) < 0$ para todo $x, y \in V_H$.*

Demostración. Como el grafo G es dócil, $\mathcal{H}^n(G)$ es dócil y su curvatura se puede calcular por medio de la fórmula del corolario 2.20. Por otro lado, cada vez que aplicamos \mathcal{H} a un grafo, cada conjunto Γ^h aumenta en uno su cardinalidad, por lo que para $n > d_G$ se cumple lo pedido. \square

Para concluir con este capítulo, podríamos preguntarnos cuál es la gracia de ocupar este tipo de grafos. Aparte de que sean cerrados bajo producto cartesiano o que al aplicarles este operador \mathcal{H} sigan siendo dóciles, la mayor gracia que tienen es el hecho de que obtener su curvatura es sumamente directo con lo que hemos trabajado en el capítulo. Si tenemos la descomposición de $\Gamma(u)$ con respecto a v y viceversa, entonces tenemos su

curvatura de forma muy sencilla y podemos hacer construcciones de otros grafos a partir de esta, como con productos cartesianos u obteniendo $\mathcal{H}(G)$ y quizás también con otras construcciones. Aparte, podemos ver cómo se modifica esta curvatura con respecto a la que existe en el grafo original.

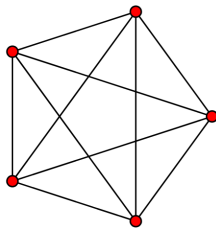
En resumen, los grafos dóciles son ejemplos de grafos de los cuales es muy factible obtener su curvatura explícita y poder controlarla. En la siguiente sección se darán algunos ejemplos de grafos que son dóciles.

2.6.1. Ejemplos

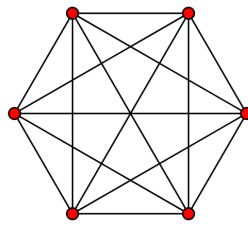
En la sección anterior mencionamos que los grafos dóciles son cerrados bajo producto cartesiano, esto nos dice que si encontramos un grafo dócil, ya tendríamos un conjunto infinito de distintos grafos dóciles. Pero, ¿qué ejemplos de grafos dóciles existen? Por el nivel de restricción que le pedimos a los grafos dóciles, podríamos pensar que casi no deberían existir muchos.

En primer lugar, ya sabemos que los árboles son grafos controlados, puesto que $|\Gamma_w^i(z)| = 0$ para cualquier par de vértices w, z y para todo $i \in \{-1, 0, 1\}$, y por esta misma razón, todos los árboles regulares son grafos dóciles. En particular, \mathbb{Z} es un árbol regular con grado 2 en cada vértice. Así \mathbb{Z}^n también es un grafo dócil para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

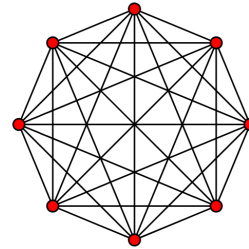
Otros tipos de grafos dóciles serían, por el mismo argumento, los grafos regulares de solo un ciclo, de los cuales sabemos exactamente cómo hacer la separación de $\Gamma(z)$ para cualquier vértice z . Otros ejemplos son los grafos completos K_n para $n \geq 2$. Para este caso, si $w, z \in V$ son vértices diferentes en K_n , entonces $\Gamma_w^g(z) = \{w\}$, $\Gamma_z^g(w) = \{z\}$ y $|\Gamma_w^{-1}(z)| = |\Gamma_w^{-1}(z)| = n - 2$. Con esto podríamos concluir que para cualquier par de vértices w, z en un grafo completo K_n con $n \geq 2$ tenemos $\kappa_{LLY}(w, z) = \frac{n}{n-1}$.



K_5



K_6



K_8

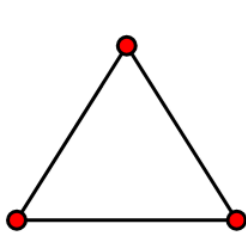
También podemos considerar que el hipercubo Q^n es simplemente $(K_2)^n$, por lo que también cualquier hipercubo es un grafo dócil. Otro ejemplo más interesante de grafos dóciles es la siguiente familia de grafos.

Definición 2.29. Diremos que un grafo planar $G = (V, E)$ es *EEH* si existen enteros $n \geq 2, d \geq 3$, tales que:

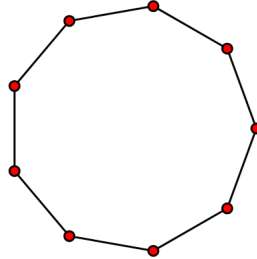
1. Cada vértice $v \in V$ tiene n vecinos, es decir, G es un grafo n -regular.
2. Existe un ordenamiento v_1, \dots, v_n de los vecinos de v tal que el ciclo más pequeño que contiene a v, v_j, v_{j+1} es de largo d para todo $1 \leq j \leq n - 1$ y lo mismo vale para v, v_n, v_1 . Es decir, estos vértices son consecutivos dentro de un d -ágono.

En dicho caso diremos que el grafo G es *EEH de tipo EEH*(n, d).

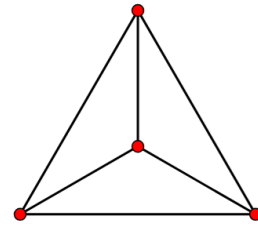
Para n, d relativamente pequeños, nos encontramos con los polígonos de n lados y con los sólidos platónicos (Los grafos con líneas entrecortadas que aparecen a la izquierda son el mismo grafo que el que tienen a su derecha, pero con una figura que se asemeja más a los sólidos platónicos).



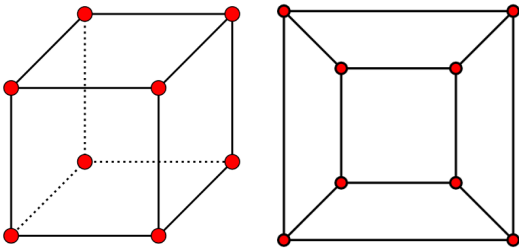
$EEH(2, 3)$



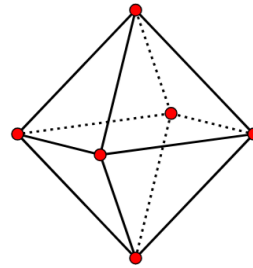
$EEH(2, 9)$



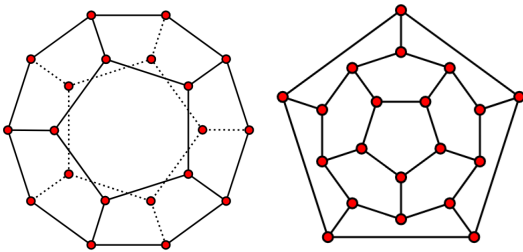
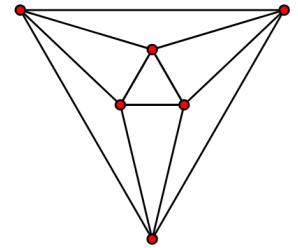
$EEH(3, 3)$ (tetraedro)



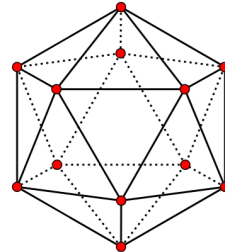
$EEH(3, 4)$ (cubo)



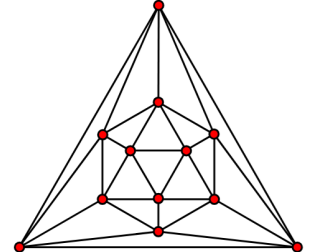
$EEH(4, 3)$ (octaedro)



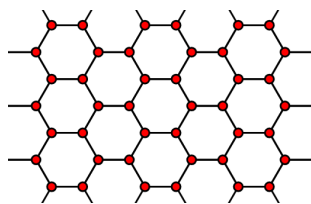
$EEH(3, 5)$ dodecaedro



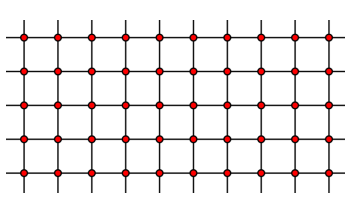
$EEH(5, 3)$ (icosaedro)



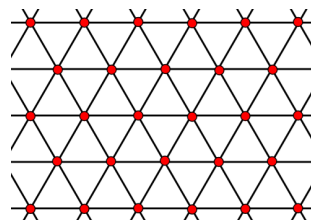
También podemos encontrar para unos n, d específicos los teselados del plano euclideo:



$EEH(3,6)$

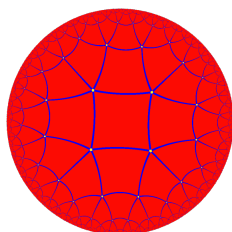


$EEH(4,4)$

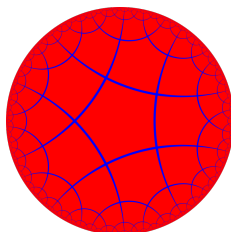


$EEH(6,3)$

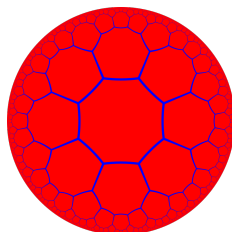
Y para n y d más grandes obtenemos teselados hiperbólicos como los siguientes:



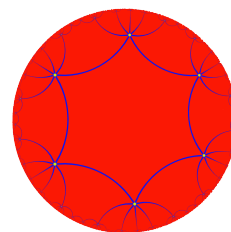
$EEH(5,4)$



$EEH(4,5)$

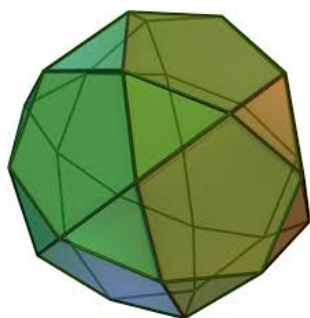


$EEH(3,8)$

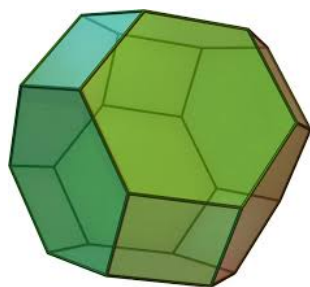


$EEH(7,6)$

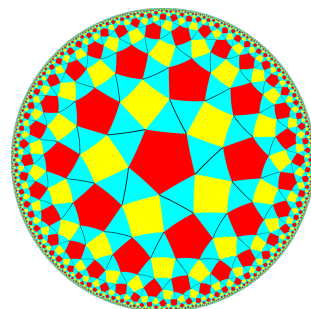
Este tipo de grafos es una subfamilia de grafos que se pueden representar como poliedros o teselados con una configuración de vértices. Una configuración de vértices compuesta únicamente de polígonos convexos es dada como una secuencia de números representando el número de lados de las caras alrededor de algún vértice. Por ejemplo, la notación $a.b.c$ describe un vértice que tiene 3 caras alrededor suyo, con a , b , y c aristas, respectivamente. Es tentador pensar que este tipo de grafos también es dócil, pero en este trabajo no se ha podido encontrar algún argumento que aporte a dicha información.



Icosidodecaedro 3.5.3.5



Octaedro truncado 4.6.6

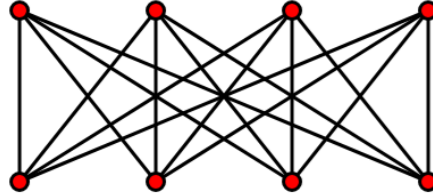


3.3.4.3.5

Un grafo bipartito completo $G = (V_1 \cup V_2, E)$ está formado por dos conjuntos disjuntos de vértices V_1 y V_2 tales que para todo $v_1 \in V_1$ y $v_2 \in V_2$, se tiene que $v_1 v_2 \in E$. En este caso si $|V_1| = m$ y $|V_2| = n$, denotamos el grafo bipartito completo como $K_{m,n}$. Los grafos

bipartito completo $K_{n,n}$ también son grafos dóciles. De hecho, si $K_{n,n} = (V_1 \cup V_2, E)$ con $|V_1| = |V_2| = n$ y tomamos, sin pérdida de generalidad, $x, y \in V_1$, entonces $\Gamma(x) = \Gamma(y) = \Gamma_y^g(x) = \Gamma_x^g(y) = V_2$. En cambio si $x \in V_1, y \in V_2$, entonces $\Gamma_y^g(x) = \{y\}$, $\Gamma_x^g(y) = x$, $\Gamma_y^0(x) = V_2 \setminus \{y\}$, $\Gamma_x^0(y) = V_2 \setminus \{x\}$. Así obtenemos que en un grafo bipartito completo $K_{n,n}$ la curvatura $\kappa_{LLY}(x, y)$ está dada por

$$\kappa_{LLY}(x, y) = \begin{cases} 2/n & \text{si } d(x, y) = 1, \\ 1 & \text{si } d(x, y) = 2. \end{cases}$$



$K_{4,4}$

Por último, si tomamos un grafo regular $G = (V, E)$ y para cualquier par de vértices $x, y \in V$ se cumple que $|\Gamma_y^i(x)| = |\Gamma_x^i(y)| \leq 2$ para todo $i \in \{-1, 0, 1\}$, entonces el grafo es automáticamente dócil. Esto es porque si en $\Gamma_y^i(x)$ y $\Gamma_x^i(y)$ solo tenemos uno o dos elementos, entonces directamente se cumple la propiedad de ser controlado. Esto nos puede dar varios ejemplos más de grafos que son dóciles, solamente controlando la cardinalidad de estos conjuntos y esperando que sea pequeña.

3. Convergencia Entre Curvaturas

3.1. Introducción

En este capítulo estudiaremos cómo aproximar la curvatura de Ollivier mediante la comparación de un grafo (no necesariamente equipado con la distancia geodésica que usamos en los capítulos anteriores) con respecto a una cierta variedad. Para esto, primero tomaremos inspiración del trabajo de García-Trillos y Weber [14]. En su trabajo usan un conjunto de puntos \mathcal{X} incrustado de forma aleatoria en una variedad Riemanniana $M \subseteq \mathbb{R}^d$ de dimensión baja. A partir de esta información, solamente conociendo el conjunto \mathcal{X} , pero no la variedad M , se quiere saber qué tanto podemos conocer de la geometría intrínseca de M , en particular, qué se puede saber sobre la curvatura de M desde la información que nos da el conjunto \mathcal{X} .

En nuestro trabajo, la idea es usar una variedad ya conocida M y un conjunto de vértices V que vayan aproximando a la variedad M . Estos vértices de V no necesariamente deben pertenecer a la variedad, pero sí pueden vivir muy cerca de M dentro de un espacio ambiente. Luego, podríamos construir un grafo con estos vértices y quisiéramos comparar la curvatura de Ollivier de dicho grafo con la curvatura de Ricci que tiene la variedad. Es decir, como la curvatura de Ollivier normalmente es muy compleja de obtener, intentaremos aproximarla mediante la curvatura de Ricci en M .

Para esto necesitamos definir qué significa que dos espacios sean parecidos o que estén cercanos. Además, si hay nociones de distancia entre espacios, ¿tendría alguna relación también con la distancia que le damos a la variedad o al grafo? Si fuera el caso, ¿qué relación es necesaria para que las curvaturas sean parecidas? Y luego de esto, ¿cómo relacionamos esta curvatura de Ollivier con la curvatura de Ricci de la variedad M ? Estas nociones se trabajan en las siguientes secciones y concluiremos con un teorema que nos permite decir que si tenemos una sucesión de grafos suficientemente cercanos a la variedad M , entonces su curvatura de Ollivier dividida cierta expresión converge a la curvatura de Ricci $\text{Ric}_p(v)$ con algún $p \in M$ y $v \in T_pM$.

3.2. Distancia de Gromov-Hausdorff

Para esta sección nos gustaría ver alguna condición para que la curvatura de Ollivier de grafos converja a la curvatura de Ricci de una variedad en algún sentido. Primero, introduciremos algunas definiciones necesarias.

Sea (X, d) un espacio métrico. Denotamos por $U_r(S)$ la r -vecindad de un subconjunto $S \subseteq X$, es decir, los puntos $x \in X$ tales que $d(x, S) < r$. De forma equivalente $U_r(S) = \bigcup_{x \in S} B(x, r)$.

Definición 3.1. [3]. Sean A, B subconjuntos de un espacio métrico (X, d) . La *distancia de Hausdorff* entre A y B se define por

$$d_H(A, B) := \inf\{r > 0 : A \subseteq U_r(B), B \subseteq U_r(A)\}.$$

Proposición 3.2. [3]. Sea (X, d) un espacio métrico. Entonces

1. d_H es una semi-métrica en 2^X .
2. $d_H(A, \bar{A}) = 0$ para todo $A \subseteq X$.
3. Si A y B son cerrados en X y $d_H(A, B) = 0$, entonces $A = B$.

En particular, si denotamos $\mathfrak{M}(X)$ al conjunto de subconjuntos cerrados de X equipado con la distancia de Hausdorff, entonces $\mathfrak{M}(X)$ es un espacio métrico. Lo importante de esto es que si la clausura de dos conjuntos es igual, entonces consideraremos, gracias a este espacio métrico, que son los mismos conjuntos (es una relación de equivalencia). Esto se describe mediante la identificación de elementos del cociente $2^X/d_H$ y $\mathfrak{M}(X)$. Es decir, diremos que dos conjuntos son realmente diferentes si sus clausuras son diferentes.

Definición 3.3. [3]. Sean X, Y espacios métricos. La *distancia de Gromov-Hausdorff* entre estos espacios métricos, denotada por $d_{GH}(X, Y)$, se define por la siguiente relación: Para $r > 0$, $d_{GH}(X, Y) < r$ si y solo si existe un espacio métrico Z y subespacios $X', Y' \subseteq Z$ que son isométricos a X, Y respectivamente tales que $d_H(X', Y') < r$. En otras palabras, $d_{GH}(X, Y)$ es el ínfimo sobre los números $r > 0$ tales que Z, X', Y' existen.

Otra forma de tomar esta distancia entre dos espacios métricos (X, d_X) e (Y, d_Y) es el ínfimo sobre los $r > 0$ tales que existe una semimétrica d en la unión disjunta $X \cup Y$ de tal forma que la restricción de d sobre X e Y coincide con d_X y d_Y y $d_H(X, Y) < r$ en el espacio $(X \cup Y, d)$, es decir, $d_{GH}(X, Y) = \inf\{d_H(X, Y)\}$, donde el ínfimo se toma sobre todas las semimétricas en $X \cup Y$ extendiendo a las de X e Y .

3.3. Convergencia Gromov-Hausdorff a la Curvatura de Ricci

Ahora estamos listos para presentar los teoremas que usaremos para la convergencia de la curvatura de Ollivier a la curvatura de Ricci de una variedad.

Teorema 3.4. [12]. *Sea M^N una variedad Riemanniana suave completa N -dimensional. Sean $\varepsilon, \delta > 0$, $x \in M$, $v \in T_x M$ con $|v| = 1$, $y = \exp_x(\delta v)$. Para la cadena de Markov m^ε definida por*

$$dm_x^\varepsilon(y) = \frac{1}{\text{vol}(B(x, \varepsilon))} d\text{vol}(y) \quad \forall y \in B(x, \varepsilon),$$

con δ suficientemente pequeño, se cumple que

$$\kappa(x, y) = \frac{\varepsilon^2 \text{Ric}_x(v, v)}{2(N+2)} + O(\varepsilon^3 + \varepsilon^2 d(x, y)),$$

cuando $(\varepsilon, \delta) \rightarrow 0$.

Esta cadena de Markov m^ε la llamaremos *cadena ε -uniforme de Markov*, la cual usaremos en el teorema principal de este capítulo.

Definición 3.5. [12]. Sean $(X, (m_x)_{x \in X})$ y $(Y, (m_y)_{y \in Y})$ dos espacios métricos equipados con un random walk. Para $\varepsilon \geq 0$, decimos que estos espacios son ε -ceranos si existe un espacio métrico Z y dos incrustamientos isométricos $f_X : X \hookrightarrow Z$, $f_Y : Y \hookrightarrow Z$ tales que para todo $x \in X$ existe $y \in Y$ tal que $d_Z(f_X(x), f_Y(y)) \leq \varepsilon$ y si la distancia de Wasserstein de los pushforward de m_x y m_y cumple que $W(f_{X\#}m_x, f_{Y\#}m_y) \leq 2\varepsilon$ y de igual manera para cada $y \in Y$.

Al igual que en la definición de la distancia de Hausdorff, esto define una semimétrica en la clase de espacios métricos equipados con un random walk, tomando el ínfimo sobre los $\varepsilon > 0$ tales que los espacios sean ε -ceranos.

Definición 3.6. [12]. Decimos que una sucesión de espacios métricos equipados con random walk $\{(X^n, (m_x^n)_{x \in X^n})\}_n$ converge Gromov-Hausdorff a $(X, (m_x)_{x \in X})$ si la semimétrica entre $(X^n, (m_x^n)_{x \in X^n})$ y $(X, (m_x)_{x \in X})$ tiende a 0 (considerando la semimétrica definida por tomar el ínfimo de los $\varepsilon > 0$ tales que $(X^n, (m_x^n)_{x \in X^n})$ y $(X, (m_x)_{x \in X})$ sean ε -ceranos). También decimos que una secuencia de puntos $x^n \in X^n$ tiende a $x \in X$ si podemos tomar puntos x^n y x correspondientes en la definición anterior, es decir, diremos que una sucesión de puntos $x_n \in X_n$ converge a un punto $x \in X$ si dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que existen incrustamientos isométricos $f_{X_n} : X_n \hookrightarrow Z_n$ y $f_X : X \hookrightarrow Z_n$ tales que $d_{Z_n}(f_{X_n}(x_n), f_X(x)) < \varepsilon$ para todo $n \geq n_0$. De forma similar, definimos la convergencia de tuplas de puntos en X^n .

Gracias a esta definición de convergencia, podemos ver que las curvaturas de Ollivier tienen una continuidad con el límite con una pequeña restricción, la cual se describe en el siguiente teorema:

Teorema 3.7. [12]. Sea $(X^n, (m_x^n)_{x \in X^n})$ sucesión de espacios métricos con random walk que converge Gromov-Hausdorff a un espacio métrico con random walk $(X, (m_x)_{x \in X})$. Para cada n denotamos por κ^n las curvaturas de Ollivier de X^n y sea κ la curvatura de Ollivier en X . Sean $x, y \in X$ distintos y $(x^n, y^n) \in X^n \times X^n$ sucesión de tuplas que converge Gromov-Hausdorff a (x, y) , entonces $\kappa^n(x^n, y^n) \rightarrow \kappa(x, y)$.

Demostración. Sean $x, y \in X$ puntos distintos. Sea $\varepsilon > 0$ fijo tal que $d_X(x, y)/2 > \varepsilon > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que $(X^n, (m_x^n)_{x \in X^n})$ y $(X, (m_x)_{x \in X})$ son ε -ceranos para $n \geq n_0$. Sea $Z = Z_n$ espacio métrico tal que tenemos incrustamientos isométricos $f_{X^n} : X^n \hookrightarrow Z$ y $f_X : X \hookrightarrow Z$. Solo para simplificar la notación, consideraremos:

$$\begin{aligned} W(x^n, y^n) &:= W(f_{X^n} \# m_{x^n}^n, f_{X^n} \# m_{y^n}^n), & W(x, y) &:= W(f_X \# m_x, f_X \# m_y), \\ d(x^n, y^n) &:= d_Z(f_{X^n}(x^n), f_{X^n}(y^n)), & d(x, y) &:= d_Z(f_X(x), f_X(y)). \end{aligned}$$

Luego tenemos la siguiente secuencia de desigualdades:

$$\begin{aligned} |\kappa^n(x^n, y^n) - \kappa(x, y)| &= \left| \frac{W(f_{X^n} \# m_{x^n}^n, f_{X^n} \# m_{y^n}^n)}{d_Z(f_{X^n}(x^n), f_{X^n}(y^n))} - \frac{W(f_X \# m_x, f_X \# m_y)}{d_Z(f_X(x), f_X(y))} \right| \\ &= \frac{|W(x^n, y^n)d(x, y) - W(x, y)d(x^n, y^n)|}{d(x^n, y^n)d(x, y)} \\ &\leq \frac{|W(x^n, y^n)d(x, y) - W(x, y)d(x, y)| + |W(x, y)d(x, y) - W(x, y)d(x^n, y^n)|}{d(x^n, y^n)d(x, y)} \\ &\leq \frac{d(x, y)(W(x^n, x) + W(y, y^n)) + W(x, y)(d(x^n, x) + d(y, y^n))}{d(x^n, y^n)d(x, y)} \\ &\leq \frac{4d(x, y)\varepsilon + 2W(x, y)\varepsilon}{(d(x, y) - 2\varepsilon)d(x, y)} \\ &\leq C\varepsilon. \end{aligned}$$

Donde $C > 0$ es una constante que depende solamente de x, y (pues $d(x, y) - 2\varepsilon > 0$ fijo), concluyendo así que $\kappa^n(x^n, y^n) \rightarrow \kappa(x, y)$. \square

La idea ahora sería poder unir los dos teoremas para crear una convergencia que dependa solo del parámetro n de la sucesión. En otras palabras, nuestro siguiente resultado nos dice que podemos comparar la curvatura κ de un espacio métrico X con respecto a la curvatura de Ricci de una variedad M si X y M son suficientemente cercanos en el sentido de Gromov-Hausdorff. En particular, vamos a usar grafos $G^n = (V^n, E^n)$ como nuestros espacios que se aproximan a la variedad.

Teorema 3.8. Sea M una variedad Riemanniana suave completa N -dimensional. Sean $\{\varepsilon_n\}_n, \{\delta_n\}_n$ sucesiones de números positivos que convergen a 0. Sea $\{(G^n, (m_x^{\varepsilon_n})_{x \in G^n})\}_n$ una sucesión de espacios métricos con random walk que son η_n -cercanos a (M, m^{ε_n}) , donde m^{ε_n} es la cadena ε_n -uniforme de Markov. Sea $p \in M$ y $v \in T_p M$ con $|v| = 1$. Tomemos para cada $n \in \mathbb{N}$ el punto $y_n = \exp_p(\delta_n v)$ y sean $\{x_n\}_n, \{z_n\}_n \subseteq G^n$ sucesiones tales que $d(x_n, p) \leq \eta_n$ y $d(z_n, y_n) \leq \eta_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Supongamos que $\eta_n/\varepsilon_n^2 \delta_n \rightarrow 0$, entonces

$$\frac{\kappa^n(x^n, z^n)}{\varepsilon_n^2} \rightarrow \frac{\text{Ric}_p(v, v)}{2(N+2)}.$$

Demostración. Del teorema 3.4 podemos obtener que si δ_n es suficientemente pequeño y usamos la cadena ε -uniforme de Markov m^{ε_n} , entonces

$$\frac{\kappa(p, y^n)}{\varepsilon_n^2} = \frac{\text{Ric}_p(v, v)}{2(N+2)} + O(\varepsilon_n + \delta_n).$$

Por otro lado, de la demostración del teorema 3.7, podemos rescatar lo siguiente: Como los $\delta_n > 0$, entonces $p \neq y^n$, y como $\eta_n/\varepsilon_n^2 \delta_n \rightarrow 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\delta_n - 2\eta_n > 0$ para $n \geq n_0$. Sí que tenemos la siguiente desigualdad:

$$\frac{|\kappa^n(x^n, z^n) - \kappa(p, y^n)|}{\varepsilon_n^2} \leq \frac{(4\delta_n + 2W(p, y^n))\eta_n}{\varepsilon_n^2(\delta_n - 2\eta_n)\delta_n}$$

Ahora usando la definición de la curvatura de Ollivier y despejando el valor de $W(p, y^n)$ obtenemos:

$$\begin{aligned} W(p, y^n) &= \delta_n - \varepsilon_n^2 \delta_n \frac{\text{Ric}_p(v, v)}{2(N+2)} - O(\varepsilon_n^3 \delta_n + \varepsilon_n^2 \delta_n^2) \\ &\leq \delta_n + \varepsilon_n^2 \delta_n \frac{|\text{Ric}_p(v, v)|}{2(N+2)} + C_1 \varepsilon_n^3 \delta_n + C_2 \varepsilon_n^2 \delta_n^2 \end{aligned}$$

Donde $C_1, C_2 > 0$ son constantes fijas. Luego

$$\begin{aligned} \frac{|\kappa^n(x^n, z^n) - \kappa(p, y^n)|}{\varepsilon_n^2} &\leq \frac{\left(4\delta_n + 2\left(\delta_n + \varepsilon_n^2 \delta_n \frac{|\text{Ric}_p(v, v)|}{2(N+2)} + C_1 \varepsilon_n^3 \delta_n + C_2 \varepsilon_n^2 \delta_n^2\right)\right) \eta_n}{\varepsilon_n^2(\delta_n - 2\eta_n)\delta_n} \\ &= \underbrace{\frac{6\eta_n}{\varepsilon_n^2(\delta_n - 2\eta_n)} + \frac{|\text{Ric}_p(v, v)|\eta_n}{(N+2)(\delta_n - 2\eta_n)} + \frac{2C_1 \varepsilon_n \eta_n}{(\delta_n - 2\eta_n)} + \frac{2C_2 \delta_n \eta_n}{(\delta_n - 2\eta_n)}}_{\xi_n} \end{aligned}$$

Como por hipótesis asumimos que $\eta_n/\varepsilon_n^2 \delta_n \rightarrow 0$, entonces $\xi_n \rightarrow 0$. Finalmente, para n suficientemente grande se cumple que

$$\begin{aligned} \left| \frac{\kappa^n(x^n, z^n)}{\varepsilon_n^2} - \frac{\text{Ric}_p(v, v)}{2(N+2)} \right| &\leq \frac{|\kappa^n(x^n, z^n) - \kappa(p, y^n)|}{\varepsilon_n^2} + \left| \frac{\kappa(p, y^n)}{\varepsilon_n^2} - \frac{\text{Ric}_p(v, v)}{2(N+2)} \right| \\ &\leq \xi_n + C_1 \varepsilon_n + C_2 \delta_n. \end{aligned}$$

Concluyendo así lo pedido. \square

Notemos que este teorema nos proporciona una convergencia puntual, ya que estamos eligiendo un $p \in M$ y $v \in T_p M$ fijos, pero podemos transformar esta convergencia a uniforme, es decir, para todo $(p, v) \in TM$ con $|v| = 1$, si consideramos M compacto.

Este teorema nos da una buena aproximación de la curvatura de Ollivier $\kappa(x, y)$ a partir de conocer la curvatura de Ricci de cierta variedad M , siempre y cuando el grafo G sea muy cercano en el sentido de Gromov-Hausdorff a dicha variedad. En otras palabras, podemos extender el teorema 3.4 a espacios métricos muy cercanos a una variedad. Esta condición de aproximación del grafo a una variedad pareciera ser que es muy restrictiva, pero es una condición necesaria para que tengamos garantía de poder rescatar la curvatura de Ricci en un punto con más precisión, en la dirección de un vector tangente en específico. En caso contrario, siempre tendremos términos de error que pueden causar ruido al valor exacto que queremos encontrar.

4. Investigaciones a Futuro

Algunas de las investigaciones que quedan propuestas para un futuro son, en primer lugar, un estudio más riguroso de las matrices de distancia que se describen en la sección 2.4. Ya que en dicho caso, si podemos predecir bien el comportamiento de dicha matriz, seremos capaces de calcular de forma explícita la curvatura de cualquier grafo con la distancia geodésica. En el caso de que el grafo sea dócil, en primer lugar, el costo computacional será del mismo orden que decidir si las matrices A_i tienen determinante igual a 0 o no, pero si lo son, entonces tenemos un cálculo directo de la curvatura. En el caso de grafos controlados y bien separados, corroborar que un grafo sea bien separado es muy simple, solamente corroborando unas entradas de la matriz de distancia, pero la propiedad de ser controlado debe tener el mismo costo computacional (al menos para grafos con muchos vértices) que calcular el transporte óptimo de m_x^α a m_y^α , pues estamos pidiendo que el transporte óptimo entre los conjuntos Γ^i sea exactamente $d(x, y) + i$.

Si el grafo es aún más general, el problema se vuelve mucho más complicado. Sin embargo, desde la matriz de adyacencia de un grafo, podemos obtener las matrices de distancia y, como se mencionó en el párrafo anterior, a partir de acá, si estudiamos bien estas matrices, deberíamos ser capaces de calcular la curvatura.

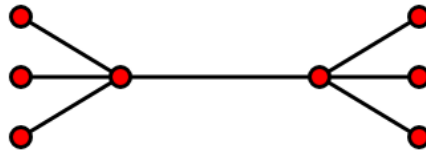
En segundo lugar, inspirados por el teorema 3.8, nos gustaría saber cómo crear de forma precisa los random walks $m_x^{\varepsilon_n}$ que nos permitan usar el teorema de forma más aplicada. Por lo que falta estudiar la comparación entre la distancia definida en la variedad con la distancia definida en el grafo para así aprovechar la cadena ε_n -uniforme de Markov.

Y en tercer lugar, uno de los teoremas que se puede usar para grafos con curvatura estrictamente positiva es un teorema de tipo Bonnet-Myers.

Teorema 4.1. [9]. *Sea $G = (V, E)$ un grafo. Si para cada $x \sim y$ con $x, y \in V$ se cumple que $\kappa_{LLY}(x, y) \geq \kappa > 0$, entonces el diámetro de G está acotado por:*

$$\text{diam}(G) \leq \frac{2}{\kappa}.$$

Una de las consecuencias de este teorema es que el grafo es finito. Sin embargo, no es difícil encontrar grafos finitos donde el mínimo de las curvaturas de Lin-Lu-Yau $\kappa_{LLY}(x, y)$ no sea estrictamente positiva y el grafo es claramente finito. Tenemos, por ejemplo, el grafo que forma un dodecaedro cumple que $\inf_{x \sim y} \kappa_{LLY}(x, y) = 0$, o como el siguiente ejemplo:



Aquí $\inf_{x \sim y} \kappa_{LLY}(x, y) = -1 < 0$. Algo que podríamos estudiar entonces es una especie de curvatura promedio en un vértice $x \in V$, definida por

$$\tilde{\kappa}^n(x) = \frac{1}{|B_n(x)|} \sum_{y \in B_n(x)} \kappa_{LLY}(x, y) \cdot d(x, y), \quad \tilde{\kappa}(x) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \tilde{\kappa}^n(x),$$

donde $B_n(x) = \{y \in V : 0 < d(x, y) \leq n\}$. La inspiración de esta función $\tilde{\kappa}(x)$ es pensar en el hecho de que el teselado hexagonal del plano, en algunos pares de vértices tiene curvatura negativa, en otros positiva y en otros 0, pero en “promedio” nos gustaría que tuviera alguna noción de curvatura igual a 0, puesto que esperamos que un teselado del plano sea “plano” (esto sí lo cumplen los teselados con cuadrados o triángulos). También la noción de usar un \liminf es simplemente porque no hay seguridad de que solamente viendo el límite, este exista. Al menos experimentalmente ha funcionado la siguiente conjetura que sería un resultado de tipo Bonnet-Myers, pero que no se alcanzó a desarrollar en este trabajo.

Conjetura 4.2. *Sea $G = (V, E)$ un grafo, entonces $\inf_{x \in V} \tilde{\kappa}(x) = \kappa > 0$ si y solo si G es finito. En dicho caso, el diámetro de G está acotado por:*

$$\text{diam}(G) \leq \frac{2}{\kappa}.$$

De no ser cierta la conjetura, igualmente se tiene la sospecha de que usando alguna otra noción de “curvatura promedio” se puede obtener un resultado similar, como por ejemplo, con algún n específico en la definición de $\tilde{\kappa}^n$.

Referencias

- [1] B. B. Bhattacharya y S. Mukherjee. «Exact and asymptotic results on coarse Ricci curvature of graphs». En: *Discrete Mathematics* 338.1 (2015), págs. 23-42.
- [2] V. Bonini et al. «Condensed Ricci curvature of complete and strongly regular graphs». En: *Involve, a Journal of Mathematics* 13.4 (2020), págs. 559-576.
- [3] D. Burago, Y. Burago, S. Ivanov et al. *A course in metric geometry*. Vol. 33. American Mathematical Society Providence, 2001.
- [4] K. Chen, S. Liu y H. Zhang. «Curvature and local matchings of conference graphs and extensions». En: *arXiv preprint arXiv:2409.06418* (2024).
- [5] D. Cushing y S. Kamtue. «Long-scale Ollivier Ricci curvature of graphs». En: *Analysis and Geometry in Metric Spaces* 7.1 (2019), págs. 22-44.
- [6] D. Cushing et al. «Bakry-\`Emery and Ollivier Ricci Curvature of Cayley Graphs». En: *arXiv preprint arXiv:2310.15953* (2023).
- [7] A. Figalli y F. Glaudo. *An invitation to optimal transport, Wasserstein distances, and gradient flows*. 2021.
- [8] R. H. Hammack et al. *Handbook of product graphs*. Vol. 2. CRC press Boca Raton, 2011.
- [9] Y. Lin, L. Lu y S.-T. Yau. «Ricci curvature of graphs». En: *Tohoku Mathematical Journal, Second Series* 63.4 (2011), págs. 605-627.
- [10] B. Loisel y P. Romon. «Ricci curvature on polyhedral surfaces via optimal transportation». En: *Axioms* 3.1 (2014), págs. 119-139.
- [11] I. Mizukai y A. Sako. «Ollivier Ricci curvature of Cayley graphs for dihedral groups, generalized quaternion groups, and cyclic groups». En: *arXiv preprint arXiv:2210.00860* (2022).
- [12] Y. Ollivier. «Ricci curvature of Markov chains on metric spaces». En: *Journal of Functional Analysis* 256.3 (2009), págs. 810-864.
- [13] J. D. Smith. «Ricci curvature, circulants, and a matching condition». En: *Discrete Mathematics* 329 (2014), págs. 88-98.
- [14] N. G. Trillos y M. Weber. «Continuum Limits of Ollivier's Ricci Curvature on data clouds: pointwise consistency and global lower bounds». En: *arXiv preprint arXiv:2307.02378* (2023).
- [15] C. Villani et al. *Optimal transport: old and new*. Vol. 338. Springer, 2009.