PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

Construcción de Polímeros aleatorios sobre todo el espacio vía análisis paracontrolado de la ecuación KPZ tridimensional

Autor:
Fernando Machuca Palma

Supervisor:
Gregorio Moreno Flores

Tesis presentada a la Facultad de Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica de Chile, como requisito para optar al grado de Magíster en Matemática.

Santiago, Chile

AGRADECIMIENTOS

En general, no son muchas las instancias que he tenido para agradecer públicamente a las personas que me han acompañado en el transcurso de mi vida, y aprovechando que con mi tesis de Magíster cierro un proceso de 7 años en la UC, quiero dedicar unas palabras a esas personas que han marcado este largo y significativo camino.

En primer lugar, quiero agradecer a mi profesor guía: Gregorio Moreno Flores. Ha sido un increíble tutor; muchas gracias por todas las reuniones (a veces de muchas horas) dedicadas a ayudarme con conceptos que no veía tan claramente o con ideas que se me escapaban. He aprendido mucho y esta tesis no habría llegado a ser lo que es sin su constante ayuda.

También quiero agradecer a todos los profesores que han aportado a mi formación como físico y matemático. Gracias a ellos pude entender mejor la profundidad de las matemáticas en muchas de sus diversas áreas. Destaco especialmente, por un lado, al profesor Santiago Saglietti. Fue quien me inició en el área de la Teoría de Probabilidades con una paciencia y docencia excepcionales, y gran parte de mi formación actual está fuertemente influenciada por su tutela. También quiero agradecer al profesor Daniel Remenik, por ser parte de mi formación en probabilidades a lo largo del Magíster y por toda la ayuda que me ha dado con respecto al Doctorado en Matemáticas que planeo cursar como nueva etapa en mi vida.

Quiero agradecer mucho a Francisca Giacaman, por escucharme y ayudarme siempre que lo necesito. Gracias por entenderme y ayudarme a entenderme.

Agradezco también a mis grupos de amigos. Gracias a los astro-amiguitos, Patty PW y Ahmed por estar siempre para alguna salida, por las risas y los buenos momentos que siempre me regalan. A mis amigos de la Universidad: Omar (lo quiero mucho amigo), Mati Morgado, Juan Topo, Juanito, Pelao, Alan, Koke Plata, Pipe Otaku (González), Richard, Benjita, Paula, Amiga tu vieja y Lientur Taberga. Gracias por su amistad y por esas salidas dentro y/o fuera de la Universidad.

A mis amigos que están fuera de Chile: Sofía Errázuriz y Jorge Acuña. Gracias por todas las salidas y risas; son geniales y espero que estén cumpliendo los sueños de los que hablamos en varias ocasiones. También agradezco a los cabros de Beauchef: Santi, Sebita, Hernan y Vichin por siempre recibirme cálidamente y hacer de los cursos que tuve allá algunos de los más agradables.

Quiero también hacer un agradecimiento especial a Cecilia Burrull, por su cariño y apoyo de siempre. Gracias por ser la mejor compañera en todo lo que se nos ocurre; nunca dejo de aprender contigo.

Doy gracias a mi familia. A mi madre Cecilia Palma y a mi padre Fernando Machuca por todo el amor incondicional y el apoyo que me han dado todos estos años. Les debo gran parte de lo que soy en muchos aspectos y siempre les estaré enormemente agradecido. También a mis tías Patricia Palma y Luisa Palma, por siempre creer en mi y acompañarme a lo largo de mi vida.

Finalmente, quiero agradecer a todo el personal administrativo de la Facultad de Matemáticas. Gracias a Pauli y a Sole por siempre responder todas mis dudas y ayudarme con la gestión de mis (muchos) seminarios.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

Las ecuaciones diferenciales constituyen una de las herramientas fundamentales para describir matemáticamente numerosos fenómenos de la naturaleza. Paralelamente, la teoría de probabilidades surgió como un marco formal para entender el azar y el comportamiento colectivo de sistemas con muchas componentes. La intersección entre ambas áreas dió origen a la teoría de ecuaciones diferenciales estocásticas (EDEs), que ha mostrado gran eficacia en la modelación de fenómenos físicos, biológicos y financieros.

Dentro de este ámbito, las ecuaciones diferenciales parciales estocásticas (EDPEs) aparecen de manera natural al considerar modelos físicos a los cuales se les incorpora una perturbación aleatoria, usualmente de tipo gaussiano. Entre los ejemplos más relevantes se encuentran:

- **(Modelo parabólico de Anderson):** Para dimensión espacial $d = 2, 3$, se considera

  $$\partial_t u = \Delta u + F(u)\,\xi,$$

  donde F es una función continua y ξ un ruido blanco d-dimensional. Este modelo describe la evolución de una masa en un medio aleatorio ([MP, 2019], [GP, 2015]).

- **Ecuación Φ^4_d:** El modelo viene dado por la ecuación diferencial estocástico

  $$\partial_t \phi = \Delta \phi - \phi^3 + \phi + \xi$$

  y es fundamental en teoría cuántica de campos constructiva y en problemas de equilibrio estocástico, caracterizado por un término de tipo $-u^3$ y forzamiento ruidoso ([Gub-Hof, 2019], [Gub-Hof, 2021]).

- **Ecuación de Schrödinger no lineal estocástica:**

  $$i\,\partial_t u = \Delta u + \lambda |u|\, u + u\,\xi,$$

  donde ξ es un ruido blanco real y u una función de valores complejos. Este modelo captura la dinámica de ondas dispersivas no lineales en medios aleatorios.

- **Ecuación de KPZ:**

  $$\partial_t h = \Delta h + |\nabla h|^2 + \xi,$$

  modelo prototípico para el crecimiento de interfaces y fenómenos de deposición ([Hai, 2013], [GP, 2017], [PR, 2019]).

Estas ecuaciones comparten dos rasgos característicos: están forzadas por un ruido blanco gaussiano, ya sea espacial o espacio–temporal, y poseen un término no lineal. La combinación de ambos elementos conduce, en general, a que estas EDPEs estén *mal planteadas* en los espacios funcionales clásicos. En efecto, el ruido blanco impide que las soluciones posean regularidad suficiente para que las no linealidades, las cuales suelen involucrar productos, estén definidas en el sentido de las distribuciones, donde la multiplicación no es una operación continua.

Por esta razón, este tipo de ecuaciones se conoce como *ecuaciones singulares*, y su análisis ha requerido el desarrollo de nuevas herramientas conceptuales y analíticas para dar sentido a sus soluciones. Un primer avance decisivo fue realizado por Lyons en [Lyons, 1998] mediante la teoría de *rough paths*, que permitió abordar ecuaciones altamente irregulares, incluyendo una versión de KPZ en [Hai, 2013]. Posteriormente, Gubinelli introdujo el concepto de *controlled paths* para extender el alcance de la teoría [Gub, 2004]; [Gub, 2010].

Estas metodologías presentan sin embargo una limitación importante: funcionan esencialmente en dimensión espacial uno. La necesidad de tratar el caso multidimensional impulsó el desarrollo de nuevas teorías, entre las cuales destacan la teoría de *estructuras de regularidad* de Hairer [Hai, 2014] y la teoría de *distribuciones paracontroladas* de Gubinelli, Imkeller y Perkowski [GIP, 2015].

A partir de estas ideas, numerosos avances han sido obtenidos en la comprensión y construcción de ecuaciones singulares. Para el modelo Φ^4_d, las referencias [MW, 2017] y [Perkowski, 2020], [Gub-Hof, 2019], [Gub-Hof, 2021] contienen la teoría tanto en el espacio completo como en el toro. Para la ecuación de KPZ, los métodos paracontrolados han permitido su estudio en el toro [GP, 2017] y, mediante espacios con peso, en la recta real completa [PR, 2019]. En general, el análisis de ecuaciones singulares en todo el espacio es considerablemente más delicado desde el punto de vista técnico que en dominios compactos.

Una de las motivaciones centrales para estudiar estas ecuaciones surge de sus conexiones con modelos probabilísticos de interés físico. En [CC, 2018] se formula un problema de martingala relacionado con una ecuación con drift singular, estableciendo un vínculo entre la solución paracontrolada de KPZ y la definición de la medida de polímeros continuos en dimensión $d > 1$ sobre el toro. Este resultado es notable, pues la medida de polímero continuo ya es altamente singular incluso en dimensión uno [AKQ, 2010]; [AKQ, 2014]. Retomaremos estos aspectos en [4].

En esta Tesis estudiamos la ecuación de KPZ paracontrolada definida sobre todo $\mathbb{R}^3$ siguiendo el enfoque de [PR, 2019]. Establecemos un teorema de existencia y unicidad de soluciones en este contexto y discutimos su conexión con la medida de polímeros definida también sobre $\mathbb{R}^3$. Presentamos además un bosquejo que permitiría extender la construcción desarrollada en [CC, 2018] al caso de todo el espacio.

La idea central derás del método para interpetar la ecuación de KPZ es bien conocida [Bertini-Giacomin, 1997] y consiste en estudiar primero versiones suavizadas de la ecuación, es decir, con ruido suave. Luego, la pretensión es tomar límite cuando la suavización es despreciable e interpretar dicho límite como la solución de la ecuación de KPZ. Siguiendo esas ideas clásicas y con un enfoque paracontrolado, en esta tesis se obtuvo el siguiente resultado de existencia y unicidad para la ecuación de KPZ.

Resultado 1.0.1:

La ecuación diferencial de KPZ admite una única solución en el siguiente sentido: h es una solución paracontrolada de la ecuación de KPZ con condición inicial h_0 y con data $\mathbb{X} \in \mathcal{X}_{\mathrm{KPZ}}$ si existe $l \in \mathbb{R}$

tal que h tiene la forma

$$h = Z + Z^{\vee} + Z^{\vee\vee} + h^{\geq 3}$$

donde $h^{\geq 3}$ está paracontrolada por $Z^{\bullet}$ en el sentido que

$$h^{\geq 3} = h' \prec Z^{|} + h^{\#}$$

donde $h' \in \mathcal{L}^{\alpha}_{e(l)}(\mathbb{R}^d)$ y $h^{\#} \in \mathcal{L}^{4\alpha}_{e(l)}(\mathbb{R}^d)$ y $h^{\geq 3}$ satisface la EDP

$$\begin{aligned} \mathcal{L}h^{\geq 3} =& [4\nabla Z \cdot \nabla Z^{\vee\vee} + 4\nabla Z^{\vee} \cdot \nabla Z^{\vee\vee} + |\nabla Z^{\vee}|^2 + |\nabla Z^{\vee\vee}|^2] \\ &+ [4\nabla Z^{\vee\vee} + 2\nabla Z^{\vee} + \nabla Z] \cdot \nabla h^{\geq 3} + |\nabla h^{\geq 3}|^2 \end{aligned}$$

$$h^{\geq 3}(0) = h_0$$

y además h' posee la forma

$$h' = 2\nabla h^{\geq 3} + 4\nabla Z^{\vee\vee}$$

La Tesis se organiza de la siguiente manera.

1. El **Capítulo 2** [2] contiene una introducción a la teoría paracontrolada: espacios de Besov, estructuras parabólicas, la teoría de Bony y estimaciones de Schauder. Incluimos tanto la versión con peso como la versión usual, con el fin de resaltar las dificultades adicionales que aparecen al trabajar en $\mathbb{R}^3$. Está escrito pensando en un lector que no tiene background previo a la teoría.

2. El **Capítulo 3** [3] desarrolla la teoría de existencia y unicidad para la ecuación de KPZ paracontrolada en tres dimensiones. En particular, se presenta la relación de la ecuación con la ecuación del PAM rugosa y el uso de la transformación de Cole-Hopf para deducir el resultado principal de la tesis. La construcción de la data estocástica se deja para el apéndice.

3. En el **Capítulo 4** [4] describimos las conexiones con la medida de polímeros y el problema de martingala. Adicionalmente, discutimos las direcciones que quedaron pendientes y la investigación futura.

4. Finalmente, el **Apéndice** [5] contiene la construcción detallada de la data estocástica y también se incluyen los resultados de Teoría de probabilidades y análisis gaussianos utlizados a lo largo de esta tesis.

Capítulo 2

Preámbulo

En este capítulo se presenta una introducción a la Teoría de Espacios de Besov con peso, los espacios parabólicos y en particular en qué espacios cae el ruido blanco espacial en $\mathbb{R}^d$. Para ello, veremos brevemente las nociones de distribuciones temperadas y ultra-distribuciones, para distinguir los casos con o sin peso y enunciar las estimadas que nos serán útiles en el análisis de la KPZ paracontrolada.

La exposición de este preámbulo está inspirada en literatura referente a análisis armónico ([BH, 2011], [SY, 2018]), artículos en el contexto de técnicas paracontroladas ([[GP, 2015], [Perkowski, 2020]]) y la manera en que el autor decidió presentar la información y algunas demostraciones.

2.1. Espacio de Schwartz y distribuciones

Definición 2.1.1:

(Espacio de Schwartz) Definimos $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ como el espacio de las funciones $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ tales que para cada $k \in \mathbb{N}_0$:

$$||\varphi||_k := \sup_{|\mu|\leq k} ||(1 + |\cdot|^k) \cdot \partial^\mu \varphi||_\infty < \infty$$

Ejemplo 2.1.1:

En el caso $d = 1$, tenemos que $e^{-x^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. En efecto, dado $k \in \mathbb{N}_0$ debemos demostrar que:

$$\left|\left|(1 + |x|^k) \cdot \frac{d^\mu}{dx^\mu} e^{-x^2}\right|\right|_\infty < \infty, \ \forall\, \mu \leq k$$

Para ello, primero notamos que $\dfrac{d^\mu}{dx^\mu} e^{-x^2} = q(x) \cdot e^{-x^2}$ con $q(x) \in \mathcal{P}(x)$ un polinomio. Además, afirmamos que $||x^n \cdot e^{-x^2}||_\infty < \infty$ para cualquier $n \in \mathbb{N}_0$. En efecto, para $n = 0$ es claro por ser una Gaussiana, para $n = 1$ notamos que es una función continua y:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^{x^2}} &= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{-2xe^{-x^2}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Esto prueba que $x \cdot e^{-x^2} \in C_0(\mathbb{R})$ y por ende debe ser acotada. Por inducción y el argumento análogo, se sigue que $x^n \cdot e^{-x^2}$ es acotada y por desiguadad triangular se sigue que $||p(x) \cdot e^{-x^2}||_\infty < \infty$. De este hecho, podemos concluir:

$$\begin{aligned} \left|(1+|x^k|)\frac{d^\mu}{dx^\mu}e^{-x^2}\right| &= (1+|x|^k) \cdot |p(x) \cdot e^{-x^2}| \\ &\leq q(|x|) \cdot e^{-x^2} \end{aligned}$$

y tomando supremo sobre $x \in \mathbb{R}$ concluimos la prueba, pues $\mu \leq k$ fue arbitrario al igual que $k \in \mathbb{N}_0$.

Con un argumento análogo, es inmediato demostrar que $p(x)e^{-x^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ para cualquier polinomio $p(x)$.

Las funciones de Schwartz contienen a las funciones suaves a soporte compacto. En particular, su espacio dual está contenido en el de las funciones test clásicas. Este espacio dual es precisamente el conjunto de distribuciones temperadas.

Definición 2.1.2:

(Distribución Temperada) Definimos $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ como el conjunto funcionales continuos $u : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{C}$, es decir, funcionales tales que existen $C > 0$, $k \in \mathbb{N}_0$ con

$$|u(\varphi)| \leq C \cdot ||\varphi||_k, \quad \forall\ \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$$

Un ejemplo clásico de distribuciones temperadas son las funciones en $L^p(\mathbb{R}^d)$.

Ejemplo 2.1.2:

Se tiene que $L^p(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ para $p \in [1, \infty]$. Para verlo, necesitamos un lema sobre integrabilidad en $\mathbb{R}^d$ muy útil en estos contextos.

Se tiene que las funciones $f, g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ dadas por:

$$f(x) = \begin{cases} ||x||^{-a} & \text{si} \quad ||x|| \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} ||x||^{-b} & \text{si} \quad ||x|| > 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

cumplen que $f \in L^1 \iff a < d$ y $g \in L^1 \iff b > d$.

Ahora, sea $u \in L^p$ con $p \in [1, \infty]$. Luego, definimos el funcional

$$u(\varphi) := \int_{\mathbb{R}^d} u(x) \cdot \varphi(x)\, d\lambda$$

Veamos que define una distribución temperada: Basta que notemos que

$$|u(\varphi)| \leq \int_{\mathbb{R}^d} |u(x)| \cdot |\varphi(x)|\, d\lambda$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{R}^d} (1 + |x|^k) \cdot |\varphi(x)| \cdot \Big| \frac{u(x)}{1 + |x|^k} \Big| \, d\lambda \\
&\leq \Big(\int_{\mathbb{R}^d} \Big| \frac{u(x)}{1 + |x|^k} \Big| \, d\lambda \Big) \cdot ||\varphi||_k \\
&= ||u||_{L^p} \cdot \Big|\Big| \frac{1}{1 + |x|^k} \Big|\Big|_{L^q} \cdot ||\varphi||_k \\
&= ||u||_{L^p} \cdot \Big(\Big|\Big| \frac{1}{(1 + |x|^k)^q} \Big|\Big|_{L^1} \Big)^{1/q} \cdot ||\varphi||_k
\end{aligned}
$$

en donde utilizamos la desigualdad de Hölder. Ahora usamos el lema, pues tenemos que:

$$
\begin{aligned}
\Big|\Big| \frac{1}{(1 + |x|^k)^q} \Big|\Big|_{L^1} \Big)^{1/q} &= \int_{B(0,1)} \frac{1}{(1 + |x|^k)^q} \, d\lambda + \int_{B(0,1)^c} \frac{1}{(1 + |x|^k)^q} \, d\lambda \\
&\leq \int_{B(0,1)} \frac{1}{(1 + |x|^k)^q} \, d\lambda + \int_{B(0,1)^c} \frac{1}{|x|^{kq}} \, d\lambda
\end{aligned}
$$

y la primera integral es finita claramente por ser una integral sobre un conjunto de medida finita, mientras que la segunda es finita siempre que $k \cdot q < d$, por lo que considerando $k \in \mathbb{N}_0$ suficientemente grande podemos asegurar que:

$$
|u(\varphi)| \leq C \cdot ||\varphi||_k
$$

Con ello, concluimos que $L^p \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

Sobre las distribuciones temperadas pueden definirse muchas operaciones importantes ([BH, 2011], Capítulo 1), ([JC, 2010], Capítulo 6). Una de las más importantes es la transformada de Fourier, la cual define una biyección en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ y se construye por dualidad.

Definición 2.1.3:

Sea $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. Definimos la transformada de Fourier $\mathcal{F} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ de forma que para cada $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$:

$$
[\mathcal{F}u](\varphi) := u(\mathcal{F}\varphi)
$$

Puesto que la no linealidad presente en la ecuación de KPZ viene dada por una cuadrática, nos interesa desarrollar una Teoría sobre el espacio de distribuciones que nos permita asegurar bajo ciertas condiciones razonables la continuidad del producto de distribuciones. Si bien es posible definir el producto con ciertas distribuciones (con funciones suaves de decaimiento polinomial) de forma continua, dicho producto no es extendible (de forma continua) a todas las distribuciones temperadas, por lo que el objetivo será hallar distribuciones que permitan esta extensión. Estos espacios son los espacios de Besov y para definirlos, estudiaremos cómo dividir en distintas secciones suaves las distribuciones temperadas.

La descomposición de distribuciones temperadas en partes suaves se hará mediante una noción de bloques. Para ciertas distribuciones con propiedades en su soporte la verificación de que definen funciones suaves es fácil de deducir.

Definición 2.1.4:

(Soporte de una distribución): Dada $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, decimos que u se anula en $G \subset \mathbb{R}^d$ abierto si $u(\varphi) = 0$, para cada $\varphi \in C_c^\infty(G)$. Definimos $\mathrm{supp}(u)$ como el complemento del abierto más grande donde u se anula.

Proposición 2.1.1:

Sea $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ tal que $\mathrm{supp}(\hat{u}) \subset K$ con K compacto. Luego, se tiene que $u \in C^\infty(\mathbb{R}^d) \cap \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Demostración. Sea $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ tal que $\psi|_K = 1$. Luego, tenemos que

$$u = \mathcal{F}^{-1}\hat{u} = \mathcal{F}^{-1}(\psi \cdot \hat{u}) = \mathcal{F}^{-1}\psi * u$$

que pertenece a $C^\infty(\mathbb{R}^d) \cap \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, pues toda convolución de una distribución temperada con una función de Schwartz lo cumple (ver [JC, 2010]). □

2.2. Descomposición de Littlewood-Paley

El objetivo es hallar una descomposición de distribuciones temperadas vía funciones suaves localizadas en el espacio de Fourier. Cada una de estas funciones es lo que vamos a llamar “los bloques de Littlewood-Paley”. Para comenzar la construcción, lo primero es revisar el concepto de partición de la unidad.

Definición 2.2.1:

(Partición de la unidad) Una familia $(\rho_j)_{j\geq -1} \subseteq C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ de funciones radiales no negativas se dice una partición de la unidad si

- $\mathrm{supp}(\rho_{-1})$ está contenido en una bola alrededor del 0 y $\mathrm{supp}(\rho_j)$ está contenido en un anillo alrededor del 0 para $j \geq 0$.
- $\rho_j = \rho_0(2^{-j}\cdot)$, para cada $j \geq 0$.
- $\sum_{j\geq -1} \rho_j(x) = 1$, para cada $x \in \mathbb{R}^d$.
- Si $|j - j'| > 1$, entonces $\mathrm{supp}(\rho_j) \cap \mathrm{supp}(\rho_{j'}) = \emptyset$.

No es obvio que dichas funciones con estas propiedades de escalamiento existan. Una demostración puede encontrarse en [BH, 2011]. Con la partición de la unidad dada, vamos a construir la descomposición de una distribución temperada.

Definición 2.2.2:

(Bloques de Littlewood-Paley) Dada $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ y $(\rho_j)_{j\geq -1}$ una partición de la unidad definimos el j-ésimo bloque de Littlewood-Paley como:

$$\Delta_j u := \mathcal{F}^{-1}(\rho_j \cdot \hat{u})$$

Incluimos algunas propiedades de los bloques que justifican su rol como “piezas suaves” la una distribución temperada.

Proposición 2.2.1:

(Propiedades de los bloques) Sea $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ y $(\rho_j)_{j\geq -1}$ una partición de la unidad. Luego:

1. $\Delta_j u \in C^\infty(\mathbb{R}^d) \cap \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, para cada $j \geq -1$.
2. $u = \sum_{j\geq -1} \Delta_j u$ en el sentido de distribuciones, es decir, para toda $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ tenemos que:

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{j=-1}^{N} \Delta_j u(\varphi) = u(\varphi)$$

3. Si consideramos en particular $u \in L^p$, entonces para cada $j \geq -1$ tenemos que $\Delta_j : L^p(\mathbb{R}^d) \to L^p(\mathbb{R}^d)$ es un operador lineal continuo.

Demostración. 1. Basta que notemos que $\Delta_j u$ es una distribución temperada cuya transformada de Fourier tiene soporte con $\mathrm{supp}(\mathcal{F}(\Delta_j u)) = \mathrm{supp}(\rho_j \cdot \hat{u}) \subset \mathrm{supp}(\rho_j)$ que es un compacto. Así, concluimos que $\Delta_j u$ posee las propiedades buscadas.

2. Sea $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Luego, notamos que

$$\begin{aligned} \left| u(\varphi) - \sum_{j=1}^{N} \Delta_j u(\varphi) \right| &= \left| u(\varphi) - \sum_{j=1}^{N} \mathcal{F}^{-1}(\rho_j \cdot \hat{u}(\varphi)) \right| \\ &= \left| \mathcal{F}^{-1}\hat{u}(\varphi) - \mathcal{F}^{-1}\Big(\sum_{j=1}^{N} \rho_j \cdot \hat{u}(\varphi) \Big) \right| \\ &= \left| \mathcal{F}^{-1}\Big\{ \Big(1 - \sum_{j=1}^{N} \rho_j \Big) \hat{u} \Big\}(\varphi) \right| \end{aligned}$$

y este último término es $< \varepsilon$ si consideramos N suficientemente grande. Con esto, conluimos la prueba.

3. Sea $j \geq -1$ fijo. Luego, tenemos que $\Delta_j u = \mathcal{F}^{-1}\rho_j * u$ y por la desigualdad de Young (con $1/p + 1/1 = 1 + 1/p$) tenemos que:

$$||\Delta_j u||_{L^p} \leq ||\mathcal{F}^{-1}\rho_j||_{L^1} \cdot ||u||_{L^p}$$

y $\mathcal{F}^{-1}\rho_j \in L^1(\mathbb{R}^d)$, pues es en particular una función de Schwartz y con esto, es integrable. Así, concluimos que los bloques son continuos.

□

El hecho de que podamos descomponer las distribuciones temperadas en bloques, nos permite definir la noción de regularidad de una distribución mediante propiedades en los bloques. Lo que intentan medir los espacios de Besov es el nivel de decaimiento en L^p de los bloques de Littlewood-Paley.

Definición 2.2.3:

(Espacios de Besov sin peso) Sean $\alpha \in \mathbb{R}$, $1 \leq p, q \leq \infty$ y $(\rho_j)_{j\geq -1}$ una partición diadica de la unidad. Definimos $B^{\alpha}_{p,q}(\mathbb{R}^d)$ como el espacio de distribuciones temperadas $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ tales que

$$||u||_{B^{\alpha}_{p,q}(\mathbb{R}^d)} := ||(2^{j\alpha} \cdot ||\Delta_j u||_{L^p(\mathbb{R}^d)})_{j\geq -1}||_{\ell^q} < \infty$$

(Comentario:) Bajo esta norma, no es dificil demostrar que los espacios de Besov definen un espacio normado y completo [[SY, 2018]]. Adicionalmente, será importante el caso $p = q = \infty$, en cuyo caso utilizamos la notación $C^{\alpha} \equiv B^{\alpha}_{\infty,\infty}$ y $||\cdot||_{\alpha} \equiv ||\cdot||_{C^{\alpha}}$.

2.2.1. Paraproducto de Bony

La descomposición en bloques sugiere una forma de dar sentido al producto de espacios de Besov y, de hecho, probar que dicha noción de producto es continua bajo ciertas hipótesis en la regularidad. En efecto, para $u, v \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ y definiendo $S_j f := \sum_{i=1}^{j-1} \Delta_j f$ formalmente tenemos que

$$\begin{aligned} u \cdot v &= \Big(\sum_{j\geq -1} \Delta_j u \Big) \cdot \Big(\sum_{i\geq -1} \Delta_i v \Big) \\ &= \sum_{i,j\geq -1} \Delta_j u \cdot \Delta_i v \\ &= \sum_{i\geq -1} \Big\{ \sum_{j\,:\,j\leq i-2} \Delta_j u \cdot \Delta_i v + \sum_{j\,:\,|j-i|\leq 1} \Delta_j u \cdot \Delta_i v + \sum_{j\,:\,j\geq i+2} \Delta_j u \cdot \Delta_i v \Big\} \\ &= \sum_{i\geq -1} \sum_{j\,:\,j\leq i-2} \Delta_j u \cdot \Delta_i v + \sum_{i,j\,:\,|i-j|\leq 1} \Delta_j u \cdot \Delta_i v + \sum_{j\geq -1} \sum_{i\,:\,i\leq j-2} \Delta_j u \cdot \Delta_i v \\ &= \sum_{i\geq -1} S_{i-1} u \cdot \Delta_i v + \sum_{i,j\,:\,|i-j|\leq 1} \Delta_j u \cdot \Delta_i v + \sum_{j\geq -1} \Delta_j u \cdot S_{j-1} v \\ &\equiv u \varolessthan v + u \odot v + u \varogreaterthan v \end{aligned}$$

y lo que demostró Bony en [Bony, 1981] es que $u \varolessthan v$ y $u \varogreaterthan v$ (conocidos en la literatura como paraproductos) estan bien definidos como distribuciones temperadas. El término $u \odot v$ (conocido como término resonante) es el término que puede estar mal definido y el que requiere más cuidado.

Proposición 2.2.2:

Tenemos las siguientes propiedades:

- Sea $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^d$ un anillo, $\alpha \in \mathbb{R}$ y $(u_j)_{j\geq -1}$ una familia de funciones suaves con $\text{supp}(\mathcal{F}_{\mathbb{R}^d} u_j) \subset 2^j \mathcal{A}$ y tal que $||u_j||_{L^{\infty}(\mathbb{R}^d)} \lesssim 2^{-j\alpha}$, para todo $j \geq -1$. Entonces:

$$u = \sum_{j\geq -1} u_j \in C^{\alpha} \quad , \quad ||u||_{\alpha} \lesssim \sup_{j\geq -1} \{2^{j\alpha} \cdot ||u_j||_{L^{\infty}(\mathbb{R}^d)}\}$$

- Sea $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^d$ una bola, $\alpha > 0$ y $(u_j)_{j\geq -1}$ una familia de funciones suaves con $\text{supp}(\mathcal{F}_{\mathbb{R}^d} u_j) \subset 2^j \mathcal{B}$ y tal que $||u_j||_{L^{\infty}(\mathbb{R}^d)} \lesssim 2^{-j\alpha}$, para todo $j \geq -1$. Entonces:

$$u = \sum_{j\geq -1} u_j \in C^{\alpha} \quad , \quad ||u||_{\alpha} \lesssim \sup_{j\geq -1} \{2^{j\alpha} \cdot ||u_j||_{L^{\infty}(\mathbb{R}^d)}\}$$

Demostración. Una demostración de esta proposición puede encontrarse en [Perkowski, 2020] o también como el caso reducido de la demostración en el caso con peso incluida en esta Tesis. □

Con este resultado se pueden demostrar las estimadas de paraproducto de Bony. Estas estimadas incluyen primero que: efectivamente los paraproductos están bien definidos como distribuciones y además establecen que el término resonante está bien definido si la suma de las regularidades es positiva.

Teorema 2.2.1:

Estimadas de Bony: Sean $u, v \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. Luego, tenemos que

1. Si $\beta \in \mathbb{R}$, entonces tenemos que

$$||u \otimes v||_\beta \lesssim ||u||_{L^\infty} \cdot ||v||_\beta$$

2. Si $\beta \in \mathbb{R}$ y $\alpha < 0$, entonces tenemos además

$$||u \otimes v||_{\alpha+\beta} \lesssim ||u||_\alpha \cdot ||v||_\beta$$

3. Si $\alpha + \beta > 0$, entonces tenemos

$$||u \odot v||_{\alpha+\beta} \lesssim ||u||_\alpha \cdot ||v||_\beta$$

Demostración. La demostración consta esencialmente de aplicar el lema anterior. El detalle puede revisarse en ([Perkowski, 2020], Teorema 3.19). □

Un corolario directo de las estimadas de Bony es la extensión continua del producto entre distribuciones en el caso de espacios de Besov C^α.

Teorema 2.2.2:

Sean $\alpha + \beta > 0$. Luego, el producto $(u, v) \in C^\alpha \times C^\beta \to u \cdot v \in C^{\alpha \wedge \beta}$ está bien definido y define una aplicación bilineal continua. Adicionalmente, si bien los praraproductos y término resonante dependen de la partición de la unidad escogida, el producto $u \cdot v$ no.

Estos Teoremas permiten definir el producto entre distribuciones como aplicación continua y se ha utilizado fuertemente en ecuaciones singulares sobre dominios compactos como el Toro. En nuestro caso la ecuación de KPZ se considera sobre todo el espacio, por lo que los espacios de Besov necesitan incluir un peso para lidiar con el crecimiento de los términos estocásticos como el ruido blanco. Así, el objetivo de lo que resta de este capítulo es introducir el análogo de la Teoría presentada pero considerando pesos.

2.3. Espacio de Schwartz con peso

El espacio de distribuciones temperadas refiere a funcionales definidos sobre funciones con crecimiento en escala polinomial. Es posible extender ese estudio a funcionales sobre funciones con crecimiento sub-exponencial y tener bien definidas la transformada de Fourier y muchos de los Teoremas esenciales de la teoría [MP, 2019].

Definición 2.3.1:

(Pesos) Denotamos por:

$$\omega_{\text{pol}}(x) := \log(1+|x|) \quad ; \quad \omega_\sigma(x) := |x|^\sigma,\ \sigma \in (0,1)$$

con $x \in \mathbb{R}^d$. Agrupamos estas funciones en un conjunto $\Omega := \omega_{\text{pol}} \cup \{\omega_\sigma \ : \ \sigma \in (0,1)\}$ y definimos para cada $\omega \in \Omega$ el conjunto de funciones peso $\mathcal{M}(\omega)$ tales que $\rho(\omega) \in \mathcal{M}(\omega)$, si y solo si, $\rho(\omega) : \mathbb{R}^d \to (0,\infty)$ es medible y tal que existe $\lambda = \lambda(\rho) > 0$ tal que:

$$\rho(x) \lesssim \rho(y) \cdot e^{\lambda\omega(x-y)}$$

El objetivo es construir el análogo a espacios de Besov pero con peso. Para ello, necesitamos el concepto de ultra distribución temperada y la idea de norma L^p con peso.

Definición 2.3.2:

(Norma con peso) Sean $\omega \in \Omega$ y $\rho \in \mathcal{M}(\omega)$ y $p \in [1,\infty]$. Definimos el espacio $L^p(\rho)$ como el conjunto de funciones medibles $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ tales que:

$$||f||_{L^p(\rho)} := ||f\cdot\rho||_{L^p} = \begin{cases} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p \cdot |\rho(x)|^p \, d\lambda(x)\right)^{1/p} < \infty, & p \in [1,\infty) \\ \text{essup}_{x\in\mathbb{R}^d} |f(x)|\cdot|\rho(x)| < \infty, & p = \infty \end{cases}$$

Definición 2.3.3:

(Funciones de Schwartz con peso) Dado $\omega \in \Omega$ definimos el conjunto:

$$\mathcal{S}_\omega(\mathbb{R}^d) := \{\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \ : \ \forall\, \lambda > 0,\ \alpha \in \mathbb{N}^d,\ p^\omega_{\alpha,\lambda}(\varphi) + \pi^\omega_{\alpha,\lambda}(\varphi) < \infty\}$$

donde $p^\omega_{\alpha,\lambda}$ y $\pi^\omega_{\alpha,\lambda}$ son las semi-normas:

$$p^\omega_{\alpha,\lambda}(\varphi) := \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |e^{\lambda\cdot\omega(x)} \cdot \partial^\alpha \varphi(x)| \quad ; \quad \pi^\omega_{\alpha,\lambda}(\varphi) := \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |e^{\lambda\omega(x)} \cdot \partial^\alpha \mathcal{F}_{\mathbb{R}^d}\varphi(x)|$$

En particular, tenemos que un funcional lineal $u : \mathcal{S}_\omega(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{C}$ es continuo, si y solo si, existen una familia finita de semi-normas $(p^\omega_{\alpha_i,\lambda_i})_{i=1}^{N_1}$ y $(\pi^\omega_{\alpha_j,\lambda_j})_{j=1}^{N_2}$ y $C > 0$ tales que

$$|u(\varphi)| \le C \cdot \text{máx}\{p^\omega_{\alpha_1,\lambda_1}(\varphi), ..., p^\omega_{\alpha_{N_1},\lambda_{N_1}}(\varphi), \pi^\omega_{\alpha_1,\lambda_1}(\varphi), ..., \pi^\omega_{\alpha_{N_2},\lambda_{N_2}}(\varphi)\}, \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{S}_\omega(\mathbb{R}^d)$$

Denotamos al espacio de estos funcionales continuos como $\mathcal{S}'_\omega(\mathbb{R}^d)$ para referir al conjunto de ultra distribuciones temperadas.

(Comentario): Como $\mathcal{S}_\omega(\mathbb{R}^d) \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, entonces tenemos que $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \subseteq \mathcal{S}'_\omega(\mathbb{R}^d)$. La razón es clara una vez vista la definición de ultra distribución temperada: Ya están las semi-normas asociadas al espacio de Schwartz. Lo interesante es que la contención es estricta, es decir, hay ultra distribuciones que no son distribuciones.

Ejemplo 2.3.1:

Sean $\omega \in \Omega$ y $\rho \in \mathcal{M}(\omega)$. Luego, $L^1(\rho) \subseteq \mathcal{S}'_\omega(\mathbb{R})$. En efecto, dada $f \in L^p(\rho)$ definimos el funcional $f : \mathcal{S}_\omega(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{C}$ tal que

$$f(\varphi) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \cdot \varphi(x)\, dx$$

Luego, tenemos que

$$\begin{aligned}
|f(\varphi)| &\leq \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)| \cdot |\varphi(x)|\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} e^{\lambda \cdot \omega(x)} \cdot |\varphi(x)| \cdot \left(\frac{|f(x)|}{e^{\lambda\omega(x)}} \right) dx \\
&\leq p^{\omega}_{0,\lambda}(\varphi) \cdot \int_{\mathbb{R}^{\mathrm{d}}} \left| \frac{f(x)}{e^{\lambda\omega(x)}} \right| dx \\
&\lesssim p^{\omega}_{0,\lambda}(\varphi) \cdot \int_{\mathbb{R}^d} |\rho(x)| \cdot \left| \frac{f(x)}{\rho(0)} \right| dx \lesssim ||f||_{L^1(\rho)} \cdot p^{\omega}_{0,\lambda}(\varphi)
\end{aligned}$$

donde escogimos $\lambda > 0$ que asegura que $\rho(0) \lesssim e^{\lambda\omega(x-0)} \cdot \rho(x)$. Así, concluimos la prueba.

Nuevamente sobre las ultra distribuciones es posible definir varios operadores fundamentales. El más impotante en lo referente a la descomposición de Littlewood-Paley es la transformada de Fourier para ultra-distribuciones. Lo importante es saber que está bien definida y que vuelve a definir una biyección sobre las ultra-distribuciones. Para una discusión más detallada puede revisarse [MP, 2019].

2.4. Espacios de Besov con peso

Como ya hemos mencionado, al tratar con el ruido blanco definido sobre todo $\mathbb{R}^d$ es necesario incluir una tasa de decaimiento, lo que se traduce en considerar pesos en los espacios de Besov. Los pesos que vamos a utilizar son los mismos que definimos para el espacio de Schwartz.

Definición 2.4.1:

(Pesos) Denotamos por:

$$\omega_{\text{pol}}(x) := \log(1 + |x|) \;\; ; \;\; \omega^{\exp}_{\sigma}(x) := |x|^{\sigma}, \; \sigma \in (0,1)$$

con $x \in \mathbb{R}^d$. Agrupamos estas funciones en un conjunto $\Omega := \omega_{\text{pol}} \cup \{\omega_\sigma \;:\; \sigma \in (0,1)\}$ y definimos para cada $\omega \in \Omega$ el conjunto de funciones peso $\mathcal{M}(\omega)$ tales que $\rho(\omega) \in \mathcal{M}(\omega)$, si y solo si, $\rho(\omega) : \mathbb{R}^d \to (0, \infty)$ es medible y tal que existe $\lambda = \lambda(\rho) > 0$ tal que:

$$\rho(x) \lesssim \rho(y) \cdot e^{\lambda\omega(x-y)}$$

Veamos ejemplos de pesos admisibles en cada clase de decaimientos.

Ejemplo 2.4.1:

En el caso de $\omega \in \omega_\sigma^{\exp}$ tenemos que $e^{\mu|x|^\sigma} \in \mathcal{M}(\omega_\sigma^{\exp})$ para $\mu \in \mathbb{R}$ y $\sigma \in (0,1)$. En efecto, si $\mu = 0$, entonces la contención es obvia. Si ahora $\mu > 0$, consideramos la función cóncava $g(x) := x^\sigma$. Luego, tenemos por la desigualdad de Jensen

$$\left|\frac{x+y}{2}\right|^\sigma \geq \frac{|x|^\sigma + |y|^\sigma}{2} \implies 2^{\sigma-1}\{|x|^\sigma + |y|^\sigma\} \leq |x+y|^\sigma$$

y sabemos que $2^{\sigma-1} < 1$, pero $1 \lesssim 2^{\sigma-1}$. De este punto deducimos que

$$\begin{aligned} |x|^\sigma + |y|^\sigma \lesssim |x+y|^\sigma &\implies \mu \cdot |x|^\sigma + \mu \cdot |y|^\sigma \lesssim \mu \cdot |x+y|^\sigma \\ &\implies \mu \cdot |x|^\sigma - \mu \cdot |y|^\sigma \lesssim \mu \cdot |x+y|^\sigma \\ &\implies \frac{e^{\mu|x|^\sigma}}{e^{\mu|y|^\sigma}} \lesssim e^{\mu|x+y|^\sigma} \end{aligned}$$

y considerando $-y$ en vez de y concluimos este caso. Para el caso en el que $\mu < 0$, notamos que al multiplicar por μ, obtenemos la desigualdad:

$$\mu \cdot |x|^\sigma + \mu \cdot |y|^\sigma \gtrsim \mu \cdot |x+y|^\sigma \implies \frac{e^{\mu|x+y|^\sigma}}{e^{\mu|y|^\sigma}} \lesssim e^{\mu|x|^\sigma}$$

y si usamos $x \equiv x - y$ obtenemos la desigualdad

$$\frac{e^{\mu|x|^\sigma}}{e^{\mu|y|^\sigma}} \lesssim e^{\mu|x-y|^\sigma}$$

y con esto concluimos la contención.

Proposición 2.4.1:

(Contención de pesos): Tenemos que $\mathcal{M}(\omega_{\text{pol}}) \subseteq \mathcal{M}(\omega_\sigma^{\exp})$ para algún intervalo $\sigma \in I \subset (0,1)$.

Demostración. Solo necesitamos mostrar que para algún $\sigma \in (0,1)$ tenemos que para toda función medible positiva $\rho : \mathbb{R}^d \to (0,\infty)$ con

$$\frac{\rho(x)}{\rho(y)} \leq K \cdot e^{\lambda \cdot \log(1+||x-y||)}, \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}^d$$

podemos concluir que:

$$\frac{\rho(x)}{\rho(y)} \leq K \cdot e^{\lambda \cdot ||x-y||^\sigma}, \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}^d$$

En efecto, basta notar que:

$$\begin{aligned} \frac{\log(1+r)}{r^\sigma} &= \frac{1}{r^\sigma} \cdot \int_1^{r+1} \frac{1}{t}\, dt \\ &\leq \frac{1}{r^\sigma} \cdot r = r^{1-\sigma} \end{aligned}$$

Por lo tanto, obtenemos la estimación $\frac{\log(1+r)}{r^{2\sigma-1}} \leq 1$, por lo que al elegir $\sigma \in (\frac{1}{2}, 1)$ obtenemos un σ tal que $\log(1 + ||x - y||) \leq ||x - y||^{\sigma}$, para todo $x, y \in \mathbb{R}^d$. □

Comentario: Como último detalle ténico: La partición diadica de la unidad (2.2 para el caso sin peso) debemos considerarla en $\mathcal{S}_\omega(\mathbb{R}^d)$: Consideramos $\rho_{-1}, \rho_0 \in \mathcal{S}_\omega(\mathbb{R}^d)$ tales que $\text{supp}(\rho_{-1}) \subset B(0, r)$ para algún radio y $\text{supp}(\rho_0) \subset \mathcal{A}$ un anillo alrededor del origen. Así, definimos $(\rho_j)_{j\geq -1}$ tales que

- $\rho_j = \rho_0(2^{-j}\cdot)$, para cada $j \geq 0$.
- $\sum_{j\geq -1} \rho_j(x) = 1$, para cada $x \in \mathbb{R}^d$.
- Si $|j - j'| > 1$, entonces $\text{supp}(\rho_j) \cap \text{supp}(\rho_{j'}) = \emptyset$.

y nuevamente la existencia de estas funciones no es trivial. Una discusión al respecto puede verse en [MP, 2019].

Con este preambulo, ya es posible definir los espacios de Besov con peso. Utilizaremos estos espacios para medir la regularidad espacial de las soluciones de la ecuación de KPZ.

Definición 2.4.2:

(Espacios de Besov con peso) Sean $\alpha \in \mathbb{R}$, $p, q \in [1, \infty]$, $\omega \in \Omega$ junto con $\rho \in \mathcal{M}(\omega)$ y $(\rho_j)_{j\geq -1}$ una partición diadica de la unidad. Definimos el espacio de Besov con peso ρ, $B^{\alpha}_{p,q}(\mathbb{R}^d, \rho)$, como

$$B^{\alpha}_{p,q}(\mathbb{R}^d, \rho) := \{u \in \mathcal{S}'_\omega(\mathbb{R}^d) \ : \ ||u||_{B^{\alpha}_{p,q}(\mathbb{R}^d,\rho)} := ||(2^{\alpha j} \cdot ||\Delta_j u||_{L^p(\rho)})_{j\geq -1}||_{\ell^q} < \infty\}$$

Ahora el objetivo es revisar cómo extender la Teoría de paraproductos y su noción de productos al caso con peso, lo cual es esencialmente análogo. Volvemos a definir los espacios $\mathcal{C}^\alpha$ pero ahora en el contexto con peso, conocidos como Espacios de Hölder-Besov

$$\mathcal{C}^{\alpha}_{\rho}(\mathbb{R}^d) := \left\{u \in \mathcal{S}'_\omega(\mathbb{R}^d) \ : \ ||u||_{\mathcal{C}^\alpha_\rho} := \sup_{j\geq -1} 2^{j\alpha} \cdot \left|\left|\Delta_j u \cdot \rho\right|\right|_{L^\infty} < \infty\right\}.$$

Como contenido adicional en la sección con peso incluimos algunos incrustamientos entre espacios. Estos resultados son muy importantes a la hora de probar que ciertas distribuciones pertenecen a espacios como $\mathcal{C}^\alpha_\rho(\mathbb{R}^d)$, y en particular los utilizaremos para determinar la regularidad Hölder-Besov del ruido blanco espacial sobre todo $\mathbb{R}^d$ 2.5. Por otro lado, los incrustamientos también son muy esclarecedores al dar caracterizaciones útiles de los espacios de Besov en ciertos casos.

Antes de pasar a la sección de embeddings, enunciamos la desigualdad de Bernstein en su versión con peso; uno de los resultados más importantes en la Teoría de Littlewood-Paley y que nos será útil en distintas estimadas. Una diferencia crucial con la versión sin peso radica en que debemos asumir que el escalamiento de la bola está acotado por debajo. Incluimos su demostración para mostrar cómo son las técnicas y procedimientos en los espacios con peso.

Lema 2.4.1:

(Desigualdad de Bernstein): Sea $\mathcal{B}$ una bola centrada en el origen, $k \in \mathbb{N}$ y $\rho \in \mathcal{M}(\omega)$ con $\omega \in \Omega$.

Entonces para cada $\lambda \geq \lambda_0 > 0$ y $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d, \rho)$ se cumple que: Si $\mathrm{supp}(\mathcal{F}f) \subset \lambda\mathcal{B}$, entonces

$$\max_{|\mu|=k} ||\partial^\mu f||_{L^\infty(\mathbb{R}^d,\rho)} \lesssim_{\lambda_0,k} \lambda^k \cdot ||f||_{L^\infty(\mathbb{R}^d,\rho)}$$

Demostración. Consideremos $\psi \in \mathcal{S}_\omega(\mathbb{R}^d)$ con $\psi|_{\mathcal{B}} \equiv 1$ y sea $\psi_\lambda(\cdot) = \psi(\lambda^{-1}\cdot)$. Luego, notamos que

$$\begin{aligned}\partial^\mu f &= \partial^\mu \mathcal{F}^{-1}\{\psi_\lambda \cdot \mathcal{F}f\} \\ &= \partial^\mu\{\mathcal{F}^{-1}\psi_\lambda * f\} \\ &= (\partial^\mu \mathcal{F}^{-1}\psi_\lambda) * f\end{aligned}$$

Además, por el Teorema de cambio de variable de la integral de Lebesgue

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\psi_\lambda(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} \psi_\lambda(y) \cdot e^{2\pi i y\cdot x}\, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \psi(\lambda^{-1}y) \cdot e^{2\pi i \lambda^{-1} y \cdot \lambda x}\, dy \\ &= \lambda^d \cdot \int_{\mathbb{R}^d} \psi(z) e^{2\pi i z(\lambda x)}\, dz \\ &= \lambda^d \cdot \mathcal{F}\psi(\lambda x)\end{aligned}$$

y por regla de la cadena obtenemos

$$\partial^\mu \mathcal{F}^{-1}\psi_\lambda(x) = \partial^\mu\{\lambda \cdot \mathcal{F}^{-1}\psi(\lambda x)\} = \lambda^{d+|\mu|} \cdot \partial^\mu \mathcal{F}^{-1}\psi(\lambda x)$$

Utilizaremos esta cuenta explícita para desarrollar la cota que necesitamos. Adicionalmente, notamos la siguiente cota sobre los pesos asociados a las tasas $\omega(x) := |x|^\sigma$ con $\sigma \in (0,1)$: Sabemos que existe $\eta > 0$ tal que si $\rho \in \mathcal{M}(\omega)$

$$\begin{aligned}\rho(x) &\lesssim \rho(y) \cdot e^{\eta \cdot |x-y|^\sigma} = \rho(y) \cdot e^{\frac{\eta}{\lambda^\sigma} \cdot |\lambda(x-y)|^\sigma} \\ &\leq \rho(y) \cdot e^{\frac{\eta}{\lambda_0^\sigma} \omega(\lambda(x-y))} \\ &\equiv \rho(y) \cdot e^{c \cdot \omega(\lambda(x-y))}\end{aligned}$$

y con estas cotas podemos deducir la desigualdad de Bernstein: Sea $\mu \in \mathbb{N}^d$ tal que $|\mu| = k$. Luego, notamos que

$$\begin{aligned}||\partial^\mu f||_{L^\infty(\mathbb{R}^d,\rho)} &= \mathrm{essup}_{x\in\mathbb{R}^d} |\partial^\mu f(x) \cdot \rho(x)| \\ &= \mathrm{essup}_{x\in\mathbb{R}^d} \left| \int_{\mathbb{R}^d} \rho(x) \cdot f(y) \cdot \lambda^{d+|\mu|} \cdot \partial^\mu \mathcal{F}^{-1}\psi(\lambda(x-y))\, dy \right| \\ &\lesssim \left| \int_{\mathbb{R}^d} \rho(y) \cdot e^{c\cdot\omega(\lambda(x-y))} \cdot f(y) \cdot \lambda^{d+|\mu|} \cdot \partial^\mu \mathcal{F}^{-1}\psi(\lambda(x-y))\, dy \right| \\ &\leq \lambda^k \cdot \int_{\mathbb{R}^d} |\rho(y) f(y)| \cdot \{e^{c\cdot\omega(\lambda(x-y))} \lambda^d \partial^\mu \mathcal{F}^{-1}\psi(\lambda(x-y))\}\, dy \\ &\leq \lambda^k \cdot ||f||_{L^\infty(\mathbb{R}^d,\rho)} \cdot ||e^{c\cdot\omega(\lambda(\cdot))} \lambda^d \partial^\mu \mathcal{F}^{-1}\psi(\lambda(\cdot))||_{L^1(\mathbb{R}^d)}\end{aligned}$$

y la demostración se concluye al notar que $\mathcal{F}^{-1}\psi \in \mathcal{S}_\omega(\mathbb{R}^d)$, de donde podemos acotar la norma L^1 por una semi-norma de la derivada y, junto con multiplicar por una exponencial cuyo inverso sea integrable, concluir que dicha norma es finita. Así, concluimos que

$$||\partial^\mu f||_{L^\infty(\mathbb{R}^d,\rho)} \lesssim \lambda^k \cdot ||f||_{L^\infty(\mathbb{R}^d,\rho)}$$

y como esto es cierto para todo μ tal que $|\mu| = k$, concluimos la demostración. □

Un corolario clásico de la desigualdad de Bernstein es el cómo afecta a la regularidad Besov las derivadas espaciales. Este resultado es muy útil para encontrar el espacio de Besov candidato a punto fijo, por lo que incluimos su enunciado. La demostración es análoga al caso sin peso.

Corolario 2.4.1:

Si $u \in C^\alpha_\rho$, entonces se cumple que

$$||\partial^\mu u||_{C^{\alpha-|\mu|}_\rho} \lesssim ||u||_{C^\alpha_\rho}$$

y la constante es uniforme en u.

2.4.1. Incrustamientos y equivalencias de los espacios de Besov con peso

Comenzamos este apartado con un resultado técnico muy útil para obtener estimadas en los bloques de Littlewood-Paley.

Proposición 2.4.2:

Sean $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ medible, $\omega \in \Omega$ y $p \in [1,\infty]$. Luego, para $\delta \in (0,1]$, $\lambda > 0$ y para cualquier $\lambda' > \lambda$ tal que $e^{(\lambda-\lambda')\omega} \in L^p(\mathbb{R}^d)$ se tiene que:

$$||F^\delta||_{L^p(\mathbb{R}^d,e^{\lambda\omega(x)})} \lesssim \delta^{-d\left(1-\frac{1}{p}\right)} \cdot p^\omega_{0,\lambda'}(F), \quad F^\delta(x) := \delta^{-d} \cdot F(\delta^{-1}x)$$

En particular y como aplicación: Si $r, q \in [1,\infty]$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$ y $f \in L^q(\mathbb{R}^d,\rho)$ con $\rho \in \mathcal{M}(\omega)$:

$$||F^\delta * f||_{L^r(\mathbb{R}^d,\rho)} \lesssim \delta^{-d\left(1-\frac{1}{p}\right)} \cdot p^\omega_{0,\overline{\lambda}'}(F) \cdot ||f||_{L^q(\mathbb{R}^d,\rho)}$$

para algún $\overline{\lambda} = \overline{\lambda}(\rho) > 0$ y para todo $\overline{\lambda}' > \overline{\lambda}$ tal que $e^{(\overline{\lambda}-\overline{\lambda}')\omega(x)} \in L^p(\mathbb{R}^d)$.

Demostración. Primero vemos la aplicación: Notamos que

$$\begin{aligned}
||F^\delta * f||_{L^r(\mathbb{R}^d,\rho)} &= \left|\left|\rho(x) \cdot \int_{\mathbb{R}^d} F^\delta(x-y) \cdot f(y)\,dy\right|\right|_{L^r(\mathbb{R}^d)} \\
&= \left|\left|\int_{\mathbb{R}^d} \rho(x) \cdot F^\delta(x-y) \cdot f(y)\,dy\right|\right|_{L^r(\mathbb{R}^d)} \\
&\lesssim \left|\left|\int_{\mathbb{R}^d} \rho(y) \cdot e^{\overline{\lambda}\cdot\omega(x-y)} \cdot F^\delta(x-y) \cdot f(y)\,dy\right|\right|_{L^r(\mathbb{R}^d)} \\
&= ||\{F^\delta \cdot e^{\overline{\lambda}\cdot\omega}\} * \{f \cdot \rho\}||_{L^r(\mathbb{R}^d)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\le ||F^{\delta}||_{L^p(\mathbb{R}^d, e^{\lambda\omega})} \cdot ||f||_{L^q(\mathbb{R}^d,\rho)} \\
&\lesssim \delta^{-d\left(1-\frac{1}{p}\right)} \cdot p^{\omega}_{0,\overline{\lambda}'}(F) \cdot ||f||_{L^q(\mathbb{R}^d,\rho)}
\end{aligned}
$$

en donde usamos que tenemos la desigualdad en los pesos para algún $\overline{\lambda}(\rho) > 0$ en la tercera línea, Young en la quinta línea y la primera parte del lema en la última línea.

Para la demostración de la propiedad: Notamos primero que el caso con $p = \infty$ es obvio. Supongamos entonces $p < \infty$. En este caso, tenemos las estimadas

$$
\begin{aligned}
||F^{\delta}||^p_{L^p(\mathbb{R}^d, e^{\lambda\omega(x)})} &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{\lambda\cdot p\cdot\omega(x)} \cdot \delta^{-d\cdot p} \cdot |F(\delta^{-1}x)|^p \, dx \\
&= \delta^{-d(p-1)} \cdot \int_{\mathbb{R}^d} e^{\lambda\cdot p\cdot\omega(\delta^d x)} \cdot |F(x)|^p \, dx \\
&\le \delta^{-d(p-1)} \cdot \int_{\mathbb{R}^d} e^{\lambda\cdot p\cdot\omega(x)} \cdot |F(x)|^p \, dx \\
&= \delta^{-d(p-1)} \cdot \int_{\mathbb{R}^d} e^{(\lambda-\lambda')\cdot p\cdot\omega(x)} \cdot [e^{\lambda'\cdot\omega(x)} \cdot |F(x)|]^p \, dx \\
&\lesssim \delta^{-d(p-1)} \cdot [p^{\omega}_{0,\lambda'}(F)]^p
\end{aligned}
$$

y tomando raíz p-ésima concluimos la demostración. □

Esta desigualdad permite demostrar los incrustamientos en Besovs que son útiles y esclarecedores.

Teorema 2.4.1:

(Incrustamiento de Besov) Sean $p_1, p_2, q_1, q_2 \in [1, \infty]$; $\omega \in \Omega$; $\rho_1, \rho_2 \in \mathcal{M}(\omega)$ con $p_1 \le p_2$, $q_1 \le q_2$ y $\rho_2 \lesssim \rho_1$. Si $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha_2 - \frac{d}{p_2} \le \alpha_1 - \frac{d}{p_1}$ entonces tenemos que

$$
B^{\alpha_1}_{p_1,q_1}(\mathbb{R}^d, \rho_1) \subseteq B^{\alpha_2}_{p_2,q_2}(\mathbb{R}^d, \rho_2)
$$

Demostración. Para $j \ge -1$ tenemos que $\Delta_j f = \sum_{j' \,:\, |j-j'|\le 1} \Delta_{j'}\Delta_j f$. Luego, dada $f \in B^{\alpha_1}_{p_1,q_1}(\mathbb{R}^d, \rho_1)$ y siendo $\Psi^j := \mathcal{F}^{-1}_{\mathbb{R}^d}\rho_j = 2^{-jd} \cdot \mathcal{F}^{-1}_{\mathbb{R}^d}\rho_0(2^{-j}\cdot)$:

$$
\begin{aligned}
||\Delta_j f||_{L^{p_2}(\mathbb{R}^d,\rho_2)} &= \Big|\Big| \sum_{j' \,:\, |j-j'|\le 1} \Delta_{j'}\Delta_j f \Big|\Big|_{L^{p_2}(\mathbb{R}^d,\rho_2)} \\
&= \Big|\Big| \sum_{j' \,:\, |j'-j|\le 1} \Psi^{j'} * \Delta_j f \Big|\Big|_{L^{p_2}(\mathbb{R}^d,\rho_2)} \\
&\lesssim 2^{jd\left(1-1+\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}\right)} \cdot ||\Delta_j f||_{L^{p_1}(\mathbb{R}^d,\rho_2)} \\
&= 2^{jd\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}\right)} \cdot ||\Delta_j f||_{L^{p_1}(\mathbb{R}^d,\rho_2)} \\
&\lesssim 2^{jd\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}\right)} \cdot ||\Delta_j f||_{L^{p_1}(\mathbb{R}^d,\rho_1)}
\end{aligned}
$$

en donde usamos el lema anterior en la primera estimada y el hecho que $\rho_2 \lesssim \rho_1$ en la segunda. Luego, multiplicando por $2^{j\alpha_2}$

$$
2^{j\alpha_2} \cdot ||\Delta_j f||_{L^{p_2}(\mathbb{R}^d,\rho_2)} \lesssim 2^{jd\left(\alpha_2+\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}\right)} \cdot ||\Delta_j f||_{L^{p_1}(\mathbb{R}^d,\rho_1)}
$$

$$\lesssim 2^{j\alpha_1} \cdot ||\Delta_j f||_{L^{p_1}(\mathbb{R}^d,\rho_1)}$$

y con esto concluimos la prueba. □

Este embedding es válido para $q_1 \leq q_2$. Ahora bien, es posible considerar $q_1 \geq q_2$ pero quitando un poco de regularidad.

Corolario 2.4.2:

Para $p, q_1, q_2 \in [1, \infty]$, $\varepsilon > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\rho \in \mathcal{M}(\omega)$. Luego, se tiene que

$$B^{\alpha}_{p,q_1}(\mathbb{R}^d, \rho) \subseteq B^{\alpha-\varepsilon}_{p,q_2}(\mathbb{R}^d, \rho)$$

Demostración. Si $q_1 \leq q_2$: Tenemos que $\rho \lesssim \rho$, $p_1 \leq p_2$ (pues son p) y $\alpha - \varepsilon < \alpha$, lo que implica que $\alpha - \varepsilon - \frac{d}{p} \leq \alpha - \frac{d}{p}$ y usamos el embedding anterior.

Si ahora $q_2 < q_1$: Sea $r \in [1, \infty)$ tal que $\frac{1}{q_1} + \frac{1}{r} = \frac{1}{q_2}$. Luego, si $f \in B^{\alpha}_{p,q_1}(\mathbb{R}^d, \rho)$:

$$\begin{aligned} ||f||_{B^{\alpha-\varepsilon}_{p,q_2}} &= ||(2^{-j\varepsilon} \cdot 2^{j\alpha} \cdot ||\Delta_j f||_{L^p(\mathbb{R}^d,\rho)})_{j\geq -1}||_{\ell^{q_2}} \\ &\leq ||(2^{-j\varepsilon})_{j\geq -1}||_{\ell^r} \cdot ||(2^{j\alpha} \cdot ||\Delta_j f||_{L^p(\mathbb{R}^d,\rho)})_{j\geq -1}||_{\ell^{q_1}} \\ &\lesssim ||f||_{B^{\alpha}_{p,q_1}(\mathbb{R}^d,\rho)} \end{aligned}$$

en donde utilizamos la desigualdad de Hölder en la primera desigualdad. □

Un segundo corolario que esclarece la estructura de los espacios de Besov con regularidad positiva: Son en realidad funciones y refuerza le idea de “regularidad positiva, implica más regular”.

Corolario 2.4.3:

Si $\alpha > 0$, $p, q \in [1, \infty]$ y $\rho \in \mathcal{M}(\omega)$ se tiene el embedding:

$$B^{\alpha}_{p,q}(\mathbb{R}^d, \rho) \subseteq L^p(\mathbb{R}^d, \rho)$$

Demostración. Sea $f \in B^{\alpha}_{p,q}(\mathbb{R}^d, \rho)$ y supongamos, SPG, que $||f||_{B^{\alpha}_{p,q}(\mathbb{R}^d,\rho)} \leq 1$. Luego, como $\alpha > 0$ podemos escoger $\varepsilon > 0$ tal que $\alpha - \varepsilon > 0$ y por el embedding anterior (con $q_1 = \infty$)

$$||f||_{B^{\alpha-\varepsilon}_{p,\infty}(\mathbb{R}^d,\rho)} \lesssim ||f||_{B^{\alpha}_{p,q}(\mathbb{R}^d,\rho)} \leq 1$$

y con esto, deducimos la siguiente estimada

$$\begin{aligned} ||f||_{L^p(\mathbb{R}^d,\rho)} &= \Big|\Big| \sum_{j\geq -1} \Delta_j f \Big|\Big|_{L^p(\mathbb{R}^d,\rho)} \\ &\leq \sum_{j\geq -1} ||\Delta_j f||_{L^p(\mathbb{R}^d,\rho)} \\ &\lesssim \sum_{j\geq -1} 2^{-j(\alpha-\varepsilon)} \cdot ||f||_{B^{\alpha-\varepsilon}_{p,\infty}(\mathbb{R}^d,\rho)} \\ &\lesssim \sum_{j\geq -1} 2^{-j(\alpha-\varepsilon)} < \infty \end{aligned}$$

□

Más aún, si restingimos la regularidad a $\alpha \in (0,\infty)\backslash\mathbb{N}$ y consideramos $p = q = \infty$, podemos demostrar que los Besov con peso $C^{\alpha}_{\rho}(\mathbb{R}^d)$ son de hecho, funciones α-Hölder. Recordamos su definición y norma. Este hecho es muy útil, pues permite pasar el estudio de Besovs con ciertas regularidades positivas a estimadas sobre sus derivadas.

Definición 2.4.3:

Para $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ abierto y $\alpha \in (0,\infty)\backslash\mathbb{N}$ definimos el espacio $C^{\alpha}(\Omega)$ como el conjunto de funciones $f : \Omega \to \mathbb{C}$ tales que

$$||f||_{C^{\alpha}(\Omega)} := ||u||_{\infty,\rho} + \sum_{k\in\mathbb{N}^d\,:\,|k|=\lfloor\alpha\rfloor} \left(||\partial^{\alpha}u||_{\infty,\rho} + \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \sup_{||x-y||\leq 1} \frac{|\partial^k f(x) - \partial^k f(y)|}{\rho(x)\cdot|x-y|^{\alpha-\lfloor\alpha\rfloor}} \right)$$

Proposición 2.4.3:

Sea $\alpha \in (0,\infty)\backslash\mathbb{N}$ y $\rho \in \mathcal{M}(\omega)$. Luego, se cumple que son equivalentes las normas:

$$||u||_{C^{\alpha}_{\rho}} \sim ||u||_{\infty,\rho} + \sum_{k\in\mathbb{N}^d\,:\,|k|=\lfloor\alpha\rfloor} \left(||\partial^{\alpha}u||_{\infty,\rho} + \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \sup_{||x-y||\leq 1} \frac{|\partial^k f(x) - \partial^k f(y)|}{\rho(x)\cdot|x-y|^{\alpha-\lfloor\alpha\rfloor}} \right)$$

donde $|k| := \sum_{i=1}^{d} k^i$. Esto es, $C^{\alpha}_{\rho}(\mathbb{R}^{\mathrm{d}}) = C^{\alpha}(\mathbb{R}^d)$.

2.4.2. Paraproductos de Bony con peso

Ahora generalizamos los resultados de los paraproductos de Bony al contexto con peso. Para ello, primero recordamos la idea esencial detras de estos paraproductos: para $u, v \in \mathcal{S}'_{\omega}(\mathbb{R}^d)$ y definiendo $S_j f := \sum_{i=1}^{j-1} \Delta_i f$ formalmente tenemos que

$$\begin{aligned}
u\cdot v &= \Big(\sum_{j\geq -1} \Delta_j u\Big)\cdot\Big(\sum_{i\geq -1}\Delta_i v\Big) \\
&= \sum_{i,j\geq -1} \Delta_j u\cdot\Delta_i v \\
&= \sum_{i\geq -1}\Big\{ \sum_{j\,:\,j\leq i-2} \Delta_j u\cdot\Delta_i v + \sum_{j\,:\,|j-i|\leq 1} \Delta_j u\cdot\Delta_i v + \sum_{j\,:\,j\geq i+2} \Delta_j u\cdot\Delta_i v \Big\} \\
&= \sum_{i\geq -1}\sum_{j\,:\,j\leq i-2} \Delta_j u\cdot\Delta_i v + \sum_{i,j\,:\,|i-j|\leq 1} \Delta_j u\cdot\Delta_i v + \sum_{j\geq -1}\sum_{i\,:\,i\leq j-2} \Delta_j u\cdot\Delta_i v \\
&= \sum_{i\geq -1} S_{i-1}u\cdot\Delta_i v + \sum_{i,j\,:\,|i-j|\leq 1} \Delta_j u\cdot\Delta_i v + \sum_{j\geq -1}\Delta_j u\cdot S_{j-1}v \\
&\equiv u \varolessthan v + u \odot v + u \varogreaterthan v
\end{aligned}$$

Notemos además que por definición $u \varolessthan v = v \varogreaterthan u$. Así, cualquier resultado de regularidad en un paraproducto, será igualmente válido para el otro. Comenzamos esta sección replicando las estimadas de paraproducto de Bony en el caso con peso, análoga al caso sin peso 2.2.1.

Proposición 2.4.4:

(Estimadas de Bony): Sean $\rho_1, \rho_2 \in \mathcal{M}(\omega)$ para $\omega \in \Omega$ y $p, p_1, p_2, q, q_1, q_2 \in [1, \infty]$ tales que $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = \frac{1}{p}$ y $\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} = \frac{1}{q}$. Luego, tenemos que valen las cotas:

1. Para cada $\alpha_2 \in \mathbb{R}$

$$||u \otimes v||_{B^{\alpha_2}_{p,q_2}(\mathbb{R}^d, \rho_1 \cdot \rho_2)} \lesssim ||u||_{L^{p_1}(\mathbb{R}^d, \rho_1)} \cdot ||v||_{B^{\alpha_2}_{p_2,q_2}(\mathbb{R}^d, \rho_2)}$$

2. Si $\alpha_1 < 0$ y $\alpha_2 \in \mathbb{R}$

$$||u \otimes v||_{B^{\alpha_1+\alpha_2}_{p,q}(\mathbb{R}^d, \rho_1 \cdot \rho_2)} \lesssim ||u||_{B^{\alpha_1}_{p_1,q_1}(\mathbb{R}^d, \rho_1)} \cdot ||v||_{B^{\alpha_2}_{p_2,q_2}(\mathbb{R}^d, \rho_2)}$$

3. Para cualesquiera $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ tales que $\alpha_1 + \alpha_2 > 0$ se tiene que

$$||u \odot v||_{B^{\alpha_1+\alpha_2}_{p,q}(\mathbb{R}^d, \rho_1 \cdot \rho_2)} \lesssim ||u||_{B^{\alpha_1}_{p_1,q_1}(\mathbb{R}^d, \rho_1)} \cdot ||v||_{B^{\alpha_2}_{p_2,q_2}(\mathbb{R}^d, \rho_2)}$$

Demostración. Una demostación de este hecho puede encontrarse en ([MP, 2019], Lema 4.2) con algunas adaptaciones al caso continuo. □

De este resultado también recuperamos la extensión del producto al caso con peso.

Teorema 2.4.2:

Sean $\rho, \rho_1, \rho_2 \in \mathcal{M}(\omega)$ con $\rho := \rho_1 \cdot \rho_2$ y $p, p_1, p_2, q, q_1, q_2 \in [1, \infty]$ tales que $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = \frac{1}{p}$ y $\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} = \frac{1}{q}$. Luego, para cada $\gamma, \gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$ con $\gamma_1 + \gamma_2 > 0$ y $\gamma = \gamma_1 \wedge \gamma_2 \wedge (\gamma_1 + \gamma_2)$ tenemos la cota

$$||u \cdot v||_{B^{\gamma}_{p,q}(\mathbb{R}^d)} \lesssim ||u||_{B^{\gamma_1}_{p_1,q_1}(\mathbb{R}^d, \rho_1)} \cdot ||v||_{B^{\gamma_2}_{p_2,q_2}(\mathbb{R}^d, \rho_2)}$$

2.4.3. Estimada de Conmutador

Concluimos el estudio de los espacios de Besov con peso y paraproductos con la estimada de conmutador. Este es el resultado técnico más importante de la teoría paracontrolada, pues permite dar sentido a productos como operadores continuos, el cual junto con las estimadas de Bony, corresponden las herramientas fundamentales en el estudio de la continuidad de las operaciones en la ecuación de KPZ.

El resultado más general en el contexto con peso del cual el autor tiene conocimiento está en ([PR, 2019], Lema 2.8).

Lema 2.4.2:

(Estimada de Conmutador con peso): Si $u \in C^{\alpha}_{\rho_1}$, $v \in C^{\beta}_{\rho_2}$ y $z \in C^{\gamma}_{\rho_3}$ y definimos $C(u, v, z) := (u \otimes v) \odot z - u(v \odot z)$. Luego, se cumple que: Si $\alpha + \beta + \gamma > 0$ y $\beta + \gamma \neq 0$, entonces

$$||C(u, v, z)||_{C^{\alpha+\beta+\gamma}_{\rho_1\rho_2\rho_3}} \lesssim ||u||_{C^{\alpha}_{\rho_1}} \cdot ||v||_{C^{\beta}_{\rho_2}} \cdot ||z||_{C^{\gamma}_{\rho_3}}$$

La demostración sigue línea por línea ([GP, 2015], Lema 14). En esta tesis, vamos a incluir la demostración de una versión más restrictiva, pero que representa una aplicación de las técnicas que hemos desarrollado hasta ahora. Primero introducimos y demostramos 4 lemas técnicos.

Lema 2.4.3:

Sean $\omega \in \Omega$, $\rho \in \mathcal{M}(\omega)$. Si $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d, \rho)$, entonces se tiene que $||f||_{C^\alpha_\rho} \lesssim ||f||_{L^\infty(\mathbb{R}^d,\rho)}$ para $\alpha < 0$.

Demostración. Basta que notemos que si $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d, \rho)$ y $j \geq -1$:

$$||\Delta_j f||_{L^\infty(\mathbb{R}^d,\rho)} \lesssim ||f||_{L^\infty(\mathbb{R}^d,\rho)} \implies 2^{j\alpha} \cdot ||\Delta_j f||_{L^\infty(\mathbb{R}^d,\rho)} \lesssim 2^{j\alpha} \cdot ||f||_{L^\infty(\mathbb{R}^d,\rho)} \lesssim ||f||_{L^\infty(\mathbb{R}^d,\rho)}$$

(en donde usamos que $\alpha < 0$ para estimar al final independientemente de $j \geq -1$). Así, tomando supremo obtenemos que $||f||_{C^\alpha_\rho} \lesssim ||f||_{L^\infty(\mathbb{R}^d,\rho)}$. □

Lema 2.4.4:

Sean $\alpha \in (0,1)$, $\rho \in \mathcal{M}(\omega)$, $u \in C^\alpha_{\rho_1}$, $g \in L^\infty(\mathbb{R}^d, \rho_2)$. Luego, para cada $j \geq -1$ se tiene que:

$$||[\Delta_j, u]g||_{L^\infty(\mathbb{R}^d,\rho_1\rho_2)} = ||\Delta_j(u \cdot g) - u \cdot \Delta_j g||_{L^\infty(\mathbb{R}^d,\rho_1\rho_2)} \lesssim 2^{-j\alpha} \cdot ||u||_{C^\alpha_{\rho_1}} \cdot ||g||_{L^\infty(\mathbb{R}^d,\rho_1)}$$

Demostración. Como $\alpha > 0$ sabemos que $C^\alpha_{\rho_1} \subseteq L^\infty(\mathbb{R}^d, \rho)$ y como $\alpha \in (0,1)$, sabemos también que $C^\alpha_{\rho_1} = C^\alpha(\mathbb{R}^d)$, es decir, son las funciones α-Hölder. La idea de la demostración va a quedar clara al expandir lo que queremos estimar

$$\begin{aligned}||[\Delta_j, u]g||_{L^\infty(\mathbb{R}^d,\rho_1\rho_2)} &\leq ||\Delta_j(u \cdot g)||_{L^\infty(\mathbb{R}^d,\rho_1\rho_2)} + ||u \cdot \Delta_j g||_{L^\infty(\mathbb{R}^d,\rho_1\rho_2)} \\ &\leq ||\Delta_j(u \otimes g)||_{L^\infty(\mathbb{R}^d,\rho_1\rho_2)} + ||\Delta_j(u \circledS g)||_{L^\infty(\mathbb{R}^d,\rho_1\rho_2)} \\ &\quad + ||\Delta_j(u \odot g)||_{L^\infty(\mathbb{R}^d,\rho_1\rho_2)} + ||u \cdot \Delta_j g||_{L^\infty(\mathbb{R}^d,\rho_1\rho_2)}\end{aligned}$$

Idea que requiere primero verificar que el término resonante $u \odot g$ está bien definido. Este es el caso, pues por el lema [2.4.3] tenemos que $g \in C^\beta_{\rho_2}$ para todo $\beta \leq 0$. Así, escogiendo $\beta \leq 0$ tal que $\alpha + \beta > 0$ damos sentido a este término. Siguiendo con las estimadas, deducimos que

$$\begin{aligned}||[\Delta_j, u]g||_{L^\infty(\mathbb{R}^d,\rho_1\rho_2)} &\leq 2^{-j\alpha}||u \otimes v||_{C^\alpha_{\rho_1\rho_2}} + 2^{-j\alpha}||u \circledS v||_{C^\alpha_{\rho_1\rho_2}} + 2^{-j\alpha}||u \odot v||_{C^\alpha_{\rho_1\rho_2}} + ||u \cdot \Delta_j g||_{L^\infty(\mathbb{R}^d,\rho_1\rho_2)} \\ &\lesssim 2^{-\alpha j}||u||_{L^\infty(\mathbb{R}^d,\rho_1)} \cdot ||g||_{C^\beta_{\rho_2}} + 2^{-j\alpha} \cdot ||g||_{L^\infty(\mathbb{R}^d,\rho_2)}||u||_{C^\alpha_{\rho_1}} + 2^{-\alpha j} \cdot ||u||_{C^\alpha_{\rho_1}}||g||_{C^0_{\rho_2}} \\ &\quad + ||u \cdot \Delta_j g||_{L^\infty(\mathbb{R}^d,\rho_1\rho_2)} \\ &\lesssim 2^{-j\alpha} \cdot ||u||_{C^\alpha_{\rho_1}} \cdot ||g||_{L^\infty(\mathbb{R}^d,\rho_2)} + 2^{-j\alpha} \cdot ||g||_{L^\infty(\mathbb{R}^d,\rho_2)}||u||_{C^\alpha_{\rho_1}} + 2^{-\alpha j} \cdot ||u||_{C^\alpha_{\rho_1}}||g||_{L^\infty(\mathbb{R}^d,\rho_2)} \\ &\quad + ||u \cdot \Delta_j g||_{L^\infty(\mathbb{R}^d,\rho_1\rho_2)} \\ &= 3 \cdot 2^{-j\alpha}||u||_{C^\alpha_{\rho_1}} \cdot ||g||_{L^\infty(\mathbb{R}^d,\rho_2)} + ||u \cdot \Delta_j g||_{L^\infty(\mathbb{R}^d,\rho_1\rho_2)} \\ &\lesssim 3 \cdot 2^{-j\alpha}||u||_{C^\alpha_{\rho_1}} \cdot ||g||_{L^\infty(\mathbb{R}^d,\rho_2)} + ||u||_{L^\infty(\mathbb{R}^d,\rho_1)} \cdot ||\Delta_j g||_{L^\infty(\mathbb{R}^d,\rho_2)} \\ &\lesssim 3 \cdot 2^{-j\alpha}||u||_{C^\alpha_{\rho_1}} \cdot ||g||_{L^\infty(\mathbb{R}^d,\rho_2)} + ||u||_{C^\alpha_{\rho_1}} \cdot 2^{-j\beta} \cdot ||g||_{C^\beta_{\rho_2}} \\ &\lesssim 2^{-j\alpha}||u||_{C^\alpha_{\rho_1}} \cdot ||g||_{L^\infty(\mathbb{R}^d,\rho_2)}\end{aligned}$$

en donde utilizamos las estimadas de Bony para la segunda estimada, el hecho que $||u||_{L^\infty(\mathbb{R}^d,\rho_1)} \leq ||u||_{C^\alpha(\mathbb{R}^d)} \cong ||u||_{C^\alpha_{\rho_1}}$, el lema [2.4.3] y el hecho que $C^0_{\rho_2} \subseteq L^\infty(\mathbb{R}^d, \rho_2)$ en la tercera estimada y para la quinta estimada utilizamos que como $\alpha > 0$:

$$\begin{aligned} ||u||_{L^\infty(\mathbb{R}^d,\rho_1)} &\leq \sum_{j\geq -1} ||\Delta_j u||_{L^\infty(\mathbb{R}^d,\rho_1)} \\ &\lesssim \sum_{j\geq -1} 2^{-j\alpha} \cdot ||u||_{C^\alpha_{\rho_1}} \lesssim ||u||_{C^\alpha_{\rho_1}} \end{aligned}$$

Con esto concluimos la demostración. □

Lema 2.4.5:

Sea $\alpha \in (0,1)$, $\beta \in \mathbb{R}$ y $u \in C^\alpha_{\rho_1}$, $v \in C^\beta_{\rho_2}$. Luego, para cada $j \geq -1$

$$||\Delta_j(u \otimes v) - u \cdot \Delta_j v||_{L^\infty(\mathbb{R}^d,\rho_1\rho_2)} \lesssim 2^{-j(\alpha+\beta)} \cdot ||u||_{C^\alpha_{\rho_1}} \cdot ||v||_{C^\beta_{\rho_2}}$$

Demostración. Por definición, tenemos que $u \otimes v := \sum_{i\geq -1} S_{i-1}u \cdot \Delta_i v$ y su transformada de Fourier cumple que:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{u \otimes v\} &= \sum_{i\geq -1} \mathcal{F}\{S_{i-1}u \cdot \Delta_i v\} = \sum_{i\geq -1}\sum_{j\leq i-2} \mathcal{F}\{\Delta_j u \cdot \Delta_i v\} \\ &= \sum_{i\geq -1}\sum_{j\leq i-2} \mathcal{F}\{\Delta_j u\} \cdot \mathcal{F}\{\Delta_i v\} \\ &= \sum_{i\geq -1}\sum_{j\leq i-2} \{\rho_j \hat{u}\} * \{\rho_i \hat{u}\} \end{aligned}$$

y tenemos que $\text{supp}(\{\rho_j\hat{u}\} * \{\rho_i\hat{u}\}) \subseteq \overline{\text{supp}(\{\rho_j\hat{u}\}) + \text{supp}(\{\rho_i\hat{u}\})} \subseteq 2^i\mathcal{A} + 2^j\mathcal{A} = 2^i(\mathcal{A} + 2^{j-i}\mathcal{A}) \subseteq \overline{\mathcal{A}}$. Así, concluimos que $S_{i-1}u \cdot \Delta_i v$ tiene soporte en $2^i\mathcal{A}$ con $\mathcal{A}$ anillo. Con esto, deducimos que al considerar $\Delta_j(u \otimes v) := \mathcal{F}^{-1}(\rho_j \cdot \mathcal{F}\{u \otimes v\})$ solo quedan los términos para los cuales $2^j \cong 2^i$. Así:

$$\Delta_j(u \otimes v) = \Delta_j\Big(\sum_{i\geq -1} S_{i-1}u \cdot \Delta_i v\Big) = \sum_{i\,:\,2^i\cong 2^j} \Delta_j(S_{i-1}u \cdot \Delta_i v)$$

y también tenemos que $u \cdot \Delta_j v = u \cdot \Delta_j \sum_{i\,:\,2^i\cong 2^j} \Delta_i v$, de donde obtenemos

$$\begin{aligned} \Delta_j(u \otimes v) - u \cdot \Delta_j v &= \sum_{i\,:\,2^i\cong 2^j} \Delta_j(S_{i-1}u \cdot \Delta_i v) - u \cdot \Delta_j\Delta_i v \\ &= \sum_{i\,:\,2^i\cong 2^j} [\Delta_j(S_{i-1}u \cdot \Delta_i v) - S_{i-1}u \cdot \Delta_j\Delta_i v] - \sum_{i\,:\,2^i\cong 2^j} S_{\geq i-1}u \cdot \Delta_j\Delta_i v \end{aligned}$$

y para estimar la norma en $L^\infty(\mathbb{R}^d, \rho_1\rho_2)$, estimamos cada término. Para el primer término tenemos

$$\begin{aligned} \Big|\Big|\sum_{i\,:\,2^i\cong 2^j} S_{\geq i-1}u \cdot \Delta_j\Delta_i v\Big|\Big|_{L^\infty(\mathbb{R}^d,\rho_1\rho_2)} &= \text{esssup}_{x\in\mathbb{R}^d}\rho_1(x)\rho_2(x) \cdot \Big|\sum_{i\,:\,2^i\cong 2^j} S_{\geq i-1}u \cdot \Delta_j\Delta_i v\Big| \\ &\leq \text{esssup}_{x\in\mathbb{R}^d} \sum_{i\,:\,2^i\cong 2^j} \{|S_{\geq i-1}u(x)| \cdot \rho_1(x)\} \cdot \{|\Delta_j\Delta_i v(x)| \cdot \rho_2(x)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{i\,:\,2^i\cong 2^j} ||S_{\geq i-1}u||_{L^\infty(\mathbb{R}^d,\rho_1)} \cdot ||\Delta_j \Delta_i v||_{L^\infty(\mathbb{R}^d,\rho_2)} \\
&\lesssim 2^{-i\alpha} \cdot ||u||_{C^\alpha_{\rho_1}} \cdot 2^{-i\beta} \cdot ||v||_{C^\beta_{\rho_2}} \\
&\cong 2^{-j(\alpha+\beta)} \cdot ||u||_{C^\alpha_{\rho_1}} \cdot ||v||_{C^\beta_{\rho_2}}
\end{aligned}$$

donde en la tercera estimada utilizamos que $||\Delta_j \Delta_i v||_{L^\infty(\mathbb{R}^d,\rho_2)} \lesssim ||\Delta_i v||_{L^\infty(\mathbb{R}^d,\rho_2)} \lesssim 2^{-i\beta} \cdot ||v||_{C^\beta_{\rho_2}}$ y además utilizamos que (como $\alpha > 0$)

$$\begin{aligned}
\sum_{j\geq i+1} ||\Delta_j u||_{L^\infty(\mathbb{R}^d,\rho_1)} &\leq \sum_{j\geq i+1} 2^{-j\alpha}||u||_{C^\alpha_{\rho_1}} \\
&= 2^{-i\alpha}\Big\{ \sum_{j\geq 1} 2^{-\alpha j}\Big\}||u||_{C^\alpha_{\rho_1}} \\
&\lesssim 2^{-i\alpha} \cdot ||u||_{C^\alpha_{\rho_1}}
\end{aligned}$$

y con esto concluimos la cota para uno de los términos. Ahora vemos el siguiente: Para cada i tal que $2^i \cong 2^j$ tenemos que

$$\begin{aligned}
&|\Delta_j\{S_{i-1}u \cdot \Delta_i v\}(x) - S_{i-1}u \cdot \Delta_j \Delta_i v(x)| \cdot \rho_1(x) \cdot \rho_2(x) \\
&= \Big| \int_{\mathbb{R}^d} K_j(x-y) S_{i-1}u(y) \Delta_i v(y)\, dy - S_{i-1}u(x) \int_{\mathbb{R}^d} K_j(x-y)\Delta_i v(y)\, dy \Big| \rho_1(x)\rho_2(x) \\
&= \Big| \rho_1(x) \cdot \rho_2(x) \cdot \int_{\mathbb{R}^d} K_j(x-y) \cdot [S_{i-1}u(y) - S_{i-1}u(x)] \cdot \Delta_i v(y)\, dy \Big| \\
&\lesssim \int_{\mathbb{R}^d} |K_j(x-y)| e^{\lambda_1 \omega(x-y)} \rho_1(y) \cdot |S_{i-1}u(y) - S_{i-1}u(x)| \cdot e^{\lambda_2\omega(x-y)} \rho_2(y) |\Delta_i u(y)|\, dy \\
&\lesssim \int_{\mathbb{R}^d} |K_j(x-y)| \cdot \max_{|\mu|=1} ||\partial^\mu S_{i-1}u||_{L^\infty(\mathbb{R}^d,\rho_1)} \cdot |x-y| \cdot ||\Delta_i v||_{L^\infty(\mathbb{R}^d,\rho_2)} e^{(\lambda_1+\lambda_2)\omega(x-y)}\, dy \\
&\lesssim \int_{\mathbb{R}^d} |K_j(x-y)| 2^i ||S_{i-1}u||_{L^\infty(\mathbb{R}^d,\rho_1)} |x-y| 2^{-i\beta} ||v||_{C^\beta_{\rho_2}} e^{(\lambda_1+\lambda_2)\omega(x-y)}\, dy \\
&\lesssim 2^{i(1-\alpha-\beta)} \cdot ||u||_{C^\alpha_{\rho_1}} \cdot ||v||_{C^\beta_{\rho_2}} \cdot \int_{\mathbb{R}^d} |z| \cdot |K_j(z)| \cdot e^{(\lambda_1+\lambda_2)\cdot\omega(z)}\, dz \\
&= 2^{i(1-\alpha-\beta)} \cdot ||u||_{C^\alpha_{\rho_1}} \cdot ||v||_{C^\beta_{\rho_2}} \cdot \int_{\mathbb{R}^d} |2^{jd} \cdot K_0(2^j z)| 2^{-j} \cdot |2^j z| \cdot e^{(\lambda_1+\lambda_2)\omega(2^{-j}2^j z)}\, dz \\
&= 2^{i(1-\alpha-\beta)} \cdot ||u||_{C^\alpha_{\rho_1}} \cdot ||v||_{C^\beta_{\rho_2}} \cdot 2^{-j} \cdot \int_{\mathbb{R}^d} |K_0(y)| \cdot |y| \cdot e^{(\lambda_1+\lambda_2)\omega(2^{-j}y)}\, dy \\
&\cong 2^{i(1-\alpha-\beta)} \cdot ||u||_{C^\alpha_{\rho_1}} \cdot ||v||_{C^\beta_{\rho_2}} \cdot 2^{-j} \\
&\cong 2^{i(1-\alpha-\beta)} \cdot ||u||_{C^\alpha_{\rho_1}} \cdot ||v||_{C^\beta_{\rho_2}} \cdot 2^{-i} \\
&\cong 2^{-j(\alpha+\beta)} \cdot ||u||_{C^\alpha_{\rho_1}} \cdot ||v||_{C^\beta_{\rho_2}}
\end{aligned}$$

en donde usamos la estimada de los pesos para ciertos $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ en la primera estimada, el TVM multivariado en la segunda estimada, la desigualdad de Bernstein en la tercera estimada, la propiedad

$$\Big|\Big| \sum_{j=-1}^{i-2} \Delta_j u \Big|\Big|_{L^\infty(\mathbb{R}^d,\rho_1)} \leq \sum_{j=-1}^{i-2} ||\Delta_j u||_{L^\infty(\mathbb{R}^d,\rho_1)}$$

$$\lesssim ||u||_{C^{\alpha}_{\rho_1}} \cdot \sum_{j=1}^{i-2} 2^{-j\alpha}$$
$$\lesssim 2^{-i\alpha} ||u||_{C^{\alpha}_{\rho_1}}$$

en la cuarta estimada. Así, juntando las estimadas de ambos términos concluimos la demostración. □

Lema 2.4.6:

Sea $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^d$ bola, $\rho \in \mathcal{M}(\omega)$, $\alpha > 0$ y $(u_j)_{j\geq -1}$ una sucesión de funciones suaves con $\text{supp}(\mathcal{F}u_j) \subset 2^j\mathcal{B}$ y tal que $||u_j||_{L^\infty(\mathbb{R}^d,\rho)} \lesssim 2^{-j}$, para cada $j \geq -1$. Entonces:

$$u := \sum_{j=-1}^{\infty} u_j \in C^{\alpha}_{\rho} \quad ; \quad ||u||_{C^{\alpha}_{\rho}} \lesssim \sup_{j\geq -1}\{2^{j\alpha} \cdot ||u_j||_{L^\infty(\mathbb{R}^d,\rho)}\}$$

Demostración. Si $\mathcal{F}u_j$ es soportada en $2^j\mathcal{B}$, entonces $\Delta_i u_j \neq 0$ solo si $2^i \lesssim 2^j$. Así, tenemos que

$$\begin{aligned}
||\Delta_i u||_{L^\infty(\mathbb{R}^d,\rho)} &= \Big|\Big| \sum_{j\,:\,2^i\lesssim 2^j} \Delta_i u_j \Big|\Big|_{L^\infty(\mathbb{R}^d,\rho)} \\
&\leq \sum_{j\,:\,2^i\lesssim 2^j} ||\Delta_i u_j||_{L^\infty(\mathbb{R}^d,\rho)} \\
&\leq \sum_{j\,:\,2^i\lesssim 2^j} ||u_j||_{L^\infty(\mathbb{R}^d,\rho)} \\
&= \sum_{j\,:\,2^i\lesssim 2^j} \sup_{j\geq -1}\{2^j ||u_j||_{L^\infty(\mathbb{R}^d,\rho)}\} \cdot 2^{-j\alpha} \\
&\lesssim 2^{-i\alpha} \cdot \sup_{j\geq -1}\{2^j ||u_j||_{L^\infty(\mathbb{R}^d,\rho)}\}
\end{aligned}$$

Con esto, concluimos la prueba. □

Con esta serie de lemas podemos demostrar una versión de la estimada de conmutador.

Teorema 2.4.3:

(Estimada de Conmutador): Sea $\alpha \in (0,1)$ y $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tales que $\alpha+\beta+\gamma > 0$ y $\beta+\gamma < 0$, entonces se cumple la cota
$$||C(u,v,z)||_{C^{\alpha+\beta+\gamma}_{\rho_1\rho_2\rho_3}} \lesssim ||u||_{C^{\alpha}_{\rho_1}} \cdot ||v||_{C^{\beta}_{\rho_2}} \cdot ||z||_{C^{\gamma}_{\rho_3}}$$

Demostración. Lo primero que haremos será escribir el conmutador de forma más explícita y estimar los términos que se obtengan de dicha descomposición

$$\begin{aligned}
C(u,v,z) &= ((u \otimes v) \odot z) - u \cdot (v \odot z) \\
&= \sum_{|i-j|\leq 1} \Delta_i(u \otimes v) \cdot \Delta_j z - u \cdot \sum_{|i-j|\leq 1} \Delta_i v \Delta_j z \\
&= \sum_{|i-j|\leq 1} \{\Delta_i(u \otimes v) - u \cdot \Delta_i v\} \cdot \Delta_j z
\end{aligned}$$

y vamos a descomponer $u := S_{\lesssim i}u + S_{\gtrsim i}u$ con $S_{\lesssim i}u := S_{i+N}u$ y $S_{\gtrsim i}u := u - S_{\lesssim i}u$ con N una constante que determinaremos con el siguiente procedimiento: Consideremos los términos $\Delta_i(\Delta_k u \otimes v)$. Luego, al estudiar su soporte espectral vemos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\{\Delta_i(\Delta_k u \otimes v)\} &= \rho_i \cdot \mathcal{F}\{\Delta_k u \otimes v\} \\
&= \rho_1 \cdot \mathcal{F}\Big\{ \sum_{j \geq -1} S_{j-1}\Delta_k u \cdot \Delta_j v \Big\} \\
&= \rho_i \cdot \sum_{j \geq -1} \mathcal{F}\Big\{ \Big(\sum_{s \leq j-2} \Delta_s \Delta_k u \Big) \cdot \Delta_j v \Big\} \\
&= \rho_i \cdot \sum_{j \geq -1} \sum_{s \leq j-2} \mathcal{F}\{\Delta_s \Delta_k u \cdot \Delta_j u\} \\
&= \rho_i \cdot \sum_{j \geq -1} \sum_{s \leq j-2} (\rho_s \cdot \rho_k \cdot \hat{u}) * (\rho_j \hat{v})
\end{aligned}$$

y cada uno de los términos de la suma tiene soporte contenido en $\overline{\mathrm{supp}(\rho_s) \cap \mathrm{supp}(\rho_k) + \mathrm{supp}(\rho_j)} \subset \mathcal{A}$, para cierto anillo. Luego, como ρ_i está fijo, podemos asegurar que existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que $\Delta_i(\Delta_k u \otimes v) = 0$, para todo $k > N$. Sea entonces tal $N \in \mathbb{N}$. Luego, realizamos la descomposición mencionada:

$$\begin{aligned}
C(u, v, z) &= \sum_{|i-j| \leq 1} \{\Delta_i(u \otimes v) - u \cdot \Delta_i v\} \cdot \Delta_j z \\
&= \sum_{|i-j| \leq 1} \{\Delta_i(S_{\lesssim i}u \otimes v) - S_{\lesssim i}u \cdot \Delta_i v\} \cdot \Delta_j z - \sum_{|i-j| \leq 1} S_{\gtrsim i}u \cdot \Delta_i v \cdot \Delta_j z \\
&\equiv C_1(u, v, z) + C_2(u, v, z)
\end{aligned}$$

y demostraremos la estimada al estimar cada uno de los términos obtenidos. La estrategia va a ser utilizar [2.4.3] descomponiendo los términos C_1 y C_2 en sumas de funciones suaves con normas $L^\infty(\mathbb{R}^d, \rho_1\rho_2\rho_3)$ bien estimadas. Comenzamos con C_1: Para cada $i \geq -1$ definimos los términos:

$$A_i := \sum_{j \geq -1} \mathbb{1}_{|i-j| \leq 1} \cdot [\Delta_i(S_{\lesssim i}u \otimes v) - S_{\gtrsim i}u \cdot \Delta_i v] \cdot \Delta_j z$$

Luego, tenemos que $C_1 = \sum_i A_i$ es una suma de funciones suaves con soporte espectral $\mathrm{supp}(\mathcal{F}A_i) \subset 2^i\mathcal{B}$ y además se tiene que

$$\begin{aligned}
||A_i||_{L^\infty(\mathbb{R}^d, \rho_1\rho_2\rho_3)} &= \mathrm{esssup}_{x \in \mathbb{R}^d} \Big| \sum_j \mathbb{1}_{|i-j| \leq 1} \cdot \rho_1(x)\rho_2(x) \cdot [\Delta_i(S_{\lesssim i}u \otimes v) - S_{\gtrsim i}u \cdot \Delta_i v] \cdot \Delta_j z \Big| \\
&\leq \sum_j \mathbb{1}_{|i-j| \leq 1} \cdot ||\Delta_i(S_{\lesssim i}u \otimes v) - S_{\gtrsim i}u \cdot \Delta_i v||_{L^\infty(\mathbb{R}^d, \rho_1\rho_2)} \cdot ||\Delta_j z||_{L^\infty(\mathbb{R}^d, \rho_3)} \\
&\lesssim \sum_j \mathbb{1}_{|i-j| \leq 1} \cdot 2^{-i(\alpha+\beta)} \cdot ||S_{\lesssim i}u||_{C^\alpha_{\rho_1}} \cdot ||v||_{C^\beta_{\rho_2}} \cdot ||z||_{C^\gamma_{\rho_3}} \\
&\lesssim 2^{-i(\alpha+\beta+\gamma)} \cdot ||u||_{C^\alpha_{\rho_1}} \cdot ||v||_{C^\beta_{\rho_2}} \cdot ||z||_{C^\gamma_{\rho_3}}
\end{aligned}$$

en donde utilizamos [2.4.3] en la segunda estimada. Así, por [2.4.3] concluimos entonces que

$$||C_1(u, v, z)||_{C^{\alpha+\beta+\gamma}_{\rho_1\rho_2\rho_3}} \lesssim \sup_{i \geq -1} \{2^{i(\alpha+\beta+\gamma)} \cdot ||A_i||_{L^\infty(\mathbb{R}^d, \rho_1\rho_2\rho_3)}\}$$

$$\lesssim ||u||_{C^{\alpha}_{\rho_1}} \cdot ||v||_{C^{\beta}_{\rho_2}} \cdot ||z||_{C^{\gamma}_{\rho_3}}$$

Ahora seguimos con el término C_2: Escribimos:

$$\begin{aligned} C_2(u,v,z) &= \sum_{|i-j|\leq 1} S_{\gtrsim i} u \cdot \Delta_i v \cdot \Delta_j z \\ &= \sum_{k\geq -1} \Big(\sum_{|i-j|\leq 1} \mathbb{1}_{i\lesssim k} \cdot \Delta_k u \cdot \Delta_i v \cdot \Delta_j z \Big) \end{aligned}$$

y nuevamente tenemos términos de la serie que poseen un soporte espectral en $2^k \cdot \mathcal{B}$. Además, al estimar las normas en L^∞

$$\begin{aligned} \Big|\Big| \sum_{|i-j|\leq 1} \mathbb{1}_{i\lesssim k} \cdot \Delta_k u \cdot \Delta_i v \cdot \Delta_j z \Big|\Big|_{L^\infty(\mathbb{R}^d, \rho_1\rho_2\rho_3)} &= \operatorname{esssup}_{x\in\mathbb{R}^d} \Big| \sum_{|i-j|\leq 1} \mathbb{1}_{i\lesssim k} \rho_1(x)\Delta_k u(x) \cdot \rho_2(x)\Delta_i v(x) \cdot \rho_3(x)\Delta_j z(x) \Big| \\ &\leq \sum_{|i-j|\leq 1} \mathbb{1}_{i\lesssim k} ||\Delta_k u||_{L^\infty(\mathbb{R}^d,\rho_1)} \cdot ||\Delta_i v||_{L^\infty(\mathbb{R}^d,\rho_2)} \cdot ||z||_{L^\infty(\mathbb{R}^d,\rho_3)} \\ &\lesssim \sum_{i\lesssim k} ||\Delta_k u||_{L^\infty(\mathbb{R}^d,\rho_1)} \cdot ||\Delta_i v||_{L^\infty(\mathbb{R}^d,\rho_2)} \cdot ||z||_{L^\infty(\mathbb{R}^d,\rho_3)} \\ &\lesssim 2^{-k\alpha} \cdot ||u||_{C^{\alpha}_{\rho_1}} \cdot \sum_{i\lesssim k} 2^{-i(\beta+\gamma)} \cdot ||v||_{C^{\beta}_{\rho_2}} \cdot ||z||_{C^{\gamma}_{\rho_3}} \\ &\lesssim 2^{-k(\alpha+\beta+\gamma)} ||u||_{C^{\alpha}_{\rho_1}} \cdot ||v||_{C^{\beta}_{\rho_2}} \cdot ||z||_{C^{\gamma}_{\rho_3}} \end{aligned}$$

en donde utilizamos que $\beta + \gamma < 0$ para la estimada de la última línea. Con esto, concluimos por [2.4.3] que

$$\begin{aligned} ||C_2(u,v,z)||^{\alpha+\beta+\gamma}_{C_{\rho_1\rho_2\rho_3}} &\lesssim \sup_{k\geq -1} \{2^{k(\alpha+\beta+\gamma)} \cdot ||A_k||_{L^\infty(\mathbb{R}^d,\rho_1\rho_2\rho_3)}\} \\ &\lesssim ||u||_{C^{\alpha}_{\rho_1}} \cdot ||v||_{C^{\beta}_{\rho_2}} \cdot ||z||_{C^{\gamma}_{\rho_3}} \end{aligned}$$

Juntando ambas estimadas, concluimos la demostración. □

2.5. Regularidad del Ruido Blanco

Como las ecuaciones que estamos interesados en resolver en los espacios de Besov involucran al ruido blanco, es fundamental como primer paso estudiar qué regularidad posee como distribución temperada. Más aún, es necesario verificar en primer lugar que el ruido blanco define efectivamente una distribución temperada aleatoria para siquiera concebir correctamente sus bloques. Vamos a omitir esta demostración en la tesis. Sin embargo, dejamos una excelente referencia en donde no se alude a la teoría (bastante técnica) de espacios nucleares [BHD, 2017] o una versión clásica [Hida, 1980].

Teorema 2.5.1:

Sea ξ un ruido blanco d-dimensional, es decir, ξ es un proceso estocástico gaussiano de media 0 sobre $L^2(\mathbb{R}^d)$ tal que

$$\mathbb{E}[\xi(f) \cdot \xi(g)] = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \cdot g(x) \, d\lambda(x), \quad \forall\, f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$$

Luego, tenemos que ξ admite una versión $\tilde{\xi} \in B^{\alpha}_{p,p}(\mathbb{R}^d, \rho_\lambda)$ para todo $\alpha < -\frac{d}{2}$, $p \in [1, \infty)$ y $\rho_\lambda(x) := (1+|x|)^{-\lambda}$ con $\lambda > 0$.

Demostración. Por [2.4.1] sabemos que $B^{\alpha}_{p_1,q_1}(\mathbb{R}^d, \rho_\lambda) \subseteq B^{\alpha}_{p_2,q_2}(\mathbb{R}^d, \rho_\lambda)$ si $p_1 \leq p_2$ y $q_1 \leq q_2$. Así, si demostramos que $\xi \in B^{\alpha}_{p,p}(\mathbb{R}^d, \rho_\lambda)$ a partir de cierto p^* y para cada $\alpha < -\frac{d}{2}$, entonces concluiriamos para cada $p \in [1, \infty)$.

Lo que vamos a probar es que

$$\mathbb{E}[||\xi||^p_{B^{\alpha}_{p,p}(\mathbb{R}^d,\rho_\lambda)}] < \infty, \quad \text{para todo } \ p \geq p^* \in [1, \infty)$$

Luego, tendríamos que $\xi \overset{c.s.}{\in} B^{\alpha}_{p,p}(\mathbb{R}^d, \rho_\lambda)$ para cada $p \geq p^*$, y podemos armar una versión de ξ que se encuentre en los Besovs. Para demostrar esta propiedad, notamos que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[||\xi||^p_{B^{\alpha}_{p,p}(\mathbb{R}^d,\rho_\lambda)}] &= \mathbb{E}\Big[\sum_{j\geq -1} 2^{jp\alpha} \cdot ||\Delta_j \xi||^p_{L^p(\mathbb{R}^d,\rho_\lambda)}\Big] = \sum_{j\geq -1} 2^{jp\alpha} \cdot \mathbb{E}[||\Delta_j\xi||^p_{L^p(\mathbb{R}^d,\rho_\lambda)}] \\
&= \sum_{j\geq -1} 2^{jp\alpha}\mathbb{E}\Big[\int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\Delta_j\xi(x)|^p}{(1+|x|)^{\lambda p}}\,dx\Big] \\
&= \sum_{j\geq -1} 2^{jp\alpha} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\mathbb{E}[|\Delta_j\xi(x)|^p]}{(1+|x|)^{\lambda p}}\,dx \\
&\overset{p\lambda > d}{\lesssim} \sum_{j\geq -1} 2^{jp\alpha} \cdot \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \mathbb{E}[|\Delta_j\xi(x)|^p] \\
&\leq \sum_{j\geq -1} 2^{jp\alpha} \cdot \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \mathbb{E}^{p/2}[|\Delta_j\xi(x)|^2]
\end{aligned}$$

en donde usamos que $\Delta_j\xi(x) = K_j * \xi(x) = \int_{\mathbb{R}^d} K_j(x-y)\,\xi(dy)$ es la integral estocástica con respecto al ruido blanco. Luego, es Gaussiana para cada $x \in \mathbb{R}^d$ y podemos usar [**??**] en la última estimada. Ahora, la idea es estimar este segundo momento de una Gaussiana: Tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[|\Delta_j\xi(x)|^2] &= \mathbb{E}\Big[\Big|\int_{\mathbb{R}^d} K_j(x-y)\,\xi(dy)\Big|^2\Big] \overset{\text{Ito}}{=} \int_{\mathbb{R}^d} |K_j(x-y)|^2\,dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} |K_j(y)|^2\,dy = 2^{2jd} \cdot \int_{\mathbb{R}^d} |K_0(2^j y)|^2\,dy \\
&= 2^{2jd} \cdot 2^{-jd} \cdot \int_{\mathbb{R}^d} |K_0(y)|^2\,dy \\
&\lesssim 2^{jd}
\end{aligned}$$

y con esto concluimos que $\sup_{x\in\mathbb{R}^d} \mathbb{E}[|\Delta_j\xi(x)|^2] \lesssim 2^{jd}$. Juntando esta estimada con la obtenida anteriormente deducimos que

$$\mathbb{E}[||\xi||^p_{B^{\alpha}_{p,p}(\mathbb{R}^d,\rho_\lambda)}] \lesssim \sum_{j\geq -1} 2^{jp\alpha} \cdot 2^{\frac{jdp}{2}} = \sum_{j\geq -1} 2^{jp(\alpha+\frac{d}{2})}$$

y concluimos que para todo $p \geq p^*$ con p^* tal que $p *> \frac{d}{\lambda}$ y con $\alpha < -\frac{d}{2}$ se tiene que $\xi \overset{c.s.}{\in} B^{\alpha}_{p,p}(\mathbb{R}^d, \rho_\lambda)$. Con esto se concluye la prueba. □

Comentario: En general, el ruido blanco se entiende como distribución temperada bajo su integral de Ito: Dada $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ definimos el funcional

$$\xi(\varphi) := \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)\, \xi(dx)$$

2.6. Espacios Parabólicos y estimadas de Schauder

Los espacios de Besov nos permiten dar sentido al producto de distribuciones en la variable espacial. Sin embargo, las ecuaciones diferenciales estocásticas como la KPZ poseen además una dependencia temporal, lo cual obliga a tener que considerar adicionalmente un grado de regularidad temporal. Los espacios en los cuales trabajamos estas nociones son los espacios parabólicos.

Estos espacios se usan en la solución de ecuaciones paracontroladas en el Toro. El objetivo de estos espacios es captar las regularidades tanto en espacio como en tiempo de las soluciones.

2.6.1. Versión sin peso

Definición 2.6.1:

Dados X un espacio de Banach, $T > 0$ y $\gamma \in [0, 1]$, definimos el espacio de funciones continuas

$$C_T^\gamma X := \{u : X \to \mathbb{R} \ : \ ||u||_{C_T^\gamma X} < \infty\}$$

donde $||u||_{C_T^\gamma X} := \sup_{t\in[0,T]} ||u(t)||_X + \sup_{0\le s<t\le T} \frac{||u(t)-u(s)||_X}{|t-s|^\gamma}$. El caso cuando $\gamma = 0$, es el caso de la norma supremo y denotamos al espacio por $C_T X$.

(Comentario): En particular, para $\gamma \in (0, 1]$ tenemos que la condición sobre la norma implica automáticamente que las funciones son γ-Hölder, para $\gamma = 1$, tenemos continuidad y para $\gamma = 0$ a las funciones acotadas.

(Comentario:) Primero notemos que para $\gamma \in (0, 1]$ tenemos la contención $C_T^\gamma X \subseteq C_T X$. En efecto, dada $u \in C_T^\gamma X$ tenemos

$$\begin{aligned} ||u(t)||_X &\le ||u(t) - u(0)||_X + ||u(0)||_X \\ &\le C \cdot |t-0|^\gamma + ||u(0)||_X \\ &\le C \cdot T^\gamma + ||u(0)||_X, \quad \forall\, t \in [0, T] \end{aligned}$$

En nuestro caso $X = C^\alpha$ para alguna regularidad α. En particular, vamos a considerar $\alpha > 0$ para definir los espacios parabólicos.

Definición 2.6.2:

Dado $\alpha \in (0, 2]$ y $T > 0$ definimos

$$\mathcal{L}_T^\alpha := C_T^{\alpha/2} L^\infty \cap C_T C^\alpha$$

Aquí α aparecer tanto en la regularidad Hölder como en la regularidad espacial. Dotamos a este espacio con la semi-norma $||u||_{\mathcal{L}_T^\alpha} := ||u||_{C_T^{\alpha/2}L^\infty} + ||u||_{C_T\mathcal{C}^\alpha}$ Además, definimos los espacios parabólicos sobre todo $\mathbb{R}_+$ como

$$\mathcal{L}^\alpha := C_{\text{loc}}^{\alpha/2}(\mathbb{R}_+, L^\infty) \cap C(\mathbb{R}_+, \mathcal{C}^\alpha)$$

donde el localmente debe entenderse como Hölder en compactos.

Comentario: En el caso en donde consideramos $T < \infty$, tenemos por el comentario de antes y los embedding de Besov que $\mathcal{L}_T^\alpha = C_T^{\alpha/2}L^\infty$. La definición como intersección es no trivial en el caso con dominio en todo el espacio. Por ejemplo, podemos considerar $u \in \mathcal{C}^\alpha \subseteq L^\infty$ y la aplicación $u(t) := t^2 \cdot u$, para cada $t \in \mathbb{R}_+$. Luego, tenemos que sobre K un compacto, $|t+s|, |t-s| \leq 2 \cdot \text{diam}(K)$y así para $\beta \in (0, 1)$

$$\begin{aligned} ||u(t) - u(s)||_{\mathcal{C}^\alpha} &= |t^2 - s^2| \cdot ||u||_{\mathcal{C}^\alpha} \\ &= (||u||_{\mathcal{C}} \cdot |t+s| \cdot |t-s|^{1-\beta}) \cdot |t-s|^\beta \\ &\leq \left[(2 \cdot \text{diam}(K))^{2-\beta} \cdot ||u||_{\mathcal{C}^\alpha}\right] \cdot |t-s|^\beta \\ &\equiv C_K \cdot |t-s|^\beta \end{aligned}$$

Con esto, hemos demostrado que $u(\cdot) \in C_{\text{loc}}^{\alpha/2}(\mathbb{R}_+, L^\infty)$, pero claramente $u(\cdot) \notin C(\mathbb{R}_+, \mathcal{C}^\alpha)$. Un argumento análogo prueba que $u(t) := t^\beta \cdot u$ satisface las mismas propiedades.

2.6.2. Versión con peso

En el caso con peso vamos a suponer que los espacios de Banach pueden depender del tiempo. Así, para un borde derecho de intervalo $T_r \geq 0$ consideramos una familia creciente de espacios de Banach $X = (X(s))_{s\in[0,T_r]}$.

Ejemplo 2.6.1:

Consideremos los espacios $X(s) := \mathcal{C}_{e(l+s)}^\alpha(\mathbb{R}^d)$ donde $e(l+s)(x) := e^{-(l+s)|x|^\delta}$ con $l \in \mathbb{R}$, $s \geq 0$ y $\delta \in (0, 1)$. Veamos que efectivamente definen una familia creciente de espacios de Banach: Primero, no es dificil probar que si $\rho_1, \rho_2 \in \mathcal{M}(\omega)$ son tales que $\rho_1 \lesssim \rho_2$, entonces $\mathcal{C}_{\rho_2}^\alpha(\mathbb{R}^d) \subseteq \mathcal{C}_{\rho_1}^\alpha(\mathbb{R}^d)$. Así, dada una sucesión decreciente de pesos, los espacios $\mathcal{C}_\rho^\alpha(\mathbb{R}^d)$ son crecientes. Un ejemplo de una aplicación decreciente es precisamente el caso de pesos exponenciales.

Con esto, vamos a definir los espacios parabólicos en el contexto con peso.

Definición 2.6.3:

Dado $\beta \geq 0$ y $(X(s))_{s\in[T_\ell,T_r]}$ familia creciente de espacios de Banach tenemos que

$$\mathcal{M}^\beta X([T_\ell, T_r]) := \{f : [T_\ell, T_r] \to \mathcal{S}'_\omega(\mathbb{R}^d) \mid t \in [T_\ell, T_r] \to t^\beta f(t) \in X(T_r) \text{ es continua } \wedge ||f||_{\mathcal{M}^\beta(X)} < \infty\}$$

donde $||f||_{\mathcal{M}^\beta(X)} := \sup_{T_\ell \leq t \leq T_r} ||t^\beta f(t)||_{X(t)}$ y para el caso $\beta = 0$ denotamos este espacio por $CX([T_\ell, T_r])$.

Los espacios $\mathcal{M}^\beta$ representan aquellas funciones f con codominio en las ultradistribuciones (no necesariamente continuas) que al multiplicar por $\mathbf{t}^\beta$ se obtiene una función continua con codominio en la familia $(X(s))_{s\in[T_\ell,T_r]}$ y que además las normas de sus evaluaciones son uniformemente acotadas.

El caso $\beta = 0$ refiere a que la misma función $f : [T_\ell, T_r] \to \mathcal{S}'_\omega(\mathbb{R}^d)$ tiene la estructura descrita.

Definición 2.6.4:

Dado $\alpha \in (0,1)$ y $f : [T_\ell, T_r] \to (X(s))_{s\in[T_\ell,T_r]}$ definimos la "norma Hölder" como

$$||f||_{C^\alpha X([T_\ell,T_r])} := \sup_{T_\ell<t\leq T_r} ||f(t)||_{X(t)} + \sup_{T_\ell<s,t\leq T_r} \frac{||f(t)-f(s)||_{X(t\vee s)}}{|t-s|^\alpha}$$

Para $\alpha = 0$, la norma representa la del supremo. Ahora podemos definir los espacios parabólicos, que en el contexto con peso son espacios de Hölder parabolicamente escalados con respecto a un peso posiblemente dependiente del tiempo.

Definición 2.6.5:

Sean $\beta \geq 0$, $\alpha \in (0,2)$ y $0 \leq T_\ell \leq T_r$. Definimos los espacios parabólicos como

$$\mathcal{L}^{\beta,\alpha}_\rho([T_\ell,T_r]) := \{ f : [T_\ell,T_r] \to \mathcal{S}'_\omega(\mathbb{R}^d) \ : \ ||f||_{\mathcal{L}^{\beta,\alpha}_\rho} < \infty \}$$

donde $||f||_{\mathcal{L}^{\beta,\alpha}_\rho} := ||t \to t^\beta f(t)||_{C^{\alpha/2}L^\infty_\rho([T_\ell,T_r])} + ||f||_{\mathcal{M}^\beta C^\alpha_\rho([T_\ell,T_r])}$

Notemos que la definición de norma en $\mathcal{L}^{\beta,\alpha}_\rho$ implica en particular que $t^\beta \cdot f(t) \in C^\alpha_{\rho(t)}(\mathbb{R}^d) \subseteq L^\infty(\mathbb{R}^d, \rho(t))$. Así, un mapeo de ultradistribuciones está en un espacio parabólico $\mathcal{L}^{\beta,\alpha}_\rho$ si al multiplicar por t^β la aplicación mapea a $C^\alpha_{\rho(\cdot)}(\mathbb{R}^d)$, es uniformemente acotada y $\frac{\alpha}{2}$-Hölder en tiempo.

2.6.3. Propiedades de los espacios parabólicos

Como en los espacios parabólicos es en donde vamos a definir la estructura paracontrolada, va a ser importante tener algunas cotas sobre el semigrupo del calor y la forma mild, que representa la manera en la cual estudiaremos las soluciones de la ecuación de KPZ.

El primer resultado establece en esencia que cualquier función en $\mathcal{L}^{\beta,\alpha}_\rho$ con $\alpha \in (1,2)$, tiene su derivada en el espacio parabólico con todos los parámetros iguales salvo $\alpha \in (0,1)$.

Lema 2.6.1:

Para $\alpha \in (0,1)$ y una función $\rho : \mathbb{R}_+ \to \rho(\omega)$ de pesos decrecientes. Luego, tenemos que

$$||\partial_x f||_{\mathcal{L}^{\beta,\alpha}_\rho} \lesssim ||f||_{\mathcal{L}^{\beta,\alpha+1}_\rho}$$

Demostración. Una demostración puede encontrarse en ([PR, 2019], Lema 2.11). □

Ahora pasamos al estudio de las estimadas del semigrupo del calor en funciones de estos espacios junto con la formulación Mild. En el siguiente Teorema $P_t f := p_t * f$, donde $p_t(x) := (4\pi t)^{-\frac{d}{2}} \cdot e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$

es el operador del calor y $V_{T_\ell}(f)(t) := \int_{T_\ell}^t P_{t-s}f(s)\,ds$ la formualción mild.

Teorema 2.6.1:

Sean $\alpha \in (0,2)$ y $\rho \in \mathcal{M}(\omega)$. Luego, tenemos las estimadas

1. Para cualquier $\gamma \in \mathbb{R}$ que cumpla que $\beta \equiv \frac{(\alpha+\gamma)}{2} \in [0,1)$, encontramos que

$$||P.f||_{\mathcal{L}^{\beta,\alpha}_\rho} \lesssim ||f||_{C^{-\gamma}_\rho}$$

2. Si además fijamos $a \geq 0$ tal que $\alpha + 2\frac{a}{\delta} \in (0,2)$ y $\beta + \frac{a}{\delta} \in [0,1)$ encontramos que

$$||V_{T_\ell}(f)||_{\mathcal{L}^{\beta,\alpha}_{e(l+t)}([T_\ell,T_r])} \lesssim_{T_h} ||f||_{\mathcal{M}^\beta C^{\alpha+2\frac{a}{\delta}-2}_{e(l+t)p(a)}([T_\ell,T_r])}$$

y la cota es uniforme sobre todo $0 \leq T_\ell < T_r \leq T_h$.

Un último resultado que será clave es una estimada de productos vía integración de Young. Los detalles pueden revisarse en [PR, 2019].

Lema 2.6.2:

Sean ρ_i con $i = 1,2$ pesos decrecientes dependientes del tiempo. Sean también $f \in \mathcal{L}^{\beta,\alpha}_{\rho_1}$ y $g \in \mathcal{L}^\gamma_\rho$ con $\beta \in [0,1)$ y $\alpha,\gamma \in (0,2)$. Si tenemos que $\alpha+\gamma-2>0$, entonces tenemos que

$$f \cdot \partial_t g \in \mathcal{L}\mathcal{L}^{\beta,\alpha+\gamma}_{\rho_1\cdot\rho_2}$$

y se cumplen las siguientes estimadas:

$$||V(f\cdot\partial_t g)||_{\mathcal{L}^{\beta,\alpha+\gamma-\varepsilon}_{\rho_1\cdot\rho_2}([0,T_h])} \lesssim_{T_h} ||f||_{\mathcal{L}^{\beta,\alpha}_{\rho_1}([0,T_h])} \cdot ||g||_{\mathcal{L}^\gamma_{\rho_2}([0,T_h])}$$

$$||V(f\cdot\partial_t g)||_{\mathcal{L}^{\beta,\alpha+\gamma-2\alpha/\delta-\varepsilon}_{e(l+t)}([T_\ell,T_r])} \lesssim_{T_h} ||f||_{\mathcal{L}^{\beta,\alpha}_{e(l+t)}([T_\ell,T_r])} \cdot ||g||_{\mathcal{L}^\gamma_{p(a)}([T_\ell,T_r])}$$

para todo $\varepsilon > 0$ y $0 \leq T_\ell \leq T_r \leq T_h$.

2.6.4. Paraproducto Modificado

Con el fin de extender la noción de paraproducto de Bony, definido en espacios de Besov representando la variable espacial, damos una versión modificada del paraproducto adaptada a los espacios paraóblicos, que será útil en nuestro análisis de la KPZ.

Definición 2.6.6:

Dados X un espacio de Banach y $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ una función suave a soporte compacto tal que $\mathrm{supp}(\varphi) \subset [0,\infty)$ y $\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,dx = 1$, definimos para cada $i \geq 0$, el operador

$$Q_i : f \in C(\mathbb{R}_{\geq 0}, X) \to C(\mathbb{R}, X)$$

tal que

$$Q_i f(t) := \int_{\mathbb{R}} 2^{2id} \cdot \varphi(2^{2i} \cdot [t-s]) \cdot f(s \vee 0)\, ds = \int_{-\infty}^{t} 2^{2id} \cdot \varphi(2^{2i} \cdot [t-s]) \cdot f(s \vee 0)\, ds$$

Con estos operadores podemos definir el paraproducto modificado.

Definición 2.6.7:

Definimos el paraproducto modificado por

$$f \prec g := \sum_i (S_{i-1} Q_i f) \cdot \Delta_i g$$

y este nuevo paraproducto hereda varias propiedades. Algunas son esencialmente las mismas que las estimadas de Bony, mientras que otras relacionan esta versión modificada con la de Bony o con el operador del calor.

Lema 2.6.3:

Sean $\alpha \in \mathbb{R}$, $\gamma < 0$, $\beta \geq 0$. Supongamos también dos mapeos de pesos (posiblemente dependientes del tiempo) $\rho_i : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathcal{M}(\omega)$, para $i = 1, 2$ que es puntualmente decreciente en tiempo y definimos $\rho(t) := \rho_1(t) \cdot \rho_2(t)$. Luego,

$$t^\beta \cdot ||f \prec g(t)||_{C^\alpha_{\rho(t)}} \lesssim ||f||_{\mathcal{M}^\beta L^\infty_{\rho_1}([0,t])} \cdot ||g(t)||_{C^\alpha_{\rho_2(t)}}$$

$$t^\beta \cdot ||f \prec g(t)||_{C^{\alpha+\gamma}_{\rho(t)}} \lesssim ||f||_{\mathcal{M}^\beta C^\gamma_{\rho_1}([0,t])} \cdot ||g(t)||_{C^\alpha_{\rho_2(t)}}$$

Además, para $\alpha \in (0, 2)$ tenemos la siguiente estimada

$$||f \prec g||_{\mathcal{L}^{\beta,\alpha}_\rho} \lesssim ||f||_{\mathcal{L}^{\beta,\delta}_{\rho_1}} \cdot \left(||g||_{CC^\alpha_{\rho_2}} + ||\mathcal{L}g||_{CC^{\alpha-2}_{\rho_2}} \right)$$

válida para cada $\delta > 0$. Finalmente, tenemos los siguientes resultados de conmutación:

$$t^\beta \cdot ||(\mathcal{L}(f \prec g) - f \prec (\mathcal{L}g))(t)||_{C^{\alpha+\gamma-2}_{\rho(t)}} \lesssim ||f||_{\mathcal{L}^{\beta,\gamma}_{\rho_1}([0,t])} \cdot ||g(t)||_{C^\alpha_{\rho_2(t)}}$$

$$t^\beta \cdot ||(f \prec g - f \otimes g)(t)||_{C^{\alpha+\gamma}_{\rho(t)}} \lesssim ||f||_{\mathcal{L}^{\beta,\gamma}_{\rho_1}([0,t])} \cdot ||g(t)||_{C^\alpha_{\rho_2(t)}}$$

Demostración. Una demostración de estos hechos puede encontrarse en ([MP, 2019], Lemas 4.7 - 4.9). □

2.7. Exponencial y Logaritmo sobre espacios con peso

En esta sección incluimos los resultados de regularidad que poseen los mapeos exponencial y logaritmo sobre espacios de Hölder con peso.

Lema 2.7.1:

Sea $\alpha \in (0,2)\backslash\{1\}$ y $R, \hat{l} \geq 0$. Luego, existe un $l = l(R) \geq 0$ tal que la función exponencial cumple la siguiente propiedad

$$\operatorname{Exp} : \{f \in C^{\alpha}_{e(\hat{l})}(\mathbb{R}^d) \ : \ ||f||_{\infty,p(\delta)} \leq R\} \longrightarrow C^{\alpha}_{e(l)}(\mathbb{R}^d)$$

Además, el mapeo es localmente Lipschitz, es decir, para cualesquiera f, g en el dominio de arriba tales que

$$||f||_{\alpha,e(\hat{l})}, ||g||_{\alpha,e(\hat{l})} \leq M$$

Podemos estimar

$$||\operatorname{Exp}(f) - \operatorname{Exp}(g)||_{\alpha,e(l)} \lesssim_{M,R} ||f-g||_{\alpha,e(\hat{l})}$$

Demostración. La demostración puede revisarse en ([PR, 2019], Lema A.1). □

De igual forma, puede demostrarse un resultado análogo en los espacios parabólicos.

Lema 2.7.2:

Sea $\alpha \in (0,2)\backslash\{1\}$ y $R, \hat{l} \geq 0$. Luego, existe un $l = l(R) \geq 0$ tal que la función exponencial cumple la siguiente propiedad

$$\operatorname{Exp} : \{f \in \mathcal{L}^{\alpha}_{e(\hat{l})}(\mathbb{R}^d) \ : \ \sup_{0\leq t\leq T} ||f(t)||_{\infty,p(\delta)} \leq R\} \longrightarrow \mathcal{L}^{\alpha}_{e(l)}(\mathbb{R}^d)$$

Además, el mapeo es localmente Lipschitz, es decir, para cualesquiera f, g en el dominio de arriba tales que

$$||f||_{\mathcal{L}^{\alpha}_{e(\hat{l})}}, ||g||_{\mathcal{L}^{\alpha}_{e(\hat{l})}} \leq M$$

Podemos estimar

$$||\operatorname{Exp}(f) - \operatorname{Exp}(g)||_{\mathcal{L}^{\alpha}_{e(l)}} \lesssim_{M,R} ||f-g||_{\mathcal{L}^{\alpha}_{e(\hat{l})}}$$

y concluimos la sección con la versión para el logaritmo. Nuevamente, la demostración puede revisarse en ([PR, 2019], Lema A.3).

Lema 2.7.3:

Sea $\alpha \in (0,2)\backslash\{1\}$ y $r, C, \hat{l} \geq 0$. Luego, existe un $l = l(r) \geq 0$ tal que el mapeo logaritmo se define como

$$\log : \mathcal{A} := \{f \in \mathcal{L}^{\alpha}_{e(\hat{l})} \ : \ \inf_{0\leq t\leq T} f(t,x) \geq C \cdot e(-x)(x)\} \longrightarrow \mathcal{L}^{\alpha}_{e(l)}$$

Además, el mapeo es localmente Lipschitz, es decir, para f, g en el conjunto de arriba tales que

$$||f||_{\mathcal{L}^{\alpha}_{e(\hat{l})}}, ||g||_{\mathcal{L}^{\alpha}_{e(\hat{l})}} \leq M$$

podemos estimar

$$||\log(f) - \log(g)||_{\mathcal{L}^{\alpha}_{e(l)}} \lesssim_{M,r} ||f-g||_{\mathcal{L}^{\alpha}_{e(\hat{l})}}$$

Demostración. Incluimos esta demostración para mostrar que estos lemas son independientes de considerar dimensión 1 como en [PR, 2019]. En efecto, notamos primero que por el resultado de espacios de Besov [2.4.1], basta con que acotemos las normas Hölder en espacio. La dependencia temporal la omitimos al ser muy similar. Además, notamos que basta con demostrar la propidad de Lipschitz local, pues considerando $g = 1$ deducimos el codominio.

Como $\alpha \in (0,2)\setminus\{1\}$, tenemos que $\lfloor\alpha\rfloor \in \{0,1\}$ y las derivadas que hay que estudiar son a lo más hasta de primer orden. Para ello, primero notamos que dadas $f, g \in \mathcal{A}$, si consideramos ξ tal que $\xi \geq f(t,x) \wedge g(t,x)$, entonces

$$\frac{1}{\xi} \lesssim_M e(r)(x)$$

Esta cota nos permite acotar la derivada del logaritmo en el Teorema del valor medio. En efecto, tenemos que fijando t

$$\begin{aligned}
|\log f(t,x) - \log g(t,x)| &\leq \frac{1}{\xi} \cdot |f(t,x) - g(t,x)| \\
&\lesssim_M e(r)(x) \cdot |f(t,x) - g(t,x)| \\
&\leq e(\ell)(x) \cdot e(-\hat{\ell})(x) \cdot |f(t,x) - g(t,x)|
\end{aligned}$$

en donde asumimos $\ell \geq \hat{\ell} + r$ para la última estimada. Además, la estimada es uniforme en el tiempo. De ste hecho y tomando supremo esencial, concluimos la cota para el término con derivada de orden 0.

Para las derivadas de orden 1, vamos a dividir el argumento entre que $\alpha \in (0,1)$ y $\alpha \in (1,2)$. Si fijamos una coordenada x_i con $i \in \{1,2,3\}$ y suponemos que $\alpha \in (1,2)$ vemos que

$$\begin{aligned}
||\partial_{x_i} \log f(t,\cdot) - \partial_{x_i} \log g(t,\cdot)||_{L^\infty(\mathbb{R}^d, e(\ell))} &= \left|\left| \frac{\partial_{x_i} f}{f} - \frac{\partial_{x_i} g}{g} \right|\right|_{L^\infty(\mathbb{R}^d, e(\ell))} \\
&\leq \left|\left| \, \left|\frac{1}{f}\right| \cdot |\partial_{x_i} f - \partial_{x_i} g| + |\partial_{x_i} g| \cdot \left|\frac{1}{fg}\right| \cdot |f - g| \, \right|\right|_{L^\infty(\mathbb{R}^d, e(\ell))} \\
&\lesssim_M ||f - g||_{\alpha, e(\hat{\ell})}
\end{aligned}$$

siempre que escogamos un ℓ los suficientemente grande. El caso para $\alpha \in (0,1)$ es análogo a ([PR, 2019], Lema A.3). Como la cota es válida en cada derivada de orden 1, concluimos la prueba. □

Capítulo 3

Ecuación de KPZ Paracontrolada Tridimensional

Este capítulo contiene los resultados referentes a la solución paracontrolada de la KPZ sobre todo el espacio (en $\mathbb{R}^3$). Las técnicas paracontroladas fueron introducidas en [GP, 2015] y desde entonces han demostrado tener excelentes resultados en el avance de la compresión de ciertas ecuaciones singulares ([GP, 2017], [CC, 2018], [KP, 2023], [Perkowski, 2020]) son algunas referencias al respecto en el caso donde el dominio considerado es compacto. El alcance de las técnicas paracontroladas a ecuaciones singulares definidas sobre todo el espacio ha sido recientemente desarrollado en los trabajos ([MP, 2019], [PR, 2019]), permitiendo la extensión de la teoría a estos problemas con el costo de tener que trabajar todo sobre espacios de Besov con peso. En particular, y hasta donde llega el conocimiento del autor, el caso de la KPZ ha sido explorado en detalle únicamente en $\mathbb{R}$.

La idea esencial detras de las técnicas paracontroladas es permitir definir un conjunto de distribuciones en donde la operación no lineal presente en la ecuación singular de interés sea continua en dicho espacio. De esta manera, la idea de interpretar las soluciones vía un límite cuando $\varepsilon \to 0$ de las soluciones en el caso de ruido suavizado tiene chances de funcionar. Este conjunto será el de aquellas distribuciones que puedan descomponerse en una parte muy irregular,que depende esencialmente del ruido blanco y una parte más regular, la cual tiene una estructura de paraproducto. Es esta última descomposición la que permite volver continua a la no-linealidad.

En este capítulo de la tesis, utilizamos estas ideas para determinar un Teorema de existencia y unicidad paracontrolado de la KPZ con ruido blanco espacial sobre todo $\mathbb{R}^3$. Para ello, primero debemos determinar con más propiedad que tipo de "estructura paracontrolada" debería satisfacer la solución de la KPZ. En este desarrollo, veremos que necesitaremos asumir ciertas regularidades de algunos procesos a partir del ruido blanco. Al conjunto de dichos procesos se los suele llamar en la literatura *data estocástica* y veremos más adelante que será necesario estudiarla en detalle si queremos realmente establecer existencia y unicidad de la ecuación de KPZ.

3.1. Deducción del Ansatz paracontrolado

En esta sección vamos a deducir el ansatz paracontrolado de la KPZ con ruido blanco espacial dada por

$$\partial_t h = \Delta h + |\nabla h|^2 + \xi \quad ; \quad h(0,\cdot) = h_0(\cdot) \tag{3.1}$$

donde la condición inicial la dejamos sin detallar por el momento. Para ello, la estrategia será la siguiente: Como esperamos que la solución, aplicandole el operador del calor, herede la regularidad del peor término (el ruido blanco en este caso con regularidad $\theta < -\frac{3}{2}$ por [2.5]), la idea es restar ese término y esperar que el nuevo término tenga, formalmente, una mejor regularidad.

Definimos Z tal que $\mathcal{L}Z = \xi$ como solución mild. Luego, Z poseería una regularidad (en espacio) de $\theta + 2$ (para $d = 3$, $\frac{1}{2}$-). Definiendo $h^{\geq 1} := h - Z$ y obtenemos la ecuación:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}h^{\geq 1} &= \mathcal{L}h - \mathcal{L}Z \\ &= |\nabla h|^2 = \langle \nabla h^{\geq 1} + \nabla Z, \nabla h^{\geq 1} + \nabla Z \rangle \\ &= |\nabla h^{\geq 1}|^2 + 2\nabla h^{\geq 1} \cdot \nabla Z + |\nabla Z|^2 \end{aligned}$$

de donde deduciríamos que la solución (mild) $h^{\geq 1}$ tendría la forma

$$h^{\geq 1} = P_t h_0 + \mathcal{I}(|\nabla h^{\geq 1}|^2) + 2\mathcal{I}(\nabla h^{\geq 1} \cdot \nabla Z) + \mathcal{I}(|\nabla Z|^2)$$

Veamos que efectivamente hubo ganancia de regularidad. Para ello, utilizaremos las estimadas de Bony [2.4.2], las cuales nos serán útiles para (por el momento adivinar) la regularidad del término $\mathcal{I}(\langle \nabla Z, \nabla Z \rangle)$,de donde se seguiría el siguiente análisis sobre la regularidad de Z: Como Z tendría regularidad $\theta + 2$ (en $d = 3$, sería $\frac{1}{2}-$), tendríamos que $\partial_{x_\beta} Z$ tendría regularidad $\theta+1$ (en $d = 3$, sería $-\frac{1}{2}-$). Luego, el producto $\partial_{x_\beta} Z \cdot \partial_{x_\beta} Z$ no es clásico y podemos adivinar su regularidad vía los paraproductos. Como en este caso solo está $\partial_{x_\beta} Z \circledcirc \partial_{x_\beta} Z$ y hay un término con regularidad negativa, tenemos que su regularidad debería ser $2\theta + 2$ (en $d = 3$, sería de $-1-$). Así, el término menos regular para $h^{\geq 1}$ sería $|\nabla Z|^2$ cuya regularidad esperada es $2\theta + 2$ y deducimos que $h^{\geq 1}$ debería tener una regularidad esperada de $2\theta + 4 > \theta + 2$, es decir, el término obtenido al quitar el ruido es efectivamente más regular.

Lo que haremos ahora es continuar con esta metodología con la esperanza de que eventualmente se alcance una ecuación donde todos los productos tengan regularidad dada por las estimadas de Bony (y por ende, que sean continuos). Definimos entonces $h^{\geq 2} := h - Z - Z^{\vee}$, donde $Z^{\vee}$ es tal que $Z^{\vee} := \mathcal{I}(\nabla Z \cdot \nabla Z)$, es decir, la solución mild a $\mathcal{L}Z^{\vee} = |\nabla Z|^2$. Con esto, $h^{\geq 2}$ debe resolver formalmente la ecuación

$$\begin{aligned} \mathcal{L}h^{\geq 2} &= |\nabla h|^2 + \xi - \xi - |\nabla Z|^2 \\ &= \langle \nabla h^{\geq 2} + \nabla Z + \nabla Z^{\vee}, \nabla h^{\geq 2} + \nabla Z + \nabla Z^{\vee} \rangle - |\nabla Z|^2 \\ &= |\nabla h^{\geq 2}|^2 + |\nabla Z^{\vee}|^2 + 2\nabla Z \cdot \nabla Z^{\vee} + 2\nabla h^{\geq 2} \cdot \nabla Z + 2\nabla h^{\geq 2} \cdot \nabla Z^{\vee} \end{aligned}$$

y volvemos a analizar la regularidad de los términos estocásticos obtenidos. Por un lado, tenemos que $\partial_{x_\beta} Z^{\vee}$ tendría regularidad $(2\theta+3)-$ (en $d = 3$, sería $0-$). Luego, renormalizando el producto $\nabla Z^{\vee} \cdot \nabla Z^{\vee}$ dado que no es clásico, esperaríamos que su regularidad venga dada por la del paraproducto, que sería $(4\theta + 6)-$ (en $d = 3$, sería $0-$). Por otro lado, como tenemos que $\partial_{x_\beta} Z$ tendría regularidad $(\theta + 1)-$ (en $d = 3$, sería $-\frac{1}{2}-$) y $\partial_{x_\beta} Z^{\vee}$ tendría $(2\theta + 3)-$ (en $d = 3$, sería $0-$), deducimos (como el producto no es clásico) que su regularidad luego de una renormalización vendría dada por $(3\theta + 4)-$ (en $d = 3$, sería $-\frac{1}{2}-$). Así, el término con peor regularidad de la ecuación sería $\nabla Z \cdot \nabla Z^{\vee}$.

De este desarrollo deducimos que $h^{\geq 2}$ debería tener regularidad $(3\theta + 6)-$ (en $d = 3$, sería $\frac{3}{2}-$). En particular, $\partial_{x_\beta} h^{\geq 2}$ tendría regularidad $(3\theta + 5)-$ (en $d = 3$, sería $\frac{1}{2}-$), lo que implica que $|\nabla h^{\geq 2}|^2$ es un producto clásico. Como $\partial_{x_\beta} Z^{\vee}$ tendría regulariadad $(2\theta+3)-$ (en $d=3$, sería $0-$) el producto $\nabla h^{\geq 2}\cdot\nabla Z^{\vee}$ también es clásico. Sin embargo, el producto $\nabla h^{\geq 2}\cdot\nabla Z$ aún no lo es, pues $\partial_{x_\beta} Z$ tendría regularidad $(\theta+1)-$ (en $d=3$, sería $-\frac{1}{2}-$). Este último término buscamos reemplazarlo por uno bien definido en el término resonante. El resto de términos que ya están bien definidos los dejamos en la expansión.

Definimos $h^{\geq 3} := h^{\geq 2} - 2Z^{\overset{\vee}{\vee}}$ donde $Z^{\overset{\vee}{\vee}}$ es tal que $\mathcal{L}Z^{\overset{\vee}{\vee}} = \nabla Z\cdot\nabla Z^{\vee}$. Luego, tenemos que satisface la ecuación

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}h^{\geq 3} &= \mathcal{L}h^{\geq 2} - 2\nabla Z\cdot\nabla Z^{\vee}\\
&= |\nabla h^{\geq 2}|^2 + |\nabla Z^{\vee}|^2 + 2\nabla Z\cdot\nabla Z^{\vee} + 2\nabla h^{\geq 2}\cdot\nabla Z + 2\nabla h^{\geq 2}\cdot\nabla Z^{\vee} - 2\nabla Z\cdot\nabla Z^{\vee}\\
&= |\nabla h^{\geq 2}|^2 + |\nabla Z^{\vee}|^2 + 2\nabla h^{\geq 2}\cdot\nabla Z + 2\nabla h^{\geq 2}\cdot\nabla Z^{\vee}\\
&= |\nabla h^{\geq 2}|^2 + |\nabla Z^{\vee}|^2 + 2\nabla h^{\geq 2}\cdot\nabla Z^{\vee} + 2\langle\nabla h^{\geq 3} + 2\nabla Z^{\overset{\vee}{\vee}},\nabla Z\rangle\\
&= |\nabla h^{\geq 2}|^2 + |\nabla Z^{\vee}|^2 + 2\nabla h^{\geq 2}\cdot\nabla Z^{\vee} + 2\nabla h^{\geq 3}\cdot\nabla Z + 4\nabla Z^{\overset{\vee}{\vee}}\cdot\nabla Z
\end{aligned}
$$

lo que implica que $h^{\geq 3}$ posee la forma

$$
\begin{aligned}
h^{\geq 3} &= \mathcal{I}(|\nabla h^{\geq 2}|^2) + \mathcal{I}(|\nabla Z^{\vee}|^2) + 2\mathcal{I}(\nabla h^{\geq 2}\cdot\nabla Z^{\vee}) + 2\mathcal{I}(\nabla h^{\geq 3}\cdot\nabla Z) + 4\mathcal{I}(\nabla Z^{\overset{\vee}{\vee}}\cdot\nabla Z)\\
&= Z^{\overset{\vee\vee}{\vee}} + 4Z^{\overset{\overset{\vee}{\vee}}{\vee}} + \mathcal{I}(|\nabla h^{\geq 2}|^2) + 2\mathcal{I}(\nabla h^{\geq 3}\cdot\nabla Z) + 2\mathcal{I}(\nabla h^{\geq 2}\cdot\nabla Z^{\vee})
\end{aligned}
$$

en donde $Z^{\overset{\vee\vee}{\vee}}$ tendría regularidad $(4\theta+8)-$ (en $d=3$, sería $2-$), Por otro lado, notamos que los paraproductos $\partial_{x_\beta} Z^{\overset{\vee}{\vee}} \circledcirc \partial_{x_\beta} Z$ y $\partial_{x_\beta} Z \circledcirc \partial_{x_\beta} Z^{\overset{\vee}{\vee}}$ tienen regularidad $(\theta+1)-$ (en $d=3$, sería $-\frac{1}{2}-$) y $(4\theta+6)-$ (en $d=3$, da $0-$) respectivamente. Así, la regularidad esperada final sería la del peor paraproducto, es decir, $(\theta+1)-$ (en $d=3$, sería $-\frac{1}{2}-$).

Del análisis hecho hasta aquí, obtenemos que el término estocástico más irregular tendría regularidad $(\theta+1)-$ (en $d=3$, sería $-\frac{1}{2}-$), de donde obtendríamos que la regularidad de $h^{\geq 3}$ debería ser de $(\theta+3)-$ (en $d=3$, sería $\frac{3}{2}-$). Luego, el término $\nabla h^{\geq 3}\cdot\nabla Z$ no va a ser clásico y a partir de este momento no hay ganancia adicional de regularidad al continuar con el método de restar términos irregulares. Esto motiva la introducción de técnicas paracontroladas.

Términos estocásticos $\left(\theta = -\frac{3}{2}\right)$			
Término	Regularidad	Caso $d = 3$	Definición
Z	$(\theta+2)-$	$\frac{1}{2}-$	$\mathcal{L}Z = \xi$
$\partial_{x_\beta} Z$	$(\theta+1)-$	$-\frac{1}{2}-$	-
$\lvert\nabla Z\rvert^2 - c^{\vee}$	$(2\theta+2)-$	$-1-$	-
$Z^{\vee}$	$(2\theta+4)-$	$1-$	$\mathcal{L}Z^{\vee} = \lvert\nabla Z\rvert^2$
$\partial_{x_\beta} Z^{\vee}$	$(2\theta+3)-$	$0-$	-
$\nabla Z \cdot \nabla Z^{\vee}$	$(3\theta+4)-$	$-\frac{1}{2}-$	-
$\left\lvert\nabla Z^{\vee}\right\rvert^2$	$(4\theta+6)-$	$0-$	-
$Z^{\vee\vee}$	$(3\theta+6)-$	$\frac{3}{2}-$	$\mathcal{L}Z^{\vee\vee} = \nabla Z \cdot \nabla Z^{\vee}$
$Z^{\vee\vee\vee\vee}$	$(4\theta+8)-$	$2-$	$\mathcal{L}Z^{\vee\vee\vee\vee} = \left\lvert\nabla Z^{\vee}\right\rvert^2$
$\nabla Z \cdot \nabla Z^{\vee\vee\vee}$	$(\theta+1)-$	$-\frac{1}{2}-$	-
$Z^{\vee\vee\vee}$	$(\theta+3)-$	$\frac{3}{2}-$	$\mathcal{L}Z^{\vee\vee\vee} = \nabla Z \cdot \nabla Z^{\vee\vee}$

Cuadro 3.1: Tabla de términos estocásticos y sus regularidades

Así, para armar el espacio solución: Hemos deducido que $h = Z + Z^{\vee} + Z^{\vee\vee} + h^{\geq 3}$ y $h^{\geq 3}$ es tal que

$$h^{\geq 3} = P_t h_0 + 4Z^{\vee\vee\vee} + 2\mathcal{I}(\nabla h^{\geq 3}\cdot\nabla Z) + [Z^{\vee\vee\vee\vee} + 2\mathcal{I}(\nabla Z^{\vee}\cdot\nabla\{h^{\geq 3} + 2Z^{\vee\vee}\}) + \mathcal{I}(\lvert\nabla\{2Z^{\vee\vee} + h^{\geq 3}\}\rvert^2)]$$

y para deducir la forma de la solución paracontrolada notamos que (del hecho que "$\mathcal{L}(u \prec v) = u \prec \mathcal{L}v$"), como $\mathcal{L}h^{\geq 3} = [2\nabla h^{\geq 3} + 4\nabla Z^{\vee\vee}] \prec \nabla Z + C_T\mathcal{C}^{0-}(\mathbb{R}^d)$ (aquí juntamos los términos con peor regularidad), tendríamos que $h^{\geq 3} = [2\nabla h^{\geq 3} + 4\nabla Z^{\vee\vee}] \prec Z^{\uparrow} + C_T\mathcal{C}^{2-}(\mathbb{R}^d)$ donde $Z^{\uparrow}$ es tal que $\mathcal{L}Z^{\uparrow} = \nabla Z$ (esta ecuación debe interpretarse coordenada a coordenada). Así, hemos deducido la forma

$$\begin{cases} h^{\geq 3} = h' \prec Z^{\uparrow} + h^{\#} \\ h' = 2\nabla h^{\geq 3} + 4\nabla Z^{\vee\vee} \in C_T\mathcal{C}^{\frac{1}{2}-}(\mathbb{R}^d) \\ h^{\#} \in C_T\mathcal{C}^{2-}(\mathbb{R}^d) \end{cases}$$

Al asumir esta descomposición de la solución, podemos dar sentido clásico al producto que falta. En efecto, si $h^{\geq 3}$ satisface esta forma tenemos que

$$\begin{aligned} h^{\geq 3}\circ\nabla Z &= [h' \prec Z^{\uparrow}]\circ\nabla Z + h^{\#}\circ\nabla Z \\ &= C(h', Z^{\uparrow,\nabla Z}, \nabla Z) + h'\cdot(Z^{\uparrow}\circ\nabla Z) + h^{\#}\circ\nabla Z \end{aligned}$$

y por la estimada de conmutador [2.4.3], deducimos la continuidad de Bony en todos los productos. Además, el producto $Z^{\uparrow}\circ\nabla Z$ es clásico, por lo que con esto termina la búsqueda de regularidad.

Resumen: La estructura paracontrolada de la ecuación de KPZ con ruido blanco espacial en $\mathbb{R}^3$ obtenida es $h = Z + Z^{\vee} + 2Z^{\vee\vee} + h^{\geq 3}$ con $h^{\geq 3}$ tal que

$$\mathcal{L}h^{\geq 3} = [4\nabla Z\cdot\nabla Z^{\vee\vee} + 4\nabla Z^{\vee}\cdot\nabla Z^{\vee\vee} + \lvert\nabla Z^{\vee}\rvert^2 + \lvert\nabla Z^{\vee\vee}\rvert^2]$$

$$+ [4\nabla Z^{\curlyvee} + 2\nabla Z^{\vee} + \nabla Z] \cdot \nabla h^{\geq 3} + |\nabla h^{\geq 3}|^2$$

y además posee la estructura paracontrolada

$$\begin{cases} h^{\geq 3} = h' \prec Z^{\intercal} + h^{\#} \\ h' = 2\nabla h^{\geq 3} + 4\nabla Z^{\curlyvee} \in C_T C^{\frac{1}{2}-}(\mathbb{R}^d) \\ h^{\#} \in C_T C^{2-}(\mathbb{R}^d) \end{cases}$$

Comentario: A lo largo de todo el desarrollo para deducir el Ansatz, fue necesario asumir ciertas regularidades de los procesos $Z, Z^{\vee}, Z^{\curlyvee}, Z^{\curlyvee\!\vee}, Z^{\vee\vee}, Z^{\intercal}$. Estos son campos aleatorios construidos a partir del ruido blanco y no es obvio que posean las regularidades que se mencionaron. Más aún, no es cierto que si consideramos el producto $|\nabla Z|^2$, este existe para el ruido blanco. Aquí es donde va a ser necesario cambiar la ecuación de KPZ, introduciendo constantes de renormalización que permitan dar sentido a algunos términos estocásticos, es decir, que puedan ser definidos en los espacios parabólicos adecuados para continuar el análisis. La construcción de estos términos y las discusiones más detalladas se dejan en el Apéndice [5].

3.2. Estudio de Well-Posedness en la KPZ vía técnicas paracontroladas

Inspirados en las ideas expuestas en [PR, 2019] buscamos definir una solución para la KPZ paracontrolada. Luego, vía la transformación de Cole-Hopf, concluir un resultado de well-posedness. Para esto, lo primero es definir el concepto de solución de la KPZ, el cual está fuertemente inspirado en la deducción del Ansatz paracontrolado de la sección anterior.

Como punto de partida para la definición de solución paracontrolada, necesitamos establecer con más propiedad el concepto de *data estocástica*. En la deducción del Ansatz fue necesario sustraer algunos campos irregulares que dependían del ruido blanco. Dichos campos forman parte explícita en la solución, por lo que deben ser considerados como una variable más para definirla.

Definición 3.2.1:

Sea $\alpha \in (0, 1/2)$. Definimos el mapeo $\mathbb{X}$ con dominio y codominio

$$\mathbb{X} : C^\infty \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{L}^{\alpha}_{p(\lambda)}(\mathbb{R}^d) \times \mathcal{L}^{2\alpha}_{p(\lambda)}(\mathbb{R}^d) \times \mathcal{L}^{3\alpha}_{p(\lambda)}(\mathbb{R}^d) \times \mathcal{L}^{\alpha+1}_{p(\lambda)}(\mathbb{R}^d) \times \mathcal{L}^{4\alpha}_{p(\lambda)}(\mathbb{R}^d) \times C\mathcal{C}^{2\alpha-1}_{p(\lambda)}(\mathbb{R}^d)$$

y tal que

$$\mathbb{X}\Big(\eta, c^{\vee}, c^{\vee\vee}\Big) = \Big(Z, Z^{\vee} - c^{\vee} \cdot t, Z^{\curlyvee}, Z^{\curlyvee\!\vee}, Z^{\vee\vee} - c^{\vee\vee} t, Z^{\intercal} \circ \nabla Z\Big)$$

donde $Z^{\intercal}$ es tal que $Z^{\intercal} = \mathcal{I}(\nabla Z)$. Dotamos a este espacio con la norma producto, es decir, (por ejemplo) la norma del máximo y definimos

$$\mathcal{X}_{\text{KPZ}} := \overline{\mathbb{X}(C^\infty \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})}$$

y a cada data la denotamos por $\mathbb{X} \in \mathcal{X}_{\text{KPZ}}$.

Notamos que la data considera una función regular y dos constantes que se sustraen en ciertos términos estocásticos. La función regular representa la idea de que queremos interpretar la KPZ primero suavizando el ruido blanco y luego tomar límite en la suavización. Por otro lado, las constantes presentes en la data son números reales necesarios para asegurar que ciertos términos converjan en los espacios parabólicos adecuados.

La discusión de cómo se construye la data estocástica, cómo se determinan las constantes de renormalización y una discusión del proceso de convergencia del caso suave a la data con ruido blanco la dejamos para el Apéndice 5.

Ahora sí establecemos con propiedad la definición de solución paracontrolada de la KPZ.

Definición 3.2.2:

Diremos que h es una solución paracontrolada de la ecuación de KPZ con condición inicial h_0 y con data $\mathbb{X} \in \mathcal{X}_{\mathrm{KPZ}}$ si existe $l \in \mathbb{R}$ tal que h tiene la forma

$$h = Z + Z^{\vee} + Z^{\curlyvee} + h^{\geq 3}$$

donde $h^{\geq 3}$ está paracontrolada por $Z^{\bullet}$ en el sentido que

$$h^{\geq 3} = h' \prec Z^{\dot{|}} + h^{\#}$$

donde $h' \in \mathcal{L}^{\alpha}_{e(l)}(\mathbb{R}^d)$ y $h^{\#} \in \mathcal{L}^{4\alpha}_{e(l)}(\mathbb{R}^d)$ y $h^{\geq 3}$ satisface la EDP

$$\begin{aligned}\mathcal{L}h^{\geq 3} =& [4\nabla Z \cdot \nabla Z^{\curlyvee} + 4\nabla Z^{\vee} \cdot \nabla Z^{\curlyvee} + |\nabla Z^{\vee}|^2 + |\nabla Z^{\curlyvee}|^2] \\ &+ [4\nabla Z^{\curlyvee} + 2\nabla Z^{\vee} + \nabla Z] \cdot \nabla h^{\geq 3} + |\nabla h^{\geq 3}|^2\end{aligned}$$

$$h^{\geq 3}(0) = h_0$$

y además h' posee la forma

$$h' = 2\nabla h^{\geq 3} + 4\nabla Z^{\curlyvee}$$

La estrategia seguida en [PR, 2019] se basa en un estudio de la transformada Cole-Hopf de la KPZ a la ecuación Rough del calor. La relación **paracontrolada** entre ambas ecuaciones ha sido estudiada en detalle en [GP, 2017] y utilizada en el contexto de espacios con peso en [PR, 2019]. Seguiremos este camino notando que en nuestro caso la transformada Cole-Hopf pasa formalmente de la KPZ al PAM. En efecto, asumamos h una solución (formal) de la KPZ y definamos $w := e^h$. Luego, tenemos que

$$\begin{aligned}\partial_t w &= \partial_t h \cdot e^h = w \cdot \partial_t h \\ &= w \cdot [\Delta h + |\nabla h|^2 + \xi] \\ &= w \cdot [\Delta h + |\nabla h|^2] + w \cdot \xi \\ &= \Delta w + w \cdot \xi\end{aligned}$$

que es justamente la ecuación del PAM. Así, la idea va a ser relacionar (en un sentido paracontrolado) ambas SPDE's. Para ello, lo primero que haremos será dar una definición de lo que entenderemos como solución paracontrolada del PAM.

Definición 3.2.3:

Decimos que w es una solución al PAM con condición inicial $w_0 \equiv w_0 \cdot e^{Z(0)+Z^{\vee}(0)+Z^{\mathsf{Y}}(0)}$ para $w_0 \in \mathcal{C}^{\beta}_{e(l)}(\mathbb{R}^d)$ con $\beta \in (0, 2\alpha+1]$ y data $\mathbb{X} \in \mathcal{X}_{\mathrm{KPZ}}$ si existe $\kappa \in \mathbb{R}$ tal que w toma la forma

$$w = w^P \cdot e^{Z+Z^{\vee}+Z^{\mathsf{Y}}}, \; \mathcal{L}^{\beta',\alpha+1}_{e(\kappa)} \ni w^P = w' \prec Z^{\uparrow} + w^{\#}$$

donde w^P resuelve la ecuación

$$\begin{aligned}\mathcal{L}w^P = &\Big[\mathcal{L}Z^{\mathsf{W}} + 2\mathcal{L}Z^{\mathsf{Y}} + 2\nabla Z^{\mathsf{Y}} \cdot \nabla Z + \left|\nabla Z^{\mathsf{Y}}\right|^2 + 4\nabla Z^{\vee} \cdot \nabla Z^{\mathsf{Y}}\Big] w^P \\ &+ 2\Big(\nabla Z + \nabla Z^{\vee} + \nabla 2Z^{\mathsf{Y}}\Big) \cdot \nabla w^P\end{aligned}$$

Lo que haremos a continuación será clarificar por qué de nuestra definición de solución paracontrolada de la KPZ se desprende que la definición natural en el PAM debe ser la que presentamos. La intuición recae esencialmente en la transformada de Cole-Hopf, la cual ahora debemos pensar en un sentido paracontrolado ¿Cómo afectaría a una estructura paracontrolada una tranformación de Cole-Hopf?

Consideremos $(\eta, c^{\vee}, c^{\mathsf{W}})$ una versión suave para construir la data y h una solución de $\mathcal{L}h = \eta - c^{\vee}$. Luego, vía la transformada de Cole-Hopf tenemos que $w = e^h$ satisface

$$\mathcal{L}w = w(\eta - c^{\vee})$$

Si ahora suponemos que h es paracontrolado en el sentido $h = Z + Z^{\vee} + 2Z^{\mathsf{Y}} + h^{\geq 3}$ con $h^{\geq 3} = h' \prec Z^{\uparrow} + h^{\#}$, entonces deducimos que

$$w = e^{Z+Z^{\vee}+2Z^{\mathsf{Y}}} \cdot e^{h^{\geq 3}} \equiv w^P \cdot e^{Z+Z^{\vee}+2Z^{\mathsf{Y}}}$$

y postulamos a raíz de la estructura paracontrolada de $h^{\geq 3}$ que w^P también debería tener una estructura paracontrolada $w^P = w' \prec Z^{\uparrow} + w^{\#}$- Así, lo que queda es caracterizar la derivada y el resto, es decir, determinar una expresión para w' y una EDP para $w^{\#}$. Veamos primero la ecuación para el resto.

A raíz de la expresión para $w = w^P \cdot e^{Z+Z^{\vee}+2Z^{\mathsf{Y}}}$ tenemos que la derivada temporal viene dada por

$$\partial_t w = \partial_t\Big(Z + Z^{\vee} + 2Z^{\mathsf{Y}}\Big) \cdot w^P \cdot e^{Z+Z^{\vee}+2Z^{\mathsf{Y}}} + e^{Z+Z^{\vee}+2Z^{\mathsf{Y}}} \cdot \partial_t w^P$$

y para el laplaciano deducimos

$$\begin{aligned}\Delta w =&\Delta\Big(Z + Z^{\vee} + 2Z^{\mathsf{Y}}\Big) e^{Z+Z^{\vee}+2Z^{\mathsf{Y}}} w^P + \left|\nabla\Big(Z + Z^{\vee} + 2Z^{\mathsf{Y}}\Big)\right|^2 \cdot e^{Z+Z^{\vee}+2Z^{\mathsf{Y}}} \cdot w^P \\ &+ 2e^{Z+Z^{\vee}+2Z^{\mathsf{Y}}} \nabla\Big(Z + Z^{\vee} + 2Z^{\mathsf{Y}}\Big) \cdot \nabla w^P + \Delta w^P \cdot e^{Z+Z^{\vee}+2Z^{\mathsf{Y}}}\end{aligned}$$

y con esto deducimos una expresión para el operador del calor

$$\mathcal{L}w = w^P e^{Z+Z^{\vee}+2Z^{\mathsf{Y}}} \cdot \mathcal{L}\Big(Z + Z^{\vee} + 2Z^{\mathsf{Y}}\Big) + e^{Z+Z^{\vee}+2Z^{\mathsf{Y}}} \cdot \mathcal{L}w^P$$

$$
\begin{aligned}
&- e^{Z+Z^{\vee}+2Z^{\curlyvee}} w^P \cdot \left|\nabla\left(Z + Z^{\vee} + 2Z^{\curlyvee}\right)\right|^2 - 2e^{Z+Z^{\vee}+2Z^{\curlyvee}} \nabla\left(Z + Z^{\vee} + 2Z^{\curlyvee}\right) \cdot \nabla w^P \\
=& e^{Z+Z^{\vee}+2Z^{\curlyvee}} \cdot w^P\left[\eta + |\nabla Z|^2 - c^{\vee} + 2\nabla Z \cdot \nabla Z^{\vee}\right] + e^{Z+Z^{\vee}+2Z^{\curlyvee}} \cdot \mathcal{L} w^P \\
&- 2e^{Z+Z^{\vee}+2Z^{\curlyvee}} \nabla\left(Z + Z^{\vee} + 2Z^{\curlyvee}\right) \cdot \nabla w^P - e^{Z+Z^{\vee}+2Z^{\curlyvee}} \cdot w^P \cdot \left|\nabla\left(Z + Z^{\vee} + 2Z^{\curlyvee}\right)\right|^2 \\
=& w\left(\eta - c^{\vee}\right) + e^{Z+Z^{\vee}+2Z^{\curlyvee}} \cdot \mathcal{L} w^P - 2e^{Z+Z^{\vee}+2Z^{\curlyvee}} \nabla\left(Z + Z^{\vee} + 2Z^{\curlyvee}\right) \cdot \nabla w^P \\
&- e^{Z+Z^{\vee}+2Z^{\curlyvee}} \cdot w^P\left[\left|\nabla Z^{\vee}\right|^2 + \left|\nabla 2Z^{\curlyvee}\right|^2 + 4\nabla Z \cdot \nabla Z^{\curlyvee} + 4\nabla Z^{\vee} \cdot \nabla Z^{\curlyvee}\right]
\end{aligned}
$$

y como tenemos que w soluciona el PAM paracontrolado, obtenemos la expresión

$$
\begin{aligned}
& e^{Z+Z^{\vee}+2Z^{\curlyvee}} \cdot \Big[\mathcal{L} w^P - 2\nabla\left(Z + Z^{\vee} + 2Z^{\curlyvee}\right) \cdot \nabla w^P \\
&- \left(\mathcal{L} Z^{\Psi} + 2\mathcal{L} Z^{\curlyvee} + \left|\nabla Z^{\curlyvee}\right|^2 + 2\nabla Z^{\curlyvee} \cdot \nabla Z + 4\nabla Z^{\vee} \cdot \nabla Z^{\curlyvee}\right) w^P\Big] = 0
\end{aligned}
$$

y deducimos finalmente una ecuación para w^P

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} w^P &= 2\nabla\left(Z + Z^{\vee} + 2Z^{\curlyvee}\right) \cdot \nabla w^P + \left(\mathcal{L} Z^{\Psi} + 2\mathcal{L} Z^{\curlyvee} + \left|\nabla Z^{\curlyvee}\right|^2 + 2\nabla Z^{\curlyvee} \cdot \nabla Z + 4\nabla Z^{\vee} \cdot \nabla Z^{\curlyvee}\right) w^P \\
&= 2\nabla\left(Z + Z^{\vee} + 2Z^{\curlyvee}\right) \cdot \nabla w^P + \left(\mathcal{L} Z^{\Psi} + 2\mathcal{L} Z^{\curlyvee} + 2\nabla Z^{\curlyvee} \cdot \nabla Z + \left|\nabla Z^{\curlyvee}\right|^2 + 4\nabla Z^{\vee} \cdot \nabla Z^{\curlyvee}\right) w^P
\end{aligned}
$$

en donde utilizamos que $4\mathcal{L} Z^{\curlyvee} = 2\mathcal{L} Z^{\curlyvee} + 2\nabla Z^{\curlyvee} \cdot \nabla Z$. Notamos con esto que dedujimos precisamente la ecuación diferencial que debería satisfacer el término w^P. Además, es posible deducir la estructura paracontrolada de w^P. En efecto, utilizando que $\mathcal{L} Z^{\curlyvee} = \nabla Z \cdot \nabla Z^{\vee}$ y notando que w^P debería tener regularidad $\alpha + 1$ (pues $\nabla Z \cdot \nabla Z^{\vee}$ tiene regulariadad $\alpha - 1$) y haciendo el mismo estudio de regularidades , deducimos que

$$
\mathcal{L} w^P = (\nabla w^P + w^P \cdot \nabla Z^{\curlyvee}) \otimes \nabla Z + \mathcal{L}^{\alpha - 1/2}
$$

y nuevamente volvemos a deducir la estructura paracontrolada (recordar que $\alpha \in (0, 1/2)$)

$$
\begin{cases}
w^P = w' \prec Z^{\uparrow} + w^{\#} \in \mathcal{L}^{\alpha+1} \\
w' = \nabla w^P + w^P \cdot \nabla Z^{\curlyvee} \in C_T C^{\alpha}(\mathbb{R}^d) \\
w^{\#} \in C_T C^{2\alpha+1}(\mathbb{R}^d)
\end{cases}
$$

El trabajo presente en esta tesis consistió en determinar la existencia y unicidad de soluciones de la KPZ según 3.2 sobre todo $\mathbb{R}^3$ mediante el uso de la Transformada de Cole-Hopf. En particular, la idea va a ser aprovechar que la ecuación del PAM es lineal y que allí es posible establecer el Teorema de existencia y unicidad. Luego, tomando logaritmo, la idea es trasladar esa información a una solución de la KPZ, heredando unicidad en el proceso. Para ello, será necesario estudiar el comportamiento del logaritmo y la exponencial en el espacio parabólico de regularidad positiva. Este estudio lo haremos en el apéndice 5.

Otro aspecto que es importante notar en la solución paracontrolada es que hay una dependencia explícita en los términos estocásticos. La idea es determinar la existencia y unicidad cuando la data es suavizada y una vez hecho esto, probar que la data suavizada converge a los términos estocásticos con ruido blanco. Con este método, se establece la existencia y unicidad de las ecuaciones singulares con técnicas paracontroladas. En particular, es fundamental que establezcamos resultados de convergencia de la data. Este es el contenido del siguiente resultado.

Teorema 3.2.1:

Sea ξ un ruido blanco sobre $\mathbb{R}^3$. Luego, para todo $\alpha < \frac{1}{2}$ y $a > 0$, tenemos que existe $(\xi^n, c_n^{\vee}, c_n^{\Psi})$ tal que

$$\mathbb{Z}^n = \mathbb{Z}(\xi^n, c_n^{\vee}, c_n^{\Psi}) \longrightarrow \mathbb{Z}(\xi)$$

donde la convergencia es en $L^p(\Omega; \mathcal{X}_{\text{kpz}})$, para cada $p \in [1, +\infty)$.

La demostración de la convergencia de la data en L^p la dejamos para el apéndice[5]. La idea es utilizar argumentos de convergencia en distribución [5.1, 5.1, 5.1] y un Criterio de Kolmogorov [5.3.1].

3.2.1. La noción de solución de KPZ paracontrolada existe en cada versión suave

Lo primero que haremos en esta sección es establecer con propiedad las condiciones iniciales que supondremos en esta tesis.

Hipótesis sobre condiciones iniciales: Asumiremos que $h_0 \in C^{2\alpha+1}_{\rho_\delta}(\mathbb{R}^d)$ es tal que existe una sucesión $(h_0^n)_{n\in\mathbb{N}} \in C_b^\infty(\mathbb{R}^d)$ tal que

$$h_0^n \xrightarrow{n\to\infty} h_0, \quad \text{en } C^{2\alpha+1}_{\rho_\delta}(\mathbb{R}^d)$$

La razón para suponer este tipo de condiciones iniciales es que nos permiten aludir a la continuidad del logaritmo y exponencial en espacios con peso.

Proposición 3.2.1:

Sea $\mathbb{Z}^n$ una versión suave de la data y h_0^n una condición inicial. Luego, existe una única solución paracontrolada h^n a la ecuación KPZ con $h^n, h^{\prime,n}$ y $h^{\#,n} \in C_b^\infty(\mathbb{R}^{\mathrm{d}})$ y también en los espacios parabólicos respectivos.

Demostración. La estrategia va a ser utilizar una transformación de Cole-Hopf y probar existencia y unicidad allí. Definimos $v^n := e^{h^n - Z^n}$, de donde concluimos que la derivada temporal toma la forma

$$\partial_t v^n = v^n[\partial_t h^n - \partial_t Z^n]$$

y al considerar la derivada en espacio obtenemos las expresiones

$$\nabla v^n = v^n \cdot \nabla(h^n - Z^n) \ \ ; \ \ \Delta v^n = v^n|\nabla(h^n - Z^n)|^2 + v^n\Delta(h^n - Z^n)$$

Así, tenemos que v^n satisface la EDP dada por

$$\begin{aligned}
\partial_t v^n &= v^n \cdot \partial_t(h^n - Z^n) = v^n\Delta(h^n - Z^n) + v^n|\nabla h^n|^2 - v^n c^{\vee,n} \\
&= \Delta v^n - v^n\langle \nabla h^n - \nabla Z^n, \nabla h^n - \nabla Z^n\rangle + v^n|\nabla h^n|^2 - v^n c^{\vee,n} \\
&= \Delta v^n + 2v^n\nabla h^n \cdot \nabla Z^n - v^n|\nabla Z^n|^2 - v^n c^{\vee,n}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \Delta v^n + 2\{\nabla v^n + v^n \nabla Z^n\} \cdot \nabla Z^n - v^n |\nabla Z^n|^2 - v^n c^{\vee,n} \\
&= \Delta v^n + 2\nabla v^n \cdot \nabla Z^n + v^n |\nabla Z^n|^2 - v^n c^{\vee,n}
\end{aligned}
$$

de donde concluimos finalmente que v^n satisface la EDP

$$
\mathcal{L} v^n = v^n [|\nabla Z^n|^2 - c^{\vee,n}] + 2\nabla v^n \cdot \nabla Z^n
$$

que es una EDP lineal. La idea ahora es resolver en un sentido paracontrolado esta ecuación. Para ello, realizamos un argumento de punto fijo en el espacio de distribuciones paracontroladas. Una vez hecho este desarrollo, se sigue la existencia y unicidad global de las versiones suavizadas. □

3.2.2. Una teoría paracontrolada para ecuaciones lineales

En esta sección establecemos la teoría de ecuaciones lineales paracontroladas de [PR, 2019]. La razón esencial para incluirlo es que muestra explícitamente cómo las técnicas paracontroladas permiten formular Teoremas de existencia y unicidad mediante una aplicación del Teorema de punto fijo de Banach.

Como primer paso, presentamos esta sección con el estudio del PAM. Esta ecuación está íntimamente relacionada con la ecuación de KPZ como ya hemos visto en la sección anterior. Adicionalmente, es una ecuación lineal, lo que a priori la hace más simple a la hora de determinar existencia y unicidad (en sentido paracontrolado, [3.2]). Como hemos visto, para el último término de la ecuación del PAM, sabemos que debe satisfacer la EDP

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} w^P = &\Big[\mathcal{L} Z^{\vee\vee\vee} + 2\mathcal{L} Z^{\vee\vee} + 2\nabla Z^{\vee\vee} \cdot \nabla Z + \Big|\nabla Z^{\vee\vee}\Big|^2 + 4\nabla Z^{\vee} \cdot \nabla Z^{\vee\vee}\Big] w^P \\
&+ 2\Big(\nabla Z + \nabla Z^{\vee} + \nabla 2 Z^{\vee\vee}\Big) \cdot \nabla w^P
\end{aligned}
$$

la cual podemos reescribir en una forma más general como

$$
\mathcal{L} w^P = 2\nabla Z \odot \nabla w^P + F(\mathbb{Z})(w^P) \otimes \nabla Z + R(\mathbb{Z})(\omega^P)
$$

donde definimos:

$$
F(\mathbb{Z})(w^P) = 2\nabla w^P + 2\nabla Z^{\vee\vee} \cdot w^P
$$

$$
\begin{aligned}
R(\mathbb{Z})(w^P) = &\Big[\mathcal{L} Z^{\vee\vee\vee} + 2\mathcal{L} Z^{\vee\vee} + 4\nabla Z^{\vee} \cdot \nabla Z^{\vee\vee} + \Big|\nabla Z^{\vee\vee}\Big|^2 + 2\nabla Z^{\vee\vee} \otimes \nabla Z + 2\nabla Z^{\vee\vee} \odot \nabla Z\Big] \cdot w^P \\
&+ \Big[2\nabla Z^{\vee} + 4\nabla Z^{\vee\vee}\Big] \cdot \nabla w^P + 2\nabla Z \otimes \nabla w^P + 2\nabla Z \odot \nabla w^P
\end{aligned}
$$

Para establecer el Teorema de existencia y unicidad del PAM como Cole-Hopf de la ecuación de KPZ es necesario el desarrollo de una teoría de solución para el siguiente tipo de ecuación diferencial

$$
\mathcal{L} u = R(\mathbb{Z}, \nu)(u) + [F(\mathbb{Z})(u)] \prec \nabla Z + \nabla Z \circ \nabla u, \quad u(0) = u_0
$$

donde los términos son los obtenidos en el análisis de la ecuación de KPZ, R y F son funcionales cuyas propiedades se expresarán más adelante, $\mathbb{Z} \in \mathcal{X}_{\text{KPZ}}$ y $\nu \in \mathcal{H}$ para algún espacio de Banach (esto último es técnico para algunas aplicaciones).

Intuición: El término con R representa un resto suave, el paraproducto es la parte irregular de algún producto y el paraproducto es la parte mal definida de otro producto. En particular, es este último término el que va a imponer una estructura paracontrolada para la solución.

Definición 3.2.4:

Sea $u_0 \in C^{\beta}_{e(l)}(\mathbb{R}^d)$ para algún $l \in \mathbb{R}$ y $\beta \in (2\alpha - 1, 2\alpha + 1)$ junto con los parámetros adicionales $\varepsilon > 0$, $\hat{\beta} = \frac{2\alpha+1-\beta}{2}$, un horizonte de tiempo $T_h \geq 0$ y $\mathbb{Z} \in \mathbb{X}_{\text{KPZ}}([0, T_h])$. Definimos el espacio

$$\mathcal{D}(\mathbb{Z}) \subset \mathcal{L}^{\hat{\beta},\alpha+1-\varepsilon}_{e(l+t)}([0,T_h]) \times \mathcal{L}^{\hat{\beta},\alpha-\varepsilon}_{e(l+t)p(a)}([0,T_h]) \times \mathcal{L}^{\hat{\beta},2\alpha+1-\varepsilon}_{e(l+t)}$$

como el conjunto de puntos $(u, u', u^{\#})([0, T_h])$ tales que

$$(u, u', u^{\#}) \in \mathcal{D}(\mathbb{Z}) \iff u = u' \prec \overset{\uparrow}{Z} + u^{\#},\; u(0) = u_0$$

Dotamos a $\mathcal{D}(\mathbb{Z})$ con la topología producto y una norma producto. Escribiremos (abusando de notación)

$$|||u||| \equiv ||(u, u', u^{\#})||_{\mathcal{D}(\mathbb{Z})}$$

Comentarios: Veamos qué significan los parámetros de la definición: Primero, α representa la regularidad de la solución del PAM (y de la ecuación KPZ!), el parámetro $\varepsilon > 0$ representa un pequeño Gap entre la regularidad de la solución y la regularidad máxima esperada. Este término aparece para lidiar con el problema de buena definición en espacio. Finalmente, el parámetro $\hat{\beta}$ aparece para cuantificar el crecimiento temporal en $t = 0$.

En el estudio de la unicidad de soluciones paracontroladas del PAM va a ser necesario comparar distribuciones paracontroladas con diferente data. Por esto, definimos la cantidad

$$|||u_1 \,:\, u_2||| := \text{máx}\{||u_1' - u_2'||_{\mathcal{L}^{\alpha-\varepsilon}_{e(l+t)p(a)}}, ||u_1^{\#} - u_2^{\#}||_{\mathcal{L}^{2\alpha+1-\varepsilon}_{e(l+t)}}\}$$

La pretensión sobre los espacios paracontrolados es poder aplicar un Teorema de punto fijo para concluir existencia y unicidad de soluciones, y para conseguirlo, necesitaremos hallar una contracción sobre un intervalo de tiempo (posiblemente más pequeño). Por este motivo, consideramos adicionalmente la notación $\mathcal{D}^0_S(\mathbb{Z})$ para $S \leq T_h$ para el espacio $\mathcal{D}(\mathbb{Z})$ cuando reemplazamos el tiempo T_h por y asumimos la convención $\mathcal{D}^0_0(\mathbb{Z}) = C^{\beta}_{e(l)}$ (el espacio de la condición inicial). En particular, si consideramos T_r tal que $0 \leq T_\ell < T_r \leq T_h$ con condición inicial $u_{T_\ell} \in \mathcal{D}^0_{T_\ell}(\mathbb{Z})$, definimos el espacio:

$$\mathcal{D}^{T_\ell}_{T_r}(\mathbb{Z}, u_{T_\ell}) := \{u \in \mathcal{D}^0_{T_r} \;:\; u|_{[0,T_\ell]} = u_{T_\ell},\; u'|_{[0,T_\ell]} = u'_{T_\ell},\; u^{\#}|_{[0,T_\ell]} = u^{\#}_{T_\ell}\}$$

al cual dotamos con la topología producto de

$$\mathcal{L}^{\hat{\beta},\alpha+1-\varepsilon}_{e(l+t)}([T_\ell, T_r]) \times \mathcal{L}^{\hat{\beta},\alpha-\varepsilon}_{e(l+t)p(a)}([T_\ell, T_r]) \times \mathcal{L}^{\hat{\beta},2\alpha+1-\varepsilon}_{e(l+t)}([T_\ell, T_r])$$

El objetivo ahora es establecer condiciones suficientes sobre los coeficientes de la ecuación paracontrolada para obtener una estrategia de punto fijo. Usamos las condiciones establecidas en [PR, 2019].

Hipótesis sobre los coeficientes: Sean $l \in \mathbb{R}$, $\varepsilon \in [0, 3\alpha - 1)$, $a > 0$ y $\varsigma \geq 0$ tales que $\varepsilon - 6a/\delta - 2\varsigma > 0$, y sean $b \leq 2a$, $\beta \in (2\alpha - 1, 2\alpha + 1]$, $\hat{\beta} = \frac{2\alpha+1-\beta}{2}$ y consideremos $0 \leq T_\ell < T_r \leq T_h$. Dado $M > 0$, suponemos $\mathbb{Z}_i \in \mathbb{X}^{\varsigma,b}_{\text{kpz}}([0, T_h])$ con $v_i \in \mathbb{X}$ y $u^i_0 \in C^{\beta}_{e(l)}$ para $i = 1, 2$ tales que

$$||v_i||_{\mathbb{X}},\; ||\mathbb{Z}_i||_{\mathbb{X}^{\varsigma,b}_{\text{kpz}}},\; ||u^i_0||_{C^{\beta}_{e(l)}} \leq M$$

Esto fijas las hipótesis sobre la data estocástica y sobre los coeficientes en los espacios parabólicos. Veamos ahora las hipótesis sobre los coeficientes de la ecuación paracontrolada

1. Existe un $\gamma > 0$ tal que para todo $\mathbb{Z}, \nu$ y T_ℓ, T_r que cumplen que $0 \leq T_\ell < T_r \leq T_h$ tenemos que

$$V_{T_\ell} \circ R(\mathbb{Z}, \nu) : \mathcal{L}^{\hat{\beta},\alpha+1-\varepsilon}_{e(l+t)}([T_\ell, T_r]) \longrightarrow \mathcal{L}^{\hat{\beta},2\alpha+1-\varepsilon}_{e(l+t)}([T_\ell, T_r])$$

es una función Lipschitz que satisface las estimadas:

$$||V_{T_\ell}(R(\mathbb{Z},\nu)(u))||_{\mathcal{L}^{\hat{\beta},2\alpha+1-\varepsilon}_{e(l+t)}([T_\ell,T_r])} \lesssim \left(1 + ||\mathbb{Z}||_{\mathbb{X}^{\varsigma,b}_{\text{kpz}}} + ||\nu||_{\mathbb{X}}\right)^p (T_r - T_\ell)^\gamma \cdot \left(1 + ||u||_{\mathcal{L}^{\hat{\beta},\alpha+1-\varepsilon}_{e(l+t)}([T_\ell,T_r])}\right)$$

$$||V_{T_\ell}(R(\mathbb{Z},\nu)(u_1)) - V_{T_\ell}(R(\mathbb{Z},\nu)(u_2))||_{\mathcal{L}^{\hat{\beta},2\alpha+1-\varepsilon}_{e(l+t)}([T_\ell,T_r])} \lesssim \left(1 + ||\mathbb{Z}||_{\mathbb{X}^{\varsigma,b}_{\text{kpz}}} + ||\nu||_{\mathbb{X}}\right)^p (T_r - T_\ell)^\gamma \cdot \left(||u_1 - u_2||_{\mathcal{L}^{\hat{\beta},\alpha+1-\varepsilon}_{e(l+t)}([T_\ell,T_r])}\right)$$

$$||V_{T_\ell}(R(\mathbb{Z}_1,\nu_1)(u_1)) - V_{T_\ell}(R(\mathbb{Z}_2,\nu_2)(u_2))||_{\mathcal{L}^{\hat{\beta},2\alpha+1-\varepsilon}_{e(l+t)}([T_\ell,T_r])} \lesssim_{M,||u_i||_{\mathcal{D}^{T_\ell}_{T_r}}} ||\mathbb{Z}_1 - \mathbb{Z}_2||_{\mathbb{Z}^{\varsigma,b}_{\text{kpz}}} + ||\nu_1 - \nu_2||_{\mathbb{Z}} + (T_r - T_\ell)^\gamma ||u_1 - u_2||_{\mathcal{L}^{\hat{\beta},\alpha+1-\varepsilon}_{e(l+t)}([T_\ell,T_r])}$$

2. El mapeo $F(\mathbb{Z}) : \mathcal{D}^{T_\ell}_{T_r} \longrightarrow \mathcal{L}^{\hat{\beta},\alpha}_{e(l+t)p(2a)}$ es Lipschitz (para $\mathbb{Z}$ fijo) y satisface

$$||F(\mathbb{Z})(u)||_{\mathcal{L}^{\hat{\beta},\alpha}_{e(l+t)p(2a)}([T_\ell,T_r])} \lesssim (1 + ||\mathbb{Z}||_{\mathbb{X}^{\varsigma,b}_{\text{kpz}}})^p \cdot (1 + ||u||_{\mathcal{D}^0_{T_r}})$$

$$||F(\mathbb{Z})(u_1) - F(\mathbb{Z})(u_2)||_{\mathcal{L}^{\hat{\beta},\alpha}_{e(l+t)p(2a)}([T_\ell,T_r])} \lesssim (1 + ||\mathbb{Z}||_{\mathbb{X}^{\varsigma,b}_{\text{kpz}}})^p \cdot ||u_1 - u_2||_{\mathcal{D}^0_{T_r}}$$

$$||F(\mathbb{Z})(u_1) - F(\mathbb{Z})(u_2)||_{\mathcal{L}^{\hat{\beta},\alpha}_{e(l+t)p(2a)}([T_\ell,T_r])} \lesssim_{M,||u_i||_{\mathcal{D}^0_{T_r}}} ||\mathbb{Z}_1 - \mathbb{Z}_2||_{\mathbb{X}^{\varsigma,b}_{\text{kpz}}} + ||u_1 : u_2||_{\mathcal{D}^0_{T_r}}$$

3. El mapeo $F(\mathbb{Z}) : \mathcal{L}^{\hat{\beta},\alpha+1-\varepsilon}_{e(l+t)}([T_\ell, T_r]) \longrightarrow \mathcal{L}^{\hat{\beta},\alpha-\varepsilon}_{e(l+t)p(a)}([T_\ell, T_r])$ es Lipschitz continuo (para $\mathbb{Z}$ fijo) y satisface

$$||F(\mathbb{Z})(u)||_{\mathcal{L}^{\hat{\beta},\alpha-\varepsilon}_{e(l+t)p(a)}([T_\ell,T_r])} \lesssim (1 + ||\mathbb{Z}||_{\mathbb{X}^{\varsigma,b}_{\text{kpz}}})^p \cdot \left(1 + ||u||_{\mathcal{L}^{\hat{\beta},\alpha+1-\varepsilon}_{e(l+t)}([T_\ell,T_r])}\right)$$

$$||F(\mathbb{Z})(u_1) - F(\mathbb{Z})(u_2)||_{\mathcal{L}^{\hat{\beta},\alpha-\varepsilon}_{e(l+t)p(a)}([T_\ell,T_r])} \lesssim (1 + ||\mathbb{Z}||_{\mathbb{X}^{\varsigma,b}_{\text{kpz}}})^p \cdot ||u_1 - u_2||_{\mathcal{L}^{\hat{\beta},\alpha+1-\varepsilon}_{e(l+t)}([T_\ell,T_r])}$$

$$||F(\mathbb{Z}_1)(u_1) - F(\mathbb{Z}_2)(u_2)||_{\mathcal{L}^{\hat{\beta},\alpha-\varepsilon}_{e(l+t)p(a)}([T_\ell,T_r])} \lesssim_{M,||u_i||_{\mathcal{D}^{T_\ell}_{T_r}}} ||\mathbb{Z}_1 - \mathbb{Z}_2||_{\mathbb{X}^{\varsigma,b}_{\text{kpz}}} + ||u_1 - u_2||_{\mathcal{L}^{\hat{\beta},\alpha+1-\varepsilon}_{e(l+t)}([T_\ell,T_r])}$$

Con estas hipótesis es posible demostrar un Teorema de existencia y unicidad en la ecuación paracontrolada lineal. Adicionalmente, en las distribuciones paracontroladas es posible definir correctamente productos mal definidos. Por ejemplo, en la ecuación del PAM

Teorema 3.2.2:

Para $\ell, \varepsilon, \varsigma, b, a$ coeficientes que cumplen las hipótesis que dimos, tenemos que la ecuación

$$\begin{aligned}\mathcal{L}w^P &= \Big[\mathcal{L}Z^{\vee\vee} + 2\mathcal{L}Z^{\vee\vee\vee} + \nabla Z \cdot \nabla Z^{\vee} + \big|\nabla Z^{\vee\vee}\big|^2 + 2\nabla Z^{\vee} \cdot \nabla Z^{\vee\vee}\Big] w^P \\ &\quad + 2\Big(\nabla Z + \nabla Z^{\vee} + \nabla Z^{\vee\vee}\Big) \cdot \nabla w^P\end{aligned}$$

$$w^P(0) = w_0$$

admite una única solución paracontrolada con dependencia local Lipschitz en sus parámetros. Esto es, para cualesquiera condiciones iniciales w_0^1, w_0^2 y data $\mathbb{Z}_1$, $\mathbb{Z}_2$ que satisfacen las hipótesis que dimos, existen dos soluciones únicas w_1^P, w_2^P del PAM rugoso tales que

$$||w_1^P \ : \ w_2^P|| \lesssim_M ||w_0^1 - w_0^2||_{\mathcal{C}^{\beta}_{e(l)}} + ||\mathbb{Z}_1 - \mathbb{Z}_2||_{\mathbb{X}^{\varsigma,b}_{\text{kpz}}}$$

Además, se obtiene la siguiente cota de la solución en términos de la data

$$||w^p|| \lesssim e^{CT_h(1+||\mathbb{Z}||_{\mathbb{X}^{\varsigma,b}_{\text{kpz}}})^q} \cdot (1 + ||w_0||_{\mathcal{C}^{\beta}_{e(l)}})$$

para algún $q \geq 0$ lo suficientemente grande. En particular, si consideramos $\varsigma = 0$, tenemos que las soluciones coinciden con la definición de PAM paracontrolado que dimos.

La demostración consta de formular un Teorema de punto fijo sobre la ecuación paracontrolada y los espacios paracontrolados ([PR, 2019], Teorema 5.5) y aplicarlo en el contexto de la ecuación del PAM.

Comentario: En particular, si consideramos la data estocástica de la ecuación de KPZ suave y las soluciones paracontroladas $w^{P,n}$ podemos deducir un resultado de convergencia de las soluciones paracontroladas suaves a una límite: En efecto, en el apéndice [5] demostramos que $\mathbb{Z}^n$ convergen en el espacio de la data a $\mathbb{Z}$. Si denotamos a w^P la solución paracontrolada asociada a $\mathbb{Z}$ obtenemos que

$$|||w^P \ : \ w^{P,n}||| \lesssim ||\mathbb{Z} - \mathbb{Z}^n||_{\mathcal{X}_{\text{kpz}}}$$

De este comentario podemos concluir la convergencia de las soluciones suaves a una solución de la ecuación del PAM asociada al ruido blanco. Incluimos este resultado en el siguiente corolario, pues permite dilucidar el uso de las estimadas sobre espacios parabólicos desarrollada en el Capítulo 1.

Corolario 3.2.1:

Las soluciones $w^{P,n}$ convergen en $\mathcal{L}^{\hat{\beta},\alpha+\varepsilon}_{e(l+t)}(\mathbb{R}^d)$ a un término w^P que satisface ser paracontrolado $w^P = w' \prec Z^{\uparrow} + w^{\#}$ y que satisface la EDP

$$\begin{aligned}\mathcal{L}w^P &= \Big[\mathcal{L}Z^{\vee\vee} + 2\mathcal{L}Z^{\vee\vee\vee} + \nabla Z \cdot \nabla Z^{\vee} + \big|\nabla Z^{\vee\vee}\big|^2 + 2\nabla Z^{\vee} \cdot \nabla Z^{\vee\vee}\Big] w^P \\ &\quad + 2\Big(\nabla Z + \nabla Z^{\vee} + \nabla Z^{\vee\vee}\Big) \cdot \nabla w^P\end{aligned}$$

$$w^P(0) = w_0$$

En particular, $w = w^P \cdot e^{Z+Z^{\vee}+Z^{\vee\!\!\vee}}$ define una solución paracontrolada a la ecuación del PAM rugoso dada por

$$\mathcal{L}w = w \diamond \xi$$

Demostración. Por el Teorema [3.2.2] tenemos que las sucesiones $(w^{\prime,n})_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}^{\hat{\beta},\alpha-\varepsilon}_{e(l+t)\rho_\lambda}$ y $(w^{\#,n})_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}_{e(l+t)^{2\alpha+1-\varepsilon}}$ definen sucesiones de Cauchy en sus respectivos espacios parabólicos; hecho que se sigue de la convergencia de las condiciones iniciales y en el espacio de la data estocástica. La estrategia será simplemente demostrar que de este hecho se sigue que $(w^{P,n})_{n\in\mathbb{N}}$ define una sucesión Cauchy en $\mathcal{L}^{\hat{\beta},\alpha+1-\varepsilon}_{e(l+t)}$. En efecto

$$\begin{aligned} ||w^{P,n} - w^{P,m}||_{\mathcal{L}^{\hat{\beta},\alpha+1-\varepsilon}_{e(l+t)}} &= ||w^{\prime,n} \prec Z^{\intercal,n} + w^{\#,n} - w^{\prime,m} \prec Z^{\intercal,m} - w^{\#,m}||_{\mathcal{L}^{\hat{\beta},\alpha+1-\varepsilon}_{e(l+t)}} \\ &\leq ||(w^{\prime,n} - w^{\prime,m}) \prec Z^{\intercal,n}||_{\mathcal{L}^{\hat{\beta},\alpha+1-\varepsilon}_{e(l+t)}} + ||w^{\prime,m} \prec (Z^{\intercal,n} - Z^{\intercal,m})||_{\mathcal{L}^{\alpha+1-\varepsilon}_{e(l+t)}} + ||w^{\#,n} - w^{\#,m}||_{\mathcal{L}^{\alpha+1-\varepsilon}_{e(l+t)}} \end{aligned}$$

Así, la idea va a ser demostrar que estos tres términos se pueden acotar debidamente. En la demostración acotaremos el primer y tercer término, pues el segundo es similar al primero. Comenzamos por el tercer término. Notamos que:

$$\begin{aligned} ||w^{\#,m} - w^{\#,n}||_{\mathcal{L}^{\hat{\beta},\alpha+1-\varepsilon}_{e(l+t)}} &= ||w^{\#,m} - w^{\#,n}||_{\mathcal{L}^{\hat{\beta},2\alpha+1-(\alpha+\varepsilon)}_{e(l+t)}} \\ &\lesssim ||T_l \cdot (w^{\#,m} - w^{\#,n})(T_l)||_{\mathcal{C}^{2\alpha+1-(\alpha+\varepsilon)}_{e(l+T_l)}} + (T_r - T_l)^{\varepsilon/2} \cdot ||w^{\#,m} - w^{\#,n}||_{\mathcal{L}^{\hat{\beta},2\alpha+1}_{e(l+t)}} \end{aligned}$$

y ambos términos pueden controlarse adecuadamente. Para el primero término se tiene que

$$\begin{aligned} ||(w^{\prime,n} - w^{\prime,m}) \prec Z^{\intercal,n}||_{\mathcal{L}^{\hat{\beta},\alpha+1-\varepsilon}_{e(l+t)}} &= ||\mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{L}[w^{P,n} - w^{P,m}) \prec Z^{\intercal,n}]\}||_{\mathcal{L}^{\hat{\beta},\alpha+1-\varepsilon}_{e(l+t)}} \\ &\lesssim ||\mathcal{L}[w^{\prime,n} - w^{\prime,m}) \prec Z^{\intercal,n}]||_{\mathcal{M}^{\hat{\beta}}\mathcal{C}^{\alpha+1-\varepsilon+2(a/\delta)-2}_{e(l+t)\rho_\lambda}} \\ &\lesssim ||\mathcal{L}[w^{\prime,n} - w^{\prime,m}) \prec Z^{\intercal,n}] - (w^{\prime,n} - w^{\prime,m}) \prec \nabla Z^n||_{\mathcal{M}^{\hat{\beta}}\mathcal{C}^{\alpha+1-\varepsilon+2(a/\delta)-2}_{e(l+t)\rho_\lambda}} \\ &\quad + ||(w^{\prime,n} - w^{\prime,m}) \prec \nabla Z^n||_{\mathcal{M}^{\hat{\beta}}\mathcal{C}^{\alpha+1-\varepsilon+2(a/\delta)-2}_{e(l+t)\rho_\lambda}} \\ &\lesssim ||w^{\prime,n} - w^{\prime,m}||_{\mathcal{L}^{\hat{\beta},\alpha-\varepsilon}_{e(l+t)}} \cdot \sup_{t\in[T_l,T_r]} ||Z^{\intercal}(t)||_{\mathcal{C}^{1+2(a/\delta)}_{\rho_\lambda}} \\ &\quad + ||w^{\prime,n} - w^{\prime,m}||_{\mathcal{L}^{\hat{\beta},\alpha-\varepsilon}_{e(l+t)}} \cdot \sup_{t\in[T_l,T_r]} ||\nabla Z^n||_{\mathcal{C}^{1+2(a/\delta)}_{\rho_\lambda}} \end{aligned}$$

y nuevamente estos términos se controlan adecuadamente. Concluimos así que $w^{P,n}$ debe converger en $\mathcal{L}^{\hat{\beta},\alpha+1-\varepsilon}_{e(l+t)}$ a un elemento $w^P = w' \prec Z^{\intercal} + w^{\#}$ que adicionalmente satisface la ecuación diferencial de la data, pues todos las operaciones son continuas. Con esto, concluimos finalmente que $w = w^P \cdot e^{Z+Z^{\vee}+Z^{\vee\!\!\vee}}$ es solución de la ecuación del PAM rugoso con ruido blanco espacial en $\mathbb{R}^3$. $\square$

3.2.3. Existencia y Unicidad de la KPZ paracontrolada

En esta sección establecemos la existencia y unicidad de las soluciones de la KPZ en el sentido expuesto en esta tesis. La herramienta crucial va a ser utilizar los argumentos de continuidad de la exponencial y logaritmo para pasar del PAM a la KPZ vía una transformada de Cole-Hopf. Para ello, primero necesitamos asegurar que podemos aprovechar estos mapeos. Este es el contenido del primer lema, el cual establece una cota inferior uniforme sobre las soluciones suaves de la KPZ.

Por los resultados de convergencia de la data estocástica 3.2 y de la hipótesis sobre la condición inicial, podemos asumir que existe $M > 0$ tal que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} ||\mathbb{Z}^n||_{\mathbb{X}_{\mathrm{kpz}}} + \sup_n ||h_0^n - Z^n(0)||_{\mathcal{C}^{2\alpha+1}_{p(\delta)}} \leq M$$

la primera cota por ser en particular una sucesión acotada y la segunda por convergencia.

Lema 3.2.1:

Tenemos que, uniformemente sobre $n \in \mathbb{N}$, $t \in [0, T]$ y $x \in \mathbb{R}^3$ vale la estimada

$$h^{P,n}(t,x) = \left[h^n - Z^n - Z^{\vee,n} - Z^{\curlyvee,n}\right](t,x) \gtrsim_M -(1+|x|)^\delta$$

Demostración. Demostraremos este lema aludiendo a un principio de comparación de EDP. Por un lado, tenemos que el término paracontrolado de la ecuación de KPZ satisface la ecuación diferencial

$$\begin{aligned}\mathcal{L}h^{\geq 3,n} =&[4\nabla Z^n \cdot \nabla Z^{\curlyvee,n} + 4\nabla Z^{\vee,n} \cdot \nabla Z^{\curlyvee,n} + |\nabla Z^{\vee,n}|^2 + |\nabla Z^{\curlyvee,n}|^2] \\ &+ [4\nabla Z^{\curlyvee,n} + 2\nabla Z^{\vee,n} + \nabla Z^n] \cdot \nabla h^{\geq 3,n} + |\nabla h^{\geq 3,n}|^2\end{aligned}$$

$$h^{\geq 3}(0) = h_0^n$$

Por otro lado, si consideramos la solución v^n de la ecuación

$$\begin{aligned}\mathcal{L}v^n =& -[4\nabla Z^n \cdot \nabla Z^{\curlyvee,n} + 4\nabla Z^{\vee,n} \cdot \nabla Z^{\curlyvee,n} + |\nabla Z^{\vee,n}|^2 + |\nabla Z^{\curlyvee,n}|^2] \\ &+ [4\nabla Z^{\curlyvee,n} + 2\nabla Z^{\vee,n} + \nabla Z^n] \cdot \nabla v^n\end{aligned}$$

$$v^n(0) = -h_0^n$$

se concluye por comparación que $h^{\geq 3,n} \geq -v^n$. En efecto, esto puede deducirse haciendo una transformación galileana en las ecuaciones para eliminar los términos de transporte (i.e. las componentes con $\nabla h^{\geq 3}$). Luego, el término $|\nabla h^{\geq 3,n}|^2 \geq 0$ de la primera ecuación permite concluir la comparación.

Si ahora consideramos la transformación $\tilde{u}^n := e^{v^n}$, es fácil comprobar que satisface la ecuación dierencial (se tiene que $\partial_t \tilde{u}^n = \tilde{u}^n \cdot \partial_t v^n$, $\nabla \tilde{u}^n = \tilde{u}^n \nabla v^n$ y $\Delta \tilde{u}^n = \tilde{u}^n \Delta v^n + \nabla \tilde{u}^n \cdot \nabla^v n$)

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\tilde{u}^n &= -[4\nabla Z^n \cdot \nabla Z^{\curlyvee,n} + 4\nabla Z^{\vee,n} \cdot \nabla Z^{\curlyvee,n} + |\nabla Z^{\vee,n}|^2 + |\nabla Z^{\curlyvee,n}|^2] \cdot \tilde{u}^n \\ &= +[4\nabla Z^{\curlyvee,n} + 2\nabla Z^{\vee,n} + \nabla Z^n] \cdot \nabla \tilde{u}^n - |\nabla v^n|^2/\tilde{u}^n\end{aligned}$$

$$\tilde{u}^n(0) = e^{-h_0^n}$$

y nuevamente por criterio de comparación tenemos que $\tilde{u}^n \leq u^n$ donde u^n resuelve la EDP

$$\begin{aligned}\mathcal{L}u^n &= -[4\nabla Z^n \cdot \nabla Z^{\overset{\vee}{\vee},n} + 4\nabla Z^{\vee,n} \cdot \nabla Z^{\overset{\vee}{\vee},n} + |\nabla Z^{\vee,n}|^2 + |\nabla Z^{\overset{\vee}{\vee},n}|^2] \cdot u^n \\ &= +[4\nabla Z^{\overset{\vee}{\vee},n} + 2\nabla Z^{\vee,n} + \nabla Z^n] \cdot \nabla u^n\end{aligned}$$

$$u^n(0) = e^{-h_0^n}$$

y esta ecuación admite y existe única solución por [3.2.2]. Además, podemos asegurar que exsite un κ suficientemente grande tal que

$$\sup_n ||u^n||_{\mathcal{L}^{\alpha+1}_{e(\kappa)}} < \infty$$

y de esta última estimada uniforme en n, concluimos la demostración. En efecto, en particular se tiene que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \Big\{ \sup_{t\in[0,T]} ||u^n(\cdot,t)||_{C^{\alpha}_{e(\kappa)}} \Big\} < \infty$$

y obtenemos en particular que, uniformemente en $n \in \mathbb{N}$, $t \in [0,T]$, $x \in \mathbb{R}^d$ y en $j \geq -1$ se tiene la estimada

$$|\Delta_j u^n| \leq 2^{-j\alpha} \cdot C \cdot e^{\kappa|x|^{\delta}} \lesssim 2^{-j\alpha} \cdot e^{(1+|x|)^{\delta}}$$

y con esto concluimos que

$$|u^n(x,t)| \leq \Big| \sum_{j\geq -1} \Delta_j u^n \Big| \lesssim e^{(1+|x|)^{\delta}}$$

y en particular obtenemos la estimada $u^n(x,t) \leq e^{(1+|x|)^{\delta}} \implies -\log(u^n(x,t)) \geq -(1+|x|)^{\delta}$. Así, como teniamos originalmente que $e^{h^n} \leq u^n$ concluimos por la monotonicidad del logaritmo la estimada de las soluciones paracontroladas de la ecuación de KPZ. $\square$

Adicionalemente, presentamos un resultado que nos asegura que $w^{P,n}$ es convergente en un espacio parabólico con algún peso exponencial lo suficientemente grande. Esto será clave para usar la continuidad de la Cole-Hopf.

Lema 3.2.2:

Sea $w^{P,n} = e^{h^n - Z^n - Z^{\vee,n} - Z^{\overset{\vee}{\vee},n}}$. Luego, existe un $\kappa \geq 0$ tal que

$$w^{P,n} \xrightarrow{n\to\infty} w^P = we^{-Z-Z^{\vee}-Z^{\overset{\vee}{\vee}}} \quad \text{en } \mathcal{L}^{\alpha+1}_{e(\kappa)}$$

donde w es una solución del PAM sobre todo $\mathbb{R}^3$ con condición inicial $w_0 = e^{h_0}$.

Demostración. Consideremos la solución de la KPZ suavizada h^n con condición inicial $h^n(0) = h_0^n$. Como consideramos que la data se construyó de tal forma que $Z^{\vee,n}(0) = 0 Z^{\overset{\vee}{\vee},n}(0) = 0$, tenemos que $e^{h_0^n} = e^{h_0^n - Z^n(0)} \cdot e^{Z^n(0)} \equiv w_0 \cdot e^{Z^n(0)}$ y esta última expresión tiene la forma de condición inicial del PAM (pues $e^{h_0^n - Z^n(0)} \in C^{2\alpha+1}_{e(\ell)}$ por las hipótesis sobre las condiciones iniciales). Adicionalmente, tenemos que

$$w^{P,n} = e^{h^n} \cdot e^{-Z^n - Z^{\vee,n} - Z^{\overset{\vee}{\vee},n}}$$

son soluciones del PAM. Así, concluimos haciendo $n \to \infty$. En efecto, e^{h^n} converge a e^h que debe ser una solución del PAM. Con esto, se concluye la prueba. $\square$

Con este lema, podemos usar la continuidad del logaritmo para construir un candidato a solución de la KPZ.

Proposición 3.2.2:

Existe un $\kappa \geq 0$ tal que la solución de la KPZ suavizada y renormalizada h^n converge en $\mathcal{L}^{\alpha}_{e(\kappa)}$ a alguna función h. Esto es

$$h^{P,n} = h^n - Z^n - Z^{\vee,n} - Z^{\vee\!\vee,n} \xrightarrow{n\to\infty} h - Z - Z^{\vee} - Z^{\vee\!\vee} \equiv h^p \text{ en } \mathcal{L}^{\alpha+1}_{e(\kappa)}$$

lo que en particular implica que tenemos la convergencia

$$h^n \xrightarrow{n\to\infty} h \text{ en } \mathcal{L}^{\alpha+1}_{e(\kappa)}$$

Además, tenemos que $h = \log(w)$, donde w es la solución del PAM con condición inicial $w_0 = e^{h_0}$ y $h^P = \log(w^P)$.

Demostración. Si h^n es la solución de la KPZ renormalizada, entonces por lema 3.2.3 tenemos que

$$h^{P,n}(t,x) = [h^n - Z^n - Z^{\vee,n} - Z^{\vee\!\vee,n}](t,x) \gtrsim_M -(1+|x|)^{\delta}$$

lo que en particular implica que (tomando exponencial)

$$\inf_{t\in[0,T]} w^{P,n}(t,x) \geq C(M) \cdot e^{-|r|\cdot|x|^{\delta}}$$

para algún $|r| > 0$. Así, podemos tomar logaritmo y asegurar que por su continuidad

$$h^{P,n} = \log(w^{P,n}) \xrightarrow{n\to\infty} \log(w^P) = h^P \text{ en } \mathcal{L}^{\alpha+1}_{e(\kappa)}$$

En particular, también deducimos que

$$h^n \xrightarrow{n\to\infty} h = h^P + Z + Z^{\vee} + Z^{\vee\!\vee} = \log(w) \text{ en } \mathcal{L}^{\alpha}_{e(\kappa)}$$

$\square$

Con esto, ya tenemos un candidato a solución de la KPZ renormalizada con ruido blanco. Ahora debemos demostrar que efectivamente es solución en el sentido que hemos expuesto. Hasta ahora hemos demostrado que

$$h = Z + Z^{\vee} + Z^{\vee\!\vee} + h^P$$

con $h^P \in \mathcal{L}^{\alpha+1}_{e(\kappa)}$. Resta demostrar entonces que h^P posee una estructura paracontrolada de la forma $h^P = h' \prec Y^{\uparrow} + h^{\#}$ para $h' \in \mathcal{L}^{\alpha}_{e(\kappa)}$ y $h^{\#} \in \mathcal{L}^{2\alpha+1}_{e(\kappa)}$. Esto último lo deduciremos del hecho que ya sabemos que cada h^n es efectivamente paracontrolado, por lo que la idea será probar que sus componentes (derivada y residuo) convergen a límites en los respectivos espacios parabólicos y que dan a h una estructura paracontrolada.

Lema 3.2.3:

Existe un $\kappa \geq 0$ tal que

$$h^{\prime,n} \xrightarrow{n\to\infty} h' := \nabla Z^{\overset{\vee}{\vee}} + \nabla h^{\geq 3}, \text{ en } \mathcal{L}^{\alpha}_{e(\kappa)}(\mathbb{R}^d)$$

Demostración. Como cada h^n es solución de la ecuación de KPZ paracontrolada suavizada, tenemos en particular que su derivada viene caracterizada por

$$h^{\prime,n} = \nabla Z^{\overset{\vee}{\vee},n} + \nabla h^{\geq 3,n}$$

y por la proposición anterior sabemos que $h^{\geq 3,n}$ converge a $h^{\geq 3}$ en el espacio parabólico $\mathcal{L}^{\alpha+1}_{e(\kappa)}(\mathbb{R}^d)$. Luego, obtenemos en particular la convergencia

$$h^{\geq 3,n} + Z^{\overset{\vee}{\vee},n} \xrightarrow{n\to\infty} h^{\geq 3} + Z^{\overset{\vee}{\vee}}, \text{ en } \mathcal{L}^{\alpha+1}_{e(\kappa)}(\mathbb{R}^d)$$

En particular, deducimos la convergencia de las derivadas

$$\nabla h^{\geq 3,n} + \nabla Z^{\overset{\vee}{\vee},n} \xrightarrow{n\to\infty} \nabla h^{\geq 3} + \nabla Z^{\overset{\vee}{\vee}}, \text{ en } \mathcal{L}^{\alpha}_{e(\kappa)}(\mathbb{R}^d)$$

lo que concluye la demostración. □

Ahora vemos la convergencia del resto.

Lema 3.2.4:

Existe un $\kappa \geq 0$ tal que la sucesión $h^{\#,n}$ converge a una función $h^{\#}$ en $\mathcal{L}^{2\alpha+1}_{e(\kappa)}$. Además, $h^{\#}$ satisface que

$$h^{\#} = h^P - h' \prec Y^{\overset{\bullet}{|}}$$

Adicionalmente, satisface la ecuación:

$$\mathcal{L}h^{\#} = G(\mathbb{Z}, h^{\geq 3}, h') + \nabla Z \circ \nabla\nabla h^{\#}, \quad h^{\#}(0) = h_0$$

donde

$$\begin{aligned} G(\mathbb{Z}, h^{\geq 3}, h') =& \mathcal{L}\left(Z^{\overset{\overset{\vee}{\vee}}{\vee}} + Z^{\overset{\vee\vee}{\vee}}\right) + \nabla Z \prec \nabla Z^{\overset{\vee}{\vee}} + \nabla Z^{\vee} \cdot \nabla Z^{\overset{\vee}{\vee}} + \frac{1}{2}\left|\nabla Z^{\overset{\vee}{\vee}}\right|^2 + \frac{1}{2} \cdot \left|\nabla h^{\geq 3}\right|^2 \\ &+ \left(\nabla Z^{\vee} + \nabla Z^{\overset{\vee}{\vee}}\right) \cdot \nabla h^{\geq 3} + \nabla Z \prec \nabla h^{\geq 3} + \nabla Z \circ \nabla(h' \prec Z^{\overset{\bullet}{|}}) \\ &+ [h' \prec \mathcal{L}(Z^{\overset{\bullet}{|}}) - \mathcal{L}(h' \prec Z^{\overset{\bullet}{|}})] \end{aligned}$$

Demostración. Ya sabemos que h^n es una solución paracontrolada para la ecuación de KPZ paracontrolada. En particular, tenemos que para cada $n \geq 1$ se cumple

$$\mathcal{L}h^{\#,n} = G(\mathbb{Z}^n, h^{\geq 3,n}, h^{\prime,n}) + \nabla Z^n \circ h^{\#,n}, \quad h^{\#,n}(0) = h^n_0$$

Además, sabemos h^n_0 converge a h_0 en $\mathcal{C}^{2\alpha+1}_{p(\delta)}(\mathbb{R}^d)$, también que $\mathbb{Z}^n$ converge a $\mathbb{Z}$ en el espacio $\mathcal{X}_{\text{kpz}}$ y tenemos las convergencias $h^{\geq 3,n}$ a $h^{\geq 3}$ en $\mathcal{L}^{\alpha+1}_{e(\kappa)}(\mathbb{R}^d)$, así como de $h^{\prime,n}$ al término h' en $\mathcal{L}^{\alpha}_{e(\kappa)}$. Con todas estas convergencias, podemos concluir la convergencia del resto mediante la dependencia continua sobre todos estos parámetros la convergencia

$$h^{\#,n} \xrightarrow{n\to\infty} h^{\#} \text{ en } \mathcal{L}^{2\alpha+1}_{e(\kappa)}(\mathbb{R}^d)$$

considerando posiblemente un κ más grande y donde $h^{\#}$ es la solución del resto de la KPZ. Con esto concluimos el resultado. □

Con estos dos últimos resultados podemos finalmente concluir la existencia de una solución paracontrolada de la KPZ en el sentido expuesto al inicio del Capítulo.

Teorema 3.2.3:

Para cada $\mathbb{Z} \in \mathcal{X}_{\text{kpz}}$ y condición inicial h_0 que satisface la hipótesis impuesta tenemos que la función h construida como límite de las soluciones paracontroladas suavizadas es una solución paracontrolada de la KPZ en $(h_0, \mathbb{Z})$.

Demostración. Esto se sigue directamente de recopilar las conclusiones que hemos obtenido. En primer lugar, sabemos que h tiene la estructura correcta por el lema 3.2.3 y su resto también posee derivada y resto correctos por los lemas 3.2.3. Esto concluye la existencia. □

Para concluir la unicidad de la solución, la idea va a ser utilizar que ya sabemos que el PAM posee solución única. Así, lo primero que necesitamos verificar es que la estructura paracontrolada se preserva vía la transformación de Cole-Hopf.

Lema 3.2.5:

Supongamos una función $h^{\geq 3} \in C^{\alpha+1}_{e(l)}(\mathbb{R}^d)$ que es paracontrolada, en el sentido que $h^{\geq 3} = h' \prec Z^{\dot{|}} + h^{\#}$ donde $h' \in \mathcal{L}^{\alpha}_{e(l)}(\mathbb{R}^d)$ y $h^{\#} \in \mathcal{L}^{2\alpha+1}_{e(l)}(\mathbb{R}^d)$. Supongamos además que $||h^{\geq 3}||_{L^{\infty}_{p(\delta)}(\mathbb{R}^d)} < \infty$, entonces para $w^P = e^{h^{\geq 3}}$ se cumple la descomposición

$$w^P = w' \prec Z^{\dot{|}} + w^{\#}$$

donde $w' = w^P \cdot h' \in \mathcal{L}^{\alpha}_{e(\kappa)}(\mathbb{R}^d)$ y $w^{\#} \in \mathcal{L}^{2\alpha'+1}_{e(\kappa)}(\mathbb{R}^d)$ para cierto $\kappa \geq 0$ y para todo $\alpha' < \alpha$.

Demostración. La demostración es análoga a la demostración de ([PR, 2019],), con algunas pequeñas modificaciones. □

Con este resultado ya podemos concluir la unicidad de la KPZ paracontrolada sobre todo el espacio.

Teorema 3.2.4:

Existe una única solución paracontrolada de la ecuación KPZ definida según [3.2], bajo la condicion que

$$||h^{\geq 3}||_{L^{\infty}_{\rho_\lambda}} < +\infty$$

Además, para $\mathbb{Z}_i \in \mathcal{X}_{\text{kpz}}$ h_0^i cumpliendo la hipótesis de condición inicial con

$$||\mathbb{Z}_i||_{\mathcal{X}_{\text{kpz}}}, \ \sup_{n\in\mathbb{N}} ||h^{i,n}||_{C^{2\alpha+1}_{\rho_\delta}} \leq M$$

tenemos la siguiente estimada para la estructura paracontrolada en algún $\kappa = \kappa(M)$

$$\begin{aligned} ||h_1^{\geq 3} - h_2^{\geq 3}||_{\mathcal{L}^{\alpha+1}_{e(\kappa)}(\mathbb{R}^d)} + ||h_1' - h_2'||_{\mathcal{L}^{\alpha}_{e(\kappa)}(\mathbb{R}^d)} + ||h_1^\# - h_2^\#||_{\mathcal{L}^{2\alpha+1}_{e(\kappa)}(\mathbb{R}^d)} \\ \lesssim_M ||\mathbb{Z}_1 - \mathbb{Z}_2||_{\mathcal{X}_{\text{kpz}}} + ||h_0^1 - h_0^1||_{C^{2\alpha+1}_{\rho_\delta}(\mathbb{R}^d)} \end{aligned}$$

Finalmente, la función $w = e^h$ es una solución del PAM en el sentido expuesto en [3.2].

Demostración. Ya hemos establecido la existencia en el resultado anterior, por lo que ahora probaremos unicidad. Sea entonces h una solución de la ecuación de KPZ con $||h^{\geq 3}||_{L^\infty_{\rho_\delta}(\mathbb{R}^d)} < \infty$. Además, del lema anterior deducimos que $w^P := e^{h^{\geq 3}}$ es paracontrolado, por lo que si demostramos que satisface la ecuación del PAM, entonces debe ser única solución. Finalmente, tomando logaritmo concluiríamos la unicidad de la ecuación de KPZ.

Consideremos el caso suave para poder aplicar la regla de la cadena. En este caso tenemos que

$$\partial_t w^P = w^P \cdot \partial_t h^{\geq 3} \quad ; \quad \Delta w^P = w^P \cdot [|\nabla h^{\geq 3}|^2 + \Delta h^{\geq 3}]$$

de donde deducimos que

$$\begin{aligned} \mathcal{L} w^P &= w^P \cdot \mathcal{L} h^{\geq 3} - w^P \cdot |\nabla h^{\geq 3}|^2 \\ &= w^P \cdot \left[4\nabla Z \cdot \nabla Z^{\curlyvee} + 4\nabla Z^{\vee} \cdot \nabla Z^{\curlyvee} + |\nabla Z^{\vee}|^2 + |\nabla Z^{\curlyvee}|^2 \right] \\ &\quad + w^P \cdot [4\nabla Z^{\curlyvee} + 2\nabla Z^{\vee} + \nabla Z] \diamond \nabla h^{\geq 3} \end{aligned}$$

donde el símbolo $\diamond$ representa el producto que requiere la estructura paracontrolada para estar bien definido. Si adicionalmente utilizamos el hecho que $w^P(\nabla Z \diamond \nabla h^{\geq 3}) = \nabla Z \diamond \nabla w^P$ (argumento que se sigue del hecho que la igualdad vale para el caso suave y luego tomando límite todo converge por continuidad del producto) tenemos que w^P satisface la ecuación de [3.2], por lo que debe ser la solución paracontrolada del PAM por proposición anterior. Las dependencias de los parámetros se siguen de aplicar las propiedades Lipchistz de la exponencial y logaritmo. $\square$

Capítulo 4

Polímeros continuos, la medida de polímeros y trabajo futuro

En este capítulo presentamos el modelo de polímeros dirigidos sobre $\mathbb{Z}^d$, los cuales representan un modelo simplificado para cadenas de monómeros en medios acuosos con impurezas. En particular, lo que se quiere estudiar es cómo sería la forma típica del polímero dado un desorden particular del medio y, suponiendo además que el polímero tiende a minimizar su energía (no va a competir mucho por ocupar sitios con un desorden muy fuerte), la manera de modelar la distribución de su forma es una medida de Gibbs.

A partir de este modelo, múltiples trabajos han sido realizados. En particular, en [AKQ, 2010] se propone una versión continua del modelo para $d = 1$, entregando la expresión para la distribución de la forma del polímero, pero resulta que dicha expresión se encuentra altamente mal definida.

En [CC, 2018] se logró hacer sentido a esta medida en el toro d-dimensional mediante un problema de martingala asociado a una ecuación diferencial estocástica muy singular y es esta última ecuación la que tiene relación con la solución de la KPZ. Nuestro objetivo es extender dicha construcción sobre todo el espacio. Para ello, la idea es utilizar los resultados obtenidos en la solución de la ecuación de KPZ sobre todo $\mathbb{R}^3$.

En este capítulo de la Tesis, revisaremos brevemente el modelo de polímeros dirigidos sobre $\mathbb{Z}^d$, un vistazo a la medida de polímeros continuos, lo necesario para entender lo que es un problema de Martingala, cómo se relaciona la ecuación singular con la medida de polímeros contínuos y las ideas detrás de su construcción con técnicas paracontroladas.

4.1. Polímeros Dirigidos

Para modelar un polímero dirigido sobre $\mathbb{Z}^d$ en un medio acuoso con desorden utilizaremos una medida de Gibbs sobre el caso sin desorden. En particular, los ingredientes esenciales del modelo son dos:

- Supondremos que la forma del polímero se arma con una caminata aleatoria simétrica sobre $\mathbb{Z}^d$en ausencia de desorden.
- Modelaremos el desorden por variables aleatorias i.i.d.

Más concretamente, consideramos sobre el espacio $\Omega_{\text{tray}} = (\mathbb{Z}^d)^{\mathbb{N}}$ con la σ-álgebra de cilindros $\mathcal{F}$ y la familia de medidas $\{P_x\}_{x\in\mathbb{Z}^d}$ asociada a la cadena de Markov de la caminata aleatoria simétrica. Además, precisamos la definición de entorno.

Definición 4.1.1:

Consideramos sobre $\Omega = \mathbb{R}^{\mathbb{N}\times\mathbb{Z}^d}$ con la σ-álgebra de cilindros y la medida producto $\mathbb{P}$ el proceso canónico i.i.d. no constante $\omega = \{\omega(n,x) \ : \ (n,x) \in \mathbb{N}\times\mathbb{Z}^d\}$ tal que

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[e^{\beta\cdot\omega(n,x)}] < \infty, \quad \forall\ \beta \in \mathbb{R}$$

Ejemplos de variables que cumplen esta condición son las Bernoulli o las normales. En particular, la última condición es necesaria para definir correctamente la medida de Gibbs sobre el espacio de trayectorias. La idea es aleatorizar las formas de la cadena de polímero para cada largo $n \in \mathbb{N}$.

Definición 4.1.2:

Para cada $n > 0$ definimos la medida de probabilidad $P_n^{\beta,\omega}$ sobre $(\Omega_{\text{tray}}, \mathcal{F})$ tal que

$$P_n^{\beta,\omega}(dx) = \frac{e^{\beta\cdot H_n(x)}}{Z_n(\omega;\beta)} P(dx)$$

donde $\beta > 0$, H_n es el Hamiltoniano de la trayectoria y cumple que

$$H_n(x) = H_n^{\omega}(x) = \sum_{j=1}^{n} \omega(j, x_j)$$

Finalmente, $Z_n(\omega;\beta)$ es función de partición del sistema, la cual viene dada por

$$Z_n(\beta;\omega) := \mathbb{E}_P\left[e^{\beta\cdot\sum_{j=1}^{n}\omega(j,S_j)}\right]$$

Las preguntas clásicas detrás del modelo giran en torno a estudiar el comportamiento de la forma del polímero junto con el desorden cuando $n \to \infty$. No cubrimos el detalle de estos trabajos, pero presentamos la referencias [Comets, 2017] para el caso de polímeros dirigidos y [Holl, 2009] para el estudio de modelos de polímeros en general.

En [AKQ, 2010] se planteó estudiar el comportamiento de los polímeros discretos escalados de forma que definieran una versión continua, es decir, la forma del polímero viene dada por un Movimiento Browniano $(B_t)_{t\geq 0}$ en $\mathbb{R}^d$ que interactua con un medio desordenado, el cual modelamos con un ruido blanco espacial ξ sobre $\mathbb{R}^d$. La expresión (formal) de la medida de polímeros en este caso viene dada por

$$\mathbb{P}_{\beta}^{\xi}(dB) := \frac{1}{Z(\beta,\xi)} \cdot e^{\beta\cdot\int_0^t \xi(s,B_s)\,ds}\ P(dB)$$

Esta expresión es meramente formal y debe ser interpretada. En efecto, el ruido blanco es una distribución irregular, por lo que no es claro qué significa integrarlo con respecto a una trayectotria Browniana. En particular, la constante de normalización para volver a $\mathbb{P}_{\beta}^{\xi}$ una medida de probabilidad se vuelve infinita.

El objetivo ahora es explorar una manera de dar sentido a la medida de polímeros continua mediante técnicas paracontroladas. Para ello, seguiremos los enfoques de [CC, 2018] y [PR, 2019], en donde el problema se traslada al estudio de un problema de Martingala para una ecuación diferencial estocástica singular.

4.2. Problemas de Martingala

En esta sección revisamos las ideas esenciales que hay que tener presente sobre los problemas de Martingala, los cuales representan un enfoque alternativo para la descripción de difusiones aleatorias [SV, 2007]. La idea es que la distribución de difusiones pueden caracterizarse completamente bajo la condición de que otros procesos definan martingalas.

Este tipo de resultados son comunes en análisis estocástico. Veremos algunos ejemplos clásicos y muy útiles para ilustrar esta idea.

Proposición 4.2.1:

Levy: Sea $(X_t)_{t\geq 0}$ un proceso estocástico unidimensional con trayectorias continuas y $X_0 = 0$. Luego, tenemos que $(X_t)_{t\geq 0}$ es un movimiento browniano estándar, si y solo si, $(X_t^2 - t)_{t\geq 0}$ define una martingala local.

Proposición 4.2.2:

Watanabe: Sea $(N_t)_{t\geq 0}$ un proceso de conteo, es decir, un proceso estocástico con $N_0 = 0$ el cual es constante salvo por saltos de altura 1 (en particular sus trayectorias son Cadlag). Luego, $(N_t)_{t\geq 0}$ es un proceso de Poisson de parámetro λ, si y solo si, el proceso $(N_t - \lambda \cdot t)_{t\geq 0}$ es una martingala

Estos resultados son clásicos y muy útiles en diversos problemas del análisis estocástico. Finalizamos esta serie de resultados con uno más general, pues conecta las martingalas con la Teoría de Procesos de Markov. Su demostración puede encontrarse en ([Gall, 2016], Teorema 6.14).

Proposición 4.2.3:

Sea E un espacio métrico localmente compacto, $C_0(E)$ el conjunto de funciones continuas que tienden a 0 en infinito y L el generador asociado a un semi-grupo de Feller $(Q_t)_{t\geq 0}$ con dominio $\mathcal{D}(L)$. Luego, si $(X_t^x)_{t\geq 0}$ es un proceso $(Q_t)_{t\geq 0}$-Markov que empieza en $x \in E$ con trayectorias Cadlag, entonces: Dados $h, g \in C_0(E)$ son equivalentes:

- $h \in \mathcal{D}(L)$ y $Lh = g$.
- Para cada $x \in E$ se tiene que el proceso estocástico

  $$\left(h(X_t^x) - \int_0^t g(X_s^x)\, ds \right)_{t\geq 0}$$

  define una martingala con respecto a la filtración canónica del proceso $(X_t^x)_{t\geq 0}$.

Estos resultados entregan una intuición de que ciertos procesos al ser martingalas pueden caraterizar únicamente otros. En [SV, 2024] se propone una manera de construir difusiones sobre $\mathbb{R}^d$ utilizando este enfoque de Martingala. En esta definición ω representa el proceso canónico en $C([0,\infty),\mathbb{R}^d)$.

Definición 4.2.1:

Sea $L : \mathcal{D} \subseteq \mathcal{B}_b(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{B}_b(\mathbb{R}^d)$ un operador lineal. Decimos que una medida P sobre $C([0,+\infty),\mathbb{R}^d)$ define una solución al problema de Martingala con condición inicial X_0 si

- P es una medida de probabilidad sobre ($C([0,+\infty),\mathbb{R}^d, \sigma(\omega(t)\ t \geq 0)$) tal que $P(\omega(0) = X_0)$.
- Para cada $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ se tiene que

$$f(X(t)) - \int_0^t (Lf)(X(s))\, ds$$

define una martingala relativa a ($C([0,+\infty),\mathbb{R}^d, \sigma(\omega(t)\ t \geq 0), P$).

A partir de aquí es posible hacer un estudio de existencia y unicidad de soluciones. Más aún, existen conexiones entre este enfoque para describir difusiones, la perspectiva de Itó y la ecuación de Fokker-Planck bajo ciertas condiciones de regularidad en los coeficientes de la difusión ([Kurtz, 2010], [SV, 2007]).

4.3. Ecuación Singular y Medida de Polímeros Continuos

El enfoque de las técnicas paracontroladas no solo ha permitido interpretar ecuaciones diferenciales parciales estocásticas con no linealidades, sino que también ha permitido estudiar ecuaciones singulares, es decir, con términos disribucionales. Un ejemplo de esto han sido las ecuaciones diferenciales estocásticas con drift distribucional. En este caso, un trabajo pionero es [DD, 2016] que mediante el uso de rough paths interpretó una clase de ecuaciones singulares. En el caso de [CC, 2018] se utilizaron técnicas paracontroladas para definir la medida de polímeros continua sobre el toro d-dimensional.

Comenzamos esta sección entregando una motivación de por qué estudiar dinámicas dadas por una EDE singular puede permitir definir la medida de polímero continua: Dado $\varepsilon > 0$, consideremos ξ_ε una mollificación del ruido blanco espacial sobre $\mathbb{R}^d$. Dada la medida de Wiener $\mathbb{W}$ y un horizonte de tiempo $T_h > 0$ definimos la medida Q_T^ε a partir de la derivada de Radon-Nykodim

$$\frac{dQ_T^\varepsilon}{d\mathbb{W}}((\omega_s)_{s\in[0,T_h]}) := Z_\varepsilon^{-1} \cdot \exp\left\{ \int_0^T \xi_\varepsilon(\omega_s)\, ds \right\}$$

que represente la medida de polímeros continua con ruido blanco suavizado. Ahora sea h^ε la solución de la ecuación KPZ suavizada con condición inicial nula

$$\partial_t h^\varepsilon = \frac{1}{2}\Delta h^\varepsilon + \frac{1}{2}|\nabla h^\varepsilon|^2 + \xi_\varepsilon - c_\varepsilon \quad ; \quad h(0,x) = 0$$

Luego, definimos la martingala local y su variación cuadrática

$$M_t^\varepsilon = \int_0^t \nabla h^\varepsilon(T-s, B_s)\, dB_s \quad ; \quad [M^\varepsilon]_t = \int_0^t |\nabla h^\varepsilon(T-s,B_s)|^2\, ds$$

(la cual, de hecho, define una martingala, pues su proceso de variación cuadrática es acotado). De donde obtenemos por el Teorema de Girsanov 5.2 que la ley de

$$\tilde{Q}_T^{\varepsilon}(d\omega) = e^{M_T^{\varepsilon} - \frac{1}{2}[M^{\varepsilon}]_T} \cdot \mathbb{W}(d\omega)$$

puesta bajo el proceso canónico hace que este posea la distribución del proceso

$$dX_t^{\varepsilon} = \nabla h^{\varepsilon}(T-t,x)\,dt + dB_t, \quad X_0 = 0$$

Esta es la primera instancia de conexión entre la medida de polímeros y las ecuaciones singulares: La regularidad de ∇h^{ε} es de $-d/2+1$ que es menor que cero para $d=3$, por lo que el drift de la EDE es singular y determinar una caracterización para la ley de este proceso nos permite dar sentido a la medida de polímeros. Así, una idea sería relacionar la medida de polímero con el estudio de difusiones singulares.

Resulta que las medidas $\tilde{Q}_T^{\varepsilon}$ y Q_T^{ε} están íntimamente relacionadas: Si aplicamos la fórmula de Ito 5.2

$$\begin{aligned} dh^{\varepsilon}(T-t,X_t^{\varepsilon}) &= -\partial_t h^{\varepsilon}(T-t,X_t^{\varepsilon}) + \nabla h^{\varepsilon}(T-t,X_t^{\varepsilon})\cdot[\nabla h^{\varepsilon}(T-t,X_t^{\varepsilon})\,dt + dB_t] + \frac{1}{2}\Delta h^{\varepsilon}(T-t,X_t^{\varepsilon})\,dt \\ &= \{-\partial_t h^{\varepsilon} + \frac{1}{2}\Delta h^{\varepsilon} + |\nabla h^{\varepsilon}|^2\}(T-t,X_t^{\varepsilon})\,dt + \nabla h^{\varepsilon}(T-t,X_t^{\varepsilon})\,dB_t \\ &= \left\{\frac{1}{2}|\nabla h^{\varepsilon}|^2 - \xi_{\varepsilon} + c_{\varepsilon}\right\}(T-t,X_t^{\varepsilon})\,dt + \nabla h^{\varepsilon}(T-t,X_t^{\varepsilon})\,dB_t \end{aligned}$$

e interpretando en forma integral tenemos

$$h^{\varepsilon}(0,X_T^{\varepsilon}) - h(T,X_0^{\varepsilon}) = \int_0^T \left\{\frac{1}{2}|\nabla h^{\varepsilon}|^2 - \xi_{\varepsilon} + c_{\varepsilon}\right\}(T-s,X_s^{\varepsilon})\,ds + M_T^{\varepsilon}$$

de donde deducimos que la densidad de $\tilde{Q}_T^{\varepsilon}$ podemos reescribirla como

$$e^{M_T^{\varepsilon} - \frac{1}{2}[M^{\varepsilon}]_T} = \int_0^T \xi^{\varepsilon}(T-s,X_s)\,ds - c_{\varepsilon}T - h^{\varepsilon}(T,x)$$

y finalmente deducimos que

$$\tilde{Q}_T^{\varepsilon}(d\omega) = Z_{\varepsilon}^{-1}\cdot Q_T^{\varepsilon}(d\omega)$$

En particular, el estudio de las mollificaciones de “la medida de polímeros” $(Q_T^{\varepsilon})_{\varepsilon>0}$ puede trasladarse al estudio de la familia $(\tilde{Q}_T^{\varepsilon})_{\varepsilon>0}$ construida a partir de una martingala que involucra mollificaciones de la ecuación de KPZ. Adicionalmente, estas medidas $(Q_T^{\varepsilon})_{\varepsilon>0}$ corresponden a la ley de los procesos $(X^{\varepsilon})_{\varepsilon>0}$, los cuales resuelven una EDE que en el límite cuando $\varepsilon\to 0$ se vuelve singular.

La idea esencial seguida en [CC, 2018] radica en utilizar estas medidas $(\tilde{Q}_T^{\varepsilon})_{\varepsilon>0}$ y estudiar su convergencia en ley para, al mismo tiempo, estudiar la convergencia en ley de las medidas de polímeros continua. Al hacer $\varepsilon\to 0$ las sub-sucesiones deberían, formalmente, converger a una ley del proceso X tal que

$$dX_t = \nabla h(t,X_t)\,dt + dB_t$$

que define una EDE singular. Así, una tarea adicional que se sortea en el trabajo de Cannizzaro y Chouk es proponer y resolver un problema de Martingala para esta ecuación diferencial, dandole sentido así a esta difusión generalizada. El problema de martingala que proponen es el siguiente

Definición 4.3.1:

Sea $T > 0$ y $V \in C_T \mathcal{C}^\beta$ (en nuestro caso $V = \nabla h$). Sea $\Omega = C([0,T], \mathbb{R}^d)$ y $\mathcal{F} = \mathcal{B}(C([0,T], \mathbb{R}^d))$ la σ-álgebra de Borel. Decimos que una medida de probabilidad $\mathbb{P}$ sobre $(\Omega, \mathcal{F})$ resuelve el problema de martingala que parte en $x \in \mathbb{R}^d$ y asociado al operador

$$\mathcal{G}^V := \partial_t + \frac{1}{2}\Delta + V \cdot \nabla$$

si el proceso canónico $X_t(\omega) := \omega(t)$ satisface que:

- $\mathbb{P}(X_0 = x) = 1$
- Para todo $\tau \leq T$, $f \in C_T L^\infty$ y $u^\tau \in \mathcal{C}^{\beta+2}$ el proceso

$$\left(u(t, X_t) - \int_0^t f(s, X_s)\, ds \right)_{t \in [0,\tau]}$$

define una martingala cuadrado integrable bajo $\mathbb{P}$ y respecto a la filtración canónica y donde u es la solución a la ecuación de generador $\mathcal{G}^V u = f$

4.4. Trabajo Futuro

A diferencia del artículo de Cannizaro y Chouk, el contexto sobre todo el espacio obliga a considerar espacios de Besov con peso. En esta tesis ya hemos demostrado que la ecuación de KPZ sobre todo el espacio admite una única solución paracontrolada en espacios con peso.

El paso siguiente sería trasladar la construcción de la medida de polímeros hecha en [CC, 2018] al caso con peso y en dimensiones $d = 2, 3$. La construcción de la medida de polímeros a partir de un ruido blanco espacio temporal en dimensión $d = 1$ fue llevada a cabo en [PR, 2019]. Como trabajo futuro y no incluido en esta tesis está realizar dicha construcción. En particular, construir y resolver (en un sentido paracontrolado) un problema de martingala sobre todo el espacio y utilizarlo para caracterizar la convergencia en ley de las versiones mollificadas de la medida de polímeros.

Una idea llevada a cabo en [GP, 2017] y en [PR, 2019] que se planea incluir en el estudio de la medida de polímeros es utilizar una descomposición adicional de la medida de polímeros. Para concluir este capítulo presentamos el argumento formal y sus posibles ventajas en nuestro contexto.

Por definición de la derivada de Radon-Nikodym de Q_T tenemos que (siendo $\overleftarrow{f}(t) := f(T-t)$)

$$\begin{aligned} \frac{dQ_T}{d\mathbb{W}} &= \exp\Big(\int_0^T \Big\{ \frac{1}{2}|\nabla \overleftarrow{h}|^2 + (\eta - c^{\vee}) \Big\}\, ds + \overleftarrow{h}(t, X_t) - \overleftarrow{h}(0, X_0) - \frac{1}{2}\int_0^T |\nabla \overleftarrow{h}|^2\, ds \Big) \\ &= \exp\Big(\overleftarrow{h}(t, X_t) - \overleftarrow{h}(0, X_0) + \int_0^T (\eta - \theta^{\vee})\, ds \Big) \end{aligned}$$

y lo que haremos será introducir en el análisis una nueva medida cuya dependencia esté dada solo por elementos de la data estocástica. En efecto, consideramos $U := \overleftarrow{Z} + \overleftarrow{Z}^{\vee}$ de forma que

$$\Big(\partial_t + \frac{1}{2}\Delta\Big) U = -|\nabla \overleftarrow{Z}|^2 - (\eta - c^{\vee})$$

En particular si usamos Itô, deducimos que

$$\begin{aligned}
U(t, X_t) - U(0, X_0) &= \int_0^t \frac{\partial U}{\partial s}(s, X_s)\, ds + \int_0^t \nabla U(s, X_s)\, dX_s + \frac{1}{2} \cdot \int_0^t \Delta U(s, X_s)\, ds \\
&= \int_0^t \nabla U(s, X_s)\, dX_s + \int_0^t \big(\partial_s + \tfrac{1}{2}\Delta\big) U(s, X_s)\, ds \\
&= \int_0^t \nabla U(s, X_s)\, dX_s - \int_0^t |\nabla U - \nabla \overleftarrow{Z}^{\curlyvee}|^2(s, X_s)\, ds - \int_0^t (\eta - c^{\curlyvee})\, ds \\
&= \int_0^t \nabla U(s, X_s)\, dX_s - \frac{1}{2}\int_0^t |\nabla U|^2(s, X_s)\, ds + \frac{1}{2} \cdot \int_0^t |\nabla \overleftarrow{Z}^{\curlyvee}|^2(s, X_s)\, ds \\
&\quad + \int_0^t \nabla \overleftarrow{Z}^{\curlyvee} \cdot \nabla \overleftarrow{Z}(s, X_s)\, ds - \int_0^t (\eta - c^{\curlyvee})\, ds
\end{aligned}$$

En particular, obtenemos una expresión para la integral que nos importa. Esto es, la expresión que aparece en el "hamiltoniano" de la medida de polímeros (en una versión suavizada). Deducimos que

$$\int_0^t (\eta - c^{\curlyvee})\, ds = \int_0^t \nabla U(s, X_s)\, dX_s - \frac{1}{2}\int_0^t |\nabla U|^2(s, X_s)\, ds + R$$

donde R es un resto que viene dado por

$$R = \int_0^t \Big(\frac{1}{2}|\nabla \overleftarrow{Z}^{\curlyvee}|^2 + \nabla \overleftarrow{Z} \cdot \nabla \overleftarrow{Z}^{\curlyvee}\Big)(s, X_s)\, ds + U\big|_{(t,X_t)}^{(0,X_0)}$$

Con esta nueva forma de escribir la medida de polímeros, la idea es obtener un argumento que permita definirla como límite en ley de las versiones suaves. Es posible que esta re-escritura pueda permitir hacer la la construcción en el caso con peso, así como se hizo en [PR, 2019] para el caso con ruido blanco espacio temporal en $d = 1$.

Capítulo 5

Apéndice

5.1. Convergencia en distribución

En esta sección damos el esquema general para tratar con la convergencia en distribución de los elementos de la data estocástica. En particular, revisamos la manera en la que probamos tensión en las versiones mollificadas del ruido blanco y los campos aleatorios de la data mollificada.

En el estudio de la convergencia débil-$*$ de medidas de probabilidad sobre espacios métricos (S, d) destaca el caso donde la topología de S es generada por versiones finito-dimensionales, pues en estos espacios es en donde viven procesos estocásticos con trayectorias con ciertas propiedades. Ejemplos de esto son el espacio de funciones continuas o el espacio de Skorokhod.

En estos espacios es de interés estudiar la convergencia de familias de medidas de probabilidad $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a un límite P en el espacio de medidas de probabilidad $\mathcal{M}(S)$. En los espacios descritos suele aparecer una forma bastante estándar de chequear la convergencia en débil-$*$: La tensión de la sucesión.

Definición 5.1.1:

Una sucesión $(P_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}(S)$ se dice tensa si para todo $\varepsilon > 0$ existe un compacto $K \subset S$ tal que $P_n(K) > 1 - \varepsilon$ y dicho compacto es válido para todo $n \in \mathbb{N}$.

La idea radica en que esta condición está íntimamente relacionada con que las subsucesiones de una $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ posean un límite.

Definición 5.1.2:

Una sucesión $(P_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}(S)$ se dice relativamente compacta si para cualquier sub-sucesión $(P_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ existe una sub-sub-sucesión $(P_{n_{k(i)}})_{i\in\mathbb{N}}$ que converge débilmente a algún $Q \in \mathcal{M}(S)$.

Estrategia general: Asumamos que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fuese una sucesión relativamente compacta en la cual hayamos demostrado que $P_n\pi^{-1}_{t_1,\ldots,t_k} \implies P\pi^{-1}_{t_1,\ldots,t_k}$ en toda proyección finito-dimensional y para cierta P fija. En este caso, tenemos por la compacidad relativa que dada cualquier sub-sucesión $(P_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ hay una sub-sucesión tal que $P_{n_{k(i)}} \implies Q$ para algún Q. Luego, por el Teorema del Mapeo tenemos que $P_{n_{k(i)}}\pi^{-1}_{t_1,\ldots,t_k} \implies Q\pi^{-1}_{t_1,\ldots,t_k}$. Finalmente, como los Borelianos son generados por los cilindros, debemos concluir que $Q = P$ y como hay convergencia de toda sub-sub-sucesión debemos concluir que $P_n \implies P$.

Este esquema es utilizado en la convergencia débil de procesos estocásticos. En particular, notamos que necesitamos una manera de asegurar que una sucesión sea relativamente compacta. Una forma estándar es comprobando tensión, pues el siguiente Teorema (de Prohorov) las conecta intrínsecamente en el caso que S es un espacio polaco. Una demostración de este Teorema puede encontrarse en [Billingsley, 2013].

Teorema 5.1.1:

Si S es un espacio métrico polaco, entonces $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es tensa, si y solo si, $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es relativamente compacta.

En nuestro caso los procesos son generalizados, es decir, estamos considerando una aleatorización de distribuciones temperadas. Este hecho es crucial, pues no es directo que podamos extender este razonamiento a la topología de distribuciones temperadas (que no es metrizable, aunque sí es generada por cilindros). En general el esquema es el mismo, y la forma de demostrar tensión en el caso generalizado es mediante el Teorema de Mitoma [Mitoma, 1983].

Teorema 5.1.2:

Sea E un espacio localmente convexo y $(P_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}(C([0,1],E'))$ sucesión de medidas de probabilidad. Luego, si $(P_n\pi_\xi^{-1})_{n\in\mathbb{N}}$ es tensa, entonces $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es tensa.

También utilizaremos un criterio útil para chequear la convergencia débil de las versiones finito-dimensionales del proceso generalizado, conocido como el Teorema de Cramer-Wold [Cramér et al., 1936].

Teorema 5.1.3:

Consideremos las sucesión de vectores aleatorios en $\mathbb{R}^d$, $X_n = (X_{n(1)}, ..., X_{n(d)})$ y X un vector aleatorio fijo. Luego, tenemos que $X_n \implies X$, si y solo si,

$$\sum_{i=1}^{d} t_i \cdot X_{n(i)} \xrightarrow{d} \sum_{i=1}^{d} t_i \cdot X_i$$

para todo $(t_1, ..., t_d) \in \mathbb{R}^d$.

Para concluir finalmente la convergencia en distribución utilizaremos la tensión que demostramos con Mitoma para caracterizar los posibles límites en ley. En particular, como trabajamos con ruido blanco y procesos construidos con integrales estocásticas, todo este análisis se reduce a estudiar covergencia de ciertos Kernels en L^2. Para esto, utilizaremos fuertemente el siguiente resultado de ([LL, 2001], Teorema 1.9).

Teorema 5.1.4:

Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones complejo-evaluadas sobre $(X, \mathcal{M}, \mu)$ que converge puntualmente a f μ-ctp. Asumamos también que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} ||f_n||_{L^p}^p < \infty$$

Luego, se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |\,|f_n(x)|^p - |f_n(x) - f(x)|^p - |f(x)|^p\,|\,dx = 0$$

En particular, obtenemos que $f_n \xrightarrow{L^p} f$.

Como último resultado técnico que utilizaremos para probar convergencias, dejamos enunciado el Teorema de representación de Skorohod ([Billingsley, 2013], Teorema 6.7).

Teorema 5.1.5:

Sea (S, d) un espacio métrico polaco y $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de medidas que converge débilmente a P. Luego, existe un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ que admite S-elementos aleatorios $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, X con las distribuciones respectivas tales que $X_n \xrightarrow{c.s.} X$.

5.2. Análisis Estocástico y Análisis Gaussiano

En esta sección presentamos los resultados de análisis estocástico y gaussiano utilizados a lo largo de esta Tesis. Estos resultados constan de los Teoremas más clásicos de procesos estocásticos y de Espacios de Hilbert gaussianos. Los resultados de análisis estocástico están extraidos de [Gall, 2016] y los de análisis gaussiano de [Janson, 1997].

El resultado más clásico de análisis estocástico es la fórmula de Ito para Semi-Martingalas. Utilizamos este resultado en la motivación de la medida de polímeros continuos con técnicas paracontroladas.

Teorema 5.2.1:

Sea X una Semi-Martingala en $\mathbb{R}^d$, es decir, $X = (X^1, X^2, ..., X^d)$ con X^i una Semi-Martingala en $\mathbb{R}$, para $i = 1, ..., d$. Sea $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ una función de clase C^2. Entonces, se tiene que:

$$f(X_t) = f(X_0) + \sum_{i=1}^{d} \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_s)\,dX_s^i + \frac{1}{2} \cdot \sum_{i,j=1}^{d} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X_s)\,d[X^i, X^j]$$

los dos primeros términos son la descomposición para procesos de variación acotada. El último término ya aparece en Semi-Martingalas generales. En dimensión $d = 1$ tenemos que:

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)\,dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)\,d[X]_s$$

En particular, deducimos de aquí el caso en donde además hay dependencia temporal.

Corolario 5.2.1:

Sea X una Semi-Martingala en $\mathbb{R}^d$, con $f \in C^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$. Luego, tenemos que:

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial s}(s, X_s)\, ds + \sum_{i=1}^{d} \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_i}(x, X_s)\, dX_s^i$$
$$+ \frac{1}{2} \cdot \sum_{i,j=1}^{d} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(s, X_s)\, d[X^i . X^j]_s$$

También utilizamos el Teorema de Girsanov, el cual establece que toda martingala local con ciertas condiciones es, bajo un cambio de perspectiva, un Movimiento Browniano. Aquí $\mathcal{M}_{\text{loc}}$ es el conjunto de Martingalas locales y $[\cdot, \cdot]$ es el proceso de covariación cuadrática.

Teorema 5.2.2:

Sea B un M.B. bajo $\mathbb{P}$ y sea $M \in \mathcal{M}_{\text{loc}}(\mathbb{P})$ con $M_0 = 0$ y tal que $Z = \mathcal{E}(M)$ es U.I. Sea $\tilde{\mathbb{P}}$ definida tal que:

$$\frac{d\tilde{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}} = Z_\infty$$

Entonces tenemos que $B - [B, M]$ es un M.B. bajo $\tilde{\mathbb{P}}$.

Adicionalmente va a ser necesario aludir al Teorema de descomposición en caos de Wiener-Ito. Este resultado permite dar una descomposición ortogonal a funciones en cierto espacio L^2 y con esta descomposición es posible estudiar los términos estocásticos resultantes en el análisis de la ecuación de KPZ.

Definición 5.2.1:

Un espacio lineal gaussiano es un espacio lineal real de variables aleatorias definidas en un mismo espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ donde todas las variables son gaussianas centradas. En particular, si H es tal sub-espacio tenemos que $H \subseteq L^2_{\mathbb{R}}(\Omega, P)$.

Esta idea del análisis gaussiano de ver las variables gaussianas como sub-conjunto de $L^2(\Omega, P)$, si bien es sencilla, tiene consecuencias muy profundas y útiles. La razón radica en que podemos utilizar toda la estructura de espacios de Hilbert que se hereda de $L^2(\Omega, P)$.

Definición 5.2.2:

Si un espacio gaussiano es cerrado en $L^2(\Omega, P)$ diremos que es un espacio de Hilbert gaussiano.

El resultado que nos interesa se conoce como descomposición en caos de Wiener-Ito.

Definición 5.2.3:

Consideremos H un espaciode Hilbert gaussiano definido sobre $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Definimos los conjuntos:

$\overline{\mathcal{P}}_{-1}(H) := \{0\}$, $\overline{\mathcal{P}}_0(H) := \{\text{constantes}\}$, $\overline{\mathcal{P}}_n(H) := \{p(\xi_1, ..., \xi_m) : \text{p es polinomio con grado} \leq n;\ \xi_i \in H\}$

Adicionalmente definimos los sub-espacios vectoriales:

$$H^{:-1:} := \overline{\mathcal{P}}_{-1}(H), \quad H^{:0:} := \overline{\mathcal{P}}_0(H), \quad H^{:n:} := \overline{\mathcal{P}}_n(H) \cap \overline{\mathcal{P}}_{n-1}(H)^{\perp}$$

Con esto, presentamos el Teorema de descomposición.

Teorema 5.2.3:

Si $\mathcal{F}(H)$ es la σ-álgebra generada por los elementos de H se tiene la descomposición ortogonal:

$$L^2(\Omega, \mathcal{F}(H), P) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} H^{:n:}$$

a cada uno de los sub-espacios $H^{:n:}$ se le suele llamar el n-caos homogéneo.

La aplicabilidad de este resultado en nuestro contexto es que nos permite realizar el estudio de los términos estocásticos aludiendo al estudio de sus n-caos. Para concluir la sección de resultados previos, concluimos con el Teorema de hipercontractividad gaussiana (real). Este Teorema en particular demuestra que podemos acotar todas las normas L^p para $p \geq 2$ con la norma en L^2. Este hecho será fundamental en los resultados de regularidad Besov y parabólica de los términos estocásticos. Los detalles técnicos de este Teorema pueden encontrarse en ([Janson, 1997], Capítulo 4).

Teorema 5.2.4:

ean H_1, H_2 dos espacios de Hilbert gaussiano definidos sobre los espacios de probabilidad $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, P_1)$ y $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, P_2)$ respectivamente. Dados $1 \leq p \leq q \leq \infty$ y $A : H_1 \to H_2$ es un operador lineal con norma $||A|| \leq \left(\frac{p-1}{q-1}\right)^{\frac{1}{2}}$, entonces tenemos que $\Gamma(A)$ mapea $L^p(\Omega_1, \mathcal{F}(H_1), P_1)$ en $L^q(\Omega_2, \mathcal{F}(H_2), P_2)$ con norma $||\Gamma(A)||_{p,q} = 1$.

5.3. Construcción de la data estocástica

Para la construcción de los términos $(Z, Z^{\vee}, Z^{\vee\!\vee}, Z^{\vee\!\vee\!\vee}, Z^{\vee\vee\!\vee})$ en la regularidad que intuimos, vamos a utilizar herramientas de análisis gaussiano tales como la descomposición en caos de Wiener-Ito e hipercontractividad gaussiana. Luego, vía un criterio de continuidad de Kolmogorov para espacios de Besov buscamos concluir la regularidad correcta. Además, al asumir una estructura paracontrolada del término $h^{\geq 3}$ va a ser necesario incluir en la data el término resonante $\nabla Z^{\intercal} \circ \nabla Z$.

En la construcción de la data, vamos a asumir en primera instancia que se trabaja con una mollificación del ruido blanco espacial. La razón de radica en que las herramientas que vamos a utilizar no van a estar bien definidas al considerar el ruido blanco en sí. Sin embargo, podemos estudiar el caso mollificado y luego demostrar que es posible tomar límite (en algún sentido) y dar sentido a los términos.

Mollificación del ruido

En esta sección discutimos cómo aproximar mediante versiones suaves el ruido blanco espacial definido sobre $\mathbb{R}^d$.

Definición 5.3.1:

Sea ξ una ruido blanco espacial sobre $\mathbb{R}^d$ y $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ una función no negativa tal que $\operatorname{supp}(\eta) \subset B(0,2)$ y $\eta|_{B(0,1)} \equiv 1$. Definimos para cada $\varepsilon > 0$ el escalamiento $\eta_\varepsilon(z) := \eta(\varepsilon \cdot z)$ y la función $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ ξ_ε tal que

$$\begin{aligned}
\xi_\varepsilon(x) &:= \mathcal{F}^{-1}\{\eta_\varepsilon \cdot \hat{\xi}\}(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{F}^{-1}\{\eta_\varepsilon\}(y-x)\, \xi(dy) \\
&\equiv \int_{\mathbb{R}^d} \rho_\varepsilon(y-x)\, \xi(dy)
\end{aligned}$$

<u>**Comentario:**</u> Notamos que siendo $\rho := \mathcal{F}^{-1}\eta$ tenemos la siguiente propiedad de escalamiento

$$\begin{aligned}
\rho_\varepsilon(z) = \mathcal{F}^{-1}\eta_\varepsilon(z) &= \int_{\mathbb{R}^d} \eta_\varepsilon(z) \cdot e^{2\pi i x\cdot z}\, dz \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \eta(\varepsilon \cdot z) \cdot e^{2\pi i(\varepsilon^{-1}x)\cdot(z\cdot\varepsilon)}\, dz \\
&= \varepsilon^{-d} \cdot \int_{\mathbb{R}^d} \eta(z) \cdot e^{2\pi i z\cdot(x\varepsilon^{-1})}\, dz \\
&= \varepsilon^{-d} \cdot \mathcal{F}^{-1}\eta\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big) = \varepsilon^{-d} \cdot \rho\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)
\end{aligned}$$

lo que en particular, significa que la familia $(\rho_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ genera una aproximación a la identidad en $L^2(\mathbb{R}^d)$ en el siguiente sentido.

Lema 5.3.1:

Si $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ y $\rho \in L^1(\mathbb{R}^d)$ es una función dada con $\int_{\mathbb{R}^d} \rho\, dx = 1$, entonces al definir para cada $\varepsilon > 0$, $\rho_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-d} \cdot \rho\big(\frac{x}{\varepsilon}\big)$ tenemos que

$$\rho_\varepsilon * f \xrightarrow{\varepsilon\to 0} f, \quad \text{en} \quad L^2(\mathbb{R}^d)$$

Demostración. La demostración es esencialmente aplicar propiedades de la transformada de Fourier. En efecto, si consideramos cualesquiera $F \in L^2(\mathbb{R}^d)$ y $G \in L^1(\mathbb{R}^d)$, entonces

$$\widehat{F * G} = \hat{F} \cdot \hat{G}$$

como funciones L^2. Esta propiedad la demostraremos por densidad: En efecto, sean $(\phi_k)_{k\in\mathbb{N}}, (\psi_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ tales que

$$\phi_k \xrightarrow{L^2} F, \quad \psi_\ell \xrightarrow{L^2} G$$

Para los elementos de las sucesiones sabemos que vale la igualdad

$$\widehat{(\phi_k * \psi_\ell)} = \hat{\varphi}_k \cdot \hat{\psi}_\ell$$

y aplicando la desigualdad de Young junto con que la transformada de Fourier define un operador unitario concluimos que

$$\lim_{\ell\to\infty} \lim_{k\to\infty} \widehat{(\phi_k * \psi_\ell)} = \widehat{(F * G)}, \quad \text{en} \quad L^2$$

Ahora debemos demostrar que el mismo límite se cumple para $\hat{\varphi}_k \cdot \hat{\psi}_\ell$. Para ello, primero notamos que

$$\hat{\phi}_k \cdot \hat{\psi}_\ell \xrightarrow{k\to\infty} \hat{F} \cdot \hat{\psi}_\ell, \quad \text{en } L^2$$

En efecto, pues tenemos que por la desigualdad de Hölder

$$\begin{aligned} ||\hat{\phi}_k \cdot \hat{\psi}_\ell - \hat{F} \cdot \hat{\psi}_\ell||_{L^2} &\le ||\hat{\phi}_k - \hat{F}||_{L^2} \cdot ||\hat{\psi}_\ell||_{L^\infty} \\ &\le ||\phi_k - F||_{L^2} \cdot ||\psi_\ell||_{L^1} \end{aligned}$$

De igual manera se demuestra que

$$\hat{F} \cdot \hat{\psi}_\ell \xrightarrow{\ell\to\infty} \hat{F} \cdot \hat{G}, \quad \text{en } L^2$$

Deducimos entonces que

$$\lim_{\ell\to\infty} \lim_{k\to\infty} \hat{\phi}_k \cdot \hat{\psi}_\ell = \hat{F} \cdot \hat{G}, \quad \text{en} \quad L^2$$

y con esto concluimos la demostración del punto inicial. Ahora lo utilizamos para concluir: Notamos que

$$\widehat{f * \phi_\varepsilon}(\xi) = \hat{f}(\xi) \cdot \hat{\phi}_\varepsilon(\xi) = \hat{f}(\xi) \cdot \hat{\phi}(\varepsilon\xi)$$

Como $\phi \in L^1$, tenemos que $\hat{\phi}$ es continua y con esto

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \hat{\phi}(\varepsilon\xi) = \hat{\phi}(0) = \int_{\mathbb{R}^d} \phi(y)\, dy = 1$$

En particular, deducimos que $\hat{f}(\xi) \cdot \hat{\phi}(\varepsilon\xi)$ converge a $\hat{f}(\xi)$ puntualemente casi seguramente cuando $\varepsilon \to 0$. Finalmente, por el Teorema de convergencia dominada concluimos que

$$\widehat{(f * \phi_\varepsilon)} = \hat{f}(\xi) \cdot \hat{\phi}(\varepsilon\xi) \xrightarrow{\varepsilon\to 0} \hat{f}, \quad \text{en} \quad L^2$$

Concluimos la demostración del Teorema tomando transformada de Fourier inversa. □

Lo que vamos a demostrar es que esta mollificación aproxima (en ley) al ruido blanco como distribución temperada.

Proposición 5.3.1:

Se tiene que $\xi_\varepsilon \implies \xi$ cuando $\varepsilon \to 0$.

Demostración. La idea de la demostración radica en usar el Teorema de Mitoma 5.1: Primero demostraremos que la sucesión de campos generalizados $\{\xi_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ es tensa en $\mathcal{S}'_{\rho_\lambda}(\mathbb{R}^d)$. En efecto, fijado $\varphi \in \mathcal{S}_{\rho_\lambda}(\mathbb{R}^d)$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\xi_\varepsilon(\varphi) &= \{\rho_\varepsilon * \xi\}(\varphi) \\
&= \xi(\tilde{\rho}_\varepsilon * \varphi) = \int_{\mathbb{R}^d} [\tilde{\rho}_\varepsilon * \varphi](y)\, \xi(dy) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} \rho_\varepsilon(y-x) \cdot \varphi(x)\, dx \right\} \xi(dy)
\end{aligned}$$

y debemos demostrar tensión para la familia de variables aleatorias $(\xi_\varepsilon(\varphi))_{\varepsilon>0}$. Para ello, basta con que demostremos que la familia es acotada en $L^2(\Omega, P)$. En efecto, si lo fuese entonces por Chebyshev/Markov obtenemos que

$$P(|\xi_\varepsilon(\varphi)| > M) \leq \frac{||\xi_\varepsilon(\varphi)||^2_{L^2(\Omega,P)}}{M^2} \leq \frac{\sup_{\varepsilon>0} ||\xi_\varepsilon(\varphi)||^2_{L^2(\Omega,P)}}{M^2}, \quad \forall\, \varepsilon > 0$$

y tomando M suficientemente grande podemos asegurar que existe $M(\eta)$ tal que $P(|\xi_\varepsilon(\varphi)| > M) < \eta$, uniformemente en $\varepsilon > 0$. En particular, obtenemos que $P(|\xi_\varepsilon(\varphi)| \leq M) > 1-\eta$, lo que demuestra tensión de $(\xi_\varepsilon(\varphi))_{\varepsilon>0}$. Concluimos por el Teorema de Mitoma que $(\xi_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ es tensa.

La razón por la cual se tiene la cota en $L^2(\Omega, P)$ radica en un Teorema clásico de convoluciones ([LL, 2001], Teorema 2.16)

$$||\xi_\varepsilon(\varphi)||^2_{L^2(\Omega,P)} = ||\rho_\varepsilon(y - \cdot) * \varphi(\cdot)||^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq ||\rho||^2_{L^1} \cdot ||\varphi||^2_{L^2} \equiv C$$

Ahora que demostramos tensión, solo resta probar que los vectores $(\xi_\varepsilon(\varphi_1), ..., \xi_\varepsilon(\varphi_n))$ converge en distribución a $(\xi(\varphi_1), ..., \xi(\varphi_n))$. En efecto, utilizaremos el Teorema de Cramer-Wold 5.1: Consideremos $(t_1, ..., t_n) \in \mathbb{R}^n$. Vamos a demostrar que

$$\sum_{i=1}^n t_i \cdot \xi_\varepsilon(\varphi_i) \xrightarrow{\varepsilon\to 0} \sum_{i=1}^n t_i \cdot \xi(\varphi_i), \quad \text{en} \quad L^2$$

lo que implicaría que hay convergencia en distribución, por lo que solo debemos demostrar que $\xi_\varepsilon(\varphi) \xrightarrow{L^2} \xi(\varphi)$. En efecto

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\{\xi_\varepsilon(\varphi) - \xi(\varphi)\}^2] &= \mathbb{E}\left[\left(\int_{\mathbb{R}^d} \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} \rho_\varepsilon(y-x) \cdot \varphi(x)\, dx - \varphi(y) \right\} \xi(dy) \right)^2\right] \\
&= ||[\tilde{\rho}_\varepsilon * \varphi] - \varphi||_{L^2(\mathbb{R}^d)}
\end{aligned}$$

y como ρ_ε define una "aproximación a la identidad", concluimos la convergencia en L^2. □

Sabemos además que el ruido blanco $\xi \in C^{-\frac{d}{2}-}_{\rho_\lambda}(\mathbb{R}^d)$. Resulta que las mollificaciones del ruido tambien están en dicho espacio.

Proposición 5.3.2:

Para cada $\varepsilon > 0$ se tiene que

$$\mathbb{E}[||\xi_\varepsilon||^p_{C^\alpha_{\rho_\lambda}(\mathbb{R}^d)}] < \infty$$

donde la cota es uniforme en $\varepsilon > 0$. Notar que en particular, concluimos que $\xi_\varepsilon \in L^p(\Omega; C^\alpha_{\rho_\lambda}(\mathbb{R}^d))$.

Demostración. Nuevamente la idea va a ser utilizar el embedding de Besov para concluir. Primero veamos cómo se ven los bloques de Littlewood-Paley: Sea $j \geq -1$

$$\begin{aligned}
\Delta_j \xi_\varepsilon(x) &= \mathcal{F}^{-1}\{\varphi_j \cdot \hat{\xi}_\varepsilon\} = \mathcal{F}^{-1}\{[\varphi_j \cdot \eta_\varepsilon] \cdot \hat{\xi}\} \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{F}^{-1}\{\varphi_j \cdot \eta_\varepsilon\}(y - x)\, \xi(dy)
\end{aligned}$$

y podemos nuevamente realizar la estimada del segundo momento de los bloques

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[|\Delta_j \xi_\varepsilon(x)|^2] &= \mathbb{E}\Big[\Big(\int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{F}^{-1}\{\varphi_j \cdot \eta_\varepsilon\}(y - x)\, \xi(dy)\Big)^2\Big] \\
&= ||\mathcal{F}^{-1}\{\varphi_j \cdot \eta_\varepsilon\}(\cdot - x)||^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_j^2(k) \cdot \eta_\varepsilon^2(k)\, dk \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_0^2(2^{-j}k) \cdot \eta^2(\varepsilon k)\, dk = 2^{jd} \cdot \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_0^2(k) \cdot \eta^2(\varepsilon \cdot 2^j \cdot k)\, dk \\
&\lesssim 2^{jd}
\end{aligned}$$

y con esto deducimos la cota de la norma Besov $B^\alpha_{p,p}(\mathbb{R}^d, \rho_\lambda)$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[||\xi_\varepsilon||^p_{B^\alpha_{p,p}(\mathbb{R}^d,\rho_\lambda)}] &= \sum_{j\geq -1} 2^{jp\alpha} \cdot \mathbb{E}[||\Delta_j \xi_\varepsilon||^p_{L^p(\mathbb{R}^d,\rho_\lambda)}] \\
&= \sum_{j\geq -1} 2^{jp\alpha} \cdot \int_{\mathbb{R}^d} \rho_\lambda^p(x) \cdot \mathbb{E}[|\Delta_j \xi_\varepsilon(x)|^p]\, dx \\
&\lesssim \sum_{j\geq -1} 2^{jp\alpha} \cdot \int_{\mathbb{R}^d} \rho_\lambda^p(x) \cdot \mathbb{E}[|\Delta_j \xi_\varepsilon(x)|^2]^{\frac{p}{2}}\, dx \\
&\lesssim \sum_{j\geq -1} 2^{jp\alpha} \cdot \int_{\mathbb{R}^d} \rho_\lambda^p(x)\, dx \cdot 2^{\frac{jpd}{2}} \\
&\lesssim \sum_{j\geq -1} 2^{jp\left(\alpha + \frac{d}{2}\right)}
\end{aligned}$$

y concluimos que $\xi_\varepsilon \in B^\alpha_{p,p}(\mathbb{R}^d, \rho_\lambda)$ para todo $\varepsilon > 0$. □

Con este desarrollo, hemos demostrado que $(\xi_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ define una colección en $C^\alpha_{\rho_\lambda}(\mathbb{R}^d)$ que es tensa. Luego, aplicando el Teorema de Prokhorov (en un sub-espacio que sí sea separable), tenemos que la familia es relativamente compacta y toda sub-sucesión posee límite. Además, en [5.3] demostramos que dichos límites son versiones del ruido blanco en $\mathbb{R}^d$.

5.3.1. Términos estocásticos

En esta sección exponemos el método para construir explícitamente los términos estocásticos. Esto es, demostrar que los términos Z construidos a partir del ruido blanco poseen la regularidad Besov indicada en la expansión paracontrolada de la ecuación de KPZ (o que una versión renormalizada la posee) y que además se tiene convergencia de estas suavizaciones a procesos bien definidos con las regularidades establecidas y en la topología adecuada.

Como los términos se construyen a partir de la formulación mild de un ruido blanco o entre productos de distribuciones, necesitamos un criterio de continuidad de Kolmogorov para determinar las regularidades. Comenzamos con la versión estándar en espacios polacos.

Lema 5.3.2:

(Criterio de continuidad de Kolmogorov, [Sepp, 2012]): Sea (X, d) un espacio métrico polaco y supongamos $(Z_t)_{t\in[0,T]}$ un proceso estocástico S-evaluado definido sobre $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ que satisface la siguiente propiedad: Existe una constante $K < \infty$ y $\alpha, \beta > 0$ tales que

$$\mathbb{E}[d(Z_t, Z_s)^\beta] \leq K \cdot |t-s|^{d+\alpha}, \quad \forall\, t, s \in [0, T]$$

Luego, existe una modificiación $\tilde{Z}$ sobre $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ cuyas trayectorias $s \to \tilde{Z}_s(\omega)$ son continuas para cada $\omega \in \Omega$. Además, $\tilde{Z}$ es casi seguramente γ-Hölder continuo para cada $\gamma \in (0, \alpha/\beta)$ y su coeficiente de Hölder C_γ cumple que

$$\mathbb{E}[C_\gamma^\beta] < \infty$$

A partir del Criterio clásico se deduce el criterio para espacios de Besov con peso que utilizaremos en esta Tesis.

Lema 5.3.3:

Sea $(Z(t))_{t\in[0,T]}$ un proceso generalizado sobre $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. Si suponemos que $\lambda > d$ y que para todo $j \geq -1$, todo $0 \leq s < t \leq T$ y todo $x \in \mathbb{R}^d$ se cumple que

$$\mathbb{E}[|\Delta_j Z(0,x)|^p]^{\frac{1}{p}} + \frac{\mathbb{E}[|\Delta_j Z(t,x) - \Delta_j Z(s,x)|^p]^{\frac{1}{p}}}{|t-s|^\gamma} \leq K \cdot 2^{-j\alpha}$$

donde $\gamma > \frac{1}{p}$. Luego, existe una modificación $\tilde{Z} \in C_T^{\gamma'} C_{p_\lambda}^{\alpha' - \frac{d}{p}}(\mathbb{R}^d)$ con $\gamma' \in (0, \gamma - \frac{1}{p})$ y $\alpha' < \alpha$ y además se cumple la estimada

$$\mathbb{E}[||\tilde{Z}||^p_{C_T^{\gamma'} C_{p_\lambda}^{\alpha' - \frac{d}{p}}(\mathbb{R}^d)}]^{\frac{1}{p}} \lesssim K$$

Demostración. Por el embedding de Besov, basta que hallemos un p tal que existe modificiación $\tilde{Z} \in B^{\alpha'}_{p,p}(\mathbb{R}^d, p_\lambda)$ con $\alpha' < \alpha$. La idea va a ser utilizar el Criterio de continuidad de Kolmogorov. En efecto, basta que desmotremos que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[||Z(t) - Z(s)||^p_{B^{\alpha'}_{p,p}(\mathbb{R}^d, p_\lambda)}] &\leq K \cdot |t-s|^{\gamma \cdot p} \\ &= K \cdot |t-s|^{p([\gamma - 1/p] + 1/p)}\end{aligned}$$

$$= K \cdot |t-s|^{1+p[\gamma-1/p]}$$

de donde la prueba se seguiría directamente del Criterio de Kolmogorov. Notamos entonces que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[||Z(t)-Z(s)||^p_{B^{\alpha'}_{p,p}(\mathbb{R}^d,p_\lambda)}] &= \mathbb{E}\Big[\sum_{j\geq -1} 2^{j\alpha' p}\cdot ||\Delta_j Z(t)-\Delta_j Z(s)||^p_{L^p(\mathbb{R}^d,p_\lambda)}\Big] \\
&= \sum_{j\geq -1} 2^{j\alpha' p}\cdot \mathbb{E}[||\Delta_j Z(t)-\Delta_j Z(s)||^p_{L^p(\mathbb{R}^d,p_\lambda)}] \\
&= \sum_{j\geq -1} 2^{j\alpha' p}\cdot \int_{\mathbb{R}^d} p_\lambda(x)\cdot \mathbb{E}[|\Delta_j Z(t,x)-\Delta_j Z(s,x)|^p]\,dx \\
&\leq K^p \cdot \sum_{j\geq -1} 2^{j\alpha' p}\cdot \int_{\mathbb{R}^d} 2^{-j\alpha p}\cdot |t-s|^{\gamma p}\cdot p_\lambda(x)\,dx \\
&= |t-s|^{\gamma p}\cdot \Big(\sum_{j\geq -1} 2^{jp(\alpha'-\alpha)}\Big)\cdot \int_{\mathbb{R}^d} p_\lambda(x)\,dx \\
&\lesssim |t-s|^{\gamma p}
\end{aligned}$$

Esto prueba que podemos usar el Teorema de continuidad de Kolmogorov, pero siempre y cuando hayamos chequeado que efectivamente $Z(t)\in B^{\alpha'}_{p,p}(\mathbb{R}^{\mathrm{d}},p_\lambda)$, para cada $t\in[0,T]$. En efecto, basta que notemos que

$$\mathbb{E}[||Z(t)||_{B^{\alpha'}_{p,p}(\mathbb{R}^{\mathrm{d}},p_\lambda)}] \leq \mathbb{E}[||Z(t)-Z(0)||_{B^{\alpha'}_{p,p}(\mathbb{R}^d,p_\lambda)}] + \mathbb{E}[||Z(0)||_{B^{\alpha'}_{p,p}(\mathbb{R}^d,p_\lambda)}] < \infty$$

Concluimos entonces que para todo $T>0$, $\gamma'\in(0,\gamma-\frac{1}{p})$ existe $\tilde{Z}$ modificación en $C^{\gamma'}_T B^{\alpha'}_{p,p}(\mathbb{R}^d,p_\lambda)\subseteq C^{\gamma'}_T \mathcal{C}^{\alpha'-\frac{d}{p}}_{p_\lambda}(\mathbb{R}^d)$ con $\alpha'<\alpha$. □

Término estocástico Z

Ahora enunciamos el Teorema de la regularidad de Z. En estricto rigor, deberíamos considerar Z_ε tal que $\mathcal{L}Z_\varepsilon=\xi_\varepsilon$ donde $(\xi_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ es una mollificación del ruido blanco. La demostración en este caso es análoga al caso que exhibiremos, solo que obviamos la dependencia en $\varepsilon>0$. Para este caso, vamos a concluir que

$$Z_\varepsilon(t,x)=\int_{\mathbb{R}^d}\mathcal{F}^{-1}_{\mathbb{R}^d}\Big\{\Big(\frac{1-e^{-t|x-y|^2}}{|x-y|^2}\Big)\cdot\eta_\varepsilon(x-y)\Big\}\,\xi(dy)\equiv\int_{\mathbb{R}^d}\Lambda^\varepsilon_t(x-y)\,\xi(dy)$$

y la misma demostración se aplica en estos casos con un término adicional en η_ε que permite localizar uniformemente en $\varepsilon>0$ las normas de Besov.

Teorema 5.3.1:

Se tiene que para $\gamma<1$ y cualquier $\alpha<2-\frac{d}{2}$ y todo $p\geq 2$

$$\mathbb{E}[||Z||^p_{C^0_T\mathcal{C}^\alpha_{p_\lambda}(\mathbb{R}^d)}+||Z||^p_{C^\gamma_T\mathcal{C}^{\alpha-1}_{p_\lambda}(\mathbb{R}^d)}]<\infty$$

Más aún, podemos concluir que $Z\in\mathcal{L}^\alpha_{\rho_\lambda}(\mathbb{R}^d)$ y en particular, tenemos que $Z\in L^p(\Omega;\mathcal{L}^\alpha_{\rho_\lambda}(\mathbb{R}^d))$.

Demostración. Primero estudiamos los bloques de Littlewood-Paley de Z. Notemos que

$$\begin{aligned}\langle \Delta_j Z, \psi\rangle &= \langle \mathcal{F}^{-1}\{\varphi_j \cdot \widehat{Z}\}, \psi\rangle = \langle \widehat{Z}, \varphi_j \mathcal{F}^{-1}\psi\rangle \\ &= \int_0^t \langle e^{-(t-s)|\cdot|^2} \cdot \hat{\xi}, \varphi_j \mathcal{F}^{-1}\psi\rangle \, ds \\ &= \int_0^t \langle \mathcal{F}^{-1}\{\varphi_j \cdot e^{-(t-s)|\cdot|^2}\hat{\xi}\}, \psi\rangle \, ds \\ &= \Big\langle \int_0^t \mathcal{F}^{-1}\{\varphi_j \cdot e^{-(t-s)|\cdot|^2}\hat{\xi}\} \, ds, \psi\Big\rangle \\ &= \Big\langle \mathcal{F}^{-1}\Big\{\varphi_j \cdot \frac{1-e^{-t|\cdot|^2}}{|\cdot|^2}\Big\} * \xi, \psi\Big\rangle\end{aligned}$$

Concluimos entonces que la función asociada al j-ésimo bloque viene dada por

$$\Delta_j Z(t,x) := \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{F}^{-1}\Big\{\varphi_j \cdot \frac{1-e^{-t|\cdot|^2}}{|\cdot|^2}\Big\}(y-x)\, \xi(dy)$$

Con esto, podemos estimar la diferencia temporal de cada bloque de Littlewood-Paley

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[|\Delta_j Z(t,x) - \Delta_j Z(s,x)|^2] &= \mathbb{E}\Big[\Big(\int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{F}^{-1}\Big\{\varphi_j \cdot \frac{e^{-s|\cdot|^2 - e^{-t|\cdot|^2}}}{|\cdot|^2}\Big\}(y-x)\, \xi(dy)\Big)^2\Big] \\ &= \Big\|\mathcal{F}^{-1}\Big\{\varphi_j \cdot \frac{e^{-s|\cdot|^2 - e^{-t|\cdot|^2}}}{|\cdot|^2}\Big\}(* - x)\Big\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_j(k) \cdot \frac{|e^{-s|k|^2} - e^{-t|k|^2}|}{|k|^4} \, dk\end{aligned}$$

y como tenemos que $|e^{-s|k|^2} - e^{-t|k|^2}| = e^{-s|k|^2} \cdot |1 - e^{-(t-s)|k|^2}| \leq \min\{1, |t-s| \cdot |k|^{-2}\}$. Así, obtenemos la estimada

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(\Delta_j Z(t,x) - \Delta_j Z(s,x))^2] &\leq \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_j^2(k) \cdot \text{mín}\Big\{|k|^{-4}, |t-s|^2 \cdot |k|^{-2}\Big\}\, dk \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_0^2(2^{-j}k) \cdot \text{mín}\Big\{2^{-4j}|2^{-j}k|^{-4}, 2^{-2j} \cdot |t-s|^2 \cdot |2^{-j}k|^{-2}\Big\}\, dk \\ &= 2^{jd} \cdot \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_0^2(k) \cdot \text{mín}\Big\{2^{-4j} \cdot |k|^{-4}, 2^{-2j}|t-s|^2 \cdot |k|^{-2}\Big\}\, dk \\ &\lesssim 2^{jd} \cdot \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_0^2(k) \cdot \text{mín}\Big\{2^{-4j}\cdot, 2^{-2j}|t-s|^2 \cdot \Big\}\, dk \\ &\lesssim 2^{jd} \cdot 2^{-2\eta j} \cdot 2^{-4(1-\eta)j} \cdot |t-s|^{2\eta} \\ &= 2^{-j(-d+4-2\eta)} \cdot |t-s|^{2\eta}\end{aligned}$$

donde en la primer estimada utilizamos el hecho que se integra sobre un anillo por φ_0 y $\eta \in (0,1]$ (obtenido al interporlar). Así, obtenemos la estimada por los p-momentos:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[|\Delta_j Z(t,x) - \Delta_j Z(s,x)|^p]^p &\lesssim \mathbb{E}[|\Delta_j Z(t,x) - \Delta_j Z(s,x)|^2]^{\frac{1}{2}} \\ &\lesssim 2^{-j(-d/2+2-\eta)} \cdot |t-s|^{\eta}\end{aligned}$$

Si consideramos $\eta = 1$ en la interpolación, obtenemos la regularidad $\gamma < 1$. Para el caso con regularidad temporal 0, basta que consideremos $\eta > 0$ suficientemente pequeño y p suficientemente grande de forma que $p \cdot \eta > 1$. Si esto es así, entonces deducimos que $\mathbb{E}[||Z||^p_{C^\varepsilon_T C^\alpha_{\rho_\lambda}(\mathbb{R}^d)}] < \infty$ para algún $\varepsilon > 0$. Con esto, se concluye la prueba.

Para concluir que la modificación de Z está en el espacio parabólico $\mathcal{L}^\alpha_{\rho_\lambda}(\mathbb{R}^d)$, basta que consideremos $\alpha \in (0, 1/2)$ y utilicemos la última cota adecuadamente para: Primero, tener regularidad positiva y poder usar el embedding de los Besov en $L^\infty_{\rho_\lambda}(\mathbb{R}^d)$ y segundo, asegurar que podemos asegurar regularidad $\frac{\alpha}{2}$-Hölder. En efecto, consideremos

- $\eta > \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{p}$ (que esta en $(0, 1]$ si consideramos p suficientemente pequeño). Luego, tenemos que $p \cdot \eta > 1$ y verifica una hipótesis del Criterio de Kolmogorov.
- En el criterio de Kolmogorov, necesitamos asegurar que podemos tener regularidad positiva. En concreto, bastaría con asegurar que $-d[\frac{1}{2} - \frac{1}{p}] + 2 - \eta > 0$, lo que es equivalente a la desigualdad $d[\frac{1}{2} + \frac{1}{p}] + \eta < 2$. Veamos que el η que escogimos no genera contradicción con esta condición.

  Tenemos por la elección de η que

  $$d\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{p}\right] + \eta > d\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{p}\right] + \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{p}$$
  $$= \frac{d}{2} + \frac{1}{p}(d + 1) + \frac{\alpha}{2}$$

  y para $d \leq 3$, tenemos que tomando p suficientemente grande podemos asegurar que está acotado inferiormente por algo menor que 2 (no hay contradicción). Además, tomando p suficientemente grande, aseguramos que $d[\frac{1}{2} + \frac{1}{p}] + \eta < 2$.

□

De este resultado obtuvimos una familia $(Z_\varepsilon)_{\varepsilon>0} \subset \mathcal{L}^\alpha_{\rho_\lambda}(\mathbb{R}^d)$. Ahora debemos demostrar que posee límite en distribución y que dicho límite viene dado por Z tal que $\mathcal{L}Z = \xi$. En efecto, lo primero que haremos será determinar que la familia es tensa: Siguiendo la idea de usar el criterio de Mitoma [5.1], consideramos $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Para demostrar que $(Z_\varepsilon(\varphi))_{\varepsilon>0}$ es tensa, demostraremos que es uniformente acotada en L^2. En efecto, primero notamos que

$$Z_\varepsilon(\varphi) = \xi(\tilde{\Lambda}^\varepsilon_t * \varphi) = \int_{\mathbb{R}^d} \tilde{\Lambda}^\varepsilon_t * \varphi(y)\, dy$$
$$= \int_{\mathbb{R}^d} \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} \Lambda^\varepsilon_t(y - x) \cdot \varphi(x)\, dx \right\} \xi(dy)$$

de donde deducimos por Ito y Prancherel que

$$||Z_\varepsilon(\varphi)||_{L^2(\Omega,P)} = ||\tilde{\Lambda}^\varepsilon_t * \varphi(\cdot)||_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \left|\left|\mathcal{F}^{-1}\left\{\left(\frac{1 - e^{-t|\cdot|^2}}{|\cdot|^2}\right) \cdot \eta_\varepsilon(\cdot) \cdot \hat{\varphi}\right\}\right|\right|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$$
$$= \left|\left|\eta_\varepsilon(\cdot) \cdot \left(\frac{1 - e^{-t|\cdot|^2}}{|\cdot|^2}\right) \cdot \hat{\varphi}\right|\right|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$$
$$\leq \left|\left|\left(\frac{1 - e^{-t|\cdot|^2}}{|\cdot|^2}\right)\right|\right|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \cdot ||\mathcal{F}\{\check{\eta}_\varepsilon * \varphi\}||_{L^2(\mathbb{R}^d)}$$

$$= \left|\left|\left(\frac{1-e^{-t|\cdot|^2}}{|\cdot|^2}\right)\right|\right|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \cdot ||\check{\eta}_\varepsilon * \varphi||_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \left|\left|\left(\frac{1-e^{-t|\cdot|^2}}{|\cdot|^2}\right)\right|\right|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \cdot ||\eta||_{L^1(\mathbb{R}^d)} \cdot ||\varphi||_{L^2(\mathbb{R}^d)}$$
$$\lesssim K$$

lo que concluye que la familia es acotada en $L^2(\Omega, P)$. Con esto, concluimos por el Teorema de Mitoma que $(Z_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ es tensa. Además, nuevamente usando el Teorema de Cramer-Wold [5.1] podemos demostrar que las distribuciones finito-dimensionales convergen al término Z construido a partir del ruido blanco.

Finalmente demostramos la convergencia en $L^p(\Omega; \mathcal{L}^\alpha_{\rho_\lambda}(\mathbb{R}^d))$.

Teorema 5.3.2:

Siendo $(Z_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ la familia mollificada en $L^p(\Omega; \mathcal{L}^\alpha_{\rho_\lambda}(\mathbb{R}^d))$ y Z el límite en distribución con el ruido blanco, tenemos que

$$Z_\varepsilon \xrightarrow{L^p(\Omega;\mathcal{L}^\alpha_{\rho_\lambda}(\mathbb{R}^d))} Z, \quad \text{cuando } \varepsilon \to 0$$

Demostración. Primero utilizaremos el Teorema de Skorohod [5.1] para poder asumir que $Z_\varepsilon \xrightarrow{c.s.} Z$. En particular, tenemos que $Z_\varepsilon \longrightarrow Z$ en probabilidad y por el criterio de Kolmogorov sabemos que $(Z_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ es uniformemente acotada en L^p para todo $p \geq 1$. Lo que haremos será ver que bajo estas dos condiciones podemos concluir la convergencia en L^p.

Consideremos las variables aleatorias $||Z - Z_\varepsilon||^p_X$ (aquí X es el espacio parabólico). Luego, por continuidad tenemos que $||Z - Z_\varepsilon||^p_X \xrightarrow{P} 0$ y además es uniformemente acotada en todos los L^p. En particular, si suponemos que esta familia de variables aleatorias es uniformemente integrable, debemos concluir que convergen en L^p a 0. Esto es

$$\mathbb{E}[||Z - Z_\varepsilon||^p_X] \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0$$

de donde concluiríamos la convergencia en L^p. Resta entonces verificar la integrabilidad uniforme: Sean $\eta > 0$ y $p \geq 1$ fijos y $K > 0$ por definir. Luego, definiendo $r := \frac{p+\delta}{p}$ tenemos por Hölder con $r' = \frac{r}{r-1}$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[||Z - Z_\varepsilon||^p_X \cdot \mathbb{1}_{\{||Z-Z_\varepsilon||>K\}}] &\leq \mathbb{E}^{1/r}[||Z - Z_\varepsilon||^{p\cdot r}_X] \cdot P^{1/r'}(||Z - Z_\varepsilon||^p_X > K) \\
&= \mathbb{E}^{1/r}[||Z - Z_\varepsilon||^{p+\delta}_X] \cdot P^{1/r'}(||Z - Z_\varepsilon||^p_X > K) \\
&\lesssim P^{1/r'}(||Z - Z_\varepsilon||^p_X > K) \\
&\lesssim \frac{\mathbb{E}^{1/r'}[||Z - Z_\varepsilon||^{p\cdot r}_X]}{K^{r/r'}} \lesssim K^{-r/r'}
\end{aligned}$$

y como $\frac{r}{r'} = \frac{p+\delta}{p} - 1 > 0$ tenemos que podemos escoger $K = K(\eta)$ suficientemente grande para concluir integrabilidad uniforme. Esto concluye la demostración. □

Término Estocástico $\mathbf{Z}^{\Upsilon}$

Seguimos la construcción de los término estocásticos dada en [CC, 2018]. Para ello, entregamos una generalización sobre todo el espacio $\mathbb{R}^d$.

Tenemos que $Z^{\vee,\varepsilon}$ tiene la forma

$$Z^{\vee,\varepsilon}(x,t) = \mathcal{I}(|\nabla Z^\varepsilon|^2)(x,t) = \sum_{k=1}^{d} \mathcal{I}(\partial_{x_\beta} Z^\varepsilon \cdot \partial_{x_\beta} Z^\varepsilon)$$

de donde deducimos que basta con dar sentido a la formulación mild del producto de las derivadas para concluir.

Ahora vamos a estudiar el proceso vía una representación de su transformada de Fourier

$$\begin{aligned}
\widehat{Z^{\vee,\varepsilon}}(k,t) &= \mathcal{F}_{\mathbb{R}^d}\Big\{ \int_0^t p_{t-s} * \partial_{x_\beta} \widehat{Z^\varepsilon \cdot \partial_{x_\beta}} Z^\varepsilon(k,s)\, ds \Big\} \\
&= \int_0^t e^{-(t-s)|k|^2} \big(\widehat{\partial_{x_\beta} Z^\varepsilon} * \widehat{\partial_{x_\beta} Z^\varepsilon} \big)(k,s)\, ds \\
&= \int_0^t e^{-(t-s)|k|^2} \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{\partial_{x_\beta} Z^\varepsilon}(k-k',s) \cdot \widehat{\partial_{x_\beta} Z^\varepsilon}(k',s)\, dk' ds \\
&= -4\pi^2 \int_0^t e^{-(t-s)|k|^2} \cdot \int_{\mathbb{R}^d} (k-k')_\beta \cdot k'_\beta \cdot \eta_\varepsilon(k-k') \cdot \eta_\varepsilon(k') \Big(\frac{1-e^{-s|k-k'|^2}}{|k-k'|^2} \Big) \cdot \Big(\frac{1-e^{-s|k'|^2}}{|k'|^2} \Big) \\
&\qquad \cdot \hat{\xi}(k-k') \cdot \hat{\xi}(k')\, dk' ds
\end{aligned}$$

lo que implica entonces una representación del término dada por

$$\begin{aligned}
Z^{\vee,\varepsilon}(x,t) &= -4\pi^2 \int_{\mathbb{R}^d} \Big\{ \int_0^t e^{-(t-s)|k|^2} \cdot \int_{\mathbb{R}^d} (k-k')_\beta \cdot k'_\beta \cdot \eta_\varepsilon(k-k') \cdot \eta_\varepsilon(k') \Big(\frac{1-e^{-s|k-k'|^2}}{|k-k'|^2} \Big) \\
&\qquad \cdot \Big(\frac{1-e^{-s|k'|^2}}{|k'|^2} \Big) \cdot \hat{\xi}(k-k') \cdot \hat{\xi}(k')\, dk' ds \Big\} e^{2\pi i k\cdot x} dk \\
&= -4\pi^2 \int_{\mathbb{R}^d} \int_0^t e^{-(t-s)|k|^2} \int_{\{(k_1,k_2)\,:\,k_1+k_2=k\}} (k_1)_\beta \cdot (k_2)_\beta \cdot \eta_\varepsilon(k_1) \cdot \eta_\varepsilon(k_2) \cdot \Big(\frac{1-e^{-s|k_1|^2}}{|k_1|^2} \Big) \\
&\qquad \cdot \Big(\frac{1-e^{-s|k_2|^2}}{|k_2|^2} \Big) \hat{\xi}(k_1)\hat{\xi}(k_2)\, dk_1 dk_2 ds e^{2\pi i k x} dk \\
&= -4\pi^2 \int_{\mathbb{R}^d} \Big\{ \Big(\int_0^t e^{-(t-s)|k|^2} \cdot F_s^\varepsilon(k_1) \cdot F_s^\varepsilon(k_2)\, ds \Big) (k_1)_\beta (k_2)_\beta \hat{\xi}(k_1)\hat{\xi}(k_2)\, dk_1 dk_2 \Big\} \cdot e^{2\pi i k x}\, dk
\end{aligned}$$

donde $F_s^\varepsilon(k) \equiv \eta_\varepsilon(k) \cdot \frac{1-e^{-t|k|^2}}{|k|^2}$. Así, definiendo $F_t^{\vee,\varepsilon}(k,k_1,k_2) \equiv \int_0^t e^{-(t-s)|k|^2} F_s^\varepsilon(k_1) \cdot F_s^\varepsilon(k_2)\, ds$ tenemos que podemos expresar el término $Z^{\vee,\varepsilon}$ como

$$Z^{\vee,\varepsilon}(x,t) = -4\pi^2 \int_{\mathbb{R}^d} \Big\{ \int_{\{(k_1,k_2)\,:\,k_1+k_2=k\}} F_t^{\vee,\varepsilon}(k,k_1,k_2)(k_1)_\beta (k_2)_\beta \hat{\xi}(k_1)\hat{\xi}(k_2)\, dk_1 dk_2 \Big\}\, dk$$

Ahora el objetivo es estudiar sus componentes de caos de Wiener-Ito. Por un lado, la descomposición nos permite ver qué términos aparecen como constantes infinitas y nos van a permitir renormalizar los términos. Una vez concebida la renormalización, queda ver si los términos restantes en los otros caos poseen la regularidad establecida al renormalizar. Al utilizar la descomposición dada por el producto de Wick: $\hat{\xi}(k_1)\hat{\xi}(k_2) = \mathbb{E}[\hat{\xi}(k_1)\hat{\xi}(k_2)] + \,:\hat{\xi}(k_1)\hat{\xi}(k_2):$ tenemos la descomposición de Caos dada por

$$Z^{\vee,\varepsilon}(x,t) = -4\pi^2 \int_{\mathbb{R}^d} \Big\{ \int_{R_k} F_t^{\vee,\varepsilon}(k,k_1,k_2) \cdot (k_1)_\beta \cdot (k_2)_\beta \mathbb{E}[\hat{\xi}(k_1)\hat{\xi}(k_2)]\, dk_1 dk_2 \Big\} e^{2\pi i k x}\, dk$$

$$
\begin{aligned}
&- 4\pi^2 \int_{\mathbb{R}^d} \left\{ F_t^{\vee,\varepsilon}(k,k_1,k_2)\cdot (k_1)_\beta \cdot (k_2)_{\beta}\cdot \; : \hat{\xi}(k_1)\hat{\xi}(k_2) : \; dk_1 dk_2 \right\} \cdot e^{2\pi i k x}\, dk \\
= &-4\pi^2 \int_{\mathbb{R}^d} \left\{ F_t^{\vee,\varepsilon}(k,k_1,k_2)\cdot (k_1)_\beta \cdot (k_2)_\beta \cdot \delta_{k_1+k_2=0}\, dk_1 dk_2 \right\} \cdot e^{2\pi i k x}\, dk \\
&- 4\pi^2 \int_{\mathbb{R}^d} \left\{ F_t^{\vee,\varepsilon}(k,k_1,k_2)\cdot (k_1)_\beta \cdot (k_2)_{\beta}\cdot \; : \hat{\xi}(k_1)\hat{\xi}(k_2) : \; dk_1 dk_2 \right\} \cdot e^{2\pi i k x}\, dk \\
= &\, 4\pi^2 \int_{\mathbb{R}^d} F_t^{\vee,\varepsilon}(0,k_1,k_1)\cdot (k_1)_\beta^2 \cdot e^{2\pi i k x}\, dk_1 \\
&- 4\pi^2 \int_{\mathbb{R}^d} \left\{ F_t^{\vee,\varepsilon}(k,k_1,k_2)\cdot (k_1)_\beta \cdot (k_2)_{\beta}\cdot \; : \hat{\xi}(k_1)\hat{\xi}(k_2) : \; dk_1 dk_2 \right\} \cdot e^{2\pi i k x}\, dk
\end{aligned}
$$

y con esto notamos que el 0-caos es justamente $\mathbb{E}[Z^{\vee,\varepsilon}(x,t)]$ en la componente x_β, el cual podemos calcular explícitamente

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[Z^{\vee,\varepsilon}(x,t)] &= 4\pi^2 \int_{\mathbb{R}^d} F_t^{\vee,\varepsilon}(0,k_1,k_1)\cdot (k_1)_\beta^2\, dk_1 \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} (k_1)_\beta^2 \frac{1}{|k_1|^4}\cdot \eta_\varepsilon(k_1)\cdot \int_0^t (1 - 2e^{-s|k_1|^2} + e^{-2s|k_1|^2})\, ds dk_1 \\
&= t \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\eta_\varepsilon^2(k_1)\cdot (k_1)_\beta^2}{|k_1|^4}\, dk_1 + 2\int_{\mathbb{R}^d} \frac{(k_1)_\beta^2\cdot \eta_\varepsilon^2(k_1)}{|k_1|^6}[e^{-t|k_1|^2} - 1]\, dk_1 \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^d} \frac{(k_1)_\beta^2 \cdot \eta_\varepsilon^2(k_1)}{1|k_1|^6}[e^{-2t|k_1|^2} - 1]\, dk_1
\end{aligned}
$$

y con esto tenemos que al sumar sobre β la componente de 0-caos viene dada por

$$
\mathbb{E}[Z^{\vee,\varepsilon}(x,t)] \equiv c_\varepsilon^{\vee}(t) = t\int_{\mathbb{R}^d} \frac{\eta_\varepsilon^2(k_1)}{|k_1|^2}\, dk_1 + 2\int_{\mathbb{R}^d} \frac{\eta_\varepsilon^2(k_1)}{|k_1|^4}[e^{-t|k_1|^2} - 1]\, dk_1 - \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\eta_\varepsilon^2(k_1)}{|k_1|^4}[e^{-2t|k_1|^2} - 1]\, dk_1
$$

Notamos ahora que la única integral no convergente es la primer integral. Definiendo $c_\varepsilon^{\vee} := \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\eta_\varepsilon^2(k_1)}{|k_1|^2}\, dk_1$ deducimos que al sustraer esta cantidad, deberiamos tener convergencia en un buen espacio de Besov. Veremos que efectivamente este es el caso.

Ahora queremos aplicar el criterio de Kolmogorov para el término renormalizado. Con este fin, estudiamos la regularidad de Besov del 2-caos de Wiener-Ito.

Teorema 5.3.3:

Se tiene que para $\gamma < 1$ y cualquier $\alpha < \frac{5}{2} - \frac{d}{2}$ y todo $p \geq 2$

$$
\mathbb{E}\left[\left\| Z^{\vee,\varepsilon} - c_\varepsilon^{\vee}\cdot t \right\|^p_{C_T^0 \mathcal{C}^\alpha_{\rho_\lambda}(\mathbb{R}^d)} + \left\| Z^{\vee,\varepsilon} - c_\varepsilon^{\vee}\cdot t \right\|^p_{C_T^\gamma \mathcal{C}^{\alpha-1}_{\rho_\lambda}(\mathbb{R}^d)} \right] < \infty
$$

uniformemente en ε. Más aún, podemos concluir que $Z^{\vee,\varepsilon} - c_\varepsilon^{\vee}\cdot t \in \mathcal{L}^\alpha_{\rho_\lambda}(\mathbb{R}^d)$.

Demostración. Estudiamos los incrementos en tiempo del segundo caos para el término que deducimos en cada bloque de Littlewood-Paley. Sea $j \geq -1$. Luego, si denotamos los incrementos $f(t) - f(s) \equiv$

$f_{s,t} \equiv f(s,t)$ tenemos que

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\Big[\Big|\Delta_j\big(Z^{\vee,\varepsilon}_{s,t} - c^{\vee}_{\varepsilon}(s,t)\big)\Big|^2\Big] \\
&= \mathbb{E}\Big[\Big|\Delta_j\Big\{4\pi^2 \int_{\mathbb{R}^d} \Big\{ \int_{R_k} \big[F^{\vee,\varepsilon}_t(k,k_1,k_2) - F^{\vee,\varepsilon}_s(k,k_1,k_2)\big](k_1)_\beta \cdot (k_2)_{\beta'} : \hat{\xi}(k_1)\hat{\xi}(k_2) : \, dk_1 dk_2 \Big\} e^{2\pi i k x}\, dk \Big\}\Big|^2\Big] \\
&= (4\pi^2)^2 \cdot \mathbb{E}\Big[\mathcal{F}^{-1}_{\mathbb{R}^d}\Big\{\varphi_j \int_{\mathbb{R}_\cdot} \big[F^{\vee,\varepsilon}_t(\cdot,k_1,k_2) - F^{\vee,\varepsilon}_s(\cdot,k_1,k_2)\big](k_1)_\beta \cdot (k_2)_{\beta'} : \hat{\xi}(k_1)\hat{\xi}(k_2) : \, dk_1 dk_2\Big\} \\
&\qquad\qquad \cdot \mathcal{F}^{-1}_{\mathbb{R}^d}\Big\{\varphi_j \int_{\mathbb{R}_\cdot} \big[F^{\vee,\varepsilon}_t(\cdot,k_1',k_2') - F^{\vee,\varepsilon}_s(\cdot,k_1',k_2')\big](k_1')_\beta \cdot (k_2')_{\beta'} : \hat{\xi}(k_1')\hat{\xi}(k_2') : \, dk_1' dk_2'\Big\}\Big] \\
&= (4\pi^2)^2 \cdot \int_{\mathbb{R}^{2d}} \varphi_j(k)\varphi_j(k') \int_{R_k}\int_{R_{k'}} \big[F^{\vee,\varepsilon}_t(k,k_1,k_2) - F^{\vee,\varepsilon}_s(k,k_1,k_2)\big] \cdot \big[F^{\vee,\varepsilon}_t(k,k_1',k_2') - F^{\vee,\varepsilon}_s(k,k_1',k_2')\big] \\
&\qquad \cdot (k_1)_\beta (k_1')_\beta (k_2)_\beta (k_2')_\beta \cdot \mathbb{E}[: \hat{\xi}(k_1)\hat{\xi}(k_2) : \cdot : \hat{\xi}(k_1)\hat{\xi}(k_2) :]\, dk_1 dk_2 dk_1' dk_2'\, e^{-2\pi i[k+k']z}\, dk dk' \\
&= 2 \cdot (4\pi)^2 \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_j^2(k) \cdot \int_{R_k} \big[F^{\vee,\varepsilon}_t(k,k_1,k_2) - F^{\vee,\varepsilon}_s(k,k_1,k_2)\big]^2 (k_1)^2_\beta (k_2)^2_\beta \, dk_1 dk_2 dk
\end{aligned}
$$

en donde utilizamos que las correlaciones de la transformada de Fourier del ruido blanco viene dada por $\delta_{k+k'=0}$. Luego, por el Teorema de Wick sobre integrales estocásticas, deducimos el 2 en la última igualdad.

Con este desarrollo esperamos que este último término de 2-caos tenga bloques de Littlewood-paley estimables para poder aplicar el Teorema de Kolmogorov-Besov. En efecto, primero estimamos los término dentro de la última integral

$$
\begin{aligned}
F^{\vee,\varepsilon}_t(k,k_1,k_2) - F^{\vee,\varepsilon}_s(k,k_1,k_2) &= \int_0^t e^{-(t-r)|k|^2} \cdot F^\varepsilon_r(k_1) \cdot F^\varepsilon_r(k_2)\, dr - \int_0^s e^{-(s-r)|k|^2} \cdot F^\varepsilon_r(k_1) \cdot F^\varepsilon_r(k_2)\, dr \\
&= \int_s^t e^{-(t-r)|k|^2} \cdot F^\varepsilon_r(k_1) \cdot F^\varepsilon_r(k_2)\, dr + \int_0^s F^\varepsilon_r(k_1) \cdot F^\varepsilon_r(k_2)\big[e^{-(t-r)|k|^2} - e^{-(s-r)|k|^2}\big]\, dr \\
&= \int_s^t e^{-(t-r)|k|^2} \cdot F^\varepsilon_r(k_1) \cdot F^\varepsilon_r(k_2)\, dr \\
&\quad - [1 - e^{(s-t)|k|^2}] \int_0^s F^\varepsilon_r(k_1) \cdot F^\varepsilon_r(k_2) \cdot e^{-(s-r)|k|^2}\, dr
\end{aligned}
$$

de donde podemos estimar convenientemente la expresión

$$
\begin{aligned}
\Big|F^{\vee,\varepsilon}_t(k,k_1,k_2) - F^{\vee,\varepsilon}_s(k,k_1,k_2)\Big| &\le \int_s^t e^{-(t-r)|k|^2} \cdot F^\varepsilon_r(k_1) \cdot F^\varepsilon_r(k_2)\, dr \\
&\quad + \Big|1 - e^{(s-t)|k|^2}\Big| \int_0^s F^\varepsilon_r(k_1) \cdot F^\varepsilon_r(k_2) \cdot e^{-(s-r)|k|^2}\, dr \\
&\lesssim \eta_\varepsilon(k_1) \cdot \eta_\varepsilon(k_2) \cdot \frac{\Big|1 - e^{-(t-s)|k|^2}\Big|}{|k|^2 \cdot |k_1|^2 \cdot |k_2|^2} \\
&\lesssim \eta_\varepsilon(k_1) \cdot \eta_\varepsilon(k_2) \cdot \frac{|t-s|^\theta}{|k|^{2\theta-2} \cdot |k_1|^2 \cdot |k_2|^2}
\end{aligned}
$$

en donde interpolamos con $\theta \in (0,1)$. Así, elevando al cuadrado obtenemos la estimada fundamental sobre el segundo momento

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big[\Big|\Delta_j\big(Z^{\curlyvee,\varepsilon}_{s,t} - c^{\curlyvee}_{\varepsilon}(s,t)\big)\Big|^2\Big] &\lesssim |t-s|^{2\theta} \cdot \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\varphi_j^2(k)}{|k|^{4-4\theta}} \int_{R_k} \frac{\eta_\varepsilon^2(k_1)\cdot\eta_\varepsilon^2(k_2)\cdot|k_1\cdot k_2|^2}{|k_1|^4\cdot|k_2|^4}\, dk_1 dk_2 dk \\
&= |t-s|^{2\theta} \cdot \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\varphi_0^2(2^{-j}k)}{2^{4j-4\theta j}\cdot|2^{-j}k|^{4-4\theta}} \cdot \int_{R_{2^j(2^{-j}k)}} \frac{\eta_\varepsilon^2(k_1)\cdot\eta_\varepsilon^2(k_2)\cdot|k_1\cdot k_2|^2}{|k_1|^4\cdot|k_2|^4}\, dk_1 dk_2 dk \\
&\leq 2^{-2j(-d/2-2\theta+2)}\cdot|t-s|^{2\theta}\cdot\int_{\mathbb{R}^d}\frac{\varphi_0^2(k)}{|k|^2}\cdot\int_{R_{2^j k}}\frac{\eta_\varepsilon^2(k_1)\cdot\eta_\varepsilon^2(k_2)}{|k_1|^2\cdot|k_2|^2}\, dk_1 dk_2 dk \\
&\lesssim 2^{-2j(-d/2+5/2-2\theta)}\cdot|t-s|^{2\theta}
\end{aligned}
$$

y con estas estimadas volvemos a concluir por el Teorema de Kolmogorov-Besov la regularidad del término renormalizado. La pertenencia al espacio parabólico también se sigue por argumentos análogos a los establecidos en el término anterior. □

Nuevamente es posible de probar convergencia en distribución. Sin embargo, ahora la convergencia queda de la forma "$Z^{\curlyvee} - \infty$", pues el término sustraido es una constante que diverge en $\varepsilon \to 0$, pero que al sustraerse, entrega convergencia a un término bien definido en los espacios parabólicos. Esto es fundamental en el análisis de la KPZ, pues al realizar la descomposición y construir la data, hemos deducido que el término $|\nabla Z|^2$ asociado al ruido blanco no se encuentra bien defnido, pero localizamos la parte divergente, por lo que si la sustraemos inicialmente en la ecuación de KPZ entonces sí hay posibilidad de que las soluciones suavizadas converjan y va a converge a esta "interpretación" que determinamos con la constante $c^{\curlyvee}_{\varepsilon}$. En particular, estamos estudiando las ecuaciones suavizadas

$$\partial_t h^\varepsilon = \Delta h^\varepsilon + |\nabla h^\varepsilon|^2 - c^{\curlyvee}_{\varepsilon} + \xi_\varepsilon$$

y lo que probamos en el capítulo de la ecuación de KPZ controlada es que bajo esta ecuación tenemos existencia y unicidad, pero una vez que renormalizamos la ecuación, es decir, sustrajimos una componente del 0-caos de ciertos términos que evitaba convergencia. Denotaremos dicha solución

$$\partial_t h = \Delta h + |\nabla h|^{\diamond 2} + \xi$$

Para concluir esta sección mencionamos que con el enfoque presentado, se pueden demostrar las regularidades y convergencia de todos los términos estocásticos de la ecuación de KPZ. El esquema general siempre consiste en estudiar las componentes de n-caos de los términos suavizados y demostrar que cada una pertenece al espacio parabólico correcto. La construcción se hace de forma esencialmente análoga a [CC, 2018].

Bibliografía

[AKQ, 2014] Alberts, Tom, Konstantin Khanin y Jeremy Quastel (2014). «The intermediate disorder regime for directed polymers in dimension 1+1». En.

[AKQ, 2010] Alberts, Tom, Kostya Khanin y Jeremy Quastel (2010). «Intermediate disorder regime for directed polymers in dimension 1+ 1». En: *Physical review letters* 105.9, pág. 090603.

[BH, 2011] Bahouri, Hajer (2011). *Fourier analysis and nonlinear partial differential equations*. Springer.

[Bertini-Giacomin, 1997] Bertini, Lorenzo y Giambattista Giacomin (1997). «Stochastic Burgers and KPZ equations from particle systems». En: *Communications in mathematical physics* 183.3, págs. 571-607.

[BHD, 2017] Biermé, Hermine, Olivier Durieu y Yizao Wang (2017). «Generalized Random Fields and Lévy's Continuity Theorem on the Space of Tempered Distributions». En: *arXiv preprint*. arXiv: 1706.09326 [math.PR]. URL: https://arxiv.org/abs/1706.09326.

[Billingsley, 2013] Billingsley, Patrick (2013). *Convergence of probability measures*. John Wiley & Sons.

[Bony, 1981] Bony, Jean-Michel (1981). «Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires». Francés. En: *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure* 14.2, págs. 209-246. DOI: 10.24033/asens.1404. URL: https://www.numdam.org/item/ASENS_1981_4_14_2_209_0/.

[CC, 2018] Cannizzaro, Giuseppe y Khalil Chouk (2018). «Multidimensional SDEs with singular drift and universal construction of the polymer measure with white noise potential». En: *The Annals of Probability* 46.3, págs. 1710-1763.

[JC, 2010] Cerdà, Joan (2010). *Linear functional analysis*. Vol. 116. American Mathematical Soc.

[Comets, 2017] Comets, Francis et al. (2017). *Directed polymers in random environments*. Springer.

[Cramér y Wold, 1936] Cramér, Harald y Herman Wold (1936). «Some theorems on distribution functions». En: *Journal of the London Mathematical Society* 1.4, págs. 290-294.

[DD, 2016] Delarue, François y Roland Diel (2016). «Rough paths and 1d SDE with a time dependent distributional drift: application to polymers». En: *Probability Theory and Related Fields* 165.1, págs. 1-63.

[Gub, 2004] Gubinelli, Massimiliano (2004). «Controlling rough paths». En: *Journal of Functional Analysis* 216.1, págs. 86-140.

[Gub, 2010] — (2010). «Ramification of rough paths». En: *Journal of Differential Equations* 248.4, págs. 693-721.

[Gub-Hof, 2019] Gubinelli, Massimiliano y Martina Hofmanová (2019). «Global solutions to elliptic and parabolic Φ 4 models in Euclidean space». En: *Communications in Mathematical Physics* 368.3, págs. 1201-1266.

[Gub-Hof, 2021] — (2021). «A PDE construction of the Euclidean Φ 3 4 quantum field theory». En: *Communications in Mathematical Physics* 384.1, págs. 1-75.

[GP, 2015] Gubinelli, Massimiliano, Peter Imkeller y Nicolas Perkowski (2015a). «Paracontrolled distributions and singular PDEs». En: *Forum of Mathematics, Pi*. Vol. 3. Cambridge University Press, e6.

[GP, 2015] Gubinelli, Massimiliano y Nicolas Perkowski (2015b). «Lectures on singular stochastic PDEs». En: *arXiv preprint arXiv:1502.00157*.

[GP, 2017] — (2017). «KPZ reloaded». En: *Communications in Mathematical Physics* 349.1, págs. 165-269.

[Hai, 2013] Hairer, Martin (2013). «Solving the KPZ equation». En: *Annals of mathematics*, págs. 559-664.

[Hai, 2014] — (2014). «A theory of regularity structures». En: *Inventiones mathematicae* 198.2, págs. 269-504.

[Hida, 1980] Hida, Takeyuki (1980). «Brownian motion». En: *Brownian motion*. Springer, págs. 44-113.

[Holl, 2009] Hollander, Frank (2009). *Random polymers*. Vol. 1974. Springer Science & Business Media.

[Janson, 1997] Janson, Svante (1997). *Gaussian hilbert spaces*. 129. Cambridge university press.

[KP, 2023] Kremp, Helena y Nicolas Perkowski (2023). «Periodic homogenization for singular L\'evy SDEs». En: *arXiv preprint arXiv:2309.16225*.

[Kurtz, 2010] Kurtz, Thomas G (2010). «Equivalence of stochastic equations and martingale problems». En: *Stochastic analysis 2010*. Springer, págs. 113-130.

[Gall, 2016] Le Gall, Jean-François (2016). *Brownian motion, martingales, and stochastic calculus*. Springer.

[LL, 2001] Lieb, Elliott H y Michael Loss (2001). *Analysis*. Vol. 14. American Mathematical Soc.

[Lyons, 1998] Lyons, Terry J (1998). «Differential equations driven by rough signals». En: *Revista Matemática Iberoamericana* 14.2, págs. 215-310.

[MP, 2019] Martin, Jörg y Nicolas Perkowski (2019). «Paracontrolled distributions on Bravais lattices and weak universality of the 2d parabolic Anderson model». En: *The Annals of Probability*.

[Mitoma, 1983] Mitoma, Itaru (1983). «Tightness of probabilities on C ([0, 1]; Y') and D ([0, 1]; Y')». En: *The Annals of Probability*, págs. 989-999.

[MW, 2017] Mourrat, Jean-Christophe y Hendrik Weber (2017). «Global well-posedness of the dynamic Φ^4 model in the plane». En.

[Perkowski, 2020] Perkowski, Nicolas (2020). *SPDEs, classical and new*.

[PR, 2019] Perkowski, Nicolas y Tommaso Cornelis Rosati (2019). «The KPZ equation on the real line». En.

[GIP, 2015] Perkowski, Nicolas, M Gubinelli y P Imkeller (2015). «Paracontrolled distributions and singular SPDEs». En: *h ttps://personal-homepages. mis. mpg. de/perkow/paracontrolled-leipzig. pdf*.

[SY, 2018] Sawano, Yoshihiro et al. (2018). *Theory of Besov spaces*. Vol. 56. Springer.

[Sepp, 2012] Seppäläinen, Timo (2012). «Basics of stochastic analysis». En: *Lecture Notes. https://people. math. wisc. edu/˜ seppalai/courses/735/notes2014. pdf*.

[SV, 2007] Stroock, Daniel W y SR Srinivasa Varadhan (2007). *Multidimensional diffusion processes*. Springer.

[SV, 2024] Stroock, Daniel W y SRS Varadhan (2024). «Diffusion processes». En: *Proceedings of the Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*. Vol. 3, págs. 361-368.