PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICA

El Método de Modelos Acíclicos

por

Tamara Zamorano Reyes

Tesis de Magíster

.

Supervisor	:	Mauricio Bustamante (PUC Chile)
Committee	:	Dr. Giancarlo Urzúa (PUC Chile)
		Dr. José samper (PUC Chile)

Mayo, 2025
Santiago, Chile

Quisiera agradecer primero a mi familia por ser mi gran apoyo emocional en todo este proceso, sin ellos no habría sido posible finalizar esta tesis. A mis padres quienes siempre han confiado en mi a pesar de no siempre cumplir con las expectativas de un ser humano funcional. A mi hermano, por ser una de las personas más interesantes que he conocido en mi vida y que me motivó siempre a seguir adelante. A mi novio, Juan Pablo Zuñiga, por estar en las buenas y en las malas, por ser la voz de la consciencia y la mesura, dada su inmensa inteligencia y sabiduría y por ser a veces incluso mi segundo tutor. A Mauricio Bustamante por su inmensa paciencia durante todos estos años caóticos con cambios de tesis incluidos, por haber tolerado mi complicado carácter y por tener siempre una excelente disposición para responder mis preguntas. Al comité por su comprensión y su por tratarme con dignidad. También quiero dar agradecimientos especiales a tres personas que sin ellos yo no estaría escribiendo redactando esta tesis: María Soledad, Rodrigo y Daniel Coronel, porque nunca perdieron la fe en mi, siempre estaré agradecida de ustedes. A mis compañeros de magister y doctorados que me acompañaron durante este camino, en particular a Xavi, Jojo, Gonzalo y Feña. Muchas gracias. Y por último agradecer a Tirso y Atenea por darme amor y felicidad.

Índice

Introducción

La homología singular es una manera de asociar grupos abelianos a cada espacio topológico. Esta asociación es funtorial y, por lo tanto, define un invariante topológico, es decir, el funtor asigna el mismo valor a espacios homeomorfos.

En esta tesis se estudia la homología singular de espacios topológicos desde un punto de vista axiomático. En particular, se discuten los axiomas de Eilenberg–Steenrod y se caracteriza la homología singular en términos de dichos axiomas.

Uno de los puntos centrales de este trabajo es el uso del Teorema de Modelos Acíclicos para verificar que la homología singular es invariante homotópico y que satisface el axioma de escisión (que se explicará más adelante).

A grandes rasgos, el Teorema de Modelos Acíclicos establece condiciones necesarias para que dos funtores, de la categoría de espacios topológicos a la de complejos de cadenas, sean equivalentes y, por lo tanto, induzcan isomorfismos en homología. Estas condiciones se deben verificar en una colección pequeña de *modelos* y luego el teorema da una conclusión para *todos* los espacios topológicos.

Para ser más precisos, una familia de modelos, $\mathcal{M}$, es simplemente un subconjunto de los objetos de una categoría $\mathbf{C}$. En nuestro caso, trabajaremos con la categoría de espacios topológicos, $\mathbf{Top}$, y con modelos $\mathcal{M} = \{\Delta^n \mid n \geq 0\}$ o variantes de ésta, donde Δ^n es el n-simplejo estándar.

Supongamos que tenemos una familia de modelos $\mathcal{M}$ y definimos dos funtores no negativos S_* y T_* de $\mathbf{C}$ a $\mathbf{Ab}$, con $\mathbf{C}$ siendo una categoría cualquiera. A estos funtores les imponemos dos propiedades: T_* será un funtor libre, es decir, que evaluado en cada objeto C de $\mathbf{C}$ resulte en un grupo abeliano libre con una base compuesta precisamente por los modelos; y al funtor S_* se le exigirá ser acíclico cuando se restringe a la familia de modelos, lo que significa que para cada modelo $M \in \mathcal{M}$ se cumple que, para $n \geq 0$, $H_n(S_*(M)) = 0$.

El teorema nos dice que si se tienen estas condiciones, y además existe una transformación natural $H_0 \circ T_* \to H_0 \circ S_*$, entonces existirá un mapa de cadena natural $\theta\colon T_* \to S_*$. Además, si existen dos mapas de cadena naturales que cumplen estas condiciones, serán homotópicos.

Como se expresó antes, a lo largo de esta tesis se presentarán los axiomas de Eilenberg–Steenrod y se utilizará el Teorema de Modelos Acíclicos para deducir la invarianza homotópica y el teorema de escisión en homología singular.

1. Homología singular y el axioma de la dimensión

En esta primera parte definiremos los grupos de homología singular y estableceremos sus propiedades funtoriales. Como referencia utilizaremos los libros [DF08] y de [Spa95].

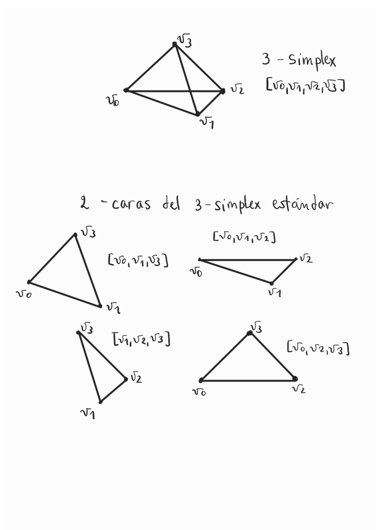
1.1. Homología singular.

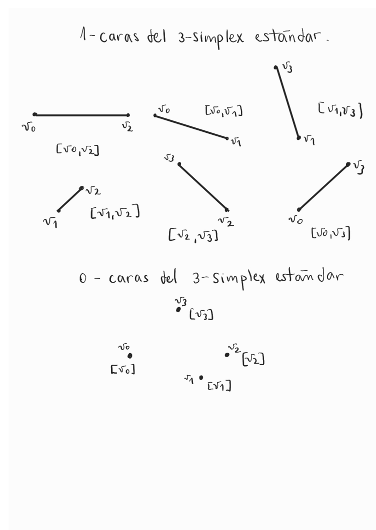
Definición 1.1. Para $n \geq 0$, se define el n-simplex estándar Δ^n como la cubierta convexa de la base estándar $\{e_0, \ldots, e_n\} \in \mathbb{R}^n$:

$$\Delta^n = \{\sum t_i e_i : \sum t_i = 1, t_i \geq 0\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

Los t_i son llamadas coordenadas baricéntricas.

Definición 1.2. Sea X un espacio topológico arbitrario. Un n-simplex singular en X es un mapa continuo $\sigma : \Delta^n \to X$. Denotamos por $\mathrm{Sin}_n(X)$ el conjunto de todos los n-símplices singulares en X.





Definición 1.3. El grupo abeliano $C_n(X)$ de n-cadenas singulares en X es el grupo abeliano libre generado por n-símplices

$$C_n(X) = \mathbb{Z}\mathrm{Sin}_n(X).$$

Entonces una n-cadena es una combinación lineal finita de símplices

$$\sum_{i=1}^{k} a_i \sigma_i, \quad a_i \in \mathbb{Z}, \quad \sigma_i \in \mathrm{Sin}_n(X)$$

Observación 1.4. Si $n < 0$, $\mathrm{Sin}_n(X) = \emptyset$, entonces $C_n(X) = 0$.

Ahora definiremos operadores de frontera $d_n : C_n(X) \to C_{n-1}(X)$ que satisfacen $d_n \circ d_{n+1} = 0$. Para esto necesitamos definir primero ciertas funciones que "seleccionan" las caras de un simplejo.

Definición 1.5. Sean $\varepsilon_i^{n-1} : \Delta^{n-1} \to \Delta^n$ el mapa i-ésima cara, $\sigma : \Delta^n \to X$ el n-simplex singular en X y sea $0 \leq i \leq n$. La composición $\sigma \circ \varepsilon_i : \Delta^{n-1} \to X$ es un $(n-1)$-simplex singular en X, la cual llamaremos la restricción de σ a la i-ésima cara.

Proposición 1.6. *Si $k < j$ entonces*

$$\varepsilon_j^{n+1} \circ \varepsilon_k^n = \varepsilon_k^{n+1} \circ \varepsilon_{j-1}^n : \Delta^{n-1} \to \Delta^{n+1}$$

Demostración. Para probar la proposición calcularemos ambas composiciones y compararemos. En efecto,

$$\begin{aligned}(\varepsilon_j^{n+1} \circ \varepsilon_k^n)(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) &= \varepsilon_j^{n+1}(\varepsilon_k^n(x_0, \ldots, x_{n-1})) \\ &= \varepsilon_j^{n+1}(x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}, 0, x_k, \ldots, x_{n-1}) \\ &= (x_0, \ldots, x_{k-1}, 0, x_k, \ldots, x_{j-2}, 0, x_{j-1}, \ldots, x_{n-1})\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}(\varepsilon_k^{n+1} \circ \varepsilon_{j-1}^n)(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) &= \varepsilon_k^{n+1}(\varepsilon_{j-1}^n(x_0, \ldots, x_{n-1})) \\ &= \varepsilon_k^{n+1}(x_0, x_1, \ldots, x_{j-2}, 0, x_{j-1}, \ldots, x_{n-1}) \\ &= (x_0, \ldots, x_{k-1}, 0, x_k, \ldots, x_{j-2}, 0, x_{j-1}, \ldots, x_{n-1})\end{aligned}$$

Esto concluye la demostración. □

Definición 1.7. Definimos el operador frontera $d_n : C_n(X) \to C_{n-1}(X)$ como la única extensión lineal a $C_n(X)$ de la función

$$d_n : \mathrm{Sin}_n(X) \to C_{n-1}(X)$$

dada por

$$d_n(\sigma) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \sigma \circ \varepsilon_j^n.$$

Observación 1.8. Notemos que dicha extensión existe y es única ya que $C_n(X)$ es un $\mathbb{Z}$-módulo libre. Ocasionalmente, utilizaremos $d : C_n(X) \to C_{n-1}(X)$ para referirnos al operador frontera, si no hay riesgo de confusión.

Proposición 1.9. *Para cualquier $n \geq 0$, la composición*

$$C_{n+1}(X) \xrightarrow{d_{n+1}} C_n(X) \xrightarrow{d_n} C_{n-1}(X)$$

es siempre cero.

Demostración. Sea $\sigma : \Delta^{n+1} \to X$. Por definición sabemos que

$$d_{n+1}(\sigma) = \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j \sigma \circ \varepsilon_j^{n+1}$$

entonces si aplicamos d_n a la ecuación anterior se tiene

$$\begin{aligned}
d_n(d_{n+1}(\sigma)) &= d_n\left(\sum_{j=0}^{n+1}(-1)^j\sigma\circ\varepsilon_j^{n+1}\right)\\
&= \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n+1}(-1)^{j+k}(\sigma\circ\varepsilon_j^{n+1})\circ\varepsilon_k^n\\
&= \sum_{j\leq k}(-1)^{j+k}(\sigma\circ\varepsilon_j^{n+1})\circ\varepsilon_k^n+\sum_{k<j}(-1)^{j+k}(\sigma\circ\varepsilon_j^{n+1})\circ\varepsilon_k^n
\end{aligned}$$

Dejaremos la primera suma como está y para la segunda, usaremos la proposición demostrada. Luego, probaremos que se tiene la siguiente igualdad

$$\sum_{k<j}(-1)^{j+k}(\sigma\circ\varepsilon_k^{n+1})\circ\varepsilon_{j-1}=\sum_{k\leq j}(-1)^{j+k+1}(\sigma\circ\varepsilon_k^{n+1})\circ\varepsilon_j^n$$

Primero, notemos que

$$\sum_{k<j}(-1)^{j+k}(\sigma\circ\varepsilon_k^{n+1})\circ\varepsilon_{j-1}=\sum_{k<j-1}(-1)^{j+k+1}(\sigma\circ\varepsilon_k^{n+1})\circ\varepsilon_j$$

Ahora, notemos que

$$\sum_{k<j-1}(-1)^{j+k+1}(\sigma\circ\varepsilon_k^{n+1})\circ\varepsilon_j+\sum_{k=j-1}(\sigma\circ\varepsilon_k^{n+1})\circ\varepsilon_j=\sum_{k\leq j-1}(-1)^{j+k+1}(\sigma\circ\varepsilon_k^{n+1})\circ\varepsilon_j$$

y que

$$\sum_{k\leq j-1}(-1)^{j+k+1}(\sigma\circ\varepsilon_k^{n+1})\circ\varepsilon_j+\sum_{k=j}(-1)^{j+k+1}(\sigma\circ\varepsilon_k^{n+1})\circ\varepsilon_j=\sum_{k\leq j}(-1)^{j+k+1}(\sigma\circ\varepsilon_k^{n+1})\circ\varepsilon_j$$

Ahora, usando propiedades de la sumatoria es fácil ver que

$$\sum_{k=j}(-1)^{j+k+1}(\sigma\circ\varepsilon_k^{n+1})\circ\varepsilon_j=\sum_{k=j-1}(\sigma\circ\varepsilon_k^{n+1})\circ\varepsilon_j$$

y por lo tanto se obtiene que

$$\sum_{k<j}(-1)^{j+k}(\sigma\circ\varepsilon_k^{n+1})\circ\varepsilon_{j-1}=\sum_{k\leq j}(-1)^{j+k+1}(\sigma\circ\varepsilon_k^{n+1})\circ\varepsilon_j^n$$

Fijándonos que $\sum_{j\leq k}(-1)^{j+k}(\sigma\circ\varepsilon_j^{n+1})\circ\varepsilon_k^n$ es igual a $\sum_{k\leq j}(-1)^{j+k+1}(\sigma\circ\varepsilon_k^{n+1})\circ\varepsilon_j^n$ pero con distinto signo, se tiene que

$$d_nd_{n+1}(\sigma)=0$$

y se concluye la demostración. $\square$

Como consecuencia, la colección de grupos abelianos $C_n(X)$ y operadores de frontera $d_n: C_n(X)\to C_{n-1}(X)$ forman un complejo de cadenas llamado el *complejo de cadenas singulares de* X.

Definición 1.10. Un n-ciclo en X es una n-cadena c con $d_n c = 0$. El espacio de los n-ciclos en X se define como:

$$Z_n(X) = \ker(d_n : C_n(X) \to C_{n-1}(X))$$

Definición 1.11. Diremos que una n-cadena singular en X es una n-frontera singular si está contenida en la imagen de d_{n+1}. Denotaremos por $B_n(X)$ al conjunto de todas las n-fronteras singulares:

$$B_n(X) = \mathrm{Im}(d : C_{n+1}(X) \to C_n(X))$$

Tanto $Z_n(X)$ como $B_n(X)$ son subgrupos de $C_n(X)$.

Proposición 1.12. *Sea X un espacio topológico. Entonces se tiene que:*

$$B_n(X) \subseteq Z_n(X) \subseteq C_n(X).$$

Demostración. Sea X un espacio topológico y consideremos la sucesión de cadenas

$$\cdots \longrightarrow C_{n+1}(X) \xrightarrow{d_{n+1}} C_n(X) \xrightarrow{d_n} C_{n-1}(X) \to \cdots$$

Sea σ en $\mathrm{im}(d_{n+1})$, con $\sigma : \Delta^n \to X$, entonces existe $\tau : \Delta^{n+1} \to X$ tal que $d_{n+1}(\tau) = \sigma$ y como probamos anteriormente que $d_n d_{n+1} = 0$ entonces $d_n(\sigma) = 0$ y por lo tanto $\sigma \in \ker(d_n) = Z_n(X)$ y se obtiene la contención. $\square$

Definición 1.13. El n-ésimo grupo de homología singular de X es

$$H_n(X) = \frac{Z_n(X)}{B_n(X)} = \frac{\ker(d : C_n(X) \to C_{n-1}(X))}{\mathrm{im}(d : C_{n+1}(X) \to C_n(X))}$$

Dos ciclos que difieren de una frontera dc se dicen homólogos y la cadena c es una homología entre ellos.

Observación 1.14. Notemos que si bien $Z_n(X)$ y $B_n(X)$ con grupos abelianos libres, pues son subgrupos de $C_n(X)$, el cociente $H_n(X)$ no necesariamente es libre.

Ejemplo: componentes arco-conexas. Ilustremos cómo la homología singular detecta propiedades de conectividad de los espacios topológicos.

Proposición 1.15. *Para todo espacio X conexo por caminos, $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$.*

Demostración. Recordemos que por definición $H_0(X) = Z_0(X)/B_0(X)$. Además tenemos que $Z_0(X) = C_0(X)$, ya que $d_0 = 0$. Para calcular $H_0(X)$ consideremos el siguiente mapa.

$$\begin{aligned} e : &C_0(X) \to \mathbb{Z} \\ &\sum_i n_i \sigma_i \mapsto \sum_i n_i \end{aligned}$$

Veamos que es un homomorfismo: Sean $x, y \in C_0(X)$, con $x = \sum_i n_i\sigma_i$ e $y = \sum_i m_i\sigma_i$, notando que tanto $C_0(X)$ como $\mathbb{Z}$ son abelianos se tiene que:

$$\begin{aligned} e(x) + e(y) &= \sum_i n_i\sigma_i + \sum_i m_i\sigma_i \\ &= \sum_i n_i\sigma_i + m_i\sigma_i \\ &= \sum_i (n_i + m_i)\sigma_i \\ &= e(x+y) \end{aligned}$$

Ahora veamos que e es sobreyectivo: Sea $n \in \mathbb{Z}$, queremos probar que existe $x \in C_0(X)$ tal que $e(x) = n$, para esto basta considerar $x = n\sigma$ con $\sigma : \Delta^0 \to 0$ y entonces $e(x) = e(nx) = n$. Por lo tanto e es sobreyectivo.
Ahora, sea $\varphi : C_0(X) \to C_0(X)/B_0(X)$ con $\varphi(x) = [x]$ donde $[x]$ corresponde a la clase de homologia H_0 de x. Este mapa es sobreyectivo.
Probaremos que existe $\hat{\varphi}$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} C_0(X) \arrow[r, "e"] \arrow[d, "\varphi"'] & \mathbb{Z} \\ C_0(X)/B_0(X) \arrow[ur, "\hat{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

con $\hat{\varphi}([x]) = e(x)$.

Primero notemos que todo elemento de $\ker(e)$, por definición es $\sum_i n_i$ con $n_i \in \mathbb{Z}$ para todo i. Tomando en cuenta esto probaremos que $B_0(X) \subseteq \ker(e)$: si $c \in B_0(X)$ entonces existe $b = \sum_{x\in X} m_x\sigma_x$ con $\sigma_x : \Delta^1 \to X$ tal que $\partial_1 b = c$ y tenemos que

$$\begin{aligned} e(c) &= e(\partial_1 b) \\ &= e(\partial_1(\sum_{x\in X} m_x\sigma_x)) \\ &= e(\sum_{x\in x} m_x\partial_1(\sigma_x)) \\ &= e(\sum_{x\in X} m_x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ahora veamos que $\hat{\varphi}$ está bien definido: en efecto, sean $x, y \in C_0(x)/B_0(X)$ con $[x] = [y]$ en otras palabras $x - y = \partial_1\tau$ con $\tau : \Delta^1 \to X$ entonces

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}([x]) - \hat{\varphi}([y]) &= e(x) - e(y) \\ &= e(x - y) \\ &= e(\partial_1\tau) \\ &= 0 \end{aligned}$$

donde la última ecuación se tiene porque $\partial_1\tau \in B_0(x)$. La sobreyectividad de $\hat{\varphi}$ se tiene directamente pues por construcción $\hat{\varphi}([x]) = e(x)$ y probamos anteriormente que e es sobreyectivo.

Sólo nos falta probar que $\hat{\varphi}$ es inyectivo: sea $[c] \in C_0(X)/B_0(X)$ tal que $c = \sum_i n_i x_i$ con $n_i \in \mathbb{Z}$, supongamos que $[c] \in \ker(\hat{\varphi})$, es decir $\hat{\varphi}([c]) = 0$, y a su vez $e(c) = 0$ y por lo tanto $\sum_i n_i = 0$. Queremos probar entonces que $c = 0$. De la definición de $H_0(X)$ esto es equivalente a probar que $c = d_1 b$ con $b \in B_0(X)$. La idea es construir b utilizando el hecho que X es conexo por caminos y que por lo tanto X posee solo una componente conexa. Notando que un intervalo cerrado se puede ver como un 1-simplex estandar, diremos, $\Delta^1 = [0,1]$, vamos a fijar un punto x_0 de X y diremos que este es el punto inicial de un camino entre x_0 y $x \in X$, con x arbitrario, el camino lo denotaremos por $\tau_i : \Delta^1 \to X$, con $\tau_i(0) = x_0$ y $\tau_i(1) = x_i$ para todo i. Sea $b = \sum_i n_i \tau_i$.Tenemos entonces:

$$\begin{aligned}
\partial_1(b) &= \partial_1(\sum_i n_i \tau_i) \\
&= \sum_i n_i \partial_1(\tau_i) \\
&= \sum_i n_i (x_i - x_0) \\
&= \sum_i n_i x_i - \sum_i n_i x_0 \\
&= \sum_i n_i x_i - 0 \\
&= \sum_i n_i x_i \\
&= c
\end{aligned}$$

Por lo tanto, c es una frontera. Concluimos entonces que $\hat{\varphi}$ es inyectivo y por tanto es un isomorfismo y hemos demostrado la proposición. □

1.2. Funtorialidad de la homología singular.

Definición 1.16. Si $f : X \to Y$ es un mapa continuo y $\sigma : \Delta^n \to X$ es un n-simplex singular en X, entonces $f \circ \sigma : \Delta^n \to Y$ es un n-simplex singular en Y. Por lo tanto f induce un mapa $f_* : C_n(X) \to C(Y) : \sum k_\sigma \sigma \mapsto \sum k_\sigma f \circ \sigma$.

Proposición 1.17. *Si $f : X \to Y$ es continuo, entonces f induce un mapa de cadenas $f_n : C_n(X) \to C_n(Y)$ y para todo n, el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd}
C_n(X) \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "f_n"'] & C_{n-1}(X) \arrow[d, "f_{n-1}"] \\
C_n(Y) \arrow[r, "\hat{d_n}"'] & C_{n-1}(Y)
\end{tikzcd}$$

Demostración. Debemos probar que $\hat{d_n} \circ f_n = f_{n-1} \circ d_n$. En efecto, sea $\sigma : \Delta^n \to X$, entonces

$$\begin{aligned}\hat{d_n} \circ f_n(\sigma) &= \hat{d_n}(f \circ \sigma) \\ &= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (f \circ \sigma) \circ \varepsilon_i.\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}f_{n-1} \circ d_n(\sigma) &= f_{n-1}(\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \sigma \circ \varepsilon_i) \\ &= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i f \circ (\sigma \circ \varepsilon_i)\end{aligned}$$

□

Proposición 1.18. *Sea $f : X \to Y$ una función continua, recordando la definición de $f_* : C_n(X) \to C_n(Y)$ con $\sum k_\sigma \sigma \mapsto \sum k_\sigma f \circ \sigma$. Entonces se tiene un funtor $f_\# :$ **Top** $\to$ **Chain***

- $X \mapsto C_\bullet(X)$
- $f \mapsto f_*$

Demostración. Sean $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$, tenemos que

$$\begin{aligned}(gf)_\# &= (gf)_*(\sigma) \\ &= \sigma \circ (gf) \\ &= (\sigma \circ f) \circ g \\ &= (f_*(\sigma)) \circ g \\ &= g_* f_*(\sigma) \\ &= g_\# f_\#\end{aligned}$$

Ahora sea $id_X : X \to X$, tenemos que

$$\begin{aligned}id_\# &= id_*(\sigma) \\ &= \sigma \circ \mathrm{id}_X \\ &= \sigma\end{aligned}$$

□

Corolario 1.19. *Si $f : X \to Y$ es continua entonces $f_*(Z_n(X)) \subset Z_n(Y)$ y $f_*(B_n(X)) \subset B_n(Y)$.*

Demostración. Sea $c \in Z_n(X)$, entonces $dc = 0$, esto implica que $d(f_* c) = f_*(dc) = 0$ entonces $f_* c \in Z_n(Y)$. Similarmente si $b = dc$ con $b \in B_n(X)$, tenemos que $f_* b = f_*(dc) = d(f_* c)$, lo que implica que $f_* b \in B_n(Y)$. □

Observación 1.20. f_* induce un homomorfismo de grupos $H_n(f) : H_n(X) \to H_n(Y)$ dado por

$$H_n(f)([c]) = [f_*c]$$

Proposición 1.21. *Para todo $n \geq 0$, se tiene que H_n : $\textbf{\textit{Top}} \to \textbf{\textit{Ab}}$ es un funtor de la categoría de espacios topológicos a la categoría de grupos abelianos.*

Demostración. Sean $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ mapas de espacios topológicos, con $X, Y, Z \in \mathrm{ob}(\textbf{Top})$. Sabemos que f_*, g_*, inducen los mapas $H_n(f) : H_n(X) \to H_n(Y)$ y $H_n(g) : H_n(Y) \to H_n(Z)$. Sea $[z_n] \in H_n(X)$ tal que $H_n(f)[z_n] = [f_*z_n] \in H_n(Y)$, y sea $[w_n] \in H_n(Y)$ tal que $H_n(g)[w_n] = [g_*w_n] \in H_n(Z)$. Entonces se tiene que

$$\begin{aligned} H_n(g)H_n(f)[z_n] &= H_n(g)[f_*z_n] \\ &= [g_*(f_*z_n)] \\ &= [(gf)_*z_n] \\ &= H_n(gf)[z_n] \end{aligned}$$

Ahora sea $id : X \to X$, entonces sea $[c] \in H_n(X)$, se tiene que

$$\begin{aligned} H_n(id_X)([c]) &= [id_X c] \\ &= [c] \\ &= id_{H_n(X)} \end{aligned}$$

□

1.3. Homología singular relativa.

1.3. Homología singular relativa. Dado un espacio X y un subespacio $A \subseteq X$, definimos $C_n(X, A) = C_n(X)/C_n(A)$. Notemos que este cociente es un grupo, pues $C_n(X)$ es abeliano y $C_n(A)$ es un subgrupo de $C_n(X)$.

Proposición 1.22. $C_n(X, A)$ *es un grupo libre.*

Demostración. Consideremos el conjunto $B = \{c \in C_n(X) | c \notin C_n(A)\}$. Vamos a probar que este conjunto es una base de $C_n(X, A)$.
Notemos que se tiene la independencia lineal, ya que si tenemos $\sum_{i \in I} n_i c_i + C_n(A) = 0 + C_n(A)$, como los $c_i \notin C_n(A)$, no son triviales y $\sum_{i \in I} n_i c_i$ es una suma libre en $C_n(X)$ necesariamente se tendrá que $n_i = 0 \forall i \in I$.
Ahora, por construcción B genera todo el grupo. □

Consideremos ahora el mapa frontera $d_n : C_n(X) \to C_{n-1}(X)$. Es fácil ver, que d también está bien definido para $C_n(A)$ y por lo tanto induce el mapa cociente $d_n : C_n(X, A) \to C_{n-1}(X, A)$.

Proposición 1.23. $d_n : C_n(X, A) \to C_{n-1}(X, A)$ *está bien definido.*

Demostración. Sean $[c_1], [c_2] \in C_n(X, A)$ con $c_1, c_2 \in C_n(X)$ tal que $[c_1] = [c_2]$, es decir $c_1 + C_n(A) = c_2 + C_(A)$, esto implica que $c_1 - c_2 \in C_n(A)$ y por lo tanto $d(c_1 - c_2) \in C_{n-1}(A)$, por linealidad de d, tenemos que $d(c_1) - d(c_2) \in C_A$, lo que implica que $d(c_1) + C_{n-1}(A) = d(c_2) + C_{n-1}(A)$, y esto es precisamente $d[c_1] = d[c_2]$, pues $d(c_1), d(c_2) \in C_{n-1}(X)$. Se concluye. □

Tenemos entonces una sucesión de estos mapas:

$$\cdots \longrightarrow C_{n+1}(X,A) \xrightarrow{d_{n+1}} C_n(X,A) \xrightarrow{d_n} C_{n-1}(X,A) \to \cdots$$

Proposición 1.24. *La sucesión descrita anteriormente es un complejo de cadena.*

Demostración. Sea $[c] \in C_{n+1}(X,A)$, entonces por definición $d_{n+1}([c]) = [d_{n+1}c]$. Entonces $d_n([d_{n+1}c]) = [d_n(d_{n+1}c)]$ y esto es $[0]$, pues $\{C_n(X), d\}$ es un complejo de cadena. □

Ahora, ya podemos definir los grupos de homología relativa como

$$H_n(X,A) = \frac{\ker d_n}{\operatorname{im} d_{n+1}}$$

De la definición del mapa d podemos observar que:

- Los elementos de $H_n(X,A)$ están representados por ciclos relativos, es decir, n-cadenas $\alpha \in C_n(X)$ tal que $d\alpha \in C_{n-1}(A)$.
- Un ciclo relativo α es trivial en $H_n(X,A)$ si y sólo si es una frontera relativa, es decir, $\alpha = d\beta + \gamma$ para algún $\beta \in C_{n+1}(X)$ y $\gamma \in C_n(A)$.

Observación 1.25. Es posible demostrar que la n ésima homología relativa define un funtor

$$H_n : \mathbf{Top}^2 \to \mathbf{Ab}$$

de la categoría de pares de espacios topológicos en la categoría de grupos abelianos.

2. Los Axiomas de Eilenberg-Steenrod

Una teoría de homología es una colección $\mathcal{H}_n : \mathbf{Top^2} \to \mathbf{Ab}$ de funtores para $n \geq 0$ junto con una colección de transformaciones naturales $\delta = \delta_n : \mathcal{H}_n \to \mathcal{H}_{n-1}$ para $n \geq 1$ que satisfacen los siguientes axiomas:

(1) **Invarianza homotópica**: Si $f, g : (X, X') \to (Y, Y')$ son homotópicos mod X' entonces $\mathcal{H}_n(f) = \mathcal{H}_n(g)$ para todo $n \geq 0$

(2) **El axioma de la sucesión exacta**: Para cada par (X, X') con inclusiones $\imath : (X', \emptyset) \hookrightarrow (X, \emptyset)$ y $\jmath : (X', \emptyset) \hookrightarrow (X, X')$, existe una sucesión exacta

$$\cdots \mathcal{H}_n(X') \xrightarrow{\mathcal{H}_n(\imath)} \mathcal{H}_n(X') \xrightarrow{\mathcal{H}_n(\jmath)} \mathcal{H}_n(X, X') \xrightarrow{\delta_n} \mathcal{H}_{n-1}(X') \to \cdots$$

(3) **Escisión**: Para cada par (X, X') y todo subconjunto $U \subseteq X$ con $\overline{U} \subset (X')^\circ$, la inclusión $(X/U, X'/U) \hookrightarrow (X, X')$ induce un isomorfismo

$$\mathcal{H}_n(X/U, X'/U) \cong \mathcal{H}_n(X, X'), \quad \forall n \geq 0.$$

(4) **El axioma de la dimensión**: Si $\{*\}$ es un espacio de un punto entonces $\mathcal{H}_n(*) = 0$ para todo $n > 0$ y $\mathcal{H}_0(*) = \mathbb{Z}$.

(5) **El axioma de aditividad**: Sea $(X_\lambda, X'_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ una familia de pares de espacios. Denotamos por

$$\imath_\lambda : (X_\lambda, X'_\lambda) \hookrightarrow (\coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda, \coprod_{\lambda \in \Lambda} X'_\lambda)$$

la inclusión. Entonces para todo $n \geq 0$, el mapa

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{H}_n(\imath_\lambda) : \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{H}_n(X_\lambda, X'_\lambda) \hookrightarrow \mathcal{H}_n(\coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda, \coprod_{\lambda \in \Lambda} X'_\lambda)$$

es un isomorfismo.

En las secciones siguientes demostraremos que la homología singular satisface los axiomas de Eilenberg–Steendrod. Una vez verficado esto, el siguiente teorema da una caracterización de la homología singular en términos de los axiomas de Eilenberg–Steenrod.

Teorema 2.1. *Supongamos que $(\mathcal{K}, \epsilon)$ es una teoría de homología que satisface los axiomas de Eilerberg -Steenrod y supongamos que $\phi_n : (\mathcal{H}_n, \delta) \to (\mathcal{K}_n, \epsilon)$ es una sucesión de transformaciones naturales tal que $\phi_0(*) : \mathcal{H}_0(*) \to \mathcal{K}_0(*)$ es un isomorfismo, donde $*$ es el espacio de un punto. Entonces*

$$\phi_n(X, X') : \mathcal{H}_n(X, X') \to \mathcal{K}_n(X, X')$$

es un isomorfismo para todos los pares (X, X') donde X es un complejo CW finito y X' un subcomplejo de X.

Demostración. Ver [Spa95]. □

A continuación vamos a enfocarnos en probar los axiomas en el caso absoluto, es decir, $A = \emptyset$. Omitiremos la demostración del axioma de la sucesión exacta larga ya que es una consecuencia directa de un teorema fundamental del álgebra homológica que afirma que una sucesión exacta corta de complejos de cadena induce una sucesión exacta larga en grupos de homología.

3. Axioma de la dimensión y aditividad

3.1. Axioma de la dimensión. Recordemos que el axioma de la dimensión se refiere al valor que toma el funtor en el espacio que consiste de un único punto. Para la homología singular se tiene el siguiente resultado.

Teorema 3.1. *Sea $X = \{*\}$ el espacio topológico que consiste de un único punto, entonces*

$$H_n(*) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & si\ n = 0 \\ 0 & si\ n > 0 \end{cases}$$

Demostración. Para la demostración usaremos la convención que $C_{-1}(*) = 0$ Lo primero que haremos será calcular $H_0(*)$ y $H_1(*)$ y luego generalizaremos a los casos par e impar.
Debemos tener en cuenta que para todo $n \in \mathbb{N}$, el grupo de complejos de cadena $C_n(*)$ tiene un solo generador $\gamma_n : \Delta^n \to *$,
Consideremos la sucesión de complejos

$$\cdots \longrightarrow C_{n+1}(*) \xrightarrow{d_{n+1}} C_n(*) \xrightarrow{d_n} C_{n-1}(*) \to \cdots$$

Como dijimos, primero veremos el caso $n = 0$, para esto, solo necesitamos, la siguiente parte de la sucesión:

$$\cdots \to C_1(*) \xrightarrow{d_1} C_0(*) \xrightarrow{d_0} 0$$

Calculemos entonces $Z_0(X) = \ker(d_0)$ y este claramente es todo $C_0(*)$ pues $\partial_0 : C_0 \to 0$, entonces $Z_0(*) = C_0(*) = \mathbb{Z}[\gamma_0] \cong \mathbb{Z}$. Ahora veamos $B_0(*) = \mathrm{im}(d_1)$, notemos que si tomamos $\gamma_1 \in C_1(*)$, se tiene por definición que $\partial_1(\gamma_1) = 0$, pues $\gamma_0 = 0$, entonces $B_0(*) = 0$ y por lo tanto

$$H_0(*) = \frac{Z_0(*)}{B_0(*)} \cong \mathbb{Z}$$

Veamos ahora el caso $n = 1$, consideremos la parte de la sucesión:

$$\cdots \to C_2(*) \xrightarrow{d_2} C_1(*) \xrightarrow{d_1} C_0(*)$$

Calculemos $Z_1(*) = \ker(d_1)$, en este caso dado γ_1, tenemos que $d_1(\gamma_1) = 0$, esto sale del cálculo anterior cuando calculamos $B_0(*)$, entonces $Z_1(*) = C_1(*) \cong \mathbb{Z}[\gamma_1] \cong \mathbb{Z}$.
Ahora, calculamos $B_1(*) = \mathrm{im}(d_2)$ y notamos que dado γ_2, $d_2(\gamma_2) = -\gamma_2|_{\hat{0}} + \gamma_2|_{\hat{1}} - \gamma_2|_{\hat{2}}$ y esto es igual a $-\gamma_2|_{\hat{3}}$ pues los γ_n son constantes para todo n, y $-\gamma_2|_{\hat{3}} \in C_1(*)$, entonces $B_1(*) = C_1(*) \cong \mathbb{Z}[\gamma_1] \cong \mathbb{Z}$. De esto se concluye que

$$H_1(*) = \frac{Z_1(*)}{B_1(*)} \cong 0$$

Ahora generalizaremos para n par e impar:

- n par: $d\gamma_n = \gamma_{n-1}$,
- n impar: $d = 0$.

Se puede ver esto en el complejo de cadenas como

$$\cdots \xrightarrow{1} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{1} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \to 0$$

Esto quiere decir que las fronteras coinciden con los ciclos salvo en $n = 0$. Por lo tanto $H_0(*) = \mathbb{Z}$ y $H_n(*) = 0$ para $n > 0$. □

3.2. Axioma de aditividad. Demostraremos el siguiente teorema.

Teorema 3.2. *Si $X = \coprod_\alpha X_\alpha$ es la unión disjunta de una familia de espacio topológicos X_α, entonces*

$$H_n(X) \cong \bigoplus_\alpha H_n(X_\alpha)$$

Demostración. Consideremos los mapas

$$H_j(X_i) \xrightarrow{\pi_i} H_j(\coprod_{i\in I} X_i)$$

$$[\sigma] \mapsto [\sigma]$$

es decir, los mapas inclusión.

Ahora por propiedad universal del coproducto existe un mapa

$$\varphi : \bigoplus H_j(X_i) \to H_j(\coprod_{i\in I} X_i)$$

tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} H_j(X_i) \arrow[r] \arrow[dr] & \bigoplus_{i\in I} H_j(X_i) \arrow[d, dashed, "\varphi"] \\ & H_j(\coprod_{i\in I} X_i) \end{tikzcd}$$

con $\varphi(\sum m_i[\sigma_i]) = \sum m_i\pi_i([\sigma_i])$.

Afirmamos que φ es invertible. En efecto, sea $\sigma \in C_j(\coprod_{i\in I} X_i)$ dado que σ es continuo se tiene que $\sigma(Delta^j) \subseteq X_i$ para algún i. Sea $\tau = \sum \sigma_i \in C_j(\coprod X_i)$, definimos φ^{-1} como

$$\varphi^{-1}([\tau]) := \sum m_i[\sigma_i]$$

con $[\sigma_i] \in H_j(X_i)$. Entonces como φ^{-1} es la inversa de φ se tiene que φ es un isomorfismo y se concluye la demostración. □

4. El teorema de los modelos acíclicos

En esta sección encunciaremos y demostraremos el teorema de modelos acíclicos, utilizando como guía las notas de [Bro15]. Posteriormente usaremos este teorema para demostrar que la homología singular satisface el axioma de la invarianza homotópica y escisión.

Para enunciar el teorema de modelos acíclicos, necesitamos varias definiciones.

Definición 4.1. Sea $\mathcal{C}$ una categoría. Una familia de modelos para $\mathcal{C}$ es un subconjunto indexado $\mathcal{M} = \{\mathcal{M}_\lambda | \lambda \in \Lambda\} \subset \text{obj}(C)$

Definición 4.2. Sea $\mathcal{C}$ una categoría y $\mathcal{M} = \{\mathcal{M}_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ una familia de modelos. Supongamos que $T : \mathcal{C} \to \mathbf{Ab}$ es un funtor. Un conjunto $T-$modelo Ξ es una elección de un elemento $x_\lambda \in T(M_\lambda)$ para cada λ:

$$\Xi = \{x_\lambda \in T(M_\lambda) | \lambda \in \Lambda\}$$

Definición 4.3. Sea $\mathcal{C}$ una categoría y $\mathcal{M} = \{\mathcal{M}_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ una familia de modelos. Supongamos que $T : \mathcal{C} \to \mathbf{Ab}$ es un funtor. Diremos que T es libre en los modelos $\mathcal{M}$ si:

- $T(C)$ es un grupo abeliano libre para todo $C \in \text{obj}(\mathcal{C})$
- Existe un conjunto $T-$modelo $\Xi = \{x_\lambda \in T(M_\lambda) | \lambda \in \Lambda\}$ tal que para todo objeto en $\mathcal{C}$, el conjunto
$$\{T(f)(x_\lambda) | f \in Hom(M_\lambda, C), \lambda \in \Lambda\}$$
es una base para $T(C)$

Definición 4.4. Sea $\mathcal{C}$ una categoría y $\mathcal{M} = \{\mathcal{M}_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ una familia de modelos. Supongamos que $T : \mathcal{C} \to \mathbf{Ab}$ es un funtor. Diremos que T es acíclico en los modelos $\mathcal{M}$ si $T(M_\lambda)$ es un complejo de cadenas acíclico para todo $\lambda \in \Lambda$.

Teorema 4.5. *(Teorema de los modelos acíclicos) Sea $\mathcal{C}$ una categoría y $\mathcal{M} \subset \mathcal{C}$ una familia de modelos. Sean $S, T : \mathcal{C} \to$ Chain funtores no negativos, tal que T es libre con respecto a los modelos $\mathcal{M} = \bigcup_n \mathcal{M}_n$ y $M \in \mathcal{M}$ es S-acíclico para todo M, es decir, $H_i(S(M)) = 0$ para $i > 0$. Sea $\phi : H_0(T) \to H_0(S)$ una transformación natural, entonces existe una transformación natural*

$$\varphi : T \to S$$

la cual induce ϕ y es única salvo homotopía de cadena.

Demostración. La demostración de este teorema aparece en [Spa95, p.165]. $\square$

5. Invarianza homotópica de la homología singular.

Ahora usaremos el teorema de modelos acíclicos para demostrar que la homología singular satisface el axioma de invarianza homotópica. Usaremos como referencia [Bro15] y [Rot98].

5.1. Caso No Relativo.

Teorema 5.1. *Si $f, g : X \to Y$ son mapas homtópicos entonces los mapas inducidos $H_n(f) = H_n(g)$ para todo $n \geq 0$.*

Demostración. Consideremos la categoría de espacios topológicos con los modelos $\mathcal{M}_n = \{\Delta^n\}$ con $e_n = id_{\{\Delta^n\}} \in C_*(\{\Delta^n\})$. Sean T, S : **Top** $\to$ **Chain** los funtores dados por $T(X) = C_*(X)$ y $S(X) = C_*(X \times I)$ y $T(id) = id_* : C(X) \to C(X)$, y $S(h) = h_* : C(X) \to C(X \times I)$ para algun $h : X \to X$.

Lema 5.2. *T_n es libre en los modelos $\mathcal{M}_n$.*

Demostración. Sabemos que la base para $C_\bullet(X)$ es el conjunto $\{\Delta^n \to X, n \geq 0\}$. Entonces para probar la proposición, basta verificar que con la definicíon de funtor libre obtenemos la misma base, ya que $T_n(X) = C_n(X)$. Notemos que en este caso, se fija el n, para hacer la elección de elemento en $T_n(M_n)$ con $M_n \in \mathcal{M}_n$ y además tenemos que es solo un modelo: $\{\Delta^n\}$.
Pues bien, construyamos una base para $T_n(X)$ usando la definición

$$\{T_n(\sigma)(e_{\Delta^n}) | \sigma \in \mathrm{Hom}(\Delta^n, X)\}$$

pero notemos que para σ arbitrario, $T_n(\sigma)(e_{\Delta^n}) = \sigma \circ \mathrm{id}_{\Delta^n} = \sigma$ que son precisamente los elementos de la base de $C(X)$. Por lo tanto, se tiene que $T_n(X)$ es libre, y por lo tanto $T(X)$ es libre. $\square$

Lema 5.3. *El funtor S es acíclico en los modelos $\mathcal{M}_n$.*

Demostración. Basta con demostrar que la homología singular de $\Delta^n \times I$ se anula en grados positivos. Para esto construimos una homotopía $G : (\Delta^n \times I) \times I \to \Delta^n \times I$ de la identidad al mapeo constante.

En efecto, sea $id_{\Delta^n \times I} : \Delta^n \times I \to \Delta^n \times I$, el mapa identidad y sea $p : \Delta^n \times I \to \{\overline{x}\} : (x_0, x_1, \ldots, x_n, t) \mapsto (\overline{x_0}, \overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n}, \overline{t})$ el mapa constante. Ahora sea

$$G : (\Delta^n \times I) \times I \to \Delta^n \times I$$
$$((x_0, \ldots, x_n, t), s) \mapsto ((1-s)x_0 + s\overline{x_0}, \ldots, (1-s)x_n + s\overline{x_n}, (1-s)t + s\overline{t})$$

Notemos que $G((x_0, \ldots, x_n, t), 0) = (x_0, \ldots, x_n, t) = id_{\Delta^n \times I}$ y que $G((x_0, \ldots, x_n, t), 0) = (\overline{x_0}, \ldots, \overline{x_n}, \overline{t}) = \overline{x} = p(_0, \ldots, x_n, t)$. G es claramente continuo y además toda imagen está dentro de $\Delta^n \times I$ porque es un espacio convexo. Por lo tanto G es un homotopía de $id_{\Delta^n} \times I$ a p. Ahora usamos G para construir una homotopía de cadena tal que $D : 1_{C(\Delta^n \times I)} \cong 0$. Sea G la homotopía encontrada anteriormente. Consideremos $\sigma : \Delta^n \to \Delta^n \times I$, un elemento de la base de $C_n(\Delta^n \times I)$ y definimos el mapa $D\sigma : \Delta^{n+1} \to \Delta^n \times I$ como:

$$(r_0, \ldots, r_{n+1}) \mapsto \begin{cases} G(\sigma(\frac{r_1}{1-r_0}, \ldots, \frac{r_{n+1}}{1-r_0}), r_0) & r_0 \neq 1 \\ (\overline{x_0}, \ldots, \overline{x_n}, \overline{t}) & r_0 = 1 \end{cases}$$

Notemos que como $r_0 + \cdots + r_{n+1} = 1$ entonces se tiene que $1 - r_0 = r_1 + \cdots + r_{n+1}$.

Se tiene también que $(D\sigma)\varepsilon_0 = G(\sigma(r_1,\ldots,r_{n+1}),0) = id_{\Delta^n\times I}(\sigma) = \sigma$. Entonces

$$\begin{aligned}\partial D\sigma &= (D\sigma)\varepsilon_0 - \sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{i-1}(D\sigma)\varepsilon_i\\ &= \sigma - \sum_{i=0}^{n}(-1)^{i}D(\sigma\varepsilon_i)\\ &= \sigma - D\partial\sigma\end{aligned}$$

Esto implica que $\partial D + D\partial\sigma = id_{\Delta^n\times I} - 0_{\Delta^n\times I}$ entonces por definición esto induce un isomorfismo $H(id_{\Delta^n\times I}) \cong H(0_{\Delta^n\times I})$, por lo tanto $H_n(\Delta^n\times I) = 0$ para todo $n > 0$. ☐

Ahora, queremos probar la existencia de una transformación natural

$$H_0(T) \to H_0(S)$$

es decir,

$$H_0(C(X)) \to H_0(C(X\times I))$$

Para esto, consideremos $\iota_0, \iota_1 : X \to X\times I$ los mapas inclusión dados por

$$\iota_0(x) = (x,0), \quad \iota_1(x) = (x,1)$$

Queremos probar que estos mapas inducen el mismo morfismo $H_0(X) \to H_0(X\times I)$. En efecto, consideremos $\sigma : \Delta^0 \to X : p \mapsto x_0$, un 0-simplex arbitrario, es decir, un punto. Los mapas ι_0, ι_1 inducen los mapas $\iota_{0*}, \iota_{1*} : C(X) \to C(X\times I)$, entonces podemos definir:

$$\beta := (\iota_0(x))_*\sigma - (\iota_0(x))_*\sigma \ \in C_0(X\times I)$$

Ahora consideremos

$$\delta : \Delta^1 \to X\times I$$

dado por $t \mapsto (x_0, t)$. Se tiene que

$$d\delta = (x_0,1) - (x_0,0)$$

lo que es lo mismo que

$$d\delta = \iota_1\circ\sigma - \iota_0\circ\sigma$$

es decir, $(\iota_0)_*, (\iota_1)_*$ difieren de una frontera y por lo tanto inducen la misma homología. En vista de estos dos lemas, podemos usar el Teorema de Modelos Acíclicos para concluir que existe un único mapa de cadena salvo homotopía de cadena

$$\gamma : C(X) \to C(X\times I)$$

induciendo el isomorfismo natural

$$H_0(X) \xrightarrow{i_{0\#}} H_0(X\times I).$$

Para finalizar la demostración del teorema de invarianza homotópica de la homología singular, supongamos que $f_0, f_1 : X \to Y$ son mapas homotópicos. Tenemos la homotopía $F : X\times I \to Y$ de f_0 a f_1 con $f_0 = F\circ\iota_0$ y $f_1 = F\circ\iota_1$. Entonces componiendo ι_{0*}, ι_{1*} con el mapa de cadena $F_* : C(X\times I) \to C(Y)$ obtenemos una homotopía de cadena:

$$F_*\circ\iota_{0*} \cong F_*\circ\iota_{1*}$$

y por lo tanto

$$f_{0*} = F_* \circ \iota_{0*} \cong F_* \circ \iota_{1*} = f_{1*}$$

Y por lo tanto inducen los mismos mapas en homología.

$\square$

5.2. Caso Relativo.

Definición 5.4. Sea $\mathbf{Top}^2$ la categoría de los pares (X, X') con X, X' elementos de la categoría **Top**, tales que $X' \subset X$.

Teorema 5.5. *Si $f, g : (X, X') \to (Y, Y')$ son homotópicos entonces $H_n(f) = H_n(g)$ para todo $n \geq 0$.*

Demostración. Para esta demostración vamos a considerar la familia de modelos $\mathcal{M} = \{(\Delta^n, \emptyset)\}$, donde para cada n seleccionaremos el elemento $id : (\Delta^n, \emptyset) \to (\Delta^n, \emptyset)$. Definimos los funtores T, S como

$$\begin{aligned} T : \mathbf{Top}^2 &\to \mathbf{Chain} \\ (X, X') &\mapsto C_*(X, X') \\ S : \mathbf{Top}^2 &\to \mathbf{Chain} \\ (X, X') &\mapsto C(X \times I, X' \times I) \end{aligned}$$

Lema 5.6. *T es un funtor libre en los modelos $(\Delta^n, \emptyset)$*

Demostración. Para cada T_n, consideramos el modelo $(\Delta^n, \emptyset)$. Notemos que $T(\Delta^n, \emptyset) = C_*(\Delta^n)$ y tomamos id_{Δ^n}. Notemos que $C_n(X, X')$ tiene como base:

$$\{f_*(id_{\Delta^n}) | f \in Hom((\Delta^n, \emptyset), (X, X'))\}$$

Ya que

$$C_n(X, X') = \langle \sigma | \sigma : \Delta^n \to X : \sigma(\Delta^n) \notin X' \rangle$$

Y como para todo $\sigma \in C_n(X)$ se tiene que $\sigma(\emptyset) \subset X'$. Se tiene que $Hom((\Delta^n, \emptyset), (X, X')) = C_n(X)$. Se sigue que $\sigma_*(id_{\Delta^n} = \hat{\sigma})$ para todo $\sigma \in C_n(X)$. Notemos que $C_n(X, X')$ contiene al cero pero esto no afecta en aplicar el Teorema de Modelos Acíclicos, porque si tomamos $\{f_*(id_{\Delta^n}) | f \in Hom((\Delta^n, \emptyset), (X, X'))\} - \{0\}$ se tiene una base de $C_n(X, X')$. $\square$

Lema 5.7. *Los modelos son $S-$acíclicos.*

Demostración. Notemos que $S(\Delta^n, \emptyset) = C_*(\Delta^n \times I, \emptyset) = C_*(\Delta^n \times I)$. Pero ya vimos que en el caso no relativo la homología $C_*(\Delta^n \times I)$ es cero para todo $n > 0$ entonces los modelos $(Delta^n, \emptyset)$ son $S-$acíclicos. $\square$

Ahora necesitamos probar que se tiene la transformación natural $H_0(T) \to H_0(S)$, es decir,

$$H_0(X, X') \to H_0(X \times I, X' \times I)$$

es decir, los mapas ι_0, ι_1 inducen esta misma transformación. Es fácil ver que el procedimiento de la demostración es analogo al caso no relativo, pues sólo basta usar la definición.

Luego, por lo anterior, podemos aplicar el teorema de los modelos acíclicos y definir $\varphi : T \to S$.
Tenemos ahora la siguiente definición:

Definición 5.8. Sean $f, g : (X, X') \to (Y, Y')$ mapas de espacios topológicos, diremos que son homotópicos si existe una homotopía $F : X \times I \to Y$ en el sentido usual tal que para todo $a \in X'$, se tiene que $F(a, t) \in Y'$.

Entonces notemos que se tiene la misma hipótesis que en el caso no relativo más esta nueva condición. Por lo tanto aplicando el mismo procedimiento que en el caso no relativo obtendremos la homología de pares. Notemos también que no hay problema en componer, pues siguen siendo mapas de complejos de cadena $\square$

6. Escisión

En esta sección demostraremos que la homología singular satisface escisión. La demostración se hará usando el teorema de modelos acíclicos. Como referencia usaremos los artículos [Hei67] y [Sch76], junto con los libros [Hat02] y [Spa95],[Bre93].

Teorema 6.1. *Sean $U \subset A \subset X$ son subespacios con $\bar{U} \subset (A)^{\circ}$. Entonces la inclusión induce un isomorfismo en homología*

$$H_n(X \backslash U, A \backslash U) \cong H_n(X, A), \quad \forall n \geq 0$$

La demostración la entregaremos en varios pasos a continuación utilizando el teorema de modelos acíclicos:

Definición 6.2. Denotamos por **TopCov** la categoría de pares $(X,\mathcal{U})$ donde X es un espacio topológico y $\mathcal{U}$ es un cubrimiento de X con refinamiento abierto. Un morfismo f de $(X,\mathcal{U})$ a $(Y,\mathcal{B})$ tal que $U \in \mathcal{U}$ tenemos que $f(U) \subset V$ para algún $V \in \mathcal{B}$.

Definición 6.3. Diremos que en esta categoría dos mapas $f, g : (X,\mathcal{U}) \to (Y,\mathcal{B})$ son homotópicos, $f \simeq g$, si existe una homotopía $H : X \times [0,1] \to Y$ de f a g tal que para todo $U \in \mathcal{U}$, tenemos $H(U \times [0,1]) \subset V$ para algún $V \in \mathcal{B}$.

Definición 6.4. Denotamos por $C(X,\mathcal{U})$ al subcomplejo del complejo de cadena singular $C(X) = C(X,\mathcal{I})$, generado por los símplices singulares $\sigma : \Delta \to X$ tal que $\sigma(\Delta) \subset U$ para algún $U \in \mathcal{U}$. Aquí $\mathcal{I} = \{X\}$ es el cubrimiento trivial.

Lema 6.5. *Si $f \simeq g : (X,\mathcal{U}) \to (Y,\mathcal{B})$, entonces*

$$C(f) \simeq C(g) : C(X,\mathcal{U}) \to C(Y,\mathcal{B})$$

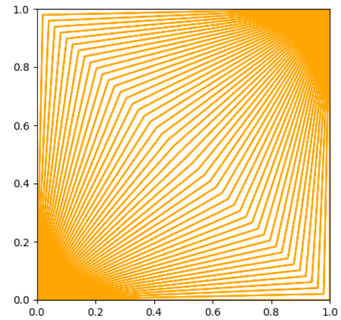
Corolario 6.6. *Una equivalencia de homotopía $f : (X,\mathcal{U}) \to (Y,\mathcal{B})$ induce una equivalencia de cadena $C(f) : C(X,\mathcal{U}) \to C(Y,\mathcal{B})$.*

Lema 6.7. *Para todo objeto $(\square,\mathcal{U})$ en* ***TopCov*** *con $\square$ un cubo unitario de dimensión finita, tenemos que $H_n(\square,\mathcal{U}) \cong H_n(*,\mathcal{I})$ para $n \geq 0$.*

Demostración. Antes de probarlo para el caso 2-dimensional. Daremos la idea de la demostración para el caso general:

Construimos una sucesión finita $(X_i,\mathcal{U}_\rangle)$, $i = 0, \ldots, k$ de objetos en **TopCov**, tal que $(X_0,\mathcal{U}_0) = (\square,\mathcal{U})$ y $(X_k,\mathcal{U}_k) = (*,\mathcal{I})$ donde $*$ es el espacio de un punto con $\mathcal{I}$, el cubrimiento trivial. Además se tendrá que $(X_i,\mathcal{U}_i)$ es un retracto de deformación fuerte de $(X_{i-1},\mathcal{U}_{i-1})$. Por el lema del cubrimiento de Lebesgue podemos subdividir el cubo unitario $\square$ por secciones paralelas a sus caras en un numero finito de subcubos, donde cada uno de estos estará contenido en algún $U \in \mathcal{U}$. La idea consiste en comenzar desde una esquina del cubo y retraer un subcubo a la parte de su frontera que intersecta con el resto de los subcubos y asi sucesivamente hasta que el ultimo subcubo se retraiga a una esquina.

Ilustremos la idea el caso 2-dimensional. Supongamos primero que tenemos un solo cubo. Queremos un retracto por deformación a uno de los vértices. Esta deformación se lleva a cabo en dos pasos que descrbimos a continuación:



(1) Tenemos el cuadrado unitario y queremos retraerlo al espacio $[0,1]\times\{0\}\cup\{0\}\times[0,1]$. La homotopía que hace esto está dada por la siguiente fórmula:

$$H_1(x,y,t)=\begin{cases}(x+t(1-x),y+t(x-1)), & \text{si } y\geq 1-x\\ (x+ty,(1-t)y), & \text{si } y<1-x\end{cases}$$

Esta homotopía se ve como en la siguiente imagen.

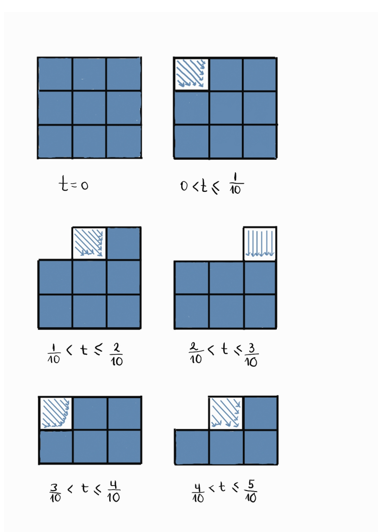
(2) El segundo paso deformar el espacio $[0,1]\times\{0\}\cup\{1\}\times[0,1]$ al punto $(1,0)$. La homotopía que hace esto es:

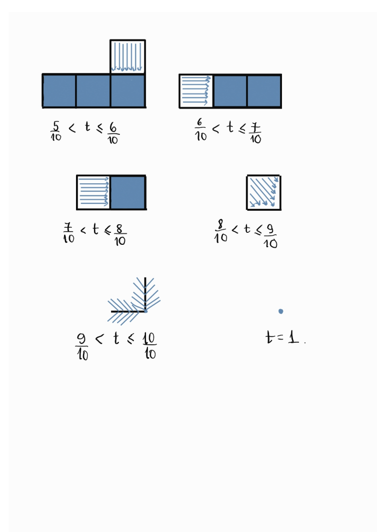
$$H_2(x,y,t)=((1-t)x+t,(1-t)y).$$

Para un caso más general se concatenan los dos tipos de retracto por defomación descritos arriba y se agrega una tercera retracción hacia el lado vertical derecho. Cuya retracción y homotopía son de la siguiente forma.

$$r_3^i(x,y)=(\frac{i}{n},y)\quad \text{con } i\in\{1,\cdots,n-1\}$$

$$H_3(x,y,t)=((1-t)x+t\frac{i}{n},(1-t)y+ty)$$





Para el caso $n \times n$ se tiene la siguiente homotopía

$$H(x,y,t) = \begin{cases} H_1(x,y,t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{n^2+1} \\ \vdots & \vdots \\ H_1(x,y,t), & \frac{n-2}{n^2+1} \leq t \leq \frac{n-1}{n^2+1} \\ H_2(x,y,t), & \frac{n-1}{n^2+1} \leq t \leq \frac{n}{n^2+1} \\ H_1(x,y,t), & \frac{n}{n^2+1} \leq t \leq \frac{n+1}{n^2+1} \\ \vdots & \vdots \\ H_1(x,y,t), & \frac{2n-2}{n^2+1} \leq t \leq \frac{2n-1}{n^2+1} \\ H_2(x,y,t), & \frac{2n-1}{n^2+1} \leq t \leq \frac{2n}{n^2+1} \\ \vdots & \vdots \\ H_3(x,y,t), & \frac{(n-1)n}{n^2+1} \leq t \leq \frac{(n-1)n-1}{n^2+1} \\ \vdots & \vdots \\ H_3(x,y,t), & \frac{(n-1)n+n-2}{n^2+1} \leq t \leq \frac{(n-1)n+n-1}{n^2+1} \\ H_1(x,y,t), & \frac{(n-1)n+n-1}{n^2+1} \leq t \leq \frac{(n-1)n+n}{n^2+1} \\ H_4(x,y,t), & \frac{(n-1)n+n}{n^2+1} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

donde H_4 es la homotopía que va desde el último segmento vertical unido con el último segmento horizontal al punto.

$\square$

Observación 6.8. Notemos que podemos definir X_i como X_{i-1} como el $i-$ esimo cubo que se retrae al cubo X_{i-1}, y $\mathcal{U}_i$ es entonces $\mathcal{U}_{i-1} \cap X_i$, de esta manera, usando esta convención podemos asegurarnos que se tiene que $(X_i, \mathcal{U}_i)$ es un retracto de deformación fuerte de $(X_{i-1}, \mathcal{U}_{i-1})$ usando la noción de homotopía en **TopCov**.

Ahora, a traves del teorema de los modelos acíclicos vamos a probar el siguiente teorema que tendrá como implicación directa el teorema de escisión:

Teorema 6.9. *La inclusión*

$$i : C(X, \mathcal{U}) \to C(X)$$

es una equivalencia de cadena.

Demostración. Para esta demostración consideremos los funtores $C_0, C_1; \mathbf{TopCov} \to \mathbf{Chain}^{ag}$, donde $\mathbf{Chain}^{ag}$ es la categoría de complejos de cadena aumentados de grupos abelianos, tal que $C_0(X, \mathcal{U}) = C(X, \mathcal{U})$ y $C_1(X, \mathcal{U}) = C(X)$. Como modelos en **TopCov** escogemos todos los pares $(\Delta, \mathcal{B})$ donde es un simplex estándar de cualquier dimensión y $\mathcal{B}$ un cubrimiento de Δ con refinamiento abierto.

Proposición 6.10. *C_0, C_1 son funtores acíclicos.*

Demostración. Notemos que por Lema 6.7 y el hecho de que el cubo unitario es homeomorfo al n-símplex estándar, los funtores C_0, C_1 son acíclicos. $\square$

Proposición 6.11. *C_0, C_1 son funtores libres.*

Demostración. Para el funtor $C_0(X,\mathcal{U})$, notemos que el funtor olvidadizo **TopCov** $\to$ **Top** induce una retracción $r : F(X,\mathcal{U}) \to C_0(X,\mathcal{U})$, donde

$$F(X,\mathcal{U}) = \langle\{\sigma : (\Delta,\mathcal{B}) \to (X,\mathcal{U}) | (\Delta,\mathcal{B}) \text{ es un modelo}\}\rangle$$

es decir es el funtor libre generado por los σ, que satisfacen esa condición, con base los elementos $id_{\mathcal{B}} : (\Delta,\mathcal{B}) \to (\Delta,\mathcal{B})$. Ahora, sea la inlcusión $i : C_0(X,\mathcal{U}) \to F(X,\mathcal{U})$ donde los elementos $\sigma : \Delta \to X$ los consideramos como $\sigma : (\Delta,\sigma^{-1}\mathcal{U}) \to (X,\mathcal{U})$, tenemos entonces que $ri = id$ y por lo tanto C_0 es un funtor libre.
Para el caso de C_1 es directo, ya que basta tomar para cada Δ^n, el elemento $id : (X,\mathcal{I}) \to (X,\mathcal{I})$. □

Observemos que como $C(X,\mathcal{U}) \subset C(X,X) = C(X)$, esta inclusion induce un mapa $H_0(X,\mathcal{U}) \to H_0(X)$. Luego, con las Proposiciones 6.10 y 6.11, los funtores satisfacen las hipotesis del teorema de modelos acíclicos y podemos concluir que se tiene que

$$i : C(X,\mathcal{U}) \to C(X)$$

es una equivalencia de cadena. □

Ahora podemos probar el teorema de escisión. Considere la cubierta $\mathcal{U} = \{A, X\backslash U\}$, con $A \subset X$ cerrado en X.

Proposición 6.12. *La siguiente ecuación se da* $C_q(X,\mathcal{U}) = C_q(A) + C_q(X\backslash U)$, *para todo* $q \geq 0$.

De la proposición tenemos el isomorfismo

$$i_* : C_*(X,\mathcal{U}) = C_*(A) + C_*(X\backslash U) \to C_*(X),$$

el cual es, en particular, una equivalencia de cadena. Por lo tanto la inclusión

$$\overline{i_*} : C_*(X,\mathcal{U})/C_*(A) \hookrightarrow C_*(X)/C_*(A)$$

es también una equivalencia de cadena. Notemos que $C_*(A\backslash U) = C_*(X\backslash U) \cap C_*(A)$ y entonces $C_*(X\backslash U) \hookrightarrow C_*(X)$ induce un isomorfismo:

$$C_*(X\backslash U, A\backslash U) \cong C_*(X,\mathcal{U})/C_*(A) = (C_*(A) + C_*(X\backslash U))/C_*(A) = C_*(X, A).$$

De aquí se sigue el resultado deseado:

$$H_*(X\backslash U, A\backslash U) \cong H_*(X, A)$$

□

Referencias

[Bre93] Glen E. Bredon. *Topology and Geometry*, volume 139. Springer-Verlag, New York, [1993]. 21

[Bro15] Nathan Broaddus. Algebraic topology ii. :https://people.math.osu.edu/broaddus.9/6802/, 2015. 16, 17

[DF08] D.S. Dummit and R.M. Foote. *Abstract Algebra, 2Nd Ed*. Wiley India Pvt. Limited, 2008. 4

[Hat02] Allen Hatcher. *Algebraic topology*. Cambridge University Press, 2002. 21

[Hei67] Egil Heistad. Excision in singular theory. *Mathematica Scandinavica*, 20:61–64, 1967. 21

[Rot98] Joseph J. Rotman. *An Introduction to Algebraic Topology*. Springer-Verlag, New York, [1998]. 17

[Sch76] Rolf Schön. Acyclic models and excision. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 59(1):167–168, 1976. 21

[Spa95] Edwin H. Spanier. *Algebraic topology*. Springer-Verlag, New York, [1995?]. Corrected reprint of the 1966 original. 4, 13, 16, 21