



PONTIFICIA
UNIVERSIDAD
CATÓLICA
DE CHILE

FACULTAD DE MATEMÁTICAS

FLUJO POR CURVATURA MEDIA INVERSA EN EL PLANO HIPERBÓLICO Y CONSIDERACIONES PARA SU DISCRETIZACIÓN

por

AGUSTÍN IGNACIO OYARCE VARGAS

Tesis presentada a la Facultad de Matemáticas
de la Pontificia Universidad Católica de Chile,
como un requisito para optar al grado académico
de Magíster en Matemática.

Profesores guía : Mariel Sáez
Mircea Petrache
Comisión : Marcos Kiwi
Pedro Gaspar

Julio, 2024
Santiago, Chile

Agradecimientos

Quiero expresar mi más sincero agradecimiento a la profesora Mariel Sáez, quien ha sido mi guía y mentora durante varios años. Su comprensión, paciencia y apoyo constante han sido fundamentales para mi formación. Agradezco profundamente todo lo que he aprendido a su lado.

Asimismo, deseo agradecer al profesor Mircea Petrache por brindarme la oportunidad de trabajar bajo su dirección. Su valioso apoyo y sus brillantes ideas han sido esenciales para lograr este trabajo.

Un agradecimiento también a Marcos Kiwi y Pedro Gaspar por formar parte de la comisión evaluadora y por sus comentarios sobre este trabajo.

A mi familia, Claudia, Cristián y María José, les agradezco por acompañarme durante todos estos años. Debo mencionar también a mis amigos que conocí en la universidad, Cristian, Max, Clau, Vero, Magda, Romi, Pancho y muchos más. Gracias por su amistad y por hacer inolvidable esta etapa de mi vida.

Finalmente quería agradecer a mi pareja, Paulina, por estar a mi lado en cada paso de este proceso. Desde darme ánimo para sobreponerme a cada inconveniente, hasta celebrar mis logros como si fueran propios, tu cariño y amor han sido un regalo invaluable.

Este trabajo fue parcialmente financiado por ANID-Subdirección de Capital Humano/Magíster Nacional/2022 - 22220873 y por FONDECYT Regular 1210426.

Índice general

Introducción.	2
1. IMCF modificado en espacios de producto deformado	11
1.1. Preliminares	11
1.2. Espacios de producto deformado	14
1.3. El IMCF modificado	16
1.4. Evolución de cantidades geométricas	18
1.5. Estimaciones a priori para la solución	24
1.6. Existencia en tiempo corto de las soluciones	32
1.7. Existencia en tiempo largo	39
2. Cuasi-isometría del disco de Poincaré	40
2.1. Propiedades básicas de los árboles anillados	41
2.2. Relación entre distancia anillo y distancia en el grafo	46
2.3. El candidato a cuasi-isometría	50
2.4. Cotas para la distancia en el plano hiperbólico	52
2.5. Demostración de la Cuasi-isometría	55
2.6. Consecuencias de la cuasi-isometría	66
2.7. Convergencia de una discretización del IMCF en el espacio hiperbólico	66
A. Resultados de EDPs parabólicas lineales	69

Introducción.

Flujos geométricos

Un flujo geométrico corresponde a una ecuación en derivadas parciales parabólica sobre una variedad riemanniana que involucra cantidades geométricas de esta misma. Existen dos grandes clases de flujos geométricos, los flujos intrínsecos y los flujos extrínsecos.

Un flujo intrínseco, como su nombre sugiere, corresponde a una ecuación en derivadas parciales (EDP) que depende de cantidades geométricas intrínsecas de la superficie i.e. que dependen solamente de la variedad donde está definido y no de como esta inmersa en una variedad ambiente. El más célebre ejemplo de estos flujos corresponde al flujo de Ricci, en el cual la métrica evoluciona según la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial t} = -2\text{Ric}_{ij},$$

donde Ric corresponde a la curvatura de Ricci de la variedad (M, g) . Este flujo fue propuesto por Hamilton en [21]. Basado en el trabajo de Hamilton, Perelman demostró la conjetura de geometrización de Thurston en el año 2003, resolviendo como caso particular la conjetura de Poincaré, el único de los problemas del milenio resuelto hasta la fecha. Para mayor información ver las siguientes exposiciones [38, 20].

Por otro lado están los flujos extrínsecos, en los cuales aparecen cantidades geométricas que dependen de como nuestra variedad está incrustada o inmersa en una variedad ambiente. Los tipos más clásicos de estos flujos se presentan cuando la codimensión es 1 y se suelen describir mediante una familia de incrustaciones indexadas por t (variable usualmente llamada tiempo) de la forma $X_t : M^n \rightarrow N^{n+1}$ y que evolucionan de la siguiente manera:

$$\frac{\partial X}{\partial t} = F\nu. \tag{1}$$

Esto corresponde a que cada punto de nuestra variedad evoluciona en dirección del normal unitario exterior ν con rapidez igual a F , una función dependiente de cantidades geométricas extrínsecas.

El caso $F = -H$, con H la curvatura media, corresponde al llamado flujo por curvatura media (MCF). Aunque planteado con anterioridad por otros autores su estudio se masificó luego del trabajo de Brakke [5] en 1978. El caso más sencillo que uno puede considerar es el flujo de una esfera n -dimensional de radio r_0 incrustada en \mathbb{R}^{n+1} , se puede observar que bajo el MCF la superficie se mantiene una esfera con radio dado por $r(t) = \sqrt{r_0^2 - 2nt}$. Se aprecia entonces que cuando $t = r_0^2/2n$ la solución se degenera y se vuelve un punto, obtenemos entonces que esta solución al MCF tiene un tiempo máximo de existencia. Entender cuando las soluciones se degeneran, y de que manera lo hacen, es una de las preguntas más recurrentes en el estudio de flujos geométricos.

Un teorema de Huisken [23] (para el caso $n \geq 2$) y de Gage y Hamilton [12] (para el caso $n = 1$) indican que bajo el MCF cualquier hipersuperficie convexa y cerrada converge a un punto, y si reescalamos para mantener el volumen constante se tiene que la solución converge a una esfera. Para el caso $n = 1$ i.e. el caso de una curva, tenemos un resultado más fuerte de Grayson [19] el cual dice que no necesitamos que nuestra curva inicial sea convexa, cualquier curva cerrada incrustada en \mathbb{R}^2 converge a un punto, pareciéndose cada vez más a una circunferencia mientras lo hace. Acá se marca una clara diferencia entre el comportamiento del flujo para curvas y para hipersuperficies de mayor dimensión ya que la conclusión de Grayson es falsa para $n \geq 2$, podemos encontrar hipersuperficies iniciales no convexas que desarrollan otros tipos de singularidades, no convergen a un punto.

Otro flujo extrínseco ampliamente estudiado es el flujo por curvatura media inversa (IMCF) el cual corresponde a tomar $F = 1/H$ en (1). Una gran diferencia con el MCF es que en este caso las soluciones tienden a expandirse, por ejemplo si tomamos una esfera de radio r_0 incrustada en \mathbb{R}^{n+1} , esta evoluciona siempre siendo una esfera, con radio $r(t) = r_0 e^{t/n}$. Para este flujo nuevamente tenemos que la esfera cumple un papel importante, en el sentido que Gerhard [14] demostró que cualquier hipersuperficie inicial estrellada evoluciona expandiéndose, y si se reescala para mantener el volumen constante se tiene que converge a una esfera.

La conjetura de Penrose

Una de las aplicaciones más célebres del IMCF es su uso en la demostración de la conjetura riemanniana de Penrose. Esta conjetura es parte del área de relatividad general y fue propuesta por argumentos meramente físicos, pero se puede expresar con lenguaje de geometría riemanniana. En terminos generales propone una cota inferior de la masa de un espacio en términos del área de sus agujeros negros. Definir la masa en relatividad general no es una tarea sencilla, existen distintas definiciones de masa que son aplicables en distintos contextos. En este caso nos referimos a la llamada masa ADM, propuesta por Arnowitt, Deser y Misner [2]. Para nuestros propósitos trabajaremos con una 3-variedad asintóticamente plana, esto quiere decir que se puede escribir como la unión entre un compacto y un conjunto difeomorfo a \mathbb{R}^3 sin la bola unitaria. Se define entonces la masa ADM de la siguiente manera:

$$m_{\text{ADM}} := \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{16\pi} \int_{\partial B_r(0)} (\partial_j g_{ii} - \partial_i g_{ij}) \nu^i d\mu.$$

Con $B_r(0)$ la bola de radio r centrada en el origen y $d\mu$ su elemento de área. La conjetura riemanniana de Penrose entonces nos dice que en una 3-variedad (M, g) asintóticamente plana, conexa y completa con curvatura escalar no negativa y cuya frontera es una superficie mínima compacta Σ cumple la siguiente desigualdad:

$$m_{\text{ADM}}(M) \geq \sqrt{\frac{|\Sigma|}{16\pi}}$$

con $|\Sigma|$ el área de Σ .

Geroch [17] en 1973 propuso una idea para demostrar esta conjetura, la cual se basa en una

cantidad llamada la masa de Hawking, definida de la siguiente forma:

$$m_{Haw}(\Sigma) := \sqrt{\frac{|\Sigma|}{(16\pi)^3}} \left(16\pi - \int_{\Sigma} H^2 d\mu \right).$$

Geroch demostró que la masa de Hawking es monótona creciente para superficies que evolucionan bajo el IMCF, hizo entonces fluir Σ , llamemos a su evolución en el tiempo t , Σ_t . Juntó esto con la idea de Hawking que si Σ_t converge a una esfera en el infinito entonces $m_{Haw}(\Sigma_t) \rightarrow m_{ADM}(M)$ (en este punto es clave el resultado de Gerhardts sobre la convergencia a esferas bajo el flujo). Uniendo todo obtenemos:

$$\sqrt{\frac{|\Sigma|}{16\pi}} = m_{Haw}(\Sigma) \leq m_{Haw}(\Sigma_t) \rightarrow m_{ADM}(M),$$

y así podríamos concluir. El problema de esta idea es que sirve solo si el flujo no desarrolla singularidades, pero como sabemos eso es algo que efectivamente puede ocurrir.

En 2001 Huisken e Ilmanen [24] solucionaron este inconveniente, definiendo una noción de solución débil del flujo usando conjuntos de nivel, lo cual permite continuar con el flujo luego de volverse singular. Demostraron la existencia y regularidad de soluciones débiles, y que se mantiene la monotonicidad de la masa de Hawking en este contexto, completando así la demostración.

IMCF en el espacio hiperbólico

El espacio hiperbólico de dimensión $n+1$, \mathbb{H}^{n+1} , es la única variedad riemanniana simplemente conexa con curvatura seccional constante igual a -1 . Lo representaremos como $(0, \infty) \times S^n$ con la métrica $g = dr^2 + \sinh^2(r)d\sigma^2$, con $d\sigma^2$ la métrica usual en S^n .

Al ser el espacio de curvatura negativa más insigne, se ha estudiado bastante como se comportan los flujos geométricos con este espacio ambiente. En el caso del IMCF tenemos los trabajos de Gerhardts [16] y Ding [9] que proponen que para $n \geq 2$ y una hipersuperficie inicial estrellada se tiene existencia para todo tiempo y convergencia a una esfera. Sin embargo, Hung y Wang [25] demostraron (para cualquier $n \geq 2$) la existencia de una hipersuperficie inicial que no converge a una esfera, contradiciendo así los resultados recién comentados.

Por otro lado, para el caso $n = 1$, i.e. el caso de curvas, no hay resultados sobre su comportamiento al infinito. Una aproximación al respecto es el trabajo de Meco [36], en el cual basado en [8] define un flujo por curvatura media inversa modificado de la siguiente manera:

$$\frac{\partial X}{\partial t} = \frac{\nu}{H \cosh(r)}$$

con r la distancia geodésica a un punto determinado. Meco demuestra que para este flujo modificado si se tiene convergencia a un círculo.

En el capítulo 1 del presente trabajo generalizamos el resultado de Meco de dos maneras, en primer lugar generalizamos el espacio ambiente, en nuestro caso será un espacio de *producto deformado* $(0, \infty) \times S^1$ con la métrica $g = dr^2 + \phi^2(r)d\theta^2$.

En segundo lugar generalizaremos la modificación del flujo, en el sentido que nuestra ecuación de evolución ahora es

$$\frac{\partial X}{\partial t} = \frac{f(r)\nu}{H}.$$

Las hipótesis que pediremos para nuestras funciones involucradas son las siguientes:

(H1) $f \in C^\infty(\mathbb{R}^+)$, $f > 0$, $f' \leq 0$ y f', f'' acotadas por abajo;

(H2) $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^+)$, $\phi > 0$, $\phi' > 0$, $\phi'' \geq 0$;

(H3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\phi(x)f(x)}{\phi'(x)} = 0$;

(H4) $f''\phi - f\phi'' \leq 0$.

Destacamos que una condición suficiente para que se cumpla (H4) es que la segunda derivada de f/ϕ sea no positiva.

Los métodos usados en este trabajo son distintos a los de Meco en el sentido que nuestras cotas son de una naturaleza más geométrica (por ejemplo trabajamos con la función soporte) y por ende son más fáciles de generalizar a mayores dimensiones. La mayor dificultad para obtener esta generalización radica en que en dimensiones mayores a 1 debemos acotar también la evolución de las curvaturas principales

Algunas elecciones posibles de nuestras funciones serían las siguientes:

- $\phi(x) = \sinh(x)$, $f(x) = \frac{1}{\cosh(x)}$; i.e. el caso original tratado por Meco.
- $\phi(x) = \sinh(x)$, $f(x) = \frac{1}{\log(x+e)}$; tenemos que en el espacio hiperbólico también se tienen las conclusiones para funciones f con crecimiento muy distinto.
- $\phi(x) = e^{x^2}$, $f(x) = e^{-x}$; notamos que no es necesario que el espacio ambiente sea de curvatura constante.

En resumen el objetivo del capítulo 1 es demostrar el siguiente teorema:

Teorema 0.0.1. *Sea $N = (0, \infty) \times S^1$ con la métrica de producto deformado $g = dr^2 + \phi^2(r)d\theta^2$. Sea γ_0 una curva suave con curvatura positiva, dada por la incrustación $X_0 : S^1 \rightarrow N$. Si se cumplen (H1)-(H4) entonces la ecuación de evolución*

$$\begin{cases} \frac{\partial X}{\partial t} = \frac{f(r)\nu}{H}; \\ X(\cdot, 0) = X_0; \end{cases}$$

(con r la distancia geodésica a un punto determinado de N en la región interna definida por X_0) tiene una única solución de clase C^∞ definida para todo tiempo. Además, esta converge puntualmente a una circunferencia.

Cuasi-isometrías

Dados dos espacios métricos (X, d_X) e (Y, d_Y) decimos que una función $f : X \rightarrow Y$ es una *isometría* si

$$d_X(x_1, x_2) = d_Y(f(x_1), f(x_2)), \text{ para cualesquiera } x_1, x_2 \in X.$$

Es claro que una isometría debe ser inyectiva, si además es sobreyectiva decimos que es una *isometría global*. Si existe una isometría global entre X e Y decimos que estos espacios son *isométricos*, esto define una relación de equivalencia. Esta propiedad nos indica que ambos espacios son esencialmente iguales en lo que a espacios métricos respecta.

La noción recién definida de isometría es muy restrictiva, nos gustaría tener una noción más débil para poder entender cuando dos espacios métricos son de cierta forma similares. Definiremos entonces el concepto de *incrustación cuasi-isométrica*, basados en [43] y [29], de la siguiente manera.

Definición 0.0.2. Sean (X, d_X) e (Y, d_Y) dos espacios métricos. Sea $\lambda \geq 1$ y $\varepsilon > 0$. Diremos que una función $f : X \rightarrow Y$ es una (λ, ε) -incrustación cuasi-isométrica si para todo par de puntos x_1, x_2 de X se tiene

$$\frac{1}{\lambda}d_X(x_1, x_2) - \varepsilon \leq d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq \lambda d_X(x_1, x_2) + \varepsilon.$$

Más aún, si una ε vecindad de $f(X)$ cubre a Y decimos que f es una (λ, ε) -cuasi-isometría.

Tenemos entonces que una incrustación cuasi-isométrica es similar a una isometría salvo un factor multiplicativo y otro aditivo. Asimismo, el hecho que una vecindad de $f(X)$ cubra a Y cumple el papel que cumplía la sobreyectividad en la isometría global. Si existe una cuasi-isometría (para algunos λ, ε) de X a Y diremos que ambos espacios son *cuasi-isométricos*. Es natural preguntarse si esto también corresponde a una relación de equivalencia. Es sencillo chequear que es reflexiva y transitiva, para ver que es simétrica es útil usar la noción de *cuasi-inversa*.

Definición 0.0.3. Sean (X, d_X) e (Y, d_Y) dos espacios métricos y sea $f : X \rightarrow Y$. Diremos que $g : Y \rightarrow X$ es una cuasi-inversa de f si se tiene que existe una constante $\varepsilon > 0$ tal que para todo $x \in X$ se tiene $d_X(x, g(f(x))) \leq \varepsilon$ y para todo $y \in Y$ se tiene $d_Y(y, f(g(y))) \leq \varepsilon$.

Luego para ver que ser cuasi-isométricos es una relación simétrica se demuestra que toda cuasi-isometría tiene una cuasi-inversa, la cual es a su vez una cuasi-isometría. La manera en la que podemos construir esta cuasi-inversa es usar el hecho que una ε vecindad de $f(X)$ cubre Y , luego definimos g tal que envíe $y \in Y$ a alguno de los $x \in X$ tales que $d_Y(f(x), y) \leq \varepsilon$.

Intuitivamente, que dos espacios métricos sean cuasi-isométricos nos indica que tienen el mismo comportamiento a gran escala, ignorando las distorsiones que puedan ocurrir en escalas pequeñas. Un ejemplo es el siguiente, tomamos \mathbb{Z}^n y \mathbb{R}^n con la métrica euclideana y tomamos $f : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ la inclusión. Se tiene que las distancias se conservan y que una \sqrt{n} vecindad de \mathbb{Z}^n cubre \mathbb{R}^n . Una cuasi-inversa (en general no son únicas) de f podría ser la función $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$ que envía cada n -tupla de números reales a la n -tupla de números enteros obtenidos al aplicar la parte entera a cada coordenada. Con este ejemplo se puede apreciar la intuición detrás de las cuasi-isometrías, si vemos ambos espacios de suficientemente lejos, son esencialmente iguales. El ejemplo también sugiere que \mathbb{Z}^n sería una buena discretización de \mathbb{R}^n en lo que a espacios métricos respecta, el objetivo del capítulo 2 del presente trabajo será encontrar, de manera similar, una discretización del plano hiperbólico.

Discretización del plano hiperbólico

Para encontrar la discretización del plano hiperbólico será más cómodo trabajar con otra representación de este mismo, el *disco de Poincaré*. Este está definido como el disco abierto en el plano complejo con centro el origen y radio unitario, lo dotamos de la siguiente función distancia

$$d_P(u, v) = \operatorname{arcosh} \left(1 + \frac{2\|u - v\|^2}{(1 - \|u\|^2)(1 - \|v\|^2)} \right)$$

Con $\|\cdot\|$ la norma euclidea. Esta representación se obtiene a partir del producto deformado enviando (r, θ) al número complejo $(1 - \frac{2}{e^r+1}) \cdot e^{i\theta}$.

Con esta representación podemos apreciar una de las características clásicas del espacio hiperbólico. Si tomamos dos puntos en el disco unitario y los desplazamos hacia la frontera manteniendo su distancia euclidea fija, entonces su distancia hiperbólica incrementa exponencialmente rápido. Esto nos indica intuitivamente que en el plano hiperbólico la cantidad de espacio crece mucho cuando nos alejamos del origen. Buscaremos entonces que nuestro candidato a discretización del plano hiperbólico presente alguna propiedad parecida.

Dentro de los espacios métricos discretos, una familia importante son los que provienen de grafos. Dado un grafo conexo no dirigido, definimos la distancia entre dos vértices como el número de aristas del camino más corto que los conecta. Esta distancia dota al grafo de la estructura de espacio métrico.

Al buscar un grafo que tenga cierta noción de crecimiento exponencial es natural pensar en los árboles, siendo más específicos definiremos el árbol n -ario completo de profundidad infinita como el grafo formado por un vértice llamado raíz, el cual está conectado a n vértices, llamados hijos. Cada uno de estos n vértices a su vez está conectado a otros n vértices distintos entre sí y así sucesivamente. Se aprecia entonces como con cada iteración la cantidad de vértices crece exponencialmente, esto nos motiva a pensar que podría ser un candidato a discretización del plano hiperbólico.

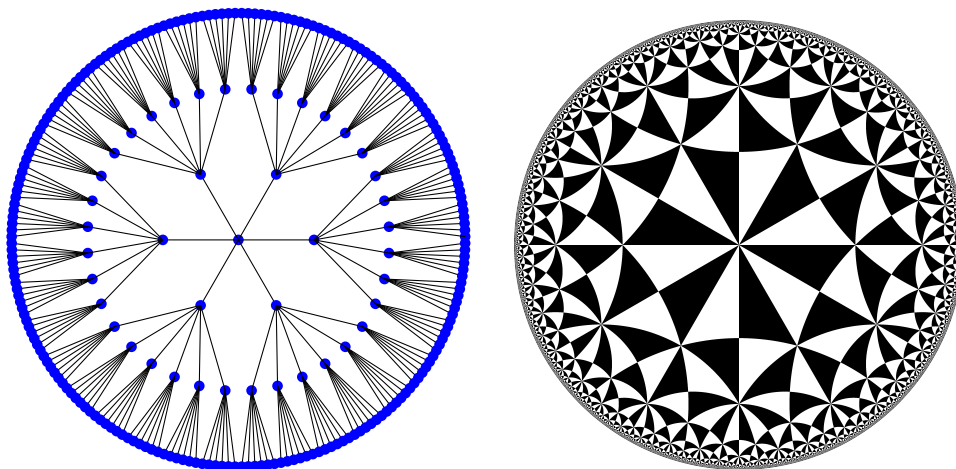


Figura 1: Primeros niveles del árbol 6-ario completo y teselación del disco de Poincaré, cortesía de [40]. Se aprecia un comportamiento similar en la cantidad de vértices.

Lamentablemente, resulta que el plano hiperbólico y estos árboles no son cuasi-isométricos (una demostración formal de este hecho usa el concepto de frontera de Gromov, ver [29]). A pesar de esto, en [41] proponen una manera de incrustar un árbol cualquiera T en el espacio hiperbólico mediante una función $\Phi_\varepsilon : T \rightarrow P$ la cual logra baja distorsión de las distancias en el sentido que

$$\max_{u,v \in T} \frac{d_P(\Phi_\varepsilon(u), \Phi_\varepsilon(v))}{d_T(u, v)} \leq (1 + \varepsilon) \min_{u,v \in T} \frac{d_P(\Phi_\varepsilon(u), \Phi_\varepsilon(v))}{d_T(u, v)}.$$

Las desventajas de este método son que no se tiene una cuasi-isometría y que, dados $u, v \in T$, a medida que reducimos la distorsión (i.e. hacer $\varepsilon \rightarrow 0$) se tiene que $d_P(\Phi_\varepsilon(u), \Phi_\varepsilon(v)) \rightarrow \infty$. Esto

significa que el costo de reducir la distorsión es dilatar cada vez más las distancias, es por este motivo que buscaremos otra alternativa.

En [6] proponen una modificación al árbol binario que llaman *árbol anillado*, aunque lo definiremos formalmente más adelante, la idea corresponde a añadir aristas entre vértices del mismo nivel, formando así anillos. Logran luego demostrar que este nuevo grafo es cuasi-isométrico al plano hiperbólico construyendo una cuasi-isometría explícita.

En el capítulo 2 demostraremos una generalización de los resultados recién mencionados, en este caso no sólo realizaremos la construcción del árbol anillado basándonos en el árbol binario, si no también lo haremos para árboles con otras ramificaciones. Para lograr esto necesitaremos entender de manera más profunda los árboles anillados y desarrollaremos el argumento con un mayor nivel de detalle, corrigiendo así algunas inconsistencias en el trabajo original.

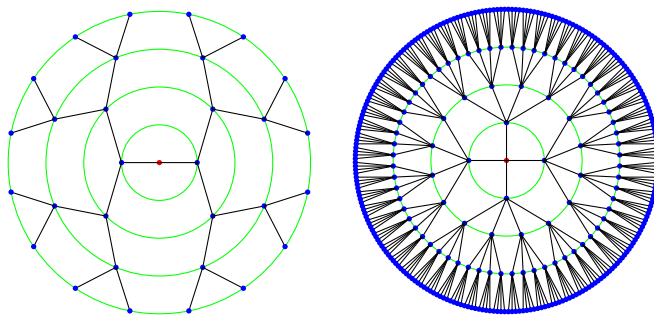


Figura 2: Los primeros niveles de los árboles anillados de ramificación 2 y 4.

IMCF discreto en el plano hiperbólico

Una clase importante de flujos geométricos son los llamados flujos gradientes, en los cuales se define cierta energía asociada a una superficie y se hace fluir siguiendo el gradiente de esta energía para disminuirla de manera óptima. Una gran cantidad de fenómenos físicos pueden ser descritos como minimización de alguna energía, por ende podemos usar flujos geométricos para entenderlos. Es en este contexto que adquiere relevancia poder discretizar estos flujos para poder trabajarlos de manera computacional y así poder realizar simulaciones de estos, ver [42, 7, 4, 3, 39]. Para garantizar que estas simulaciones son buenas aproximaciones de la realidad necesitamos entender cuanto se parece el flujo discretizado al flujo original, este problema es llamado convergencia de la discretización. Cabe destacar que también se han considerado análogos discretos de flujos geométricos para otras aplicaciones tales como procesamiento de imágenes [33, 11], navegación en redes [13], modelamiento de superficies [44], etc.

Existen dos maneras usuales de discretizar flujos geométricos: La primera corresponde a comenzar con la ecuación del flujo ya desarrollada y discretizar todos los términos que allí aparecen, como por ejemplo la curvatura. La segunda corresponde a discretizar la energía y realizar el flujo gradiente a partir de esta nueva energía discreta, este método claramente solo funciona si nuestro flujo original es gradiente. Ambos métodos no necesariamente producen el mismo flujo. Además, el desarrollo de cada método requiere realizar distintas elecciones, como por ejemplo la manera de discretizar la energía o la curvatura, entre otras. Esto implica que pueden existir distintas discretizaciones para un mismo flujo, cada una con sus propias ventajas y desventajas.

Actualmente, no existe en la literatura algún método para discretizar el flujo por curvatura media inversa, en parte debido a que no se trata de un flujo gradiente. Dado que en el presente trabajo hemos explorado tanto el IMCF como una discretización del espacio hiperbólico, estamos en buena posición para realizar ciertas conjeturas sobre la discretización del flujo en este contexto. Aunque no propondremos un método específico para este proceso, sí presentaremos de manera general un criterio que permita evaluar la convergencia de alguna propuesta de discretización del IMCF en el espacio hiperbólico hacia el flujo original.

Capítulo 1

IMCF modificado en espacios de producto deformado

1.1. Preliminares

Haremos un pequeño repaso por los conceptos de geometría riemanniana que usaremos a lo largo del capítulo, basados en [10, 34, 37]. Asumiremos que el lector está familiarizado con el concepto de variedad suave, para más información ver [30]. A lo largo de este capítulo usaremos la convención de suma de Einstein, es decir, sumamos sobre índices repetidos.

Para responder preguntas geométricas sobre variedades diferenciales, como por ejemplo medir ángulos, largos de curvas o áreas de regiones es necesario dotarlas de una estructura extra. Inspirados en el caso euclideo sabemos que podemos responder estas preguntas usando el producto interno, definimos entonces una *métrica riemanniana* (no confundir -aunque ciertamente están relacionados- con el concepto de métrica de un espacio métrico).

Definición 1.1.1 (Métrica riemanniana). *Una métrica riemanniana sobre una variedad suave M , usualmente denotada g , es un campo tensorial suave, simétrico, covariante de rango 2 y que es definido positivo en cada punto. En otras palabras, corresponde a cada punto p de M asignarle un producto interno $g_p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ el cual varía suavemente en p . Debido a que es un punto interno a veces usaremos la notación $g_p(\cdot, \cdot) = \langle \cdot, \cdot \rangle_p$. Para ser más precisos, g debe cumplir las siguientes condiciones para cada p :*

- $g_p(u, v) = g_p(v, u)$, para todo $u, v \in T_p M$;
- $g_p(u, u) \geq 0$, para todo $u \in T_p M$;
- $g_p(u, u) = 0$ si y solo si $u = 0$.

Cuando por contexto sea claro el punto, omitiremos el subíndice en nuestra notación.

Una *variedad riemanniana* (M, g) corresponde a una variedad suave con una métrica riemanniana asociada.

Al ser la métrica un tensor covariante de rango 2 a veces lo expresaremos de la forma $g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j$ siendo los dx^i una base del espacio cotangente. Definimos la inversa de la métrica como $g^{-1} = g^{ij} \partial x_i \otimes \partial x_j$ con los ∂x_i la base del espacio tangente asociado y los g^{ij} cumplen la condición $g^{ij} g_{jk} = \delta_k^i$ con δ_k^i la delta de Kronecker.

Al tratar de definir una noción de derivada de campos vectoriales sobre una variedad aparece el problema, a diferencia del caso euclideo, sobre como comparar valores del campo vectorial en puntos cercanos, debido a que pertenecen a espacios tangentes distintos. Para solucionar ese problema se introduce el concepto de *conexión afín*. Sea $\mathfrak{X}(M)$ el conjunto de todos los campos vectoriales sobre M de clase C^∞ y sea $\mathcal{D}(M)$ el anillo de funciones sobre M a valores reales de clase C^∞ .

Definición 1.1.2 (Conexión afín). *Una conexión afín ∇ sobre una variedad diferenciable M es un mapeo*

$$\begin{aligned} \nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\rightarrow \mathfrak{X}(M); \\ (X, Y) &\mapsto \nabla_X Y \end{aligned}$$

que satisface las siguientes condiciones para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ y $f, g \in \mathcal{D}(M)$:

1. $\nabla_{fX+gY}Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$;
2. $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$;
3. $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + (\partial_X f)Y$, esta propiedad es llamada la regla de Leibniz.

Donde $\partial_X f$ corresponde a la derivada direccional de f , más aún, como la conexión es una manera de identificar espacios tangentes las funciones a valores reales no se ven afectadas, entonces tenemos $\nabla_X f = \partial_X f$.

Nos gustaría que nuestra manera de derivar cumpliera cierta regla del producto con nuestro producto interno, a esta noción le llamamos compatibilidad con la métrica. Para ser más precisos decimos que una conexión afín ∇ es compatible con la métrica g si se tiene para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$

$$\nabla_X(\langle Y, Z \rangle) = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle.$$

Teorema 1.1.3. *Existe una única conexión afín ∇ en M , llamada conexión de Levi-Civita o conexión riemanniana, que cumple las siguientes condiciones:*

- ∇ es compatible con la métrica;
- ∇ es simétrica, i.e. $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$. Con $[\cdot, \cdot]$ el corchete de Lie el cual, siguiendo con la notación anterior, es el único campo vectorial que cumple $[X, Y](f) = \partial_X \partial_Y f - \partial_Y \partial_X f$ para todo $f \in \mathcal{D}(M)$, ver [30] para más detalle.

Tomando un sistema de coordenadas locales en torno a p y una base del espacio tangente ∂x_i con $i = 1, \dots, n$ podemos calcular para un campo vectorial $X = X^i \partial x_i$ se tiene:

$$\nabla_{\partial x_j} X = \frac{\partial X^i}{\partial x_j} \partial x_i + X^i \nabla_{\partial x_j} \partial x_i$$

Dependiendo del contexto usaremos las siguientes notaciones intercambiabilmente $\frac{\partial}{\partial x_j}, \partial_j, \partial x_j$.

Escribimos $\nabla_{\partial x_j} \partial x_i = \Gamma_{ij}^k \partial x_k$, donde llamaremos a los Γ_{ij}^k los símbolos de Christoffel asociados a la conexión. Tenemos entonces la siguiente expresión

$$\nabla_{\partial x_j} X = \frac{\partial X^i}{\partial x_j} \partial x_i + X^i \Gamma_{ij}^k \partial x_k$$

Para la conexión de Levi-Civita tenemos la siguiente expresión para sus símbolos de Christoffel

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}g^{km} \left(\frac{\partial g_{jm}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{im}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_m} \right)$$

Nuevamente inspirados en el caso euclideo definimos el gradiente de una función como el campo vectorial sobre M , ∇f que cumple

$$\langle \nabla f, v \rangle = \partial_v f$$

en todo punto $p \in M$ y para todo $v \in T_p M$. Se puede demostrar la siguiente fórmula $\nabla f = g^{ij} \partial_i f \partial x_j$,

Por otro lado, definimos la divergencia de un campo vectorial X como la traza del mapeo $Y \mapsto \nabla_Y X$, se comprueban las siguientes expresiones:

$$\operatorname{div} X = \nabla_{\partial x_i} X^i = \frac{\partial X^i}{\partial x_i} + \Gamma_{ik}^i X^k = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sqrt{|g|} X^j \right),$$

Donde $|g|$ es el determinante de la métrica. La última igualdad viene del hecho que $\sum_i \Gamma_{ij}^i = (\partial_j \sqrt{|g|}) / \sqrt{|g|}$, el cual se sigue de sumar sobre nuestra expresión para los símbolos de Christoffel.

Definimos el operador de Laplace-Beltrami sobre una función f , Δf como la divergencia del gradiente de f . Se verifica lo siguiente:

$$\Delta f = \operatorname{div} (\nabla f) = \nabla^i \nabla_i f = g^{ij} \nabla_{\partial x_i} \nabla_{\partial x_j} f = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sqrt{|g|} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j} \right).$$

En el caso euclideo tenemos la propiedad que las derivadas conmutan, a partir de esta idea introducimos el *tensor de curvatura de Riemann* como una manera de cuantificar la no-conmutatividad de la derivada covariante sobre nuestra superficie. Más explícitamente es un (1,3)-tensor definido por la expresión

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z$$

Definimos también la *curvatura seccional* de un subespacio 2 dimensional $\sigma \subset T_p M$ por la siguiente fórmula, sean $x, y \in T_p M$ una base de σ

$$K(\sigma) = K(x, y, x, y) = \frac{\langle R(x, y)x, y \rangle}{|x|^2 |y|^2 - \langle x, y \rangle^2}, \quad (1.1)$$

se puede chequear que esta cantidad es independiente de la elección de base de σ .

En lo que resta de los preliminares trabajaremos con una variedad riemanniana ambiente (N^{n+1}, \bar{g}) y otra variedad (M^n, g) con una inmersión $F : M \rightarrow N$. Tomamos g como la métrica inducida en la subvariedad M de la siguiente forma

$$g_{ij} = \bar{g} \left(\frac{\partial F}{\partial x_j}, \frac{\partial F}{\partial x_i} \right).$$

Seguiremos la convención de que la métrica, los símbolos de Christoffel, la conexión y el tensor de curvatura de la subvariedad no llevan barra, mientras que los de la variedad ambiente si.

Denotamos ν como una elección local de un normal en $F(M)$, dada una base ortonormal de T_pM , $\{e_1, \dots, e_n\}$ podemos extender a una base ortonormal de T_pN , $\{e_1, \dots, e_n, \nu\}$. En este caso la *segunda forma fundamental* $A = h_{ij}$ es la forma bilineal $A(p) : T_pM \times T_pM \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$h_{ij} = \bar{g}(\bar{\nabla}_{e_i}\nu, e_j) = -\bar{g}(\bar{\nabla}_{e_i}e_j, \nu).$$

Definimos el *mapeo de Weingarten* como un operador $W : T_pM \rightarrow T_pM$ dado por $W = g^{ik}h_{kj} = h_j^i$. Al ser un operador autoadjunto existe una base del espacio tangente de vectores propios cuyos valores propios asociados $\{k_1, \dots, k_n\}$ son llamados las curvaturas principales de $F(M)$. Definimos la curvatura media como la traza de este operador, es decir

$$H = g^{ij}h_{ij} = k_1 + \dots + k_n.$$

1.2. Espacios de producto deformado

En esta sección obtendremos algunas expresiones explícitas para algunas cantidades sobre espacios de producto deformado. Trabajaremos en la variedad $N = (0, \infty) \times S^1$ con la métrica \bar{g} dada por $dr^2 + \phi(r)^2 d\theta^2$. Comenzaremos calculando los símbolos de Christoffel.

Lema 1.2.1. (Símbolos de Christoffel de la variedad ambiente). *Sea $\bar{g} = dr^2 + \phi(r)^2 d\theta^2$, tenemos los siguientes símbolos de Christoffel.*

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_{\theta\theta}^{\theta} &= 0, & \bar{\Gamma}_{\theta r}^{\theta} &= \bar{\Gamma}_{r\theta}^{\theta} = \frac{\phi'(r)}{\phi(r)}, & \bar{\Gamma}_{rr}^{\theta} &= 0, \\ \bar{\Gamma}_{\theta\theta}^r &= -\phi(r)\phi'(r), & \bar{\Gamma}_{\theta r}^r &= \bar{\Gamma}_{r\theta}^r = 0, & \bar{\Gamma}_{rr}^r &= 0. \end{aligned}$$

Demostración: Notamos que los coeficientes de la inversa de la métrica están dados por:

$$\bar{g}^{\theta\theta} = \phi(r)^{-2} \quad \bar{g}^{\theta r} = \bar{g}^{r\theta} = 0 \quad \bar{g}^{rr} = 1$$

Como la métrica es diagonal los símbolos de Christoffel se calculan con la siguiente fórmula:

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_{\theta\theta}^{\theta} &= \frac{\bar{g}^{\theta\theta}}{2}(\partial_{\theta}\bar{g}_{\theta\theta} + \partial_{\theta}\bar{g}_{\theta\theta} - \partial_{\theta}\bar{g}_{\theta\theta}) = 0 \\ \bar{\Gamma}_{r\theta}^{\theta} &= \bar{\Gamma}_{\theta r}^{\theta} = \frac{\bar{g}^{\theta\theta}}{2}(\partial_r\bar{g}_{\theta\theta} + \partial_{\theta}\bar{g}_{r\theta} - \partial_{\theta}\bar{g}_{r\theta}) = \frac{\phi'(r)}{\phi(r)} \\ \bar{\Gamma}_{rr}^{\theta} &= \frac{\bar{g}^{\theta\theta}}{2}(\partial_r\bar{g}_{r\theta} + \partial_r\bar{g}_{r\theta} - \partial_{\theta}\bar{g}_{rr}) = 0 \\ \bar{\Gamma}_{\theta\theta}^r &= \frac{\bar{g}^{rr}}{2}(\partial_{\theta}\bar{g}_{\theta r} + \partial_{\theta}\bar{g}_{\theta r} - \partial_r\bar{g}_{\theta\theta}) = -\phi(r)\phi'(r) \\ \bar{\Gamma}_{r\theta}^r &= \bar{\Gamma}_{\theta r}^r = \frac{\bar{g}^{rr}}{2}(\partial_r\bar{g}_{\theta r} + \partial_{\theta}\bar{g}_{rr} - \partial_r\bar{g}_{r\theta}) = 0 \\ \bar{\Gamma}_{rr}^r &= \frac{\bar{g}^{rr}}{2}(\partial_r\bar{g}_{rr} + \partial_r\bar{g}_{rr} - \partial_r\bar{g}_{rr}) = 0 \end{aligned}$$

□

Procedemos a calcular la curvatura seccional de N:

Teorema 1.2.2. *La curvatura seccional de $N = (0, \infty) \times S^1$ con métrica $\bar{g} = dr^2 + \phi(r)^2 d\theta^2$ es $K = -\frac{\phi''(r)}{\phi(r)}$*

Demostración. Sea \bar{R} el tensor curvatura de Riemann de N , de (1.1) tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
K &= \frac{\langle \bar{R}(\partial_\theta, \partial_r)\partial_\theta, \partial_r \rangle}{\langle \partial_\theta, \partial_\theta \rangle \langle \partial_r, \partial_r \rangle - \langle \partial_\theta, \partial_r \rangle^2} \\
&= \frac{1}{\phi^2} \langle \bar{\nabla}_{\partial_r} \bar{\nabla}_{\partial_\theta} \partial_\theta - \bar{\nabla}_{\partial_\theta} \bar{\nabla}_{\partial_r} \partial_\theta + \bar{\nabla}_{[\partial_\theta, \partial_r]} \partial_\theta, \partial_r \rangle \\
&= \frac{1}{\phi^2} \left\langle \bar{\nabla}_{\partial_r} (-\phi(r)\phi'(r)\partial_r) - \bar{\nabla}_{\partial_\theta} \left(\frac{\phi'(r)}{\phi(r)} \partial_\theta \right), \partial_r \right\rangle \\
&= \frac{1}{\phi^2} \left\langle \partial_r(-\phi\phi')\partial_r - \frac{\phi'}{\phi} \cdot -\phi\phi'\partial_r, \partial_r \right\rangle \\
&= \frac{1}{\phi^2} [-\phi\phi'' - \phi'^2 + \phi'^2] = -\frac{\phi''}{\phi}
\end{aligned}$$

□

Por último calcularemos la curvatura de una curva de la forma $X(\theta) = (\gamma(\theta), \theta)$.

Lema 1.2.3. *Suponga que la curva $X : S^1 \rightarrow (0, \infty) \times S^1$ es de la forma $(\gamma(\theta), \theta)$, con $\gamma(\theta) > 0$ y el codominio está equipado con la métrica $g = dr^2 + \phi(r)^2 d\theta^2$. Entonces la curvatura de X está dada por:*

$$\kappa = \frac{2\phi'(\gamma)(\partial_\theta\gamma)^2 + \phi'(\gamma)\phi(\gamma)^2 - \phi(\gamma)(\partial_\theta^2\gamma)}{(\phi(\gamma)^2 + (\partial_\theta\gamma)^2)^{3/2}}.$$

Demostración: Primero calcularemos el normal a la curva, este es de la forma

$$\nu = \nu^\theta \partial_\theta + \nu^r \partial_r$$

Tenemos que ν debe cumplir dos condiciones: $\langle \partial_\theta X, \nu \rangle = 0$ y $\langle \nu, \nu \rangle = 1$. Expandiendo estas ecuaciones tenemos

$$0 = \langle \partial_\theta X, \nu \rangle = \langle \partial_\theta + (\partial_\theta\gamma)\partial_r, \nu^\theta \partial_\theta + \nu^r \partial_r \rangle = \nu^\theta \phi(\gamma)^2 + (\partial_\theta\gamma)\nu^r$$

y también

$$1 = \langle \nu, \nu \rangle = (\nu^r)^2 + (\nu^\theta)^2 \phi(\gamma)^2$$

Despejando ν^r de la primera ecuación y reemplazando en la segunda obtenemos

$$1 = (\nu^\theta)^2 \phi(\gamma)^2 \left(\frac{\phi(\gamma)^2}{(\partial_\theta\gamma)^2} + 1 \right)$$

Finalmente resolvemos (eligiendo el normal exterior) y obtenemos

$$\nu = \frac{\phi(\gamma)}{v} \partial_r - \frac{\partial_\theta\gamma}{\phi v} \partial_\theta, \quad v = \sqrt{(\partial_\theta\gamma)^2 + \phi(\gamma)^2}.$$

Notamos que usamos implícitamente que $\partial_\theta\gamma \neq 0$. Sin embargo, se puede comprobar que la fórmula obtenida para ν sigue siendo válida en este caso.

Una base del espacio tangente a nuestra curva sería

$$e := \partial_\theta \gamma \partial_r + \partial_\theta,$$

y la métrica inducida es

$$g_{ee} = \bar{g}(e, e) = (\partial_\theta \gamma)^2 + \phi(\gamma)^2 = v^2.$$

Podemos calcular la segunda forma fundamental como sigue, con $\bar{\nabla}$ la conexión de Levi-Civita en nuestra variedad ambiente.

$$\begin{aligned} h_{ee} &= -\langle \bar{\nabla}_e e, \nu \rangle = -\langle \bar{\nabla}_e \partial_\theta + \partial_\theta \gamma \bar{\nabla}_e \partial_r + (\partial_\theta^2 \gamma) \partial_r, \nu \rangle \\ &= -\langle \partial_\theta \gamma \bar{\nabla}_{\partial_r} \partial_\theta + \bar{\nabla}_{\partial_\theta} \partial_\theta + (\partial_\theta \gamma)^2 \bar{\nabla}_{\partial_r} \partial_r + \partial_\theta \gamma \bar{\nabla}_{\partial_\theta} \partial_r + (\partial_\theta^2 \gamma) \partial_r, \nu \rangle \\ &= -\langle 2(\partial_\theta \gamma) \Gamma_{\theta r}^\theta \partial_\theta + \Gamma_{\theta \theta}^r \partial_r + (\partial_\theta^2 \gamma) \partial_r, \nu \rangle \\ &= -\left\langle 2\partial_\theta \gamma \frac{\phi'}{\phi} \partial_\theta + (\partial_\theta^2 \gamma - \phi \phi') \partial_r, \nu \right\rangle \\ &= -\left\langle 2\partial_\theta \gamma \frac{\phi'}{\phi} \partial_\theta + (\partial_\theta^2 \gamma - \phi \phi') \partial_r, \frac{\phi}{v} \partial_r - \frac{\partial_\theta \gamma}{\phi v} \partial_\theta \right\rangle \\ &= \frac{-\phi(\partial_\theta^2 \gamma) + \phi^2 \phi' + 2(\partial_\theta \gamma)^2 \phi'}{v}. \end{aligned}$$

Recordamos que la curvatura (media) es la traza de la segunda forma fundamental, por ende tenemos (usando la convención que la curvatura de un círculo es positiva).

$$\kappa = g^{ee} h_{ee} = v^{-2} \cdot \frac{-\phi(\partial_\theta^2 \gamma) + \phi^2 \phi' + 2(\partial_\theta \gamma)^2 \phi'}{v}$$

que es lo pedido. □

1.3. El IMCF modificado

Estamos interesados en el problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{\partial X}{\partial t}(\theta, t) = \frac{f(d)}{\kappa} \nu & \theta \in S^1, t \in [0, T]; \\ X(\theta, 0) = X_0(\theta) & \theta \in S^1. \end{cases} \quad (1.2)$$

Donde X es, para cada t , una curva suave de la forma $X(\cdot, t) : S^1 \rightarrow N$, d es la distancia geodésica en N entre X y el origen y $X_0(S^1)$ es una curva suave con curvatura estrictamente positiva.

Veremos que esto es equivalente a resolver el siguiente problema de valor inicial, con γ_0 suave y relacionada a X_0 por la siguiente relación $X_0(\theta) = (\gamma_0(\theta), \theta)$.

$$\begin{cases} \partial_t \gamma = \frac{(\phi(\gamma)^2 + (\partial_\theta \gamma)^2) f(\gamma)}{\phi(\gamma)(2\phi'(\gamma)(\partial_\theta \gamma)^2 + \phi'(\gamma)\phi(\gamma)^2 - \phi(\gamma)(\partial_\theta^2 \gamma))} = \frac{fv}{\phi\kappa} & \theta \in S^1, t \in [0, T]; \\ \gamma(\theta, 0) = \gamma_0(\theta) & \theta \in S^1. \end{cases} \quad (1.3)$$

Para esto necesitaremos primero el siguiente lema.

Lema 1.3.1. Sea $\gamma \in C^\infty(S^1 \times [0, T])$ una solución de (1.3). Entonces existe un único mapa $y \in C^\infty(S^1 \times [0, T], S^1)$ tal que

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t}(\theta, t) = \frac{-f \cdot (\partial_\theta \gamma)}{\phi v \kappa} & \theta \in S^1, t \in [0, T); \\ y(\theta, 0) = \theta & \theta \in S^1; \end{cases} \quad (1.4)$$

(donde las funciones del lado derecho están evaluadas en (y, t)) más aún, para todo $t \in [0, T)$, $y(\cdot, t)$ es un difeomorfismo de S^1 a S^1 .

Demostración. Para cada θ el lado derecho de la ecuación es suave, luego el resultado se desprende de la existencia y regularidad de soluciones a ecuaciones diferenciales ordinarias. Ciertamente puede ocurrir que el tiempo máximo de existencia de y , digamos \hat{T} , sea menor que T , pero con un ligero abuso de notación podemos considerar un nuevo T como el mínimo del T original y de \hat{T} . \square

Podemos entonces demostrar la relación entre las soluciones de (1.2) y (1.3)

Teorema 1.3.2. Dada una solución $\gamma \in C^\infty(S^1 \times [0, T])$ de (1.3) existe un único mapa $y \in C^\infty(S^1 \times [0, T], S^1)$ tal que

$$\begin{aligned} X: S^1 \times [0, T) &\rightarrow N; \\ (\theta, t) &\mapsto (y(\theta, t), \gamma(y(\theta, t), t)); \end{aligned} \quad (1.5)$$

es solución de (1.2). Por otro lado, si $X \in C^\infty(S^1 \times [0, T), N)$ es solución de (1.2), entonces existe un único mapa y tal que γ definida de manera implícita por (1.5) es solución de (1.3).

Demostración. Sea γ solución de (1.3), por Lema 1.3.1 tenemos que existe un único y solución de Ecuación (1.4). Veamos que X es solución de (1.2). Notamos que

$$X(\theta, 0) = (y(\theta, 0), \gamma(y(\theta, 0), 0)) = (\theta, \gamma(\theta, 0)) = (\theta, \gamma_0(\theta)) = X_0(\theta)$$

es decir, se cumple la condición inicial. Veamos ahora la derivada temporal

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial t} &= \frac{\partial y}{\partial t} \partial_\theta + \left((\partial_\theta \gamma) \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial \gamma}{\partial t} \right) \partial_r \\ &= -\frac{f(\partial_\theta \gamma)}{\kappa \phi v} \partial_\theta + \left[\frac{f}{\kappa} \left(\frac{v}{\phi} - \frac{(\partial_\theta \gamma)^2}{\phi v} \right) \right] \partial_r \\ &= -\frac{f(\partial_\theta \gamma)}{\kappa \phi v} \partial_\theta + \frac{f \phi}{\kappa v} \partial_r \\ &= \frac{f}{\kappa} \nu. \end{aligned}$$

Falta entonces la otra implicancia. Sea $X \in C^\infty(S^1 \times [0, T), N)$ solución de (1.2), definimos y y γ de manera implícita por (1.5) y notamos que tienen la regularidad buscada. Veamos primero que γ cumple la condición inicial.

$$X(\theta, 0) = (y(\theta, 0), \gamma(y(\theta, 0), 0))$$

Se tiene entonces que $y(\theta, 0) = \theta$ y que $\gamma(\theta, 0) = \gamma_0(\theta)$. Veamos ahora su evolución

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial X}{\partial t}, \nu \right\rangle &= \left\langle \frac{\partial y}{\partial t} \partial_\theta + \left((\partial_\theta \gamma) \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial \gamma}{\partial t} \right) \partial_r, \nu \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{\partial y}{\partial t} (\partial_\theta + (\partial_\theta \gamma) \partial_r) + \frac{\partial \gamma}{\partial t} \partial_r, \nu \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{\partial \gamma}{\partial t} \partial_r, \nu \right\rangle \\ &= \frac{\phi}{v} \frac{\partial \gamma}{\partial t}. \end{aligned}$$

Recordando que X resuelve (1.2), y por ende

$$\left\langle \frac{\partial X}{\partial t}, \nu \right\rangle = \frac{f}{\kappa},$$

tenemos que $\frac{\partial \gamma}{\partial t} = \frac{fv}{\phi\kappa}$ que era lo pedido. \square

Para finalizar esta sección calculamos lo siguiente que nos servirá para más adelante.

$$\frac{d\gamma(y(\theta, t), t)}{dt} = (\partial_\theta \gamma) \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial \gamma}{\partial t} = -\frac{f(\partial_\theta \gamma)^2}{\phi v \kappa} + \frac{fv}{\phi \kappa} = \frac{-f(\partial_\theta \gamma)^2 + f((\partial_\theta \gamma)^2 + \phi^2)}{\phi v \kappa} = \frac{f\phi}{v\kappa} \quad (1.6)$$

1.4. Evolución de cantidades geométricas

En esta sección calcularemos las ecuaciones de evolución de diversas cantidades geométricas las cuales serán usadas en la siguiente sección para demostrar regularidad del flujo.

Partimos comentando que tenemos la siguiente identificación de la derivada temporal:

$$\partial_t = \dot{X} = \frac{f}{\kappa} \nu$$

Recordando que $e = (\partial_\theta \gamma) \partial_r + \partial_\theta$ es una base del espacio tangente a la curva podemos calcular la evolución de la métrica inducida sobre la curva.

$$\frac{\partial g_{ee}}{\partial t} = \bar{\nabla}_{\partial_t} \langle e, e \rangle = 2 \langle \bar{\nabla}_{\dot{X}} e, e \rangle = 2 \left\langle \bar{\nabla}_e \left(\frac{f}{\kappa} \nu \right), e \right\rangle = 2 \frac{f}{\kappa} \langle \bar{\nabla}_e \nu, e \rangle = 2 \frac{f}{\kappa} h_{ee} = 2f g_{ee}$$

Donde usamos que $\bar{\nabla}_{\dot{X}} e - \bar{\nabla}_e \dot{X} = X_*[\partial_t, \partial_\theta] = 0$.

Como $g_{ee} = v^2 = \phi^2 + (\partial_\theta \gamma)^2$ tenemos

$$\frac{\partial v^2}{\partial t} = 2fv^2 \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial t} = fv$$

Calculamos también la evolución de los vectores:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \nu}{\partial t} &= g^{ee} \langle \bar{\nabla}_{\dot{X}} \nu, e \rangle e + \langle \bar{\nabla}_{\dot{X}} \nu, \nu \rangle \nu = -g^{ee} \langle \nu, \bar{\nabla}_{\dot{X}} e \rangle e \\ &= -g^{ee} \left\langle \nu, \bar{\nabla}_e \left(\frac{f}{\kappa} \nu \right) \right\rangle e = -g^{ee} \bar{\nabla}_e \left(\frac{f}{\kappa} \right) e = -\nabla \left(\frac{f}{\kappa} \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial e}{\partial t} &= g^{ee} \langle \bar{\nabla}_{\dot{X}} e, e \rangle e + \langle \bar{\nabla}_{\dot{X}} e, \nu \rangle \nu = g^{ee} f g_{ee} e + \left\langle \nu, \bar{\nabla}_e \left(\frac{f}{\kappa} \right) \right\rangle \nu \\ &= f e + \bar{\nabla}_e \left(\frac{f}{\kappa} \right) \nu\end{aligned}$$

Donde ∇ corresponde a la conexi3n de Levi-Civita de la curva, y en este caso particular $\nabla \left(\frac{f}{\kappa} \right)$ representa el gradiente sobre la curva de $\frac{f}{\kappa}$.

Necesitaremos los siguientes t3rminos para calcular la evoluci3n de la curvatura

$$\bar{\nabla}_e \nu = g^{ee} \langle \bar{\nabla}_e \nu, e \rangle e + \langle \bar{\nabla}_e \nu, \nu \rangle \nu = \kappa e$$

$$\Gamma_{ee}^e = \frac{1}{2} g^{ee} (\partial_e g_{ee} + \partial_e g_{ee} - \partial_e g_{ee}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{v^2} \partial_e v^2 = \frac{\partial_e v}{v}$$

Notamos que $\langle \bar{\nabla}_e \nu, \nu \rangle = 0$ y por ende se tiene que $\langle \bar{\nabla}_e \bar{\nabla}_e \nu, \nu \rangle = -\langle \bar{\nabla}_e \nu, \bar{\nabla}_e \nu \rangle$

Por 3ltimo desarrollamos el laplaciano, donde Δ representa el operador de Laplace-Beltrami sobre la curva.

$$\begin{aligned}\Delta \left(\frac{f}{\kappa} \right) &= \frac{1}{v} \partial_e \left(v g^{ee} \partial_e \left(\frac{f}{\kappa} \right) \right) = \frac{1}{v} \partial_e \left(\frac{1}{v} \partial_e \left(\frac{f}{\kappa} \right) \right) \\ &= \frac{1}{v} \partial_e \left(\frac{1}{v} \right) \partial_e \left(\frac{f}{\kappa} \right) + \frac{1}{v^2} \partial_e^2 \left(\frac{f}{\kappa} \right) = -g^{ee} \Gamma_{ee}^e \partial_e \left(\frac{f}{\kappa} \right) + g^{ee} \partial_e^2 \left(\frac{f}{\kappa} \right)\end{aligned}$$

Tenemos entonces todos los componentes necesarios para calcular la ecuaci3n de evoluci3n de la curvatura.

$$\begin{aligned}\frac{\partial \kappa}{\partial t} &= \frac{\partial g^{ee}}{\partial t} h_{ee} + g^{ee} \frac{\partial h_{ee}}{\partial t} = -\frac{1}{g_{ee}^2} \frac{\partial g_{ee}}{\partial t} h_{ee} - g^{ee} \langle \bar{\nabla}_{\dot{X}} \bar{\nabla}_e e, \nu \rangle - g^{ee} \langle \bar{\nabla}_e e, \bar{\nabla}_{\dot{X}} \nu \rangle \\ &= -2f\kappa - g^{ee} \langle \bar{\nabla}_e \bar{\nabla}_{\dot{X}} e, \nu \rangle - g^{ee} \langle \bar{R}(e, \dot{X})e, \nu \rangle - g^{ee} \left\langle \Gamma_{ee}^e e, -\partial_e \left(\frac{f}{\kappa} \right) g^{ee} e \right\rangle \\ &= -2f\kappa - g^{ee} \left\langle \bar{\nabla}_e \bar{\nabla}_e \left(\frac{f}{\kappa} \nu \right), \nu \right\rangle - g^{ee} \left\langle \bar{R} \left(e, \frac{f}{\kappa} \nu \right) e, \nu \right\rangle + g^{ee} \Gamma_{ee}^e \partial_e \left(\frac{f}{\kappa} \right) \\ &= -2f\kappa - g^{ee} \left\langle \bar{\nabla}_e \left[\partial_e \left(\frac{f}{\kappa} \right) \nu \right], \nu \right\rangle - g^{ee} \left\langle \bar{\nabla}_e \left[\frac{f}{\kappa} \bar{\nabla}_e \nu \right], \nu \right\rangle - \frac{f}{\kappa} K + g^{ee} \Gamma_{ee}^e \partial_e \left(\frac{f}{\kappa} \right) \\ &= -2f\kappa - g^{ee} \partial_e^2 \left(\frac{f}{\kappa} \right) - g^{ee} \frac{f}{\kappa} \langle \bar{\nabla}_e \bar{\nabla}_e \nu, \nu \rangle - \frac{f}{\kappa} K + g^{ee} \Gamma_{ee}^e \partial_e \left(\frac{f}{\kappa} \right) \\ &= -2f\kappa - g^{ee} \partial_e^2 \left(\frac{f}{\kappa} \right) + g^{ee} \frac{f}{\kappa} \langle \bar{\nabla}_e \nu, \bar{\nabla}_e \nu \rangle - \frac{f}{\kappa} K + g^{ee} \Gamma_{ee}^e \partial_e \left(\frac{f}{\kappa} \right) \\ &= -2f\kappa - g^{ee} \partial_e^2 \left(\frac{f}{\kappa} \right) + f\kappa - \frac{f}{\kappa} K + g^{ee} \Gamma_{ee}^e \partial_e \left(\frac{f}{\kappa} \right) \\ &= -f\kappa - \Delta \left(\frac{f}{\kappa} \right) - \frac{f}{\kappa} K.\end{aligned}$$

Donde $K = -\frac{\phi''}{\phi}$ es la curvatura seccional (o escalar) de nuestra variedad ambiente N , la cual fue calculada en Teorema 1.2.2. Usamos tambi3n el hecho que para una conexi3n af3n ∇ , una funci3n a valores reales μ y un campo vectorial Y se tiene $\nabla_Y \mu = \partial_Y \mu$.

Para continuar desarrollando esta ecuación necesitaremos las siguientes propiedades, con M una variedad riemanniana con su conexión riemanniana correspondiente sean $\mu, \eta : M \rightarrow \mathbb{R}$ y $\rho : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funciones diferenciables

$$\begin{aligned}\nabla \rho(\mu) &= \rho'(\mu) \nabla \mu; \\ \Delta \rho(\mu) &= \rho'(\mu) \Delta \mu + \rho''(\mu) |\nabla \mu|^2; \\ \Delta(\mu\eta) &= \Delta(\mu)\eta + 2 \langle \nabla \mu, \nabla \eta \rangle + \mu \Delta(\eta).\end{aligned}$$

Podemos expandir entonces

$$\begin{aligned}\Delta \left(\frac{f}{\kappa} \right) &= \frac{1}{\kappa} \Delta f + 2 \left\langle \nabla f, \nabla \left(\frac{1}{\kappa} \right) \right\rangle + f \Delta \left(\frac{1}{\kappa} \right) \\ &= \frac{1}{\kappa} [f' \Delta \gamma + f'' |\nabla \gamma|^2] - \frac{2}{\kappa^2} \langle \nabla f, \nabla \kappa \rangle + f \left[-\frac{1}{\kappa^2} \Delta \kappa + \frac{2}{\kappa^3} |\nabla \kappa|^2 \right] \\ &= -\frac{f \Delta \kappa}{\kappa^2} + \frac{2f |\nabla \kappa|^2}{\kappa^3} - \frac{2f'}{\kappa^2} \langle \nabla \gamma, \nabla \kappa \rangle + \frac{f' \Delta \gamma}{\kappa} + \frac{f'' |\nabla \gamma|^2}{\kappa}\end{aligned}$$

Para terminar nos falta calcular $\Delta \gamma$, para esto notamos que $\frac{(\partial_\theta \gamma)}{v} = \left\langle \frac{e}{v}, \partial_r \right\rangle$ y también que $\nabla_{\frac{e}{v}} \frac{e}{v} = -\kappa \nu$, por la elección de normal exterior.

$$\begin{aligned}\Delta \gamma &= \nabla_{\frac{e}{v}} \nabla_{\frac{e}{v}} \gamma \\ &= \nabla_{\frac{e}{v}} \frac{\partial_\theta \gamma}{v} \\ &= \nabla_{\frac{e}{v}} \left\langle \frac{e}{v}, \partial_r \right\rangle \\ &= \left\langle \nabla_{\frac{e}{v}} \frac{e}{v}, \partial_r \right\rangle + \left\langle \frac{e}{v}, \nabla_{\frac{e}{v}} \partial_r \right\rangle \\ &= \langle -\kappa \nu, \partial_r \rangle + \frac{1}{v^2} \langle e, \nabla_e \partial_r \rangle \\ &= \frac{-\phi \kappa}{v} + \frac{1}{v^2} \langle e, \nabla_{(\partial_\theta \gamma) \partial_r + \partial_\theta} \partial_r \rangle \\ &= \frac{-\phi \kappa}{v} + \frac{1}{v^2} \langle e, \Gamma_{\theta r}^\theta \partial_\theta \rangle \\ &= \frac{-\phi \kappa}{v} + \frac{\phi \phi'}{v^2}\end{aligned} \tag{1.7}$$

Juntamos todo y queda

$$\frac{\partial \kappa}{\partial t} = \frac{f}{\kappa^2} \Delta \kappa - \frac{2f}{\kappa^3} |\nabla \kappa|^2 + \frac{2f'}{\kappa^2} \langle \nabla \kappa, \nabla \gamma \rangle + \frac{f' \phi}{v} - \frac{f' \phi \phi'}{v^2 \kappa} - \frac{f'' |\nabla \gamma|^2}{\kappa} - f \kappa - \frac{f}{\kappa} K \tag{1.8}$$

Definimos la siguiente función soporte

$$\lambda(\theta, t) := \phi(\gamma(\theta, t)) \langle \partial_r, \nu(\theta, t) \rangle = \frac{\phi^2}{v}$$

También queremos calcular su ecuación de evolución, esto lo haremos en varias etapas, primero veremos su derivada temporal. Para esto necesitamos

$$\begin{aligned}
\bar{\nabla}_{\partial_t}(\phi\partial_r) &= \bar{\nabla}_{\dot{X}}(\phi\partial_r) = \phi' \frac{d\gamma}{dt} \partial_r + \phi \bar{\nabla}_{\dot{X}} \partial_r \\
&= \phi' \frac{f\phi}{\kappa v} \partial_r + \phi \frac{f}{\kappa} \bar{\nabla}_\nu \partial_r \\
&= \phi' \frac{f\phi}{\kappa v} \partial_r + \phi \frac{f}{\kappa} \left[\frac{\phi}{v} \bar{\nabla}_{\partial_r} \partial_r - \frac{\partial_\theta \gamma}{\phi v} \bar{\nabla}_{\partial_r} \partial_\theta \right] \\
&= \phi' \frac{f\phi}{\kappa v} \partial_r + \frac{f\phi'}{\kappa} \cdot \frac{-\partial_\theta \gamma}{\phi v} \partial_\theta \\
&= \phi' \frac{f\phi}{\kappa v} \partial_r + \frac{f\phi'}{\kappa} (\nu - \langle \partial_r, \nu \rangle \partial_r) \\
&= \frac{f\phi'}{\kappa} \nu.
\end{aligned}$$

Donde usamos (1.6) para pasar de la primera a la segunda línea. Esto nos permite calcular

$$\frac{\partial}{\partial t} \lambda = \langle \bar{\nabla}_{\partial_t}(\phi\partial_r), \nu \rangle + \phi \langle \partial_r, \bar{\nabla}_{\partial_t} \nu \rangle = \frac{f\phi'}{\kappa} - \phi \left\langle \partial_r, \nabla \left(\frac{f}{\kappa} \right) \right\rangle = \frac{f\phi'}{\kappa} - \frac{\phi}{\kappa} \langle \partial_r, \nabla f \rangle + \frac{f\phi}{\kappa^2} \langle \partial_r, \nabla \kappa \rangle.$$

Ahora vamos a calcular el laplaciano

$$\Delta \lambda = \frac{\phi}{v} \Delta \phi + 2 \langle \nabla \phi, \nabla (\langle \partial_r, \nu \rangle) \rangle + \phi \Delta \langle \partial_r, \nu \rangle.$$

Debemos calcular entonces esos tres sumandos. Para el primero notamos, usando (1.7)

$$\Delta \phi = \phi' \Delta \gamma + \phi'' |\nabla \gamma|^2 = \frac{-\phi\phi'\kappa}{v} + \frac{\phi\phi'^2}{v^2} + \frac{\phi''(\partial_\theta \gamma)^2}{v^2}.$$

Antes de calcular el segundo necesitamos

$$\bar{\nabla}_e \partial_r = (\partial_\theta \gamma) \bar{\nabla}_{\partial_r} \partial_r + \bar{\nabla}_{\partial_\theta} \partial_r = \frac{\phi'}{\phi} \partial_\theta = \frac{\phi'}{\phi} (e - \langle \partial_r, e \rangle \partial_r),$$

y entonces queda

$$\begin{aligned}
\langle \nabla \phi, \nabla (\langle \partial_r, \nu \rangle) \rangle &= \langle g^{ee} \bar{\nabla}_e \phi e, g^{ee} \bar{\nabla}_e \langle \partial_r, \nu \rangle e \rangle \\
&= \frac{1}{v^2} \bar{\nabla}_e \phi \bar{\nabla}_e \langle \partial_r, \nu \rangle \\
&= \frac{1}{v^2} \phi' \bar{\nabla}_e \gamma [\langle \bar{\nabla}_e \partial_r, \nu \rangle + \langle \partial_r, \bar{\nabla}_e \nu \rangle] \\
&= \frac{1}{v^2} \phi' (\partial_\theta \gamma) \left[\frac{\phi'}{\phi} \langle \partial_\theta, \nu \rangle + \langle \partial_r, \kappa e \rangle \right] \\
&= \frac{1}{v^2} \phi' (\partial_\theta \gamma) \left[-\frac{\phi' (\partial_\theta \gamma)}{v} + \kappa (\partial_\theta \gamma) \right] \\
&= \frac{\phi' (\partial_\theta \gamma)^2}{v^2} \left(\kappa - \frac{\phi'}{v} \right).
\end{aligned}$$

El tercer término es el más extenso de calcular, para realizarlo vemos que

$$\Delta \langle \partial_r, \nu \rangle = \langle \bar{\nabla}_{\frac{e}{v}} \bar{\nabla}_{\frac{e}{v}} \partial_r, \nu \rangle + 2 \langle \bar{\nabla}_{\frac{e}{v}} \partial_r, \bar{\nabla}_{\frac{e}{v}} \nu \rangle + \langle \partial_r, \bar{\nabla}_{\frac{e}{v}} \bar{\nabla}_{\frac{e}{v}} \nu \rangle.$$

Dividimos entonces el cálculo en tres partes nuevamente, procedemos con cada una

$$\begin{aligned}
\text{(a)} \quad \langle \bar{\nabla}_{\frac{e}{v}} \bar{\nabla}_{\frac{e}{v}} \partial_r, \nu \rangle &= \left\langle \bar{\nabla}_{\frac{e}{v}} \left(\frac{\phi'}{\phi} \left(\frac{e}{v} - \langle \partial_r, \frac{e}{v} \rangle \partial_r \right) \right), \nu \right\rangle \\
&= \left\langle \bar{\nabla}_{\frac{e}{v}} \left(\frac{\phi' e}{\phi v} \right), \nu \right\rangle - \left\langle \bar{\nabla}_{\frac{e}{v}} \left(\frac{\phi'}{\phi} \langle \partial_r, \frac{e}{v} \rangle \partial_r \right), \nu \right\rangle \\
&= \frac{\phi'}{\phi} \left\langle \bar{\nabla}_{\frac{e}{v}} \frac{e}{v}, \nu \right\rangle - \bar{\nabla}_{\frac{e}{v}} \left(\frac{\phi'}{\phi} \right) \langle \partial_r, \frac{e}{v} \rangle \langle \partial_r, \nu \rangle \\
&\quad - \frac{\phi'}{\phi} \bar{\nabla}_{\frac{e}{v}} \langle \partial_r, \frac{e}{v} \rangle \langle \partial_r, \nu \rangle - \frac{\phi'}{\phi} \langle \partial_r, \frac{e}{v} \rangle \langle \bar{\nabla}_{\frac{e}{v}} \partial_r, \nu \rangle \\
&= -\frac{\phi'}{\phi} \kappa - \frac{1}{v} \left(\frac{\phi'}{\phi} \right)' (\partial_{\theta} \gamma) \frac{(\partial_{\theta} \gamma) \phi}{v} \frac{\phi}{v} \\
&\quad - \frac{\phi' \phi}{\phi v} \left[\langle \bar{\nabla}_{\frac{e}{v}} \partial_r, \frac{e}{v} \rangle + \langle \partial_r, \bar{\nabla}_{\frac{e}{v}} \frac{e}{v} \rangle \right] - \frac{\phi'}{\phi} \frac{(\partial_{\theta} \gamma) 1 \phi'}{v} \frac{1 \phi'}{\phi} \langle \partial_{\theta}, \nu \rangle \\
&= -\frac{\phi'}{\phi} \kappa - \frac{(\partial_{\theta} \gamma)^2 \phi}{v^3} \left(\frac{\phi'}{\phi} \right)' - \frac{\phi'}{v} \left[\frac{1 \phi'}{v^2} \langle \partial_{\theta}, e \rangle + \langle \partial_r, -\kappa \nu \rangle \right] \\
&\quad - \frac{\phi'^2 (\partial_{\theta} \gamma)}{\phi^2 v^2} \cdot \frac{-(\partial_{\theta} \gamma) \phi}{v} \\
&= -\frac{\phi'}{\phi} \kappa - \frac{(\partial_{\theta} \gamma)^2 \phi}{v^3} \left(\frac{\phi'' \phi - \phi'^2}{\phi^2} \right) - \frac{\phi \phi'^2}{v^3} + \frac{\phi \phi' \kappa}{v^2} + \frac{(\partial_{\theta} \gamma)^2 \phi'^2}{\phi v^3} \\
&= \phi' \kappa \left(\frac{\phi}{v^2} - \frac{1}{\phi} \right) - \frac{\phi'' (\partial_{\theta} \gamma)^2}{v^3} + 2 \frac{(\partial_{\theta} \gamma)^2 \phi'^2}{\phi v^3} - \frac{\phi \phi'^2}{v^3} \\
&= -\frac{\phi' (\partial_{\theta} \gamma)^2 \kappa}{\phi v^2} - \frac{\phi'' (\partial_{\theta} \gamma)^2}{v^3} + 2 \frac{(\partial_{\theta} \gamma)^2 \phi'^2}{\phi v^3} - \frac{\phi \phi'^2}{v^3}.
\end{aligned}$$

$$\text{(b)} \quad 2 \langle \bar{\nabla}_{\frac{e}{v}} \partial_r, \bar{\nabla}_{\frac{e}{v}} \nu \rangle = \frac{2}{v^2} \left\langle \frac{\phi'}{\phi} \partial_{\theta}, \kappa e \right\rangle = \frac{2 \phi \phi' \kappa}{v^2}.$$

$$\begin{aligned}
\text{(c)} \quad \langle \partial_r, \bar{\nabla}_{\frac{e}{v}} \bar{\nabla}_{\frac{e}{v}} \nu \rangle &= \left\langle \partial_r, \bar{\nabla}_{\frac{e}{v}} \left(\kappa \frac{e}{v} \right) \right\rangle \\
&= \left\langle \partial_r, \left(\bar{\nabla}_{\frac{e}{v}} \kappa \right) \frac{e}{v} \right\rangle + \kappa \left\langle \partial_r, \bar{\nabla}_{\frac{e}{v}} \frac{e}{v} \right\rangle \\
&= \langle \partial_r, \nabla \kappa \rangle - \kappa^2 \langle \partial_r, \nu \rangle \\
&= \langle \partial_r, \nabla \kappa \rangle - \frac{\phi \kappa^2}{v}.
\end{aligned}$$

Juntando lo anterior obtenemos

$$\begin{aligned}
\Delta \lambda &= \frac{\phi}{v} \Delta \phi + 2 \langle \nabla \phi, \nabla (\langle \partial_r, \nu \rangle) \rangle + \phi \Delta \langle \partial_r, \nu \rangle \\
&= \frac{\phi}{v} \left(\frac{-\phi \phi' \kappa}{v} + \frac{\phi \phi'^2}{v^2} + \frac{\phi'' (\partial_{\theta} \gamma)^2}{v^2} \right) + 2 \frac{\phi' (\partial_{\theta} \gamma)^2}{v^2} \left(\kappa - \frac{\phi'}{v} \right) \\
&\quad + \phi \left[-\frac{\phi' (\partial_{\theta} \gamma)^2 \kappa}{\phi v^2} - \frac{\phi'' (\partial_{\theta} \gamma)^2}{v^3} + 2 \frac{(\partial_{\theta} \gamma)^2 \phi'^2}{\phi v^3} - \frac{\phi \phi'^2}{v^3} + \frac{2 \phi \phi' \kappa}{v^2} + \langle \partial_r, \nabla_{\gamma} \kappa \rangle - \frac{\phi \kappa^2}{v} \right] \\
&= \phi' \kappa + \phi \langle \partial_r, \nabla \kappa \rangle - \frac{\phi^2 \kappa^2}{v}.
\end{aligned}$$

Finalmente obtenemos la ecuación de evolución buscada

$$\begin{aligned}\frac{\partial \lambda}{\partial t} &= \frac{f}{\kappa^2} (\phi' \kappa + \phi \langle \partial_r, \nabla \kappa \rangle) - \frac{f' \phi (\partial_\theta \gamma)^2}{v^2 \kappa} \\ &= \frac{f}{\kappa^2} \Delta \lambda + f \lambda + \frac{f'}{\phi \kappa} \lambda^2 - \frac{f' \phi}{\kappa}\end{aligned}$$

Podemos expresar esta ecuación con un término gradiente. Para esto escribimos:

$$\begin{aligned}\nabla \lambda &= g^{ee} \bar{\nabla}_e (\lambda) e = g^{ee} \bar{\nabla}_e (\phi \langle \partial_r, \nu \rangle) e \\ &= g^{ee} \bar{\nabla}_e (\phi) \langle \partial_r, \nu \rangle e + g^{ee} \phi \langle \bar{\nabla}_e \partial_r, \nu \rangle e + g^{ee} \phi \langle \partial_r, \bar{\nabla}_e \nu \rangle e \\ &= g^{ee} \phi' (\partial_\theta \gamma) \frac{\phi}{v} e + g^{ee} \phi \frac{\phi'}{\phi} \langle \partial_\theta, \nu \rangle e + g^{ee} \phi \langle \partial_r, \kappa e \rangle e \\ &= \frac{\phi \phi'}{v} g^{ee} (\partial_\theta \gamma) e - \frac{\phi \phi'}{v} g^{ee} (\partial_\theta \gamma) e + \phi \kappa g^{ee} (\partial_\theta \gamma) e \\ &= \phi \kappa \nabla \gamma.\end{aligned}$$

De esto se desprende que

$$|\nabla \lambda|^2 = \phi^2 \kappa^2 |\nabla \gamma|^2 = \frac{\phi^2 \kappa^2 (\partial_\theta \gamma)^2}{v^2}.$$

Por ende podemos reescribir

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t} = \frac{f}{\kappa^2} \Delta \lambda + f \lambda - \frac{f'}{\phi \kappa^3} |\nabla \lambda|^2 = \frac{f}{\kappa^2} \Delta \lambda + f \lambda - \frac{f' \phi}{\kappa} |\nabla \gamma|^2. \quad (1.9)$$

La última cantidad a la cual calcularemos su ecuación de evolución es $\psi := \frac{1}{\kappa \lambda}$. Partimos viendo el término gradiente.

$$\nabla \psi = -\frac{1}{\kappa^2 \lambda} \nabla \kappa - \frac{1}{\kappa \lambda^2} \nabla \lambda = -\frac{1}{\kappa^2 \lambda} \nabla \kappa - \frac{\phi}{\lambda^2} \nabla \gamma$$

Será útil verlo de esta manera:

$$\langle \nabla \psi, \nabla \lambda \rangle = \left\langle -\frac{1}{\kappa^2 \lambda} \nabla \kappa - \frac{\phi}{\lambda^2} \nabla \gamma, \phi \kappa \nabla \gamma \right\rangle = -\frac{\phi}{\kappa \lambda} \langle \nabla \kappa, \nabla \gamma \rangle - \frac{\phi^2 \kappa}{\lambda^2} |\nabla \gamma|^2$$

Como último preliminar vemos el laplaciano

$$\begin{aligned}\Delta \psi &= \Delta \left(\frac{1}{\kappa} \right) \frac{1}{\lambda} + 2 \left\langle \nabla \left(\frac{1}{\kappa} \right), \nabla \left(\frac{1}{\lambda} \right) \right\rangle + \frac{1}{\kappa} \Delta \left(\frac{1}{\lambda} \right) \\ &= \left[\frac{-1}{\kappa^2} \Delta \kappa + \frac{2}{\kappa^3} |\nabla \kappa|^2 \right] \frac{1}{\lambda} + \frac{2}{\kappa^2 \lambda^2} \langle \nabla \kappa, \nabla \lambda \rangle + \frac{1}{\kappa} \left[\frac{-1}{\lambda^2} \Delta \lambda + \frac{2}{\lambda^3} |\nabla \lambda|^2 \right] \\ &= -\frac{1}{\kappa^2 \lambda} \Delta \kappa - \frac{1}{\kappa \lambda^2} \Delta \lambda + \frac{2}{\kappa^3 \lambda} |\nabla \kappa|^2 + \frac{2}{\kappa \lambda^3} |\nabla \lambda|^2 + \frac{2}{\kappa^2 \lambda^2} \langle \nabla \kappa, \nabla \lambda \rangle \\ &= -\frac{1}{\kappa^2 \lambda} \Delta \kappa - \frac{1}{\kappa \lambda^2} \Delta \lambda + \frac{2}{\kappa^3 \lambda} |\nabla \kappa|^2 + \frac{2 \phi^2 \kappa}{\lambda^3} |\nabla \gamma|^2 + \frac{2 \phi}{\kappa \lambda^2} \langle \nabla \kappa, \nabla \gamma \rangle \\ &= -\frac{1}{\kappa^2 \lambda} \Delta \kappa - \frac{1}{\kappa \lambda^2} \Delta \lambda + \frac{2}{\kappa^3 \lambda} |\nabla \kappa|^2 - \frac{2}{\lambda} \langle \nabla \psi, \nabla \lambda \rangle.\end{aligned}$$

Finalmente podemos calcular la ecuación de evolución de ψ

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \psi}{\partial t} &= -\frac{1}{\kappa^2 \lambda} \frac{\partial \kappa}{\partial t} - \frac{1}{\kappa \lambda^2} \frac{\partial \lambda}{\partial t} \\
&= -\frac{1}{\kappa^2 \lambda} \left[\frac{f}{\kappa^2} \Delta \kappa - \frac{2f}{\kappa^3} |\nabla \kappa|^2 + \frac{2f'}{\kappa^2} \langle \nabla \gamma, \nabla \kappa \rangle - \frac{\Delta f}{\kappa} - f \kappa - \frac{f}{\kappa} K \right] \\
&\quad - \frac{1}{\kappa \lambda^2} \left[\frac{f}{\kappa^2} \Delta \lambda + f \lambda - \frac{f' \phi}{\kappa} |\nabla \gamma|^2 \right] \\
&= \frac{f}{\kappa^2} \left[-\frac{1}{\kappa^2 \lambda} \Delta \kappa - \frac{1}{\kappa \lambda^2} \Delta \lambda + \frac{2}{\kappa^3 \lambda} |\nabla \kappa|^2 \right] - \frac{2f'}{\kappa^4 \lambda} \langle \nabla \gamma, \nabla \kappa \rangle \\
&\quad + \frac{\Delta f}{\kappa^3 \lambda} + \frac{f}{\kappa \lambda} + \frac{f}{\kappa^3 \lambda} K - \frac{f}{\kappa \lambda} + \frac{f' \phi}{\kappa^2 \lambda^2} |\nabla \gamma|^2 \\
&= \frac{f}{\kappa^2} \left(\Delta \psi + \frac{2}{\lambda} \langle \nabla \psi, \nabla \lambda \rangle \right) + \frac{2f'}{\phi \kappa^3} \langle \nabla \psi, \nabla \lambda \rangle + \frac{3f' \phi}{\kappa^2 \lambda^2} |\nabla \gamma|^2 + \frac{\Delta f}{\kappa^3 \lambda} + \frac{f}{\kappa^3 \lambda} K \\
&= f \lambda^2 \psi^2 \Delta \psi + 2f \lambda \psi^2 \langle \nabla \psi, \nabla \lambda \rangle + \frac{2f' \lambda^3 \psi^3}{\phi} \langle \nabla \psi, \nabla \lambda \rangle + 3f' \phi \psi^2 |\nabla \gamma|^2 + \lambda^2 \psi^3 \Delta f + f \lambda^2 \psi^3 K \\
&= f \lambda^2 \psi^2 \Delta \psi + 2f \lambda \psi^2 \langle \nabla \psi, \nabla \lambda \rangle + \frac{2f' \lambda^3 \psi^3}{\phi} \langle \nabla \psi, \nabla \lambda \rangle \\
&\quad + 3f' \phi \psi^2 \left(1 - \frac{\lambda^2}{\phi^2} \right) + \lambda^2 \psi^3 (f' \Delta \gamma + f'' |\nabla \gamma|^2) - f \lambda^2 \psi^3 \frac{\phi''}{\phi} \\
&= f \lambda^2 \psi^2 \Delta \psi + 2f \lambda \psi^2 \langle \nabla \psi, \nabla \lambda \rangle + \frac{2f' \lambda^3 \psi^3}{\phi} \langle \nabla \psi, \nabla \lambda \rangle \\
&\quad + 3f' \phi \psi^2 - \frac{3f' \lambda^2 \psi^2}{\phi} + f' \lambda^2 \psi^3 \left(\frac{-\lambda \kappa}{\phi} + \frac{\lambda^2 \phi'}{\phi^3} \right) + f'' \lambda^2 \psi^3 |\nabla \gamma|^2 - f \lambda^2 \psi^3 \frac{\phi''}{\phi} \\
&= f \lambda^2 \psi^2 \Delta \psi + 2f \lambda \psi^2 \langle \nabla \psi, \nabla \lambda \rangle + \frac{2f' \lambda^3 \psi^3}{\phi} \langle \nabla \psi, \nabla \lambda \rangle \\
&\quad + f' \phi \psi^2 \left(3 - \frac{4\phi^2}{v^2} \right) + \frac{\phi^3 \psi^3}{v^4} (-f \phi^2 \phi'' + (f'' \phi - f \phi'') (\partial_\theta \gamma)^2 + f' \phi^2 \phi').
\end{aligned}$$

Por claridad la escribimos una vez más

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \psi}{\partial t} &= f \lambda^2 \psi^2 \Delta \psi + 2f \lambda \psi^2 \langle \nabla \psi, \nabla \lambda \rangle + \frac{2f' \lambda^3 \psi^3}{\phi} \langle \nabla \psi, \nabla \lambda \rangle + f' \phi \psi^2 \left(3 - \frac{4\phi^2}{v^2} \right) \\
&\quad + \frac{\phi^3 \psi^3}{v^4} (-f \phi^2 \phi'' + (f'' \phi - f \phi'') (\partial_\theta \gamma)^2 + f' \phi^2 \phi').
\end{aligned} \tag{1.10}$$

1.5. Estimaciones a priori para la solución

Siguiendo métodos clásicos de ecuaciones diferenciales parciales parabólicas, a lo largo de esta sección asumiremos que existe una solución en tiempo corto a Ecuación (1.3) (o equivalentemente a Ecuación (1.2)) y demostraremos que esto implica ciertas cotas sobre la solución γ y sus derivadas. Esto nos permitirá en la siguiente sección demostrar que efectivamente tenemos existencia en tiempo corto de nuestro flujo.

Para demostrar las estimaciones a priori nuestra principal herramienta será un teorema de comparación para funciones sobre variedades que es estándar en la literatura, la versión que usaremos acá es una ligera modificación del Teorema 2.1.1 de [34]. Antes de demostrarlo necesitaremos el siguiente lema, conocido popularmente como truco de Hamilton, seguiremos la demostración del Lema 2.1.3 de [34], esta idea proviene originalmente de [22].

Lema 1.5.1 (Truco de Hamilton). *Sea M una variedad compacta y $u : M \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^1 . Entonces $u_{\text{máx}}(t) := \max_{p \in M} u(p, t)$ es una función localmente Lipschitz en $(0, T)$ y en cada t donde es diferenciable se tiene*

$$\frac{du_{\text{máx}}(t)}{dt} = \frac{\partial u(p, t)}{\partial t},$$

donde $p \in M$ es un punto donde $u(\cdot, t)$ alcanza al máximo. Se tiene un resultado análogo cambiando máx por mín.

Demostración. Sea $t \in (0, T)$ y sea $\delta > 0$ tal que $[t - \delta, t + \delta] \subset (0, T)$. Tenemos que en $M \times (t - \delta, t + \delta)$, u es Lipschitz con constante de Lipschitz C . Para $0 < \varepsilon < \delta$ tenemos que para algún $q \in M$

$$u_{\text{máx}}(t + \varepsilon) = u(q, t + \varepsilon) \leq u(q, t) + \varepsilon C \leq u_{\text{máx}}(t) + \varepsilon C,$$

y por ende

$$u_{\text{máx}}(t + \varepsilon) - u_{\text{máx}}(t) \leq \varepsilon C.$$

De manera análoga se tiene para algún $p \in M$

$$u_{\text{máx}}(t) = u(p, t) \leq u(p, t + \varepsilon) + \varepsilon C \leq u_{\text{máx}}(t + \varepsilon) + \varepsilon C,$$

ordenando obtenemos

$$u_{\text{máx}}(t) - u_{\text{máx}}(t + \varepsilon) \leq \varepsilon C.$$

Esto implica que para ε tal que $0 < \varepsilon < \delta$ se tiene

$$|u_{\text{máx}}(t + \varepsilon) - u_{\text{máx}}(t)| \leq C\varepsilon.$$

Podemos repetir el mismo argumento con $-\delta < \varepsilon < 0$ y así concluir que $u_{\text{máx}}$ es localmente Lipschitz en $(0, T)$, y por ende diferenciable en casi todo t .

Sea t uno de esos tiempos donde $u_{\text{máx}}$ es diferenciable y sea $p \in M$ un punto donde se alcance el máximo en el tiempo t (siempre ocurre ya que M es compacto). Por el teorema del valor medio tenemos que, para cada $0 < \varepsilon < \delta$, existe $0 < \zeta < \varepsilon$ tal que

$$u_{\text{máx}}(t + \varepsilon) \geq u(p, t + \varepsilon) = u(p, t) + \varepsilon \frac{\partial u(p, t + \zeta)}{\partial t},$$

reordenando y recordando que $u(p, t) = u_{\text{máx}}(t)$ obtenemos

$$\frac{u_{\text{máx}}(t + \varepsilon) - u_{\text{máx}}(t)}{\varepsilon} \geq \frac{\partial u(p, t + \zeta)}{\partial t}$$

Haciendo $\varepsilon \rightarrow 0$ obtenemos $u'_{\text{máx}}(t) \geq \frac{\partial u(p, t)}{\partial t}$. De manera análoga con $-\delta < \varepsilon < 0$ obtenemos

$$\frac{u_{\text{máx}}(t + \varepsilon) - u_{\text{máx}}(t)}{\varepsilon} \leq \frac{\partial u(p, t + \zeta)}{\partial t}.$$

Haciendo $\varepsilon \rightarrow 0$ obtenemos $u'_{\text{máx}}(t) \leq \frac{\partial u(p, t)}{\partial t}$ lo cual junto a lo anterior nos deja concluir lo pedido. \square

Ahora estamos en condiciones de enunciar y demostrar el principio del máximo.

Teorema 1.5.2 (Principio del máximo). *Sea (M^m, g, ∇) una variedad Riemanniana cerrada con su conexión de Levi-Civita asociada. Sea $u \in C^{2,1}(M \times [0, T])$ tal que*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F(x, t, u, \nabla u, \Delta u),$$

con $F(x, t, w, y, z)$ definida sobre un dominio tal que es continua, localmente Lipschitz en w uniformemente en t , y con derivada parcial respecto a z continua y positiva. Entonces si $u_{\pm} : [0, T'] \rightarrow \mathbb{R}$ (con $T' \leq T$) son soluciones de las EDOs

$$\begin{cases} u'_+(t) = \text{máx}_{x \in M} F(x, t, u_+, 0, 0); \\ u_+(0) = u_{\text{máx}}(0). \end{cases} \quad \begin{cases} u'_-(t) = \text{mín}_{x \in M} F(x, t, u_-, 0, 0); \\ u_-(0) = u_{\text{mín}}(0). \end{cases}$$

tenemos que $u_-(t) \leq u(x, t) \leq u_+(t)$ para $x \in M$, $t \in [0, T']$.

Demostración. Demostraremos solo el caso $u \leq u_+$, el otro es análogo. Definimos $F_+(t, w) = \text{máx}_{x \in M} F(x, t, w, 0, 0)$, sabemos que tomar máximo mantiene la propiedad de ser Lipschitz, por ende F_+ es Lipschitz en w uniformemente en t .

Por el lema anterior sabemos que $u_{\text{máx}}$ es localmente Lipschitz y por ende diferenciable en casi todo punto. Sea t un punto donde es diferenciable y sea $p \in M$ tal que $u_{\text{máx}}(t) = u(p, t)$, i.e. un punto donde alcanzamos el máximo. Tenemos al igual que el caso euclideo que $\nabla u(p, t) = 0$ y que $\Delta u(p, t) \leq 0$, ver [1] Lema 6.1. Recordando que la derivada respecto a la última entrada de F es positiva tenemos

$$\begin{aligned} u'_{\text{máx}}(t) &= \frac{\partial u(p, t)}{\partial t} = F(p, t, u_{\text{máx}}(t), 0, \Delta u(p, t)) \leq F(p, t, u_{\text{máx}}(t), 0, 0) \\ &\leq \text{máx}_{x \in M} F(x, t, u_{\text{máx}}(t), 0, 0) = F_+(t, u_{\text{máx}}). \end{aligned} \quad (1.11)$$

Sea ahora $u_+ : [0, T'] \rightarrow \mathbb{R}$ definida como en las hipótesis. Definimos para $\varepsilon > 0$ la función $u'_{+\varepsilon} : [0, T'] \rightarrow \mathbb{R}$ correspondiente a la solución maximal a la EDO

$$\begin{cases} u'_{+\varepsilon}(t) = F_+(t, u_{+\varepsilon}); \\ u_{+\varepsilon}(0) = u_{\text{máx}}(0) + \varepsilon. \end{cases}$$

Restando $u_{+\varepsilon}$ con u_+ y usando la desigualdad de Grönwall llegamos a que $|u_{+\varepsilon}(t) - u_+(t)| \leq \varepsilon e^{Lt}$ con L una constante de Lipschitz en w para $F_+(t, w)$, esto implica que $u_{+\varepsilon} \rightarrow u_+$ uniformemente en intervalos compactos contenidos en el intervalo de definición cuando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Supongamos, buscando una contradicción, que existe un tiempo positivo para el cual $u_{\text{máx}} > u_{+\varepsilon}$ y definamos \bar{t} como el ínfimo de estos tiempos (es positivo ya que $u_{\text{máx}}(0) = u_{+\varepsilon}(0) - \varepsilon$). Luego, por continuidad, tenemos que $u_{\text{máx}}(\bar{t}) = u_{+\varepsilon}(\bar{t})$. Escribiendo $H_\varepsilon = u_{+\varepsilon} - u_{\text{máx}}$ tenemos que para cada tiempo de diferenciabilidad de $u_{\text{máx}}$ en $[0, \bar{t})$

$$H'_\varepsilon(t) \geq F_+(t, u_{+\varepsilon}) - F_+(t, u_{\text{máx}}) \geq -L(u_{+\varepsilon}(t) - u_{\text{máx}}(t)) = -LH_\varepsilon(t).$$

Se sigue que $H'_\varepsilon(t) + LH_\varepsilon(t) \geq 0$, resolviendo con factor integrante obtenemos $H_\varepsilon(t) \geq H_\varepsilon(0)e^{-Lt} = \varepsilon e^{-Lt}$. En particular $H_\varepsilon(\bar{t}) \geq \varepsilon e^{-L\bar{t}} > 0$, lo cual es una contradicción. Concluimos que $u_{\text{máx}} \leq u_{+\varepsilon}$, haciendo $\varepsilon \rightarrow 0$ concluimos lo pedido. \square

Observación 1.5.3. Notamos en la demostración anterior que en Ecuación (1.11) podemos detenemos en la cota $u'_{\text{máx}}(t) \leq F(p, t, u_{\text{máx}}(t), 0, 0)$ con $p \in M$ el punto tal que $u_{\text{máx}}(t) = u(p, t)$ y así obtener una conclusión ligeramente distinta; se cumple la cota superior $u(x, t) \leq u_+(t)$ para $x \in M$, $t \in [0, T')$ con u_+ que resuelve

$$\begin{cases} u'_+(t) = F(p(t), t, u_+, 0, 0); \\ u_+(0) = u_{\text{máx}}(0). \end{cases}$$

con $p(t)$ tal que $u_{\text{máx}}(t) = u(p(t), t)$.

Comenzaremos estimando el crecimiento de γ , la solución a (1.3). Podemos escribir esta ecuación como

$$\partial_t \gamma = F(\gamma, \partial_\theta \gamma, \partial_\theta^2 \gamma) := \frac{(\phi(\gamma)^2 + (\partial_\theta \gamma)^2)^2 f(\gamma)}{\phi(\gamma)(2\phi'(\gamma)(\partial_\theta \gamma)^2 + \phi^2(\gamma)\phi'(\gamma) - \phi(\gamma)(\partial_\theta^2 \gamma))},$$

Notamos que $F(\gamma, 0, 0) = \frac{\phi(\gamma)f(\gamma)}{\phi'(\gamma)}$, por ende Teorema 1.5.2 implica que

$$\gamma_-(t) \leq \gamma(\theta, t) \leq \gamma_+(t)$$

en todo $S^1 \times [0, T)$, donde γ_- y γ_+ resuelven las EDOs $\gamma'_\pm = \frac{\phi(\gamma_\pm)f(\gamma_\pm)}{\phi'(\gamma_\pm)}$ con condiciones iniciales

$$\gamma_-(0) = \min_{\theta \in S^1} \gamma(\theta, 0), \quad \gamma_+(0) = \max_{\theta \in S^1} \gamma(\theta, 0).$$

Para analizar estas cotas necesitamos el siguiente lema

Lema 1.5.4. *Si se tiene (H1) y (H2), entonces γ_- definida anteriormente cumple:*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \gamma_-(t) = \infty.$$

Demostración. Tenemos que para todo t se tiene que $\gamma'_-(t) > 0$ por lo cual es siempre creciente. Asumamos buscando una contradicción que γ_- es acotada por arriba, esto implica que es convergente, digamos a L . Usando el teorema del valor medio tenemos que para $\theta_n \in (0, 1)$

$$\gamma_-(n+1) - \gamma_-(n) = \gamma'_-(n + \theta_n) = \frac{\phi(\gamma_-(n + \theta_n))f(\gamma_-(n + \theta_n))}{\phi'(\gamma_-(n + \theta_n))}.$$

Haciendo $n \rightarrow \infty$ queda

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} (\gamma_-(n+1) - \gamma_-(n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\phi(\gamma_-(n + \theta_n))f(\gamma_-(n + \theta_n))}{\phi'(\gamma_-(n + \theta_n))} = \frac{\phi(L)f(L)}{\phi'(L)} > 0.$$

Se sigue que γ_- no es acotada, como además es creciente concluimos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \gamma_-(t) = \infty.$$

\square

Teorema 1.5.5. *Si se cumplen (H1)-(H3), entonces γ_+ y γ_- definidas anteriormente cumplen:*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\gamma_+(t) - \gamma_-(t)) = 0.$$

Esto implica que si la solución existe para todo tiempo, entonces converge a una circunferencia, al menos en C^0 . En otras palabras tenemos que si la solución γ existe para todo tiempo converge puntualmente a otra solución dada por un círculo que se expando con radio original $\gamma_+(0)$ o $\gamma_-(0)$.

Demostración. Como γ_+ y γ_- son soluciones de la misma EDO autónoma con distintas condiciones iniciales sabemos que difieren por una traslación en tiempo, más precisamente:

$$\gamma_+(t) = \gamma_-(t + t_0),$$

donde t_0 es tal que $\gamma_-(t_0) = \gamma_+(0)$. Tenemos entonces:

$$\gamma_+(t) - \gamma_-(t) = \gamma_-(t + t_0) - \gamma_-(t) = \int_t^{t+t_0} \gamma'_-(s) ds = \int_t^{t+t_0} \frac{\phi(\gamma_-(s))f(\gamma_-(s))}{\phi'(\gamma_-(s))} ds.$$

Como $\frac{\phi(\gamma_-(s))f(\gamma_-(s))}{\phi'(\gamma_-(s))}$ es continua entonces por la versión integral del teorema del valor medio existe t^* en $[t, t + t_0]$ tal que

$$\int_t^{t+t_0} \frac{\phi(\gamma_-(s))f(\gamma_-(s))}{\phi'(\gamma_-(s))} ds = t_0 \frac{\phi(\gamma_-(t^*))f(\gamma_-(t^*))}{\phi'(\gamma_-(t^*))}$$

Tomamos límite, notando que $t^* \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow \infty$ y usando (H3) obtenemos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\gamma_+(t) - \gamma_-(t)) = \lim_{t \rightarrow \infty} t_0 \frac{\phi(\gamma_-(t^*))f(\gamma_-(t^*))}{\phi'(\gamma_-(t^*))} = 0.$$

□

Procedemos a acotar $\partial_\theta \gamma$, para esto nos apoyaremos de la función soporte, definida en Apartado 1.4 como $\lambda := \phi \langle \partial_r, \nu \rangle = \phi^2/v$, el siguiente teorema nos indica las cotas sobre λ .

Teorema 1.5.6. *Sea λ la función soporte de nuestra solución al flujo, si se cumplen (H1)-(H3) entonces tenemos las siguientes cotas*

$$\min_{\theta \in S^1} \lambda(\theta, 0) \cdot e^{\int_0^t f(\gamma_+(s)) ds} \leq \lambda(\theta, t) \leq \max_{\theta \in S^1} \lambda(\theta, 0) \cdot e^{\int_0^t f(\gamma_-(s)) ds}$$

Demostración. Para comenzar recordamos la ecuación de evolución de λ obtenida en (1.9).

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t} = \frac{f}{\kappa^2} \Delta \lambda - \frac{f'}{\phi \kappa^3} |\nabla \lambda|^2 + f \lambda.$$

El Teorema 1.5.2 implica que sobre todo $S^1 \times [0, T)$ tenemos $\lambda_-(t) \leq \lambda(\theta, t) \leq \lambda_+(t)$, donde λ_- y λ_+ cumplen

$$\begin{cases} \lambda'_- = f(\gamma_+(t))\lambda_-, \\ \lambda_-(0) = \min_{\theta \in S^1} \lambda(\theta, 0); \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda'_+ = f(\gamma_-(t))\lambda_+, \\ \lambda_+(0) = \max_{\theta \in S^1} \lambda(\theta, 0). \end{cases}$$

Recordamos que f es decreciente, esto junto al hecho de que $\gamma_-(t) \leq \gamma(\theta, t) \leq \gamma_+(t)$ implica que $\min_{\theta \in S^1} f(\gamma(\theta, t)) = f(\gamma_+(t))$ y $\max_{\theta \in S^1} f(\gamma(\theta, t)) = f(\gamma_-(t))$, lo cual justifica las definiciones de λ_- y λ_+ . Resolviendo estas EDOs lineales concluimos lo pedido. \square

Corolario 1.5.6.1. *Sea γ solución de (1.3), se tiene que*

$$|\partial_\theta \gamma| \leq C_1 \phi^2(\gamma),$$

con C_1 dependiente solo de γ_0 .

Demostración. Notamos que $\lambda_-(t)$, la cota inferior para λ , en la demostración del teorema anterior es creciente, en particular se tiene que

$$\min_{\theta \in S^1} \lambda(\theta, 0) = \lambda_-(0) \leq \lambda(\theta, t)$$

Recordando que $\lambda = \frac{\phi^2}{v}$ y notando que $v := \sqrt{\phi^2 + (\partial_\theta \gamma)^2} \geq |\partial_\theta \gamma|$ obtenemos la cota pedida con $C_1 := (\min_{\theta \in S^1} \lambda(\theta, 0))^{-1}$ \square

La siguiente estimación a priori será una cota de la segunda derivada espacial. Para esto acotaremos por debajo la curvatura. Nos apoyaremos con la siguiente función, definida en la sección anterior

$$\psi := \frac{1}{\lambda \kappa}$$

Teorema 1.5.7. *Sea $\psi = (\kappa \lambda)^{-1}$, si se cumple (H1)-(H4) entonces tenemos la cota*

$$\psi(\theta, t) \leq 4 \frac{1 + C_1^2 \phi^2(\gamma_+(t))}{C_2},$$

con C_1 y C_2 dependiente solo de γ_0 .

Demostración. Partimos recordando la ecuación de evolución de ψ obtenida en (1.10)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial t} &= f \lambda^2 \psi^2 \Delta \psi + 2f \lambda \psi^2 \langle \nabla \psi, \nabla \lambda \rangle + \frac{2f' \lambda^3 \psi^3}{\phi} \langle \nabla \psi, \nabla \lambda \rangle \\ &\quad + f' \phi \psi^2 \left(3 - \frac{4\phi^2}{v^2} \right) + \frac{\phi^3 \psi^3}{v^4} (-f \phi^2 \phi'' + (f'' \phi - f \phi'') (\partial_\theta \gamma)^2 + f' \phi^2 \phi'). \end{aligned}$$

Aplicaremos nuevamente el principio del máximo Teorema 1.5.2, esta vez junto a Observación 1.5.3. Esto implica que sobre $S^1 \times [0, T)$ tenemos la desigualdad $\psi(\theta, t) \leq \psi_+(t)$ con ψ_+ tal que cumple

$$\begin{cases} \psi'_+ = f' \phi \left(3 - \frac{4\phi^2}{v^2} \right) \psi_+^2 + \frac{\phi^3}{v^4} (-f \phi^2 \phi'' + (f'' \phi - f \phi'') (\partial_\theta \gamma)^2 + f' \phi^2 \phi') \psi_+^3 \\ \psi_+(0) = \max_{\theta \in S^1} \psi(\theta, 0) \end{cases}$$

Donde las funciones que no son ψ_+ están evaluadas en $(\hat{\theta}(t), t)$, con $\hat{\theta}(t)$ tal que $\max_{\theta \in S^1} \psi(\theta, t) = \psi(\hat{\theta}, t)$, i.e. donde ψ alcanza su máximo.

Eliminar todos los términos que sabemos son negativos gracias a las hipótesis nos motiva a definir w tal que cumpla

$$\begin{cases} w' = \frac{-4f'\phi^3}{v^2}w^2 + \frac{f'\phi^5\phi'}{v^4}w^3; \\ w(0) = \max_{\theta \in S^1} \psi(\theta, 0), \end{cases}$$

Nuevamente con las funciones que no son w evaluadas en $(\hat{\theta}(t), t)$, con $\hat{\theta}(t)$ tal que $\psi_+(t) = \psi(\hat{\theta}, t)$. Podemos notar que w y ψ_+ tienen la misma condición inicial y se tiene que $w'(t) \geq \psi'_+(t)$, por ende $w(t) \geq \psi_+(t) \geq \psi(\theta, t)$ para todo $\theta \in S^1$ y $t \in [0, T]$.

Para completar la demostración del teorema basta entonces acotar $w(t)$. Para esto definimos dos constantes: C_1 , al igual que en Corolario 1.5.6.1 (es decir $|\partial_\theta \gamma| \leq C_1 \phi^2$) y $C_2 = \phi'(\gamma_-(0))$. Notamos que como ϕ'' es no negativo, tenemos que ϕ' es creciente y por ende C_2 corresponde a una cota inferior de $\phi'(\gamma)$ durante toda la evolución. Esto nos permite definir la función

$$H(t) := 4 \frac{1 + C_1^2 \phi^2(\gamma_+(t))}{C_2}.$$

Vamos entonces a demostrar $w(t) \leq H(t)$, procedamos por contradicción. Supongamos que existen $t^* \in [0, T]$ y $\varepsilon > 0$ tales que $w(t^*) > H(t^*) + \varepsilon$. Definimos $t_0 := \sup\{s : s < t^*, w(s) \leq H(s)\}$, por continuidad tenemos que $t_0 < t^*$ y que $w(t_0) \leq H(t_0)$. Notando que H es creciente tenemos las siguientes desigualdades.

$$w(t_0) \leq H(t_0) < H(t^*) < H(t^*) + \varepsilon < w(t^*)$$

Por otro lado recordemos que

$$w'(s) = \frac{f'\phi^3 w^2}{v^2} \left(-4 + \frac{\phi^2 \phi'}{v^2} w \right),$$

con las funciones que no son w evaluadas en $(\hat{\theta}(t), t)$ con $\hat{\theta}(t)$ tal que $\psi_+(t) = \psi(\hat{\theta}, t)$. Vamos a analizar la parte dentro del paréntesis de esa expresión, notamos que para $s \in [t_0, t^*]$ se cumple lo siguiente

$$w(s) \geq H(s) \geq 4 \frac{1 + C_1^2 \phi^2(\gamma(\hat{\theta}(s), s))}{C_2},$$

por ende podemos acotar la expresión dentro del paréntesis que aparece en $w'(s)$

$$\begin{aligned} \left(-4 + \frac{\phi^2(\gamma(\hat{\theta}(s), s))\phi'(\gamma(\hat{\theta}(s), s))}{\phi^2(\gamma(\hat{\theta}(s), s)) + (\partial_\theta \gamma)^2(\hat{\theta}(s), s)} w(s) \right) &\geq \left(-4 + \frac{C_2 \phi^2(\gamma(\hat{\theta}(s), s))}{\phi^2(\gamma(\hat{\theta}(s), s)) + C_1^2 \phi^4(\gamma(\hat{\theta}(s), s))} w(s) \right) \\ &= \left(-4 + \frac{C_2}{1 + C_1^2 \phi^2(\gamma(\hat{\theta}(s), s))} w(s) \right) \geq 0. \end{aligned}$$

Notando que la otra parte de la expresión de $w'(s)$, $\frac{f'\phi^3 w^2}{v^2}$, es negativa podemos concluir que para $s \in [t_0, t^*]$ se tiene que $w'(s) \leq 0$. De esta última desigualdad se desprende que $w(t^*) \leq w(t_0)$ lo cual es una contradicción. Demostramos entonces la cota pedida para w , y por ende para ψ . \square

Corolario 1.5.7.1. Sea γ una solución de (1.3) y κ su curvatura, tenemos la siguiente desigualdad

$$0 < \kappa_-(t) := \frac{C_4}{e^{C_3 t}(1 + C_1^2 \phi^2(\gamma_+(t)))} \leq \kappa(\theta, t).$$

Con C_1 , C_3 y C_4 dependientes solo de γ_0 .

Demostración. A partir de Teorema 1.5.6 tenemos la siguiente desigualdad

$$\lambda(\theta, t) \leq \max_{\theta \in S^1} \lambda(\theta, 0) \cdot e^{\int_0^t f(\gamma_-(s)) ds}.$$

Recordando que f es decreciente y γ_- es creciente podemos definir $C_3 = f(\gamma_-(0))$, lo cual nos da la siguiente cota

$$\lambda(\theta, t) \leq \max_{\theta \in S^1} \lambda(\theta, 0) \cdot e^{C_3 t}.$$

Dado que $\psi := \frac{1}{\lambda\kappa}$, podemos despejar κ en la cota sobre ψ de Teorema 1.5.7 para obtener lo buscado, con $C_4 := \frac{C_2}{4 \max_{\theta \in S^1} \lambda(\theta, 0)}$. \square

Ahora veremos una cota por arriba de la curvatura, en este caso trabajaremos directamente con la ecuación de evolución de κ

Teorema 1.5.8. Sea κ la curvatura de una solución a 1.3, si se cumplen (H1)-(H4) entonces tenemos que $\kappa(\theta, t)$ está acotada por arriba por una función que depende solo de t y de la curva inicial, la cual además es finita para todo $t \in [0, \infty)$ (i.e. no explota en tiempo finito).

Demostración. Recordamos la ecuación de evolución de κ obtenida en (1.8), cambiando $\frac{\phi^2}{v}$ por λ queda

$$\frac{\partial \kappa}{\partial t} = \frac{f}{\kappa^2} \Delta \kappa - \frac{2f}{\kappa^3} |\nabla \kappa|^2 + \frac{2f'}{\kappa^2} \langle \nabla \kappa, \nabla \gamma \rangle + \frac{f'\lambda}{\phi} - \frac{f'\phi\lambda^2}{\phi^3\kappa} - \frac{f''|\nabla \gamma|^2}{\kappa} - f\kappa - \frac{f}{\kappa} K.$$

Usando el Teorema 1.5.2 unido con Observación 1.5.3 y Corolario 1.5.7.1 podemos concluir que sobre todo $S^1 \times [0, T)$ tenemos $\kappa(\theta, t) \leq \kappa_+(t)$, donde κ_+ es solución a la siguiente EDO

$$\begin{cases} \kappa'_+ = \frac{f'\lambda}{\phi} - \frac{f'\phi\lambda^2}{\phi^3\kappa_+} - \frac{f''|\nabla \gamma|^2}{\kappa_+} - f\kappa_+ - \frac{f}{\kappa_+} K; \\ \kappa_+(0) = \max_{\theta \in S^1} \kappa(\theta, 0). \end{cases}$$

Donde las funciones que no son κ_+ están evaluadas en $(\hat{\theta}(t), t)$ con $\hat{\theta}(t)$ tal que $\kappa(\hat{\theta}(t), t) = \max_{\theta \in S^1} \kappa(\theta, t)$.

Notamos inspeccionando esta EDO que κ'_+ está acotada por una función de t que no explota en tiempo finito y esto es suficiente para concluir nuestra demostración. De todas formas procederemos con los detalles de este argumento por completitud.

Usando ideas similares a las de la demostración de Teorema 1.5.7 podemos descartar todos los términos que sabemos son negativos, estos son $f'\lambda/\phi$ y $-f\kappa_+$. Procederemos a acotar los términos restantes. Notamos que por hipótesis f' es negativa y acotada por abajo, llamemos entonces $C_5 := \sup_{x \in \mathbb{R}^+} -f'(x)$. Además, nuevamente por hipótesis, tenemos que f'' puede ser negativa,

pero acotada por abajo, esto nos motiva a definir $C_6 := \max\{0, \sup_{x \in \mathbb{R}^+} -f''(x)\}$, es decir C_6 es una cota superior no negativa de $-f''$. Recordamos también que tenemos $\kappa(\theta, t) \geq \kappa_-(t)$, $\lambda(\theta, t) \leq \max_{\theta \in S^1} \lambda(\theta, 0) \cdot e^{C_3 t}$ y $|\nabla \gamma|^2 = (\partial_\theta \gamma)^2 / v^2 \leq 1$. Uniendo todo definimos w tal que resuelva la siguiente EDO

$$\begin{cases} w' = \left(\max_{\theta \in S^1} \lambda(\theta, 0) \right)^2 \frac{C_5 e^{2C_3 t} \phi'(\gamma_+(t))}{\phi^3(\gamma_-(0)) \kappa_-(t)} + \frac{C_6}{\kappa_-(t)} + \frac{f(\gamma_-(0)) \phi''(\gamma_+(t))}{\kappa_-(t) \phi(\gamma_-(0))}; \\ w(0) = \max_{\theta \in S^1} \kappa(\theta, 0). \end{cases}$$

Debido a como lo definimos tenemos que $\kappa'_+ \leq w'$ y que $\kappa_+(0) = w(0)$, por ende $\kappa(\theta, t) \leq \kappa_+(t) \leq w(t)$ para todo $\theta \in S^1$ y $t \in [0, T)$. Como tenemos que $w'(t)$ no explota en tiempo finito, depende solo de t , nuestra curva inicial y nuestras funciones f, ϕ , podemos concluir lo mismo para $w(t)$ (por ejemplo acotando $w(t) \leq w(0) + tw'(t)$). Concluimos entonces lo pedido. \square

Observación 1.5.9. Recordando la fórmula para la curvatura

$$\kappa = \frac{2\phi' \cdot (\partial_\theta \gamma)^2 + \phi' \phi^2 - \phi \cdot (\partial_\theta^2 \gamma)}{(\phi^2 + (\partial_\theta \gamma)^2)^{3/2}},$$

tenemos que, al despejar, las cotas por arriba y por abajo de la curvatura nos dan cotas (por abajo y por arriba respectivamente) de $(\partial_\theta^2 \gamma)$.

La última estimación a priori que realizaremos corresponde a acotar $\partial_t \gamma$, tenemos el siguiente teorema.

Teorema 1.5.10. *Sea γ una solución de (1.3), si se cumplen las hipótesis (H1)-(H4) entonces tenemos las siguientes desigualdades*

$$0 < \partial_t \gamma \leq 4f(\gamma_-(0))\phi(\gamma_+(t)) \frac{1 + C_1^2 \phi^2(\gamma_+(t))}{C_2}.$$

Demostración. Reescribiendo (1.3) tenemos que $\partial_t \gamma = f\psi\phi$, aplicando las cotas ya demostradas en esta sección concluimos lo pedido. \square

Hemos demostrado entonces a lo largo de esta sección cotas sobre $\gamma, \partial_\theta \gamma, \partial_\theta^2 \gamma$ y $\partial_t \gamma$ las cuales dependen sólo dependen de γ_0 y de T de manera uniforme. Tal como indica [15] Sección 2.6, podemos usar las estimaciones de Krylov-Safonov de [26] Sección 5.5 para obtener que para algún $\alpha \in (0, 1)$, $\gamma \in C^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(S^1 \times [0, T))$ con norma uniforme en T . Esta cota más el hecho que la curvatura está acotada sobre 0 de manera uniforme en T serán cruciales para demostrar la existencia en tiempo corto de las soluciones.

1.6. Existencia en tiempo corto de las soluciones

El objetivo de esta sección es demostrar el siguiente teorema basado en las ideas de [15], las cuales también aparecen en [35]. Nos basaremos en la teoría de EDPs lineales parabólicas y los espacios usuales donde se desarrollan, para más detalle ver el apéndice A.

Teorema 1.6.1. *Para cualquier $\gamma_0 : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^+$ suave con curvatura positiva (en adelante por γ_0 con curvatura positiva entenderemos que la curva $\theta \mapsto (\gamma_0(\theta), \theta)$ tiene curvatura positiva en $(0, \infty) \times S^1$ con la métrica de producto deformado) existe $T > 0$ tal que el problema de valor inicial*

$$\begin{cases} \partial_t \gamma = \frac{(\phi(\gamma)^2 + (\partial_\theta \gamma)^2)^2 f(\gamma)}{\phi(\gamma)(2\phi'(\gamma)(\partial_\theta \gamma)^2 + \phi'(\gamma)\phi(\gamma)^2 - \phi(\gamma)(\partial_\theta^2 \gamma))} =: F(\gamma, \partial_\theta \gamma, \partial_\theta^2 \gamma) & \theta \in S^1, t \in [0, T]; \\ \gamma(\theta, 0) = \gamma_0(\theta) & \theta \in S^1. \end{cases} \quad (1.12)$$

tiene solución única $\gamma \in C^\infty(S^1 \times [0, T])$.

Nuestra estrategia para demostrar este teorema será relacionarlo con la invertibilidad del operador (definido en espacios convenientes de funciones $2 + \beta$ -Hölder continuas) $A : w \mapsto \partial_t w - F(w, \partial_\theta w, \partial_\theta^2 w)$ en torno al 0. Lo que haremos será encontrar una función auxiliar \hat{u} y demostraremos usando el teorema de la función inversa de espacios de Banach que el operador es invertible en una vecindad de $A(\hat{u})$, luego veremos que existe una función en esa vecindad que vale 0 en un tiempo corto y con eso logramos la existencia en tiempo corto de una solución $2 + \beta$ -Hölder continua. Finalmente deberemos mejorar la regularidad de la solución pidiendo más regularidad de la curva inicial. Enunciamos entonces el teorema que será nuestra herramienta principal.

Teorema 1.6.2. (Teorema de la función inversa en espacios de Banach). *Sea $P : X \rightarrow Y$ un operador entre espacios de Banach continuamente Fréchet diferenciable. Si $x_0 \in X$ es tal que $DP(x_0)$ es un homeomorfismo lineal entre X e Y entonces existe una vecindad $V(y_0)$ del punto $y_0 := P(x_0)$ tal que la ecuación $P(x) = y$ tiene una solución para cada $y \in V(y_0)$.*

Demostración. Ver [32] Teorema 9.2.1. □

Para proceder con la demostración necesitamos un par de lemas. Partimos demostrando existencia y unicidad de nuestra función auxiliar.

Lema 1.6.3. *Sea $\gamma_0 \in C^{2+\alpha}(S^1)$ con curvatura estrictamente positiva y $\gamma_0 > 0$. El problema auxiliar*

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = F(\gamma_0, \partial_\theta \gamma_0, \partial_\theta^2 \gamma_0) - \Delta \gamma_0 & \theta \in S^1, t \in [0, T]; \\ u(\cdot, 0) = \gamma_0 & \theta \in S^1. \end{cases} \quad (1.13)$$

Tiene una solución única $\hat{u} \in C^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(S^1 \times [0, T])$.

Demostración. Viene de la teoría de EDP's lineales parabólicas. Ver A.0.1. □

El siguiente lema nos permitirá decir que tenemos las hipótesis para ocupar el Teorema 1.6.2 alrededor de nuestra función auxiliar.

Lema 1.6.4. *Sea $\hat{u} \in C^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(S^1 \times [0, T])$ solución de (1.13), y $\xi \in C^{\alpha, \alpha/2}(S^1 \times [0, T])$. Luego existe un $0 < \hat{T} \leq T$ tal que la linealización de (1.12) en torno a \hat{u} :*

$$\begin{cases} L_{\hat{u}} u := \partial_t u - a \partial_\theta^2 u - b \partial_\theta u - cu = \xi & \theta \in S^1, t \in [0, \hat{T}]; \\ u(\cdot, 0) = \gamma_0 & \theta \in S^1. \end{cases} \quad (1.14)$$

con $a, b, c \in C^{\alpha, \alpha/2}(S^1 \times [0, \hat{T}])$ por ser determinados, tiene una solución única $u \in C^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(S^1 \times [0, \hat{T}])$

Demostración. Sea $u_\varepsilon := \hat{u} + \varepsilon u$. La linealización de $\partial_t \gamma - F(\gamma, \partial_\theta \gamma, \partial_\theta^2 \gamma) = 0$ en torno a \hat{u} corresponde a:

$$\begin{aligned} L_{\hat{u}} u &:= \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} (\partial_t u_\varepsilon - F(u_\varepsilon, \partial_\theta u_\varepsilon, \partial_\theta^2 u_\varepsilon)) \\ &= \partial_t u - F_z(\hat{u}, \partial_\theta \hat{u}, \partial_\theta^2 \hat{u}) \partial_\theta^2 u - F_y(\hat{u}, \partial_\theta \hat{u}, \partial_\theta^2 \hat{u}) \partial_\theta u - F_x(\hat{u}, \partial_\theta \hat{u}, \partial_\theta^2 \hat{u}) u \end{aligned}$$

Por ende definimos

$$\begin{aligned} a(\theta, t) &= F_z(\hat{u}(\theta, t), \partial_\theta \hat{u}(\theta, t), \partial_\theta^2 \hat{u}(\theta, t)), \\ b(\theta, t) &= F_y(\hat{u}(\theta, t), \partial_\theta \hat{u}(\theta, t), \partial_\theta^2 \hat{u}(\theta, t)), \\ c(\theta, t) &= F_x(\hat{u}(\theta, t), \partial_\theta \hat{u}(\theta, t), \partial_\theta^2 \hat{u}(\theta, t)), \end{aligned}$$

donde F_x, F_y, F_z están dados por:

$$\begin{aligned} F_z(x, y, z) &= \frac{f(x)}{\kappa^2 v^2}, \\ F_y(x, y, z) &= \frac{4y}{\phi(x) \kappa v} \left[1 - \frac{\phi'(x)}{\kappa v} \right], \\ F_x(x, y, z) &= \frac{f'(x)v}{\phi(x)\kappa} - \frac{f(x)\phi'(x)}{\phi^2(x)\kappa} + \frac{4f(x)\phi'(x)}{\kappa v} \\ &\quad - \frac{f(x)}{\phi(x)\kappa^2 v^2} [2y^2 \phi''(x) + \phi''(x)\phi^2(x) + 2\phi'^2(x)\phi(x) - \phi'(x)z], \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} \kappa &= \kappa(x, y, z) = \frac{2\phi'(x)y^2 + \phi'(x)\phi(x)^2 - \phi(x)z}{v^3}, \\ v &= v(x, y, z) = (\phi(x)^2 + y^2)^{1/2}. \end{aligned}$$

Como se tiene que $\hat{u}(\theta, 0) = \gamma_0$ se tiene entonces que $\kappa(\hat{u}, \partial_\theta \hat{u}, \partial_\theta^2 \hat{u})$ y $v(\hat{u}, \partial_\theta \hat{u}, \partial_\theta^2 \hat{u})$ son mayores que 0 en $t = 0$ y por ende existe un $\hat{T} \leq T$ (que no depende de ξ) tal que son mayores que 0 para $t \in [0, \hat{T}]$. Esto implica que $a, b, c \in C^{\alpha, \alpha/2}(S^1 \times [0, \hat{T}])$. Luego por un resultado estándar de la teoría lineal de EDP's parabólicas obtenemos lo pedido, ver Teorema A.0.1. \square

Procedemos a demostrar la existencia en tiempo corto en $C^{2+\beta, 1+\beta/2}$, con $0 < \beta < \alpha$, para el problema (1.12)

Teorema 1.6.5. *Sea $\gamma_0 \in C^{2+\alpha}(S^1)$ con curvatura positiva y tal que $\gamma_0 > 0$. Luego para cada $0 < \beta < \alpha$ existe τ , el cual depende sólo de γ_0 y β tal que $0 < \tau \leq \hat{T}$ y tal que existe una solución única γ a (1.12) en $C^{2+\beta, 1+\beta/2}(\Omega \times [0, \tau])$.*

Demostración. Definimos los siguientes espacios de Banach:

$$\begin{aligned} X &:= \left\{ \gamma \in C^{2+\beta, 1+\beta/2}(S^1 \times [0, \hat{T}]) : \gamma(\theta, 0) = \gamma_0 \right\} \\ Y &:= C^{\beta, \beta/2}(S^1 \times [0, \hat{T}]) \end{aligned}$$

Con las normas usuales, y también definimos el operador

$$P : X \rightarrow Y$$

$$\gamma \mapsto \partial_t \gamma - F(\gamma, \partial_\theta \gamma, \partial_\theta^2 \gamma).$$

Tal como mencionamos al comienzo de esta sección usaremos el teorema de la función inversa Teorema 1.6.2 para demostrar que existe una vecindad alrededor de $P(\hat{u})$ donde P es invertible. Debemos chequear entonces las hipótesis del teorema.

Primero veremos que la derivada de Fréchet de P en $w \in X$ es precisamente L_w con L definida como en (1.14). Esto es equivalente a

$$\lim_{|u|_X \rightarrow 0} \frac{|P(w+u) - P(w) - L_w u|_Y}{|u|_X} = 0$$

Desarrollamos y obtenemos

$$\lim_{|u|_X \rightarrow 0} \frac{|F(w+u, \partial_\theta w - \partial_\theta u, \partial_\theta^2 w - \partial_\theta^2 u) - F(w, \partial_\theta w, \partial_\theta^2 w) - a \partial_\theta^2 u - b \partial_\theta u - cu|_Y}{|u|_X}$$

con

$$a = F_z(w, \partial_\theta w, \partial_\theta^2 w)$$

$$b = F_y(w, \partial_\theta w, \partial_\theta^2 w)$$

$$c = F_x(w, \partial_\theta w, \partial_\theta^2 w)$$

Recordando que F es diferenciable obtenemos que el límite es cero como buscábamos. Tenemos entonces que la derivada de Fréchet de P en $w \in X$ cualquiera es L_w , se sigue que P es continuamente Fréchet diferenciable.

Nos falta entonces ver que $L_{\hat{u}}$ es un homeomorfismo lineal de X a Y . Que $L_{\hat{u}}$ es lineal es claro, la inyectividad viene de la unicidad en Lema 1.6.4, la sobreyectividad viene de la existencia en Lema 1.6.4. La continuidad de $L_{\hat{u}}$ viene de que $|L_{\hat{u}} u|_{\beta, \beta/2, S^1 \times [0, \hat{T}]}$ puede ser acotada por $|u|_{2+\beta, 1+\beta/2, S^1 \times [0, \hat{T}]}$ de manera trivial. La continuidad de la inversa viene del teorema del mapeo abierto.

Tenemos entonces que el teorema de la función inversa nos dice que existe una vecindad de $P(\hat{u})$ donde P es invertible. Ahora veremos que existe una función suficientemente cerca de $P(\hat{u})$ que vale 0 en un tiempo corto. Primero por comodidad definimos

$$\hat{\xi} := P(\hat{u}) = \Delta \hat{u} - \Delta \gamma_0 + F(\gamma_0, \partial_\theta \gamma_0, \partial_\theta^2 \gamma_0) - F(\hat{u}, \partial_\theta \hat{u}, \partial_\theta^2 \hat{u})$$

y notamos que $\hat{\xi} \in C^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(S^1 \times [0, \hat{T}])$ y también que $\hat{\xi}(\theta, 0) = 0$ para todo $\theta \in S^1$. Sea τ suficientemente pequeño, definimos las siguientes funciones

$$m(x) := \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \end{cases}, \quad n(x) := \frac{m(x)}{m(x) + m(1-x)}, \quad \eta_\tau(t) := n\left(\frac{t-\tau}{\tau}\right)$$

Las características que usaremos de η_τ son las siguientes (es rutinario mas tedioso de chequear):

- $\eta_\tau \in C^\infty([0, \infty))$,
- $\eta_\tau(t) = 0$ para $t \in [0, \tau]$,

- $\eta_\tau(t) = 1$ para $t \geq 2\tau$,
- $0 \leq \eta_\tau \leq 1$ y
- $0 \leq \eta'_\tau \leq \frac{2}{\tau}$.

Definimos finalmente $\xi_\tau := \hat{\xi}\eta_\tau$, dejamos pendiente para después de esta demostración chequear que $\xi_\tau \in C^{\alpha,\alpha/2}(S^1 \times [0, \hat{T}])$ con norma independiente de τ . Notamos que claramente $|\xi_\tau - \hat{\xi}|_{0;S^1 \times [0, \hat{T}]} \rightarrow 0$ cuando $\tau \rightarrow 0$. Luego por el teorema de Árzela-Ascoli tenemos que, pasando a subsucesión de ser necesario,

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} |\xi_\tau - \hat{\xi}|_{\beta,\beta/2;S^1 \times [0, \hat{T}]} = 0$$

Luego existe τ suficientemente pequeño tal que ξ_τ pertenece a la vecindad de $P(\hat{u})$ donde es invertible, es decir existe una solución al problema de valor inicial

$$\begin{cases} \partial_t \gamma - F(\gamma, \partial_\theta \gamma, \partial_\theta^2 \gamma) = \xi_\tau \\ \gamma(\cdot, 0) = \gamma_0 \end{cases}$$

Recordando que $\xi_\tau(\cdot, t) = 0$ para $0 \leq t \leq \tau$ tenemos entonces la existencia en tiempo corto pedida.

Falta entonces sólo demostrar la unicidad, sean u, v soluciones de (1.12) definimos $w = u - v$ y notamos que w es solución del siguiente problema

$$\begin{cases} \partial_t w = a\partial_\theta^2 w + b\partial_\theta w + cw & \theta \in S^1, t \in [0, \hat{T}] \\ w(\cdot, 0) = 0 & \theta \in S^1 \end{cases}$$

Con

$$\begin{aligned} a(\theta, t) &= \int_0^1 F_z(su + (1-s)v, s\partial_\theta u + (1-s)\partial_\theta v, s\partial_\theta^2 u + (1-s)\partial_\theta^2 v) ds \\ b(\theta, t) &= \int_0^1 F_y(su + (1-s)v, s\partial_\theta u + (1-s)\partial_\theta v, s\partial_\theta^2 u + (1-s)\partial_\theta^2 v) ds \\ c(\theta, t) &= \int_0^1 F_x(su + (1-s)v, s\partial_\theta u + (1-s)\partial_\theta v, s\partial_\theta^2 u + (1-s)\partial_\theta^2 v) ds. \end{aligned}$$

Notamos que $\lambda \leq a \leq \Lambda$. El Teorema 1.5.2 nos dice que $w(\theta, t) \leq \hat{w}(t)$ donde $\hat{w}(t)$ resuelve la EDO

$$\begin{cases} w' = \left(\max_{\theta \in S^1} c(\theta, t) \right) \cdot \hat{w}(t); \\ \hat{w}(0) = 0. \end{cases}$$

Resolviendo la EDO obtenemos que $\hat{w} \equiv 0$ y por ende $w(\theta, t) \leq 0$, es decir $u(\theta, t) \leq v(\theta, t)$. De manera análoga podemos aplicar el mismo argumento para $v - u$ y obtener que $v(\theta, t) \leq u(\theta, t)$, concluimos entonces que $u \equiv v$. □

Desarrollamos ahora el lema que dejamos pendiente

Lema 1.6.6. Sea $\hat{\xi} \in C^{\alpha, \alpha/2}(S^1 \times [0, \hat{T}])$ tal que $\hat{\xi}(\theta, 0) = 0$ para todo $\theta \in S^1$ y sea η_τ definido como en la demostración anterior, luego

$$\xi_\tau := \hat{\xi}\eta_\tau \in C^{\alpha, \alpha/2}(S^1 \times [0, \hat{T}])$$

con norma acotada independiente de $0 < \tau < 1$.

Demostración. Para acotar $|\xi_\tau|_{\alpha, \alpha/2; S^1 \times [0, \hat{T}]}$ basta acotar las siguientes 3 cantidades:

$$\begin{aligned} & |\xi_\tau|_{0; S^1 \times [0, \hat{T}]}, \\ & \sup_{t \in [0, \hat{T}]} \sup_{\substack{\theta_1, \theta_2 \in S^1 \\ \theta_1 \neq \theta_2}} \frac{|\xi_\tau(\theta_1, t) - \xi_\tau(\theta_2, t)|}{|\theta_1 - \theta_2|^\alpha}, \\ & \sup_{\theta \in S^1} \sup_{\substack{t_1, t_2 \in [0, \hat{T}] \\ t_1 \neq t_2}} \frac{|\xi_\tau(\theta, t_1) - \xi_\tau(\theta, t_2)|}{|t_1 - t_2|^{\alpha/2}}. \end{aligned}$$

Claramente las dos primeras están acotadas por $|\hat{\xi}|_{\alpha, \alpha/2; S^1 \times [0, \hat{T}]}$. Trabajaremos entonces la tercera cantidad. Sea $\theta \in S^1$, en lo que resta, por comodidad, suprimiremos en la notación la dependencia en θ de $\hat{\xi}$. Sin pérdida de generalidad sea $0 < t_1 \leq t_2 \leq \hat{T}$. Lo que debemos demostrar es que existe C constante independiente de τ tal que

$$|\xi_\tau(t_1) - \xi_\tau(t_2)| \leq C|t_1 - t_2|^{\alpha/2}.$$

Notamos que podemos escribir

$$\xi_\tau(t_1) - \xi_\tau(t_2) = [\hat{\xi}(t_1) - \hat{\xi}(t_2)]\eta_\tau(t_2) + \hat{\xi}(t_1)[\eta_\tau(t_1) - \eta_\tau(t_2)]$$

El primer término de esta suma lo podemos acotar de la manera pedida ya que $\hat{\xi} \in C^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(S^1 \times [0, \hat{T}])$ y $\eta_\tau \leq 1$. Nos enfocamos entonces en el segundo sumando. Podemos asumir que $t_1 \leq 2\tau$, caso contrario este sumando se anula. Separamos en 2 casos $t_2 \leq 3\tau$ o bien $t_2 > 3\tau$.

Asumamos que $t_2 \leq 3\tau$, notamos que como $\hat{\xi} \in C^{\alpha, \alpha/2}(S^1 \times [0, \hat{T}])$ y $\hat{\xi}(0) = 0$ se tiene que $|\hat{\xi}(t_1)| \leq Ct_1^{\alpha/2}$. También recordamos que $0 \leq \eta'_\tau \leq \frac{2}{\tau}$. Reuniendo en C los términos constantes se tiene lo siguiente:

$$|\hat{\xi}(t_1)[\eta_\tau(t_1) - \eta_\tau(t_2)]| \leq Ct_1^{\alpha/2} \tau^{-1} |t_1 - t_2| \leq C|t_1 - t_2|^{\alpha/2}$$

Donde la última desigualdad viene del hecho de que el máximo de

$$\frac{t_1^{\alpha/2} (3\tau - t_1)^{1-\alpha/2}}{\tau}$$

con $0 \leq t_1 \leq 2\tau$ es $3(\alpha/2)^{\alpha/2} (1 - \alpha/2)^{1-\alpha/2}$, lo cual no depende de τ .

Veamos el otro caso, asumamos que $t_2 > 3\tau$, tenemos que $t_2 - t_1 \geq \tau$ y que $\eta_\tau(t_2) = 0$, podemos deducir

$$|\hat{\xi}(t_1)[\eta_\tau(t_1) - \eta_\tau(t_2)]| = |\hat{\xi}(t_1)\eta_\tau(t_1)| \leq |\hat{\xi}(t_1)| \leq Ct_1^{\alpha/2} \leq C|t_1 - t_2|^{\alpha/2}$$

□

Para finalizar demostraremos que si es que la curva inicial tiene mejor regularidad entonces la solución también.

Teorema 1.6.7. *Sea $\gamma_0 \in C^{2m+2+\alpha}(S^1)$ con curvatura positiva y $m \geq 1$, entonces la solución $\gamma \in C^{2+\beta,1+\beta/2}(S^1 \times [0, \tau])$ al problema (1.12) pertenece a $C^{2m+2+\beta, m+1+\beta/2}(S^1 \times [0, \tau])$.*

Demostración. Vamos a demostrar que si $\gamma_0 \in C^{4+\alpha}(S^1)$ entonces γ pertenece a $C^{3+\beta,1+(1+\beta)/2}(S^1 \times [0, \tau])$ y a $C^{4+\beta,2+\beta/2}(S^1 \times [0, \tau])$, procediendo de manera inductiva se tendrá lo pedido.

Sea $\hat{\theta} \in S^1$, definimos, pensando S^1 como $[0, 2\pi]$ e identificando los extremos, el cociente diferencial

$$w(\theta, t) = \frac{\gamma(\theta + \hat{\theta}, t) - \gamma(\theta, t)}{\hat{\theta}}.$$

Notamos que w satisface el problema de valor inicial

$$\begin{cases} \partial_t w = a \partial_{\hat{\theta}}^2 w + b \partial_{\theta} w + c w & \theta \in S^1, t \in [0, \tau], \\ w(\theta, 0) = \frac{\gamma_0(\theta + \hat{\theta}) - \gamma_0(\theta)}{\hat{\theta}} & \theta \in S^1. \end{cases}$$

Con

$$a = \int_0^1 F_z \left(s \gamma(\theta + \hat{\theta}, t) + (1-s) \gamma(\theta, t), \right. \\ \left. s \partial_{\theta} \gamma(\theta + \hat{\theta}, t) + (1-s) \partial_{\theta} \gamma(\theta, t), s \partial_{\hat{\theta}}^2 \gamma(\theta + \hat{\theta}, t) + (1-s) \partial_{\hat{\theta}}^2 \gamma(\theta, t) \right) ds.$$

y b, c definidos de manera similar cambiando F_z por F_y y F_x respectivamente. Notamos que $a, b, c \in C^{\beta, \beta/2}(S^1 \times [0, \tau])$ uniformemente en $\hat{\theta}$ y a es uniformemente parabólico. También notamos que cuando $\hat{\theta} \rightarrow 0$ la condición inicial tiende a $\partial_{\theta} \gamma_0 \in C^{2+\alpha}(S^1)$. Tenemos entonces por Teorema A.0.1 que $w \in C^{2+\beta,1+\beta/2}(S^1 \times [0, \tau])$ con norma acotada uniformemente en $\hat{\theta}$. Haciendo $\hat{\theta} \rightarrow 0$, ocupando argumentos de tipo Arzelà–Ascoli y pasando a subsucesión de ser necesario, obtenemos que $\partial_{\theta} \gamma \in C^{2+\beta,1+\beta/2}(S^1 \times [0, \tau])$. Chequeando la definición de la norma esto basta para asegurar que $\gamma \in C^{3+\beta,1+(1+\beta)/2}(S^1 \times [0, \tau])$.

Demostrar que $\gamma \in C^{4+\beta,2+\beta/2}(S^1 \times [0, \tau])$ es ligeramente más complicado, necesitaremos demostrar que tanto $\partial_{\hat{\theta}}^2 \gamma$ como $\partial_t \gamma$ pertenecen a $C^{2+\beta,1+\beta/2}(S^1 \times [0, \tau])$. Comencemos con $\partial_{\hat{\theta}}^2 \gamma$, primero notamos que si derivamos (1.12) respecto a θ obtenemos:

$$\partial_t \partial_{\theta} \gamma = \partial_{\theta} \gamma F_x + \partial_{\hat{\theta}}^2 \gamma F_y + \partial_{\hat{\theta}}^3 \gamma F_z.$$

Notamos que esta es una EDP lineal parabólica sobre $\partial_{\theta} \gamma$, podemos entonces repetir el argumento del cociente diferencial y ver que

$$w(\theta, t) := \frac{\gamma_{\theta}(\theta + \hat{\theta}, t) - \gamma_{\theta}(\theta, t)}{\hat{\theta}}$$

también cumple una EDP lineal parabólica, podemos concluir de manera análoga a lo anterior que $\partial_{\hat{\theta}}^2 \gamma \in C^{2+\beta,1+\beta/2}(S^1 \times [0, \tau])$.

Para ver que $\partial_t \gamma \in C^{2+\beta,1+\beta/2}(S^1 \times [0, \tau])$ definimos el siguiente cociente diferencial, sea $\delta > 0$ suficientemente pequeño, sea \hat{t} tal que $|\hat{t}| < \delta$,

$$w(\theta, t) := \frac{\gamma(\theta, t + \hat{t}) - \gamma(\theta, t)}{\hat{t}}.$$

Razonando de manera similar a lo anterior tenemos que w cumple una ecuación lineal parabólica con coeficientes uniformemente en $C^{2+\beta, 1+\beta/2}(S^1 \times [0, \tau])$ y con valor inicial $w(\cdot, \tau) \in C^{2+\beta, 1+\beta/2}(S^1)$ para el cual tenemos estimaciones uniformes independientes de δ . Usando el teorema de solubilidad de ecuaciones lineales A.0.1, haciendo $\delta \rightarrow 0$ y un argumento de tipo Arzelà–Ascoli tenemos que $\partial_t \gamma \in C^{2+\beta, 1+\beta/2}(S^1 \times [0, \tau])$. □

Los resultados de esta sección junto al Teorema 1.3.2 y las estimaciones a priori nos permite concluir la existencia en tiempo corto de una solución a (1.2).

1.7. Existencia en tiempo largo

Nuestro objetivo es demostrar que γ , la solución a (1.3) (y por ende equivalentemente la solución al flujo (1.2)) es de clase C^∞ sobre $S^1 \times [0, \infty)$. Para esto usaremos las estimaciones a priori.

Teorema 1.7.1. *Para cualquier $\gamma_0 : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^+$ suave con curvatura positiva se tiene que existe una única solución $\gamma \in C^\infty(S^1 \times [0, \infty))$ a (1.3).*

Demostración. Sea $\gamma_0 : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^+$ suave con curvatura positiva. Asumamos buscando una contradicción que existe un tiempo maximal T^* de existencia para una solución suave a (1.3). Las estimaciones a priori nos indican que para algún $\alpha \in (0, 1)$ tenemos que la norma $C^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(S^1 \times [0, T])$ está acotada para todo $0 < T < T^*$ de manera uniforme en T . Esto implica que las funciones $\gamma(\cdot, t)$ están uniformemente acotadas en $C^{2+\alpha}(S^1)$. Una aplicación del teorema de Arzelà–Ascoli nos dice que estas convergen uniformemente a una función $\gamma^* \in C^{2+\beta}(S^1)$ para $0 < \beta < \alpha$.

Podemos reiniciar el flujo, usando nuestro teorema de existencia en tiempo corto con curva inicial γ^* , y así extender la solución γ por un tiempo corto extra. En otras palabras tenemos que existe un $\delta > 0$ tal que γ , la solución al problema (1.3), pertenece a $C^{2+\beta, 1+\beta/2}(S^1 \times [0, T^* + \delta))$. Ahora podemos utilizar Teorema 1.6.7 para concluir que $\gamma \in C^\infty(S^1 \times [0, T^* + \delta))$, contradiciendo la maximalidad de T^* . Se sigue entonces que γ es de clase C^∞ en $S^1 \times [0, \infty)$. □

Finalmente notamos que Teorema 1.7.1 unido con Teorema 1.5.5 completan la demostración de Teorema 0.0.1, lo cual era nuestro objetivo inicial.

Capítulo 2

Cuasi-isometría del disco de Poincaré

Definimos el árbol anillado de ramificación n , $RT(n)$, para n natural mayor o igual a 2, como el grafo no dirigido formado por elementos de la forma (k, m) con k natural (incluyendo el cero) y m natural entre 0 y $n^k - 1$, inclusive. Llamaremos a k el nivel del nodo. A este grafo lo dotamos de dos familias de aristas:

- Las *aristas del árbol* conectan cada nodo con n descendientes de manera que (k, m_1) está conectado con $(k + 1, m_2)$ ssi
- Las *aristas de anillo* unen los vértices consecutivos del mismo nivel, es decir (k, m) está unido a $(k, m + 1)$ y $(k, m - 1)$ entendiendo la adición y sustracción módulo n^k , i.e. $(k, 0)$ y $(k, n^k - 1)$ están unidos.

Usando la terminología usual de teoría de grafos podemos decir que el árbol anillado de ramificación n es el árbol n -ario completo de profundidad infinita al cual le agregamos las aristas del anillo. Continuando con la terminología de árboles diremos que (k_1, m_1) está en un nivel más alto que (k_2, m_2) cuando $k_1 < k_2$, i.e. cuando esté más cerca de la raíz $(0, 0)$. Asimismo, si (k, m_1) está unido a $(k + 1, m_2)$ diremos que (k, m_1) es padre de $(k + 1, m_2)$ y que $(k + 1, m_2)$ es hijo de (k, m_1) . Por último diremos que un vértice u es ascendente de un vértice v si es padre de v o (de manera recursiva) es ascendente de un padre de v .

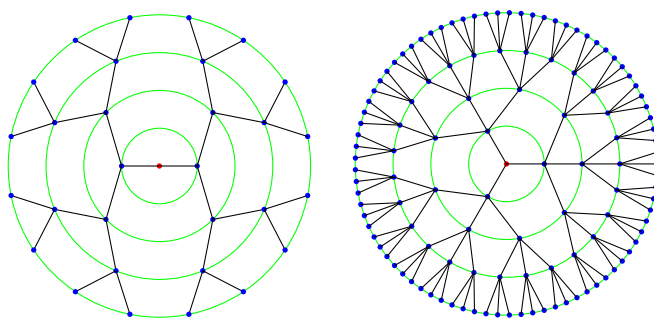


Figura 2.1: Los 5 primeros niveles de $RT(2)$ y $RT(3)$. Las aristas del árbol están en color negro y las aristas de anillo están en color verde.

Como comentamos en la introducción, dotaremos a los $RT(n)$ con la estructura de espacio métrico usando la siguiente función distancia $d_{RT(n)}(u, v) =$ largo del camino más corto que une a u y v . El objetivo de este capítulo será demostrar que los $RT(n)$ son cuasi-isométricos al disco de Poincaré.

2.1. Propiedades básicas de los árboles anillados

Definimos la distancia anillo entre dos vértices en el mismo nivel $u = (k, m_1)$, $v = (k, m_2)$ de la siguiente forma:

$$d_R((k, m_1), (k, m_2)) = \min\{|m_1 - m_2|, n^k - |m_1 - m_2|\}.$$

Esto corresponde a la mínima cantidad de aristas del anillo que hay que recorrer para llegar de u a v . Incluye tomar el mínimo ya que el camino más corto puede ser recorrer el anillo a favor o en contra de las manecillas del reloj, notamos entonces que $d_R((k, m_1), (k, m_2)) \leq n^k/2$. El siguiente lema nos permite relacionar las distancias anillo entre dos vértices con las distancias anillo entre sus padres.

Lema 2.1.1. *Sean u, v nodos en el mismo nivel de $RT(n)$, si u', v' son sus padres respectivamente se tiene que la relación entre $d_R(u, v)$ y $d_R(u', v')$ depende del resto módulo n de $d_R(u, v)$ de la siguiente forma:*

- Si $d_R(u, v) = nq$, con q entero positivo, entonces $d_R(u', v') = q$.
- Si $d_R(u, v) = nq + r$, con q natural y r entero tal que $1 \leq r \leq n - 1$, entonces $d_R(u', v')$ es o bien q o bien $q + 1$.

Demostración. En el primer caso podemos escribir sin pérdida de generalidad $u = (k, m)$ y $v = (k, m + nq)$. Tenemos entonces que $u' = (k - 1, \lfloor \frac{m}{n} \rfloor)$ y $v' = (k - 1, \lfloor \frac{m+nq}{n} \rfloor)$. Como q es entero notamos que $\lfloor \frac{m+nq}{n} \rfloor = \lfloor \frac{m}{n} + q \rfloor = \lfloor \frac{m}{n} \rfloor + q$. Luego tenemos que

$$d_R(u', v') = \min\{q, n^{k-1} - q\}.$$

Pero notamos que como $d_R(u, v) = nq$ entonces $nq \leq n^k/2$ y por ende $q \leq n^{k-1}/2$. Se concluye entonces que $d_R(u', v') = q$.

Para el segundo caso notamos que sin pérdida de generalidad podemos escribir $u = (k, m)$ y $v = (k, m + nq + r)$. Luego tenemos que $u' = (k - 1, \lfloor \frac{m}{n} \rfloor)$ y $v' = (k - 1, \lfloor \frac{m+nq+r}{n} \rfloor)$. Notamos que $\lfloor \frac{m+nq+r}{n} \rfloor = \lfloor \frac{m}{n} + \frac{r}{n} \rfloor + q$. Como $\frac{r}{n} < 1$ tenemos que o bien $\lfloor \frac{m}{n} + \frac{r}{n} \rfloor = \lfloor \frac{m}{n} \rfloor$ o bien $\lfloor \frac{m}{n} + \frac{r}{n} \rfloor = \lfloor \frac{m}{n} \rfloor + 1$. Denotamos $m_1 = \lfloor \frac{m}{n} \rfloor$ y $m_2 = \lfloor \frac{m+nq+r}{n} \rfloor$, tenemos entonces que $|m_2 - m_1| = q$ o $|m_2 - m_1| = q + 1$. Para finalizar el análisis necesitamos separar en dos subcasos, dependiendo de si n es par o impar.

Si n es par tenemos que como $d_R(u, v) = nq + r$ entonces se tiene que $nq + r \leq n^k/2$ pero no se puede tener la igualdad ya que ambos son números enteros pero el de la derecha es congruente con 0 módulo n y el de la izquierda es congruente a $r \neq n$ módulo n . Se sigue entonces que tenemos la desigualdad más ajustada $nq + r \leq n^k/2 - n + r$ y por ende se tiene que $q + 1 \leq n^{k-1}/2$ y por ende se tiene que

$$\min\{|m_1 - m_2|, n^{k-1} - |m_1 - m_2|\} = |m_1 - m_2|$$

y por ende $d_R(u', v') = q$ o $q + 1$.

Si n es impar al igual que el caso anterior tenemos que $nq + r \leq n^k/2$, esto quiere decir que $2nq + 2r \leq n^k$. Nuevamente no se puede tener la igualdad ya que ambos son números enteros pero el de la derecha es congruente con 0 módulo n y el de la izquierda es congruente con $2r < 2n$ y como n es impar se tiene que no son congruentes módulo n . Si $2r > n$ chequeando que se cumpla

la congruencia módulo n obtenemos la desigualdad $2nq + 2r \leq n^k - n + (2r - n)$ y esto implica que $q + 1 \leq n^{k-1}/2$ por ende

$$\text{mín}\{|m_1 - m_2|, n^{k-1} - |m_1 - m_2|\} = |m_1 - m_2|.$$

Luego $d_R(u', v') = q$ o $q + 1$. Si $2r < n$ por la congruencia en módulo n se obtiene la siguiente desigualdad $2nq + 2r \leq n^k - n + 2r$ y por ende obtenemos $q + 1/2 \leq n^{k-1}/2$. Esto deja la posibilidad de que $q + 1 > n^{k-1}/2$ cuando $q = \frac{n^{k-1}-1}{2}$. Por ende tenemos que si en ese caso $|m_1 - m_2| = q + 1$ entonces

$$\text{mín}\{|m_1 - m_2|, n^{k-1} - |m_1 - m_2|\} = n^{k-1} - |m_1 - m_2| = q.$$

Esto quiere decir que en tal caso se tiene que el camino más corto entre u' y v' por el anillo es recorriendo en el sentido contrario que el camino más corto entre u y v . Un ejemplo de este fenómeno se puede ver en la Figura 2.2.

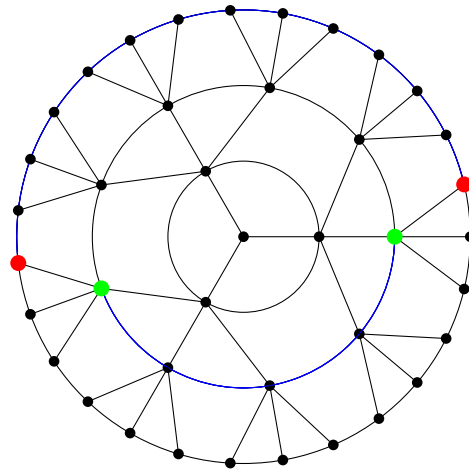


Figura 2.2: Dos vértices en rojo y sus padres en verde. Se aprecia como los caminos anillo más cortos entre ellos (destacados en azul) recorren sus respectivos anillos en sentidos contrarios.

En el resto de los casos se tiene que $q + 1 \leq n^{k-1}/2$ y por ende

$$\text{mín}\{|m_1 - m_2|, n^{k-1} - |m_1 - m_2|\} = |m_1 - m_2|.$$

Por lo tanto, $d_R(u', v') = q$ o $q + 1$. □

Analizando el lema anterior obtenemos el siguiente corolario

Corolario 2.1.1.1. Sean u, v nodos en el mismo nivel de $RT(n)$ y sean u', v' sus padres respectivamente. Se tiene la siguiente desigualdad

$$\left| d_R(u', v') - \frac{d_R(u, v)}{n} \right| \leq \frac{n-1}{n} < 1.$$

Demostración. A partir del lema anterior notamos que si $d_R(u', v') = p$ entonces existen 3 posibilidades

- $d_R(u, v) = np$;

- $d_R(u, v) = np + r$, con r entero tal que $1 \leq r \leq n - 1$;
- $d_R(u, v) = n(p - 1) + r$, con r entero tal que $1 \leq r \leq n - 1$.

De esta manera tenemos que dado que $d_R(u', v') = p$ se tiene que el valor máximo que puede tomar $d_R(u, v)$ es $np + (n - 1)$, ordenando esto es equivalente a

$$\frac{d_R(u, v) + 1}{n} - 1 \leq d_R(u', v').$$

Por otro lado tenemos que si $d_R(u', v') = p$, entonces el valor mínimo que puede tomar $d_R(u, v)$ es $n(p - 1) + 1$, reordenando obtenemos

$$d_R(u', v') \leq \frac{d_R(u, v) - 1}{n} + 1.$$

Juntando ambas desigualdades obtenemos lo pedido. \square

Para estudiar las distancias en el grafo necesitaremos el concepto de una *geodésica* entre dos vértices, que corresponde al camino más corto (no necesariamente único) que une aquellos vértices. Luego la distancia entre dos vértices corresponde al largo de alguna geodésica que los une.

Analizando el corolario anterior concluimos que ninguna geodésica puede tener un segmento donde los vértices bajan y luego suben de nivel.

Para simplificar los cálculos de las distancias nos centraremos en una clase particular de geodésicas que llamaremos geodésicas canónicas. Las definiremos formalmente más adelante pero la idea es que es una geodésica que sube cierta cantidad de niveles, luego se desplaza en un anillo y luego vuelve a bajar niveles, donde cualquiera de estas etapas puede ser omitida. Debemos entonces entender si es que tenemos dos nodos en el mismo nivel cuando es más corto subir de nivel y cuando es más corto recorrer el anillo. Para esto dividiremos el análisis en el caso $n = 2$ y $n > 2$.

Lema 2.1.2. *Sean u, v dos vértices de $RT(2)$ en el mismo nivel, se cumple lo siguiente*

- Si $d_R(u, v) = 1$ o $d_R(u, v) = 2$ luego la o las geodésicas entre u y v no suben de nivel.
- Si $d_R(u, v) = 3$ siempre existe una geodésica entre u y v que no sube de nivel.
- Si $d_R(u, v) \geq 4$, siempre existe una geodésica entre u y v que sube de nivel.

Demostración. El caso $d_R(u, v) = 1$ es claro ya que como u y v están en el mismo nivel, una geodésica que sube de nivel debe subir luego bajar y eso toma al menos dos pasos.

Si $d_R(u, v) = 2 = 2 \cdot 1$ el Lema 2.1.1 nos dice que la distancia entre los padres de u y v es 1, por lo tanto si una geodésica sube de nivel debe luego desplazarse entre los padres de u y v y luego bajar, lo cual toma al menos 3 pasos.

Si $d_R(u, v) = 3 = 2 \cdot 1 + 1$ se tiene que la distancia entre sus padres es 1 o 2 por el Lema 2.1.1, esto dice que un camino entre u y v que sube de nivel tiene largo al menos 3 o 4, en ambos casos la distancia recorriendo por el anillo es menor o igual, luego recorrer el anillo siempre es geodésica.

Si $d_R(u, v) \geq 4$ se aprecian dos casos. El primer caso es que $d_R(u, v) = 2q$ con $q \geq 2$, si u' y v' son los padres de u y v respectivamente por el Lema 2.1.1 se tiene que $d_R(u', v') = q$. Luego un camino que comienza en u , sube a su padre u' , recorre de u' a v' de manera geodésica y baja a su hijo v tiene largo a lo más $2 + q$ y como $q \geq 2$ se aprecia que $2 + q \leq 2q$, luego siempre existe una geodésica que suba de nivel.

El segundo caso es $d_R(u, v) = 2q + 1$ con $q \geq 2$, si u' y v' son los padres de u y v respectivamente, entonces por Lema 2.1.1 se tiene que $d_R(u', v')$ es o bien q o bien $q + 1$, tenemos entonces que un camino que parte en u , sube a su padre u' , recorre de manera geodésica entre u' y v' y baja a su hijo v tiene un largo de a lo más $q + 3$, como $q \geq 2$ tenemos que $q + 3 \leq 2q + 1$ por ende siempre existe una geodésica que sube de nivel. \square

Observación 2.1.3. Un análisis más detallado de la demostración anterior nos dice que si $d_R(u, v) = 4$, entonces siempre hay una geodésica que sube de nivel y una que no. Mientras que si $d_R(u, v) = 5$, entonces siempre hay una geodésica que sube de nivel y puede que exista o no una que no sube de nivel. Finalmente, para $d_R(u, v) \geq 6$ se tiene que todas las geodésicas suben de nivel.

Lema 2.1.4. Sean u, v dos vértices en el mismo nivel de $RT(n)$ con $n \geq 3$, si $d_R(u, v) \leq 2$ entonces siempre existe una geodésica entre u y v que no sube de nivel y si $d_R(u, v) \geq 3$ siempre existe una geodésica que sube de nivel.

Demostración. El caso $d_R(u, v) \leq 2$ es trivial ya que subir y bajar de nivel requiere al menos 2 pasos.

Si $d_R(u, v) = nq$ con $q \geq 1$ natural se tiene por Lema 2.1.1 que $d_R(u', v') = q$ con u' y v' padres de u y v respectivamente, luego un camino que parte en u , sube a su padre u' , luego recorre geodésicamente de u' a v' y finalmente baja a v mide a lo más $2 + q$, como $n \geq 3$ y $q \geq 1$ se tiene que la desigualdad $2 + q \leq nq$ siempre se cumple y por ende siempre existe una geodésica que sube de nivel.

Si $d_R(u, v) = nq + r$ con $1 \leq r \leq n - 1$ se tiene, nuevamente por Lema 2.1.1, que si u' y v' son los padres de u y v respectivamente entonces $d_R(u', v') = q$ o bien $d_R(u', v') = q + 1$. Luego un camino que parte en u , sube a su padre u' , luego recorre geodésicamente entre u' y v' para finalmente bajar a v mide a lo más $q + 3$. Debemos analizar entonces si es más corto quedarse en el mismo nivel o subir, la desigualdad que queda es la siguiente $3 + q \leq nq + r$. Si $r \geq 3$ siempre se cumple la desigualdad y si $q \geq 1$ también siempre se cumple la desigualdad. Uniendo todo tenemos que si $d_R(u, v) \geq 3$ entonces siempre existe una geodésica que sube de nivel. \square

Estamos entonces en condiciones de definir formalmente las geodésicas canónicas.

Definición 2.1.5 (Geodésica canónica). Dado u, v vértices de $RT(n)$ definimos la geodésica canónica entre u y v , denotada $\langle u, v \rangle$, recursivamente de la siguiente manera

1. Si u, v están en el mismo nivel y $d_R(u, v) \leq 3$ en el caso $n = 2$ o $d_R(u, v) \leq 2$ en el caso $n \geq 3$, entonces $\langle u, v \rangle$ es el camino en el anillo entre u y v .
2. Si u y v están en el mismo nivel y $d_R(u, v) > 3$ en el caso $n = 2$ o $d_R(u, v) > 2$ en el caso $n \geq 3$, entonces sean u' y v' los padres de u y v respectivamente, tenemos que $\langle u, v \rangle = \{u\} \cup \langle u', v' \rangle \cup \{v\}$.
3. Si u y v están en distintos niveles, suponiendo que u está en el nivel inferior tenemos que $\langle u, v \rangle = \{u\} \cup \langle u', v \rangle$.

Esta recursión está bien definida ya que en cada paso de la recursión o bien disminuye la diferencia entre niveles de los vértices, o para vértices en el mismo nivel disminuye la distancia por la discusión anterior, hasta que llegamos al caso 1. que actúa como caso base.

Para demostrar que las geodésicas canónicas efectivamente son geodésicas necesitaremos el siguiente lema.

Lema 2.1.6. Sean u, u', v tres vértices en $RT(n)$, tal que u está en el nivel l y u' es su padre en el nivel $l - 1$. Denotaremos $[u, v]$ una geodésica entre u y v . Supongamos que $[u, v]$ intersecta el nivel $l - 1$, y sea t^* el punto de la geodésica en el nivel $l - 1$ más cercano a u . Entonces $d_{RT(n)}(u, t^*) \leq 2$, más aún si $d_{RT(n)}(u, t^*) = 2$ entonces $d_{RT(n)}(u', t^*) = 1$ y el segmento geodésico $[u, t^*]$ corresponde a $\{u, t, t^*\}$ con t un hijo de t^* .

Demostración. Sea t el último nodo antes de t^* en $[u, t^*]$, por definición de t^* tenemos que t está en el nivel l y es un hijo de t^* . Notamos que $\{u\} \cup [u', t^*]$ es un camino que une a u con t^* , por ende actúa como una cota superior para la distancia entre u y t^* de la siguiente manera

$$d_{RT(n)}(u, t^*) \leq 1 + d_{RT(n)}(u', t^*)$$

Por un argumento similar tenemos que $d_{RT(n)}(u', t^*) \leq d_R(u', t^*)$, uniendo esto con Corolario 2.1.1.1 obtenemos lo siguiente

$$d_{RT(n)}(u, t^*) \leq 1 + d_{RT(n)}(u', t^*) \leq 1 + d_R(u', t^*) \leq 1 + \frac{d_R(u, t) - 1}{n} + 1.$$

Por otro lado tenemos que $d_{RT(n)}(u, t^*) \geq 1 + d_R(t, u)$, esto lo podemos ver por contradicción. Si se tuviera $d_{RT(n)}(u, t^*) < 1 + d_R(t, u)$ esto nos dice que el camino que recorre por el anillo de u hasta t y luego sube de nivel a t^* no es geodésica, como las geodésicas no pueden bajar de nivel y luego subir esto significa que el camino óptimo de u a t^* debe subir de nivel antes, contradiciendo el hecho de que el punto de la geodésica en el nivel $l - 1$ más cercano a u es t^* . Tenemos entonces $1 + d_R(u, t) \leq d_{RT(n)}(u, t^*)$. Unido con la desigualdad obtenida anteriormente obtenemos

$$1 + d_R(u, t) \leq d_{RT(n)}(u, t^*) \leq 2 + \frac{d_R(u, t) - 1}{n}$$

Despejando y ordenando obtenemos $d_R(u, t) \leq 1$, $d_{RT(n)}(u, t^*) \leq 2$ y $d_{RT(n)}(u', t^*) \leq 1$, concluyendo lo pedido. \square

Procedemos a demostrar que las geodésicas canónicas efectivamente son geodésicas.

Teorema 2.1.7. Sean u, v vértices de $RT(n)$, entonces $\langle u, v \rangle$ es una geodésica.

Demostración. Partiremos demostrando la aseveración para u, v en el mismo nivel. Si u, v están en el mismo nivel y $d_R(u, v) \leq 3$ en el caso $n = 2$ o $d_R(u, v) \leq 2$ en el caso $n \geq 3$ entonces es claro que el camino más corto que une u a v es recorrer el anillo.

Ahora procederemos inductivamente, sean u, v vértices en el mismo nivel tal que $d_R(u, v) = q$, con $q > 3$ si $n = 2$ o $q > 2$ si $n \geq 3$. Realizaremos inducción fuerte, es decir asumiremos que $\langle w_1, w_2 \rangle$ es geodésica para cualesquiera w_1, w_2 en el mismo nivel de $RT(n)$ y cuya distancia anillo sea menor que q . Tomemos una geodésica cualquiera $[u, v]$, por un análisis anterior sabemos que para puntos cuya distancia anillo es q entonces la geodésica debe subir de nivel. Por el Lema 2.1.6 sabemos que hay dos opciones, o bien la geodésica conecta a u con su padre u' , o la geodésica se mantiene en el nivel de u por un paso y es de la forma $\{u, t\} \cup [t^*, v]$ con t en el mismo nivel de u y t^* su padre, el cual está a distancia 1 de u' . En este segundo caso notamos que el camino $\{u, u'\} \cup [t^*, v]$ tiene el mismo largo y por ende también es geodésica. Razonando de manera similar para v podemos concluir que $\{u\} \cup [u', v'] \cup \{v\}$ es una geodésica que une a u y v . Podemos elegir que el segmento geodésico $[u', v']$ sea precisamente $\langle u', v' \rangle$ (el cual tiene un largo menor a q y por ende la hipótesis inductiva nos asegura que es geodésica) y obtenemos que $\{u\} \cup \langle u', v' \rangle \cup \{v\}$

es una geodésica, por definición esta es la geodésica canónica $\langle u, v \rangle$. Demostramos así que para 2 vértices u, v cualesquiera en el mismo nivel se tiene que $\langle u, v \rangle$ es geodésica.

Por último veremos el caso en el cual u y v están en distintos niveles, partamos primero asumiendo que u está en el nivel l y v en el nivel $l - 1$. Nuevamente por Lema 2.1.6 tenemos que o bien nuestra geodésica es de la forma $\{u\} \cup [u', v]$ o si no de la forma $\{u, t\} \cup [t^*, v]$ con t en el mismo nivel de u y t' su padre. Notamos que en este segundo caso $\{u, u'\} \cup [t^*, v]$ tiene el mismo largo. En ambos casos tenemos que $\{u\} \cup [u', v]$ es geodésica. Podemos escoger que el segmento geodésico $[u', v]$ sea precisamente $\langle u', v \rangle$, como u' y v están en el mismo nivel sabemos que $\langle u', v \rangle$ es geodésica. Finalmente tenemos que $\{u\} \cup \langle u', v \rangle$ es geodésica y por definición esta es la geodésica canónica. Se procede inductivamente para u y v que tengan mayor diferencia de niveles. \square

2.2. Relación entre distancia anillo y distancia en el grafo

Ahora que conocemos un tipo de geodésica podemos entender mejor las distancias entre vértices en el árbol anillado. Procederemos a cuantificar la relación que hay entre la distancia anillo de dos vértices en el mismo nivel y sus distancias en el grafo. Separaremos el análisis en los casos $n = 2$ y $n \geq 3$.

Lema 2.2.1. *Sean u, v dos vértices en un mismo nivel de $RT(2)$, se tiene lo siguiente:*

- Si $d_R(u, v) = 2^i \cdot 2$, para algún i natural, entonces $d_{RT(2)}(u, v) = 2 + 2i$;
- Si $d_R(u, v) = 2^i \cdot 3$, para algún i natural, entonces $d_{RT(2)}(u, v) = 3 + 2i$.

Demostración. Partamos viendo el primer punto, haremos inducción en i . En el caso base $i = 0$ es claro ver que si u, v son vértices en el mismo nivel de $RT(2)$ tales que $d_R(u, v) = 2$ entonces se debe tener que $d_{RT(2)}(u, v) = 2$. Ahora asumamos que se tiene para cierto i natural que cualquier par de vértices en el mismo nivel de $RT(2)$ con distancia anillo igual a $2^i \cdot 2$, entonces su distancia en el grafo es $2 + 2i$, procederemos a demostrarlo para $i + 1$. Sean u, v cualesquiera en un mismo nivel de $RT(2)$ tal que están en el mismo nivel y $d_R(u, v) = 2^{i+1} \cdot 2$. Por la estructura de las geodésicas canónicas sabemos que $\{u\} \cup \langle u', v' \rangle \cup \{v\}$ es geodésica con u', v' padres de u y v respectivamente. Más aún por el Lema 2.1.1 sabemos que $d_R(u', v') = 2^i \cdot 2$. Por hipótesis inductiva sabemos que $d_{RT(2)}(u', v') = 2 + 2i$, luego la geodésica $\langle u, v \rangle$ debe medir $2 + 2 + 2i = 2 + 2(i + 1)$, concluyendo así la inducción.

Desarrollaremos de manera similar para $d_R(u, v) = 2^i \cdot 3$ con inducción en i . El caso base $i = 0$ es claro, si u, v son dos vértices en el mismo nivel de $RT(2)$ cuya distancia anillo es 3 entonces su distancia en el grafo debe ser 3 (ver Lema 2.1.6). El paso inductivo funciona de manera similar al anterior, notamos que si u, v son vértices del mismo nivel tal que $d_R(u, v) = 2^{i+1} \cdot 3$, entonces sus padres son tales que $d_R(u', v') = 2^i \cdot 3$ y usando hipótesis inductiva, la geodésica canónica $\{u\} \cup \langle u', v' \rangle \cup \{v\}$ tiene largo $2 + 3 + 2i = 3 + 2(i + 1)$. \square

Lema 2.2.2. *Sean u, v dos vértices en un mismo nivel de $RT(n)$ con $n \geq 3$, se tiene lo siguiente:*

- Si $d_R(u, v) = n^i \cdot 2$, para algún i natural, entonces $d_{RT(n)}(u, v) = 2 + 2i$;
- Si $d_R(u, v) = n^i$, para algún i natural, entonces $d_{RT(n)}(u, v) = 1 + 2i$.

Demostración. La idea de esta demostración es igual al lema anterior por ende omitiremos algunos detalles. Partiremos demostrando el primer punto por inducción en i . El caso base es trivial, ya que si u, v son dos vértices del mismo nivel a distancia anillo 2, entonces su distancia en el grafo debe ser 2. Ahora asumamos que para cierto i natural tenemos que para cualquier par de puntos en un mismo nivel a distancia anillo $n^i \cdot 2$ se debe tener que su distancia en el grafo sea $2 + 2i$, demostraremos esta proposición para $i + 1$. Sean u, v vértices en el mismo nivel de $RT(n)$ tales que $d_R(u, v) = n^{i+1} \cdot 2$, por Lema 2.1.1 y la estructura de geodésicas canónicas tenemos que $\{u\} \cup \langle u', v' \rangle \cup \{v\}$ es una geodésica y que $d_R(u', v') = n^i \cdot 2$. Por hipótesis inductiva se tiene que $d_{RT(n)}(u', v') = 2 + 2i$, luego el largo de la geodésica que une a u y v es $2 + (2 + 2i) = 2 + 2(i + 1)$, probando así lo pedido.

Para demostrar el segundo punto procederemos nuevamente con inducción. El caso base es trivial. Ahora asumamos que para algún i natural se tiene que para cualquier par de vértices en el mismo nivel de $RT(n)$ con distancia anillo n^i se tiene que su distancia en el grafo es $1 + 2i$. Sean u, v vértices en el mismo nivel de $RT(n)$ tales que $d_R(u, v) = n^{i+1}$. Por Lema 2.1.1 y la estructura de geodésicas canónicas tenemos que $\{u\} \cup \langle u', v' \rangle \cup \{v\}$ es una geodésica y que $d_R(u', v') = n^i$, luego por hipótesis inductiva tenemos que la geodésica que une a u y v mide $2 + (1 + 2i) = 1 + 2(i + 1)$. \square

Definición 2.2.3. (*Distancia anillo destacada*) Dado j un natural decimos que es una distancia anillo destacada de $RT(n)$ si

- Para $n = 2$, es tal que $j = 1$, $j = 2^i \cdot 2$ o $j = 2^i \cdot 3$, para algún i natural;
- Para $n \geq 3$, es tal que $j = n^i \cdot 2$ o $j = n^i$, para algún i natural.

Tanto Lema 2.2.1 y Lema 2.2.2 muestran que si sabemos que un par de vértices de un mismo nivel de $RT(n)$ están a una distancia anillo que es destacada, entonces conocemos exactamente su distancia en el grafo. En $RT(2)$ tenemos 2 familias de distancias anillo destacadas, las de la forma $2^i \cdot 2$ y las de la forma $2^i \cdot 3$, estas van intercaladas como se muestra en la siguiente tabla junto a sus distancias en el grafo correspondientes (también incluimos el 1 como distancia destacada por comodidad).

$d_R(u, v)$	1	2	3	$2^1 \cdot 2$	$2^1 \cdot 3$	$2^2 \cdot 2$	$2^2 \cdot 3$	$2^i \cdot 2$	$2^i \cdot 3$
$d_{RT(2)}(u, v)$	1	2	3	4	5	6	7	$2 + 2i$	$3 + 2i$

Por otro lado para $n \geq 3$ también tenemos 2 familias de distancias anillo destacadas, esta vez las de la forma n^i y las de la forma $2 \cdot n^i$ las cuales también van intercaladas. Presentamos las distancias destacadas junto a sus distancias en el grafo correspondientes en la siguiente tabla.

$d_R(u, v)$	1	2	n^1	$2 \cdot n^1$	n^2	$2 \cdot n^2$	n^3	$2 \cdot n^3$	n^i	$2 \cdot n^i$
$d_{RT(n)}(u, v)$	1	2	3	4	5	6	7	8	$1 + 2i$	$2 + 2i$

Ahora demostraremos que si tenemos un par de vértices en el mismo nivel de $RT(n)$ tal que su distancia anillo está entre distancias destacadas, entonces hay dos opciones para su distancia en el grafo. Estas opciones corresponden a las distancias en el grafo correspondientes a las distancias destacadas entre las que se encuentre. Por ejemplo, en $RT(2)$ tenemos que 8 es una distancia destacada con distancia en el grafo asociada 6, también tenemos que 12 es una distancia destacada con distancia en el grafo asociada 7. Por ende demostraremos que si tenemos un par de vértices cuya distancia anillo sea 9, 10 u 11, entonces su distancia en el grafo será o bien 6 o bien 7. Nuevamente separaremos en los casos $n = 2$ y $n \geq 3$.

Lema 2.2.4. Sean u, v dos vértices en el mismo nivel de $RT(2)$ tales que $d_R(u, v) = j$, se tiene lo siguiente:

- Si para algún natural i se tiene que $2^i \cdot 2 < j < 2^i \cdot 3$, entonces $d_{RT(2)}(u, v) = 2 + 2i$ o bien $3 + 2i$;
- Si para algún natural i se tiene que $2^i \cdot 3 < j < 2^{i+1} \cdot 2$, entonces $d_{RT(2)}(u, v) = 3 + 2i$ o bien $d_{RT(2)}(u, v) = 2 + 2(i + 1)$.

Demostración. Partamos por el primer punto, procederemos por inducción en i . El caso base corresponde a demostrar que si j es tal que $2^1 \cdot 2 < j < 2^1 \cdot 3$ entonces $d_{RT(2)}(u, v) = 4$ o $d_{RT(2)}(u, v) = 5$. Notamos que en este caso $j = 5$ es la única distancia anillo admisible, por ende debemos demostrar que si u, v son vértices en el mismo nivel de $RT(2)$ tales que $d_R(u, v) = 5$ entonces o bien $d_{RT(2)}(u, v) = 4$ o bien $d_{RT(2)}(u, v) = 5$. Notamos que $5 = 2 \cdot 1 + 1$, luego por Lema 2.1.1 se tiene que para u', v' padres de u y v respectivamente se tiene que $d_R(u', v') = 2$ o $d_R(u', v') = 3$, también por estructura de geodésicas canónicas tenemos que la geodésica canónica entre u y v es $\{u\} \cup \langle u', v' \rangle \cup \{v\}$ y como 2 y 3 son distancias destacadas tenemos que si $d_R(u', v') = 2$, entonces $d_{RT(2)}(u', v') = 2$ y por ende $d_{RT(2)}(u, v) = 4$. Por otro lado si $d_R(u', v') = 3$ se tiene que $d_{RT(2)}(u', v') = 3$ y por ende $d_{RT(2)}(u, v) = 5$, concluimos así el caso base.

Para el paso inductivo asumamos que para cierto i natural es cierto que para cualquier j natural tal que $2^i \cdot 2 < j < 2^i \cdot 3$, se tiene que si u, v son vértices del mismo nivel de $RT(2)$ cuya distancia anillo es j , entonces o bien $d_{RT(2)}(u, v) = 2 + 2i$ o bien $d_{RT(2)}(u, v) = 3 + 2i$. Debemos demostrar que se cumple esta propiedad para $i + 1$. Sea entonces j natural tal que $2^{i+1} \cdot 2 < j < 2^{i+1} \cdot 3$ y sean u, v vértices en el mismo nivel de $RT(2)$ tales que $d_R(u, v) = j$. Como j es un número natural tenemos la siguiente desigualdad más ajustada

$$2^{i+1} \cdot 2 + 1 \leq d_R(u, v) \leq 2^{i+1} \cdot 3 - 1.$$

Dividiendo las desigualdades por 2 obtenemos

$$2^i \cdot 2 + \frac{1}{2} \leq \frac{d_R(u, v)}{2} \leq 2^i \cdot 3 - \frac{1}{2}$$

Recordamos el Corolario 2.1.1.1 el cual nos indica que para u', v' padres de u, v se tienen las siguientes desigualdades

$$\frac{d_R(u, v)}{2} \leq d_R(u', v') + \frac{1}{2}, \quad d_R(u', v') - \frac{1}{2} \leq \frac{d_R(u, v)}{2}.$$

Unido con lo anterior nos queda

$$2^i \cdot 2 \leq d_R(u', v') \leq 2^i \cdot 3$$

Notamos entonces que $d_{RT(2)}(u', v') = 2 + 2i$ o $d_{RT(2)}(u', v') = 3 + 2i$, ya sea por hipótesis inductiva o por Lema 2.2.1. Por la estructura de geodésicas canónicas sabemos que $\{u\} \cup \langle u', v' \rangle \cup \{v\}$ es una geodésica entre u y v . Por lo recién comentado sabemos que esta geodésica mide o bien $2 + (2 + 2i) = 2 + 2(i + 1)$ o bien $2 + (3 + 2i) = 3 + 2(i + 1)$, completamos así la inducción.

Para el segundo punto la idea es muy similar, el caso inductivo corresponde a probar que si para u, v tales que $d_R(u, v) = 7$, entonces $d_{RT(2)}(u, v) = 5$ o $d_{RT(2)}(u, v) = 6$. Esto es cierto dado que $7 = 2 \cdot 3 + 1$, por lo cual Lema 2.1.1 nos dice que para u', v' padres de u y v se tiene que

$d_R(u', v') = 3$ o $d_R(u', v') = 4$, estas son distancias destacadas y sabemos que entonces $d(u', v') = 3$ o $d(u', v') = 4$. Concluimos por la estructura de las geodésicas canónicas.

Para el paso inductivo asumimos que se cumple la proposición para algún natural i y demostraremos que se tiene para $i + 1$. Sea j natural tal que $2^{i+1} \cdot 3 < j < 2^{i+2} \cdot 2$ y sean u, v dos vértices en un mismo nivel de $RT(2)$ tales que $d_R(u, v) = j$. Como j es natural tenemos la desigualdad más ajustada

$$2^{i+1} \cdot 3 + 1 \leq d_R(u, v) \leq 2^{i+2} \cdot 2 - 1$$

Dividiendo por 2 obtenemos

$$2^i \cdot 3 + \frac{1}{2} \leq \frac{d_R(u, v)}{2} \leq 2^{i+1} \cdot 2 - \frac{1}{2}$$

Usando el Corolario 2.1.1.1 obtenemos

$$2^i \cdot 3 \leq d_R(u', v') \leq 2^{i+1} \cdot 2$$

Tenemos entonces que $d_{RT(2)}(u', v') = 3 + 2i$ o $d_{RT(2)}(u', v') = 2 + 2(i + 1)$ ya sea por hipótesis inductiva o por Lema 2.2.1. Esto junto a la estructura de las geodésicas canónicas nos permite concluir. \square

Lema 2.2.5. *Sea $n \geq 3$ y sean u, v dos vértices en el mismo nivel de $RT(n)$ tales que $d_R(u, v) = j$, se tiene lo siguiente:*

- *Si para algún natural i se tiene que $n^i < j < n^i \cdot 2$, entonces $d_{RT(n)}(u, v) = 1 + 2i$ o $d_{RT(n)}(u, v) = 2 + 2i$;*
- *Si para algún natural i se tiene que $n^i \cdot 2 < j < n^{i+1}$, entonces $d_{RT(n)}(u, v) = 2 + 2i$ o $d_{RT(n)}(u, v) = 1 + 2(i + 1)$.*

Demostración. Partamos por el primer punto, procederemos por inducción en i . Veamos el caso base, sean u, v dos vértices del mismo nivel de $RT(n)$ que están a distancia anillo j , con $n < j < 2n$, debemos demostrar que $d_{RT(n)}(u, v) = 3$ o $d_{RT(n)}(u, v) = 4$, Notamos que $j = n + r$ con $1 \leq r \leq n - 1$, luego por Lema 2.1.1 tenemos que $d_R(u', v') = 1$ o $d_R(u', v') = 2$ con u', v' padres de u y v . Por estructura de geodésicas canónicas concluimos que $d_{RT(n)}(u, v) = 3$ o $d_{RT(n)}(u, v) = 4$.

Para el paso inductivo asumamos que para cierto i natural es cierto que para cualquier j natural tal que $n^i < j < n^i \cdot 2$, se tiene que si u, v son vértices del mismo nivel de $RT(n)$ con distancia anillo j , entonces $d_{RT(n)}(u, v) = 1 + 2i$ o $d_{RT(n)}(u, v) = 2 + 2i$. Demostraremos que esta propiedad se cumple para $i + 1$. Sea entonces j natural tal que $n^{i+1} < j < n^{i+1} \cdot 2$ y sean u, v dos vértices en el mismo nivel de $RT(n)$ tal que su distancia anillo es j . Dividiendo por n obtenemos

$$n^i < \frac{d_R(u, v)}{n} < n^i \cdot 2.$$

El Corolario 2.1.1.1 nos indica que para u', v' padres de u, v se tienen las siguientes desigualdades

$$\frac{d_R(u, v)}{n} \leq d_R(u', v') + 1 - \frac{1}{n}, \quad d_R(u', v') - 1 + \frac{1}{n} \leq \frac{d_R(u, v)}{n}$$

Juntándolo con lo anterior obtenemos

$$n^i - 1 + \frac{1}{n} < d_R(u', v') < n^i \cdot 2 + 1 - \frac{1}{n}$$

Recordando que $d_R(u', v')$ es natural tenemos las siguientes desigualdades más ajustadas

$$n^i \leq d_R(u', v') \leq n^i \cdot 2.$$

De esto último se desprende que $d_{RT(n)}(u', v') = 1 + 2i$ o $d_{RT(n)}(u', v') = 2 + 2i$. Por la estructura de las geodésicas canónicas sabemos que $\{u\} \cup \langle u', v' \rangle \cup \{v\}$ es una geodésica que une a u y v . Por lo recién comentado tenemos que el largo de esta geodésica es $2 + (1 + 2i) = 1 + 2(i + 1)$ o $2 + (2 + 2i) = 2 + 2(i + 1)$, que era lo buscado,

El segundo punto se demuestra de manera similar al primero. \square

Observación 2.2.6. Lema 2.2.4 y Lema 2.2.5 ilustran como profundizamos el entendimiento de los árboles anillados comparado con [6]. En el lema 21 de aquel trabajo demuestran que si u_1, v_1, u_2, v_2 son vértices del mismo nivel de $RT(2)$ tales que $d_R(u_1, v_1) = d_R(u_2, v_2)$, entonces sus distancias en el grafo difieren en a lo más 3. En nuestro caso hemos demostrado que difieren en a lo más 1, más aún demostramos que aunque u_1, v_1 se encuentren en un nivel y u_2, v_2 se encuentren en otro nivel distinto, basta sólo saber que están a la misma distancia anillo para saber que sus distancias reales difieren de a lo más 1.

A partir de este par de lemas, demostraremos una manera menos precisa, pero más sencilla de estimar la distancia en el grafo entre un par de vértices del mismo nivel al conocer su distancia anillo. Esta estimación será clave para poder demostrar la cuasi-isometría más adelante.

Lema 2.2.7. Sean u, v dos vértices en el mismo nivel de $RT(n)$ tales que $d_R(u, v) = j$, se tiene lo siguiente:

- Si $n = 2$, entonces el valor de $d_{RT(2)}(u, v)$ es $2\lfloor \log_2(j) \rfloor$ o $2\lfloor \log_2(j) \rfloor + 1$ o $2\lfloor \log_2(j) \rfloor + 2$;
- Si $n \geq 3$, entonces el valor de $d_{RT(n)}(u, v)$ es $1 + 2\lfloor \log_n(j) \rfloor$ o $2 + 2\lfloor \log_n(j) \rfloor$ o $3 + 2\lfloor \log_n(j) \rfloor$.

Demostración. Partiremos con el caso $n = 2$, un análisis del Lema 2.2.4 nos indica que si j es tal que $2^i \leq j < 2^{i+1}$ para cierto i natural, entonces $d_{RT(2)}(u, v) = 2i$ o $d_{RT(2)}(u, v) = 2i + 1$ o $d_{RT(2)}(u, v) = 2i + 2$. Observamos que por definición de parte entera tenemos las siguientes desigualdades

$$2^{\lfloor \log_2(j) \rfloor} \leq j < 2^{\lfloor \log_2(j) \rfloor + 1}.$$

Con esto queda demostrado lo pedido.

Para el caso $n \geq 3$ procedemos de manera similar, el Lema 2.2.5 nos dice que si j es tal que $n^i \leq j < n^{i+1}$, entonces $d_{RT(n)}(u, v) = 1 + 2i$ o $2 + 2i$ o $3 + 2i$. Podemos concluir notando que

$$n^{\lfloor \log_n(j) \rfloor} \leq j < n^{\lfloor \log_n(j) \rfloor + 1}.$$

\square

2.3. El candidato a cuasi-isometría

Recordamos que definimos el disco de Poincaré, P , como el disco abierto en el plano complejo con centro en el origen y radio unitario, dotado de la siguiente función distancia

$$d_P(u, v) = \operatorname{arcosh} \left(1 + \frac{2\|u - v\|^2}{(1 - \|u\|^2)(1 - \|v\|^2)} \right).$$

Con $\|\cdot\|$ la norma euclídeana. Si $u = r_0 e^{i\theta_0}$ e $v = r_1 e^{i\theta_1}$ podemos usar el teorema del coseno y la identidad trigonométrica $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x)$ para obtener las siguientes expresiones.

$$\begin{aligned} d_P(r_0 e^{i\theta_0}, r_1 e^{i\theta_1}) &= \operatorname{arcosh} \left(1 + \frac{2(r_0^2 + r_1^2 - 2r_0 r_1 \cos(\theta_1 - \theta_0))}{(1 - r_0^2)(1 - r_1^2)} \right) \\ &= \operatorname{arcosh} \left(1 + \frac{2(r_0 - r_1)^2 + 8r_0 r_1 \sin^2\left(\frac{\theta_0 - \theta_1}{2}\right)}{(1 - r_0^2)(1 - r_1^2)} \right). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Nuestro candidato a cuasi-isometría será el siguiente

$$\begin{aligned} f : RT(n) &\rightarrow P, \\ (k, m) &\mapsto \underbrace{\sqrt{1 - n^{-k}}}_{(*)} \underbrace{e^{2i\pi \frac{m}{n^k}}}_{(\dagger)}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

La heurística detrás de esta elección de candidato es la siguiente:

- El factor (\dagger) corresponde a equiespaciarse los ángulos correspondientes a los vértices de cada nivel.
- El factor $(*)$ proviene del hecho de que si un punto en el disco de Poincaré se encuentra a distancia euclídeana ρ del origen, entonces su distancia hiperbólica al origen es $\log\left(\frac{1+\rho}{1-\rho}\right)$. Considerando también el hecho que un círculo de radio hiperbólico r tiene perímetro $2\pi \sinh(r)$, tenemos que nuestra elección de $(*)$ indica que los n^k nodos del nivel k los distribuiremos en un círculo de perímetro $4\pi n^k \sqrt{1 - n^{-k}} = \Theta(n^k)$, obteniendo así el comportamiento asintótico correcto. Cabe mencionar que existen otras elecciones que nos dan el mismo comportamiento asintótico, sin embargo elegimos en este caso $\sqrt{1 - n^{-k}}$ ya que será conveniente para calcular las distancias, teniendo en cuenta la presencia de factores r_0^2 y r_1^2 en 2.1.

Para demostrar que efectivamente f es una cuasi-isometría deberemos entender la relación que existe entre $d_{RT(n)}(u, v)$ y $d_P(f(u), f(v))$ para u, v un par cualquiera de vértices en $RT(n)$. Desafortunadamente las expresiones resultantes al calcular directamente esas distancias para u, v genéricos se vuelven más y más difíciles de tratar, es por esto que nuestra estrategia será asignarle a cada par de vértices de $RT(n)$, un par de vértices de la forma (k, m) y $(l, 0)$ con $0 \leq k \leq l$ y $0 \leq m \leq n^k/2$, que aunque no tendrán exactamente las mismas distancias, si podremos estimar sus diferencias. Este proceso simplificará bastante los cálculos ya que es equivalente a tomar un punto en el plano hiperbólico con un $\theta = 0$, y el otro punto del plano hiperbólico tendrá un θ entre 0 y π . Destacamos que aquí se presenta una diferencia entre nuestro trabajo y [6], ya que al contrario de su demostración, para nosotros el vértice con $\theta = 0$ será el más alejado del origen. Este ligero cambio hace que podamos desarrollar a cabalidad todos los cálculos y estimaciones necesarias, sin tener que omitir detalles que se vuelven engorrosos.

Basados en esta idea, enfocaremos nuestros esfuerzos en estimar las siguientes cantidades, con $0 \leq k \leq l$ y $0 \leq m \leq n^k/2$:

$$D'_n(k, m, l) := d_{RT(n)}((k, m), (l, 0))$$

$$\begin{aligned} D_n(k, m, l) &:= d_P(f(k, m), f(l, 0)) = d_P(\sqrt{1 - n^{-k}} e^{2i\pi \frac{m}{n^k}}, \sqrt{1 - n^{-l}}) \\ &= \operatorname{arcosh} \left(1 + 2 \left(\sqrt{n^l(n^k - 1)} - \sqrt{n^k(n^l - 1)} \right)^2 + 8\sqrt{n^k n^l (n^k - 1)(n^l - 1)} \sin^2 \left(\frac{\pi m}{n^k} \right) \right). \end{aligned}$$

2.4. Cotas para la distancia en el plano hiperbólico

Siguiendo la idea de la sección anterior, procedemos a acotar $D_n(k, m, l)$.

Lema 2.4.1. *Sean los naturales $n \geq 2$, $0 \leq k \leq l$, $0 \leq m \leq n^k/2$. Tenemos las siguientes desigualdades*

1. Si $k = m = 0$

$$l \log(n) + \log\left(2 - \frac{1}{n}\right) \leq D_n(0, 0, l) \leq l \log(n) + \log(4);$$

2. Si $1 \leq k < l$ y $m = 0$

$$(l - k) \log(n) + \log\left(2 \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{5n}\right)^2\right) \leq D_n(k, 0, l) \leq (l - k) \log(n) + \log\left(\frac{36}{25} + \frac{2}{n}\right)$$

3. Si $1 \leq k = l$ y $0 \leq m \leq n^k/2$

$$2 \log(n) \lfloor \log_n(m) \rfloor + \log\left(32 \left(1 - \frac{1}{n}\right)\right) \leq D_n(k, m, k) \leq 2 \log(n) \lfloor \log_n(m) \rfloor + \log\left(\frac{146}{9} \pi^2 n^2\right)$$

4. Si $0 < k < l$, $0 < m \leq n^k/2$

$$\log(n)(l - k + 2 \lfloor \log_n(m) \rfloor) + \log(16) \leq D_n(k, m, l) \leq \log(n)(l - k + 2 \lfloor \log_n(m) \rfloor + 2) + \log(164)$$

Demostración. Tenemos la identidad

$$\operatorname{arcosh}(x) = \log(x + \sqrt{x^2 - 1}),$$

Por ende se tiene para todo $x \geq 1$.

$$\log(x) \leq \operatorname{arcosh}(x) \leq \log(2x).$$

También usaremos las siguientes desigualdades:

$$\begin{aligned} 1 - \frac{3x}{5} \leq \sqrt{1 - x} \leq 1 - \frac{x}{2}, & \quad \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}; \\ \frac{2x}{\pi} \leq \sin(x) \leq x, & \quad \text{si } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Ahora procederemos demostrando cada punto

1. Tomamos $k = m = 0$ primero notamos que

$$D_n(0, 0, l) = \operatorname{arcosh}(1 + 2(n^l - 1)) = \operatorname{arcosh}(2n^l - 1).$$

Acotamos por arriba

$$D_n(0, 0, l) = \operatorname{arcosh}(2n^l - 1) \leq \operatorname{arcosh}(2n^l) \leq \log(4n^l) = \log(4) + l \log(n).$$

Ahora por abajo

$$\begin{aligned} D_n(0, 0, l) &= \operatorname{arcosh}(2n^l - 1) = \operatorname{arcosh}\left(n^l \left(2 - \frac{1}{n^l}\right)\right) \\ &\geq l \log(n) + \log\left(2 - \frac{1}{n^l}\right) \geq l \log(n) + \log\left(2 - \frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

2. Tomamos $m = 0$ y $1 \leq k < l$. Primero expresamos

$$D_n(k, 0, l) = \operatorname{arcosh} \left(1 + 2n^{l+k} \left(\sqrt{1 - n^{-l}} - \sqrt{1 - n^{-k}} \right)^2 \right)$$

Notamos que como $l > k$, entonces $\sqrt{1 - n^{-l}} - \sqrt{1 - n^{-k}} > 0$. Acotamos

$$\sqrt{1 - n^{-l}} - \sqrt{1 - n^{-k}} \leq 1 - \frac{n^{-l}}{2} - 1 + \frac{3}{5}n^{-k} \leq \frac{3}{5}n^{-k}$$

Así obtenemos, usando que $l - k \geq 1$

$$\begin{aligned} D_n(k, 0, l) &\leq \operatorname{arcosh} \left(1 + \frac{18}{25}n^{l+k}n^{-2k} \right) \\ &\leq \operatorname{arcosh} \left(\frac{n^{l-k}}{n} + \frac{18}{25}n^{l-k} \right) \\ &\leq \log \left(2 \left(\frac{1}{n} + \frac{18}{25} \right) n^{l-k} \right) \\ &\leq (l - k) \log(n) + \log \left(\frac{36}{25} + \frac{2}{n} \right) \end{aligned}$$

Ahora acotamos en la otra dirección, nuevamente usamos que $l \geq k + 1$

$$\sqrt{1 - n^{-l}} - \sqrt{1 - n^{-k}} \geq 1 - \frac{3}{5}n^{-l} - 1 + \frac{n^{-k}}{2} = \frac{n^{-k}}{2} - \frac{3}{5}n^{-l} \geq \frac{n^{-k}}{2} - \frac{3}{5n}n^{-k} = \frac{5n - 6}{10n}n^{-k}$$

Obtenemos así

$$\begin{aligned} D_n(k, 0, l) &\geq \operatorname{arcosh} \left(1 + 2n^{l+k} \left(\frac{5n - 6}{10n} \right)^2 n^{-2k} \right) \\ &\geq \log \left(1 + 2n^{l-k} \left(\frac{5n - 6}{10n} \right)^2 \right) \\ &\geq \log \left(2n^{l-k} \left(\frac{5n - 6}{10n} \right)^2 \right) \\ &\geq (l - k) \log(n) + \log \left(2 \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{5n} \right)^2 \right). \end{aligned}$$

3. Tomamos $k = l \geq 1$ y $0 \leq m \leq n^k/2$. Para la cota por abajo usaremos que $n^k - 1 \geq (1 - \frac{1}{n}) n^k$

$$\begin{aligned}
D_n(k, m, k) &= \operatorname{arcosh} \left(1 + 8n^k(n^k - 1) \sin^2 \left(\frac{\pi m}{n^k} \right) \right) \\
&\geq \operatorname{arcosh} \left(1 + 8 \left(1 - \frac{1}{n} \right) n^{2k} \sin^2 \left(\frac{\pi m}{n^k} \right) \right) \\
&\geq \operatorname{arcosh} \left(8 \left(1 - \frac{1}{n} \right) n^{2k} 4 \frac{m^2}{n^{2k}} \right) \\
&\geq \log \left(32 \left(1 - \frac{1}{n} \right) m^2 \right) \\
&= \log \left(32 \left(1 - \frac{1}{n} \right) \right) + 2 \log(m) \\
&= \log \left(32 \left(1 - \frac{1}{n} \right) \right) + 2 \log(n) \log_n(m) \\
&\geq \log \left(32 \left(1 - \frac{1}{n} \right) \right) + 2 \log(n) \lfloor \log_n(m) \rfloor
\end{aligned}$$

Ahora acotaremos por arriba, usaremos que $1 \leq \frac{\pi^2 m^2}{9}$

$$\begin{aligned}
D_n(k, m, k) &= \operatorname{arcosh} \left(1 + 8n^k(n^k - 1) \sin^2 \left(\frac{\pi m}{n^k} \right) \right) \\
&\leq \operatorname{arcosh} \left(1 + 8n^{2k} \sin^2 \left(\frac{\pi m}{n^k} \right) \right) \\
&\leq \operatorname{arcosh} \left(1 + 8n^{2k} \frac{\pi^2 m^2}{n^{2k}} \right) \leq \operatorname{arcosh} \left(\frac{73}{9} \pi^2 m^2 \right) \\
&\leq \log \left(\frac{146}{9} \pi^2 m^2 \right) = \log \left(\frac{146}{9} \pi^2 \right) + 2 \log(m) \\
&= \log \left(\frac{146}{9} \pi^2 \right) + 2 \log(n) \log_n(m) \\
&\leq 2 \log(n) (\lfloor \log_n(m) \rfloor + 1) + \log \left(\frac{146}{9} \pi^2 \right).
\end{aligned}$$

4. Tomamos $0 < k < l$, $0 \leq m \leq n^k/2$. Notamos que

$$D_n(k, m, l) = \operatorname{arcosh} \left(\cosh(D_n(k, 0, l)) + 8 \sqrt{n^k n^l (n^k - 1) (n^l - 1)} \sin^2 \left(\frac{\pi m}{n^k} \right) \right)$$

Usaremos las siguientes desigualdades para $\cosh(x)$

$$\begin{aligned}
\frac{e^x}{2} &\leq \cosh(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}; \\
\cosh(x) &\leq e^x, \quad \text{si } x \geq 0
\end{aligned}$$

Junto con las cotas para $D_n(k, 0, l)$ obtenemos

$$\left(\frac{5n - 6}{10n} \right)^2 n^{l-k} \leq \cosh(D_n(k, 0, l)) \leq \frac{50 + 36n}{25n} n^{l-k}$$

Procedemos a acotar por arriba

$$\begin{aligned}
D_n(k, m, l) &\leq \operatorname{arcosh} \left(\frac{50 + 36n}{25n} n^{l-k} + 8n^{l+k} \sin^2 \left(\frac{\pi m}{n^k} \right) \right) \\
&\leq \operatorname{arcosh} \left(\frac{50 + 36n}{25n} n^{l-k} + 8n^{l+k} \frac{\pi^2 m^2}{n^{2k}} \right) \\
&\leq \operatorname{arcosh} \left(\frac{50 + 36n}{25n} n^{l-k} + 8\pi^2 n^{l-k} m^2 \right) \\
&\leq \log \left(2n^{l-k} \left(\frac{50 + 36n}{25n} + 8\pi^2 m^2 \right) \right) \\
&\leq \log \left(2n^{l-k} \left(\frac{50 + 36n}{25n} m^2 + 8\pi^2 m^2 \right) \right) \\
&\leq (l - k) \log(n) + 2 \log(m) + \log \left(2 \left(\frac{50 + 36n}{25n} + 8\pi^2 \right) \right) \\
&\leq (l - k) \log(n) + 2 \log(n) \log_n(m) + \log(164) \\
&\leq (l - k + 2) \log(n) + 2 \log(n) \lfloor \log_n(m) \rfloor + \log(164)
\end{aligned}$$

Ahora procedemos a acotar por abajo, nuevamente usaremos que $n^k - 1 \geq (1 - \frac{1}{n}) n^k$ y de manera similar para l .

$$\begin{aligned}
D_n(k, m, l) &\geq \operatorname{arcosh} \left(\left(\frac{5n - 6}{10n} \right)^2 n^{l-k} + 8 \left(1 - \frac{1}{n} \right) n^{l+k} \sin^2 \left(\frac{\pi m}{n^k} \right) \right) \\
&\geq \operatorname{arcosh} \left(\left(\frac{5n - 6}{10n} \right)^2 n^{l-k} + 8 \left(1 - \frac{1}{n} \right) n^{l+k} \frac{4m^2}{n^{2k}} \right) \\
&\geq \log \left(\left(\frac{5n - 6}{10n} \right)^2 n^{l-k} + 32 \left(1 - \frac{1}{n} \right) n^{l-k} m^2 \right) \\
&\geq (l - k) \log(n) + \log \left(\left(\frac{5n - 6}{10n} \right)^2 + 32 \left(1 - \frac{1}{n} \right) m^2 \right) \\
&\geq (l - k) \log(n) + 2 \log(m) + \log \left(32 \left(1 - \frac{1}{n} \right) \right) \\
&\geq (l - k) \log(n) + 2 \log(n) \lfloor \log_n(m) \rfloor + \log \left(32 \left(1 - \frac{1}{n} \right) \right)
\end{aligned}$$

□

2.5. Demostración de la Cuasi-isometría

En la sección anterior acotamos $D_n(k, m, l)$, es decir la distancia en el disco de Poincaré de algunas imágenes de nuestra cuasi-isometría. Ahora procederemos a acotar la cantidad definida anteriormente

$$D'_n(k, m, l) := d_{RT(n)}((k, m), (l, 0)).$$

Esto equivaldrá a acotar las distancias en el árbol anillado.

Lema 2.5.1. *Tenemos los siguientes valores para $D'_n(k, m, l)$:*

- Si $n \geq 2$ y $k \leq l$, entonces

$$D'_n(k, 0, l) = l - k;$$

- Si $n = 2$, $k \leq l$ y $1 \leq m \leq n^k/2$, entonces

$$l - k + 2\lfloor \log_2(m) \rfloor \leq D'_2(k, m, l) \leq l - k + 2\lfloor \log_2(m) \rfloor + 2;$$

- Si $n \geq 3$, $k \leq l$ y $1 \leq m \leq n^k/2$, entonces

$$l - k + 1 + 2\lfloor \log_n(m) \rfloor \leq D'_n(k, m, l) \leq l - k + 3 + 2\lfloor \log_n(m) \rfloor.$$

Demostración. El primer punto es claro ya que la geodésica canónica entre $(l, 0)$ y $(k, 0)$ es la que consiste en subir sucesivamente al padre hasta llegar a $(k, 0)$, esto se logra en $l - k$ pasos.

El segundo punto también se desprende de la estructura de las geodésicas canónicas. La geodésica canónica desde $(l, 0)$ hasta (k, m) corresponde primero a subir $l - k$ niveles hasta llegar a $(k, 0)$, luego falta agregar la distancia en el grafo entre $(k, 0)$ y (k, m) los cuales son dos vértices en el mismo nivel de $RT(2)$ con distancia anillo m , usando Lema 2.2.7 podemos concluir.

El tercer punto se demuestra de manera idéntica al segundo salvo que usamos el caso de Lema 2.2.7 para $n \geq 3$. \square

Ahora demostraremos la relación entre $D_n(k, m, l)$ y $D'_n(k, m, l)$

Lema 2.5.2. *Sean n, k, m, l naturales tales que $n \geq 2$, $0 \leq k \leq l$ y $0 \leq m \leq n^k/2$. Se tiene lo siguiente*

- Si $n = 2$

$$\log\left(\frac{2}{25}\right) \leq D_2(k, m, l) - \log(2)D'_2(k, m, l) \leq \log(656);$$

- Si $n \geq 3$

$$-3\log(n) \leq D_n(k, m, l) - \log(n)D'_n(k, m, l) \leq \log(164n).$$

Demostración. Partamos con $n = 2$, uniendo las cotas de Lema 2.4.1 y Lema 2.5.1 obtenemos las siguientes desigualdades:

$$\begin{aligned} \log\left(\frac{3}{2}\right) &\leq D_2(0, 0, l) - \log(2)D'_2(0, 0, l) \leq \log(4); \\ \log\left(\frac{2}{25}\right) &\leq D_2(k, 0, l) - \log(2)D'_2(k, 0, l) \leq \log\left(\frac{61}{25}\right); \\ \log(4) &\leq D_2(k, m, k) - \log(2)D'_2(k, m, k) \leq \log\left(\frac{584}{9}\pi^2\right); \\ \log(4) &\leq D_2(k, m, l) - \log(2)D'_2(k, m, l) \leq \log(656). \end{aligned}$$

Tomando la menor de las cotas inferiores y la mayor de las cotas superiores obtenemos lo pedido.

Para $n \geq 3$ nuevamente usamos las cotas de Lema 2.4.1 y Lema 2.5.1 para obtener:

$$\begin{aligned} \log\left(2 - \frac{1}{n}\right) &\leq D_n(0, 0, l) - \log(n)D'_n(0, 0, l) \leq \log(4); \\ \log\left(2\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{5n}\right)^2\right) &\leq D_n(k, 0, l) - \log(n)D'_n(k, 0, l) \leq \log\left(\frac{36}{25} + \frac{2}{n}\right); \\ \log\left(32\left(1 - \frac{1}{n}\right)n^{-3}\right) &\leq D_n(k, m, k) - \log(n)D'_n(k, m, k) \leq \log\left(\frac{146}{9}\pi^2 n\right); \\ \log(n^{-3}) &\leq D_n(k, m, l) - \log(n)D'_n(k, m, l) \leq \log(164n). \end{aligned}$$

Tomamos la menor de las cotas inferiores y la mayor de las cotas superiores y estamos listos. \square

Antes de continuar, será útil entender que efecto tiene sobre un vértice de $RT(n)$ el hecho de subir repetidamente de nivel hacia su padre, tenemos el siguiente lema, proveniente de [18].

Lema 2.5.3. *Sea x un real positivo y sea n un natural positivo, se tiene la siguiente igualdad:*

$$\left\lfloor \frac{\lfloor \frac{x}{n} \rfloor}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{n^2} \right\rfloor.$$

Demostración. Sea a un real positivo y definamos $b = \left\lfloor \frac{\lfloor a \rfloor}{n} \right\rfloor$. Por definición de la parte entera tenemos

$$b \leq \frac{\lfloor a \rfloor}{n} < b + 1 \Leftrightarrow nb \leq \lfloor a \rfloor < n(b + 1).$$

Como nb es natural tenemos que lo anterior es equivalente a

$$\Leftrightarrow nb \leq a < n(b + 1) \Leftrightarrow b \leq \frac{a}{n} < b + 1.$$

De esto último se desprende que $\left\lfloor \frac{a}{n} \right\rfloor = b = \left\lfloor \frac{\lfloor a \rfloor}{n} \right\rfloor$. Escogiendo $a = x/n$ concluimos lo pedido. \square

Observación 2.5.4. Por definición de $RT(n)$ sabemos que el padre de (k, m) es $(k - 1, \lfloor \frac{m}{n} \rfloor)$, cuyo padre a la vez es $(k - 2, \lfloor \frac{\lfloor \frac{m}{n} \rfloor}{n} \rfloor)$. El lema recién mostrado nos dice que lo podemos escribir equivalentemente como $(k - 2, \lfloor \frac{m}{n^2} \rfloor)$. Más aún, inductivamente tenemos que si $j < k$, entonces el ascendente de (k, m) que está en el nivel j es $(j, \lfloor \frac{x}{n^{k-j}} \rfloor)$.

Como comentamos, nuestro objetivo es que dado un par de vértices u, v en el árbol anillado, le asignaremos una terna de números k, m, l que nos permita realizar comparaciones de las distancias con las funciones $D_n(k, m, l)$ y $D'_n(k, m, l)$. Sin pérdida de generalidad asumiremos que v está en el nivel más bajo y u está más cerca de la raíz. Digamos que $u = (k, m_1)$ y $v = (l, m_2)$ con $k \leq l$, tomaremos k como el nivel de u , l como el nivel de v y definimos m de la siguiente forma:

$$m := \min \left\{ \left| m_1 - \left\lfloor \frac{m_2}{n^{l-k}} \right\rfloor \right|, n^k - \left| m_1 - \left\lfloor \frac{m_2}{n^{l-k}} \right\rfloor \right| \right\} \quad (2.3)$$

La Observación 2.5.4 nos dice que el ascendente de v que está en el nivel k es $(k, \lfloor \frac{m_2}{n^{l-k}} \rfloor)$, luego m corresponde a la distancia anillo entre u y el ascendente de v en el nivel k . Procedemos con la siguiente propiedad de nuestros k, m, l recién definidos.

Lema 2.5.5. *Sea $u = (k, m_1)$ y $v = (l, m_2)$ vértices de $RT(n)$ con $k \leq l$. Definimos m como en (2.3), se tiene lo siguiente:*

$$\begin{aligned} |d_{RT(n)}(u, v) - D'_n(k, m, l)| &\leq 1; \\ |d_{RT(n)}(u, v) - D'_n(k, m + 1, l)| &\leq 1; \\ |d_{RT(n)}(u, v) - D'_n(k, m - 1, l)| &\leq 1. \end{aligned}$$

Demostración. Partamos analizando $d_{RT(n)}(u, v)$. Por estructura de las geodésicas canónicas tenemos que la geodésica canónica que parte en v hasta u sube $l - k$ niveles hasta llegar al ascendente de v que está en nivel k , llamémosle v^* , y luego recorre de v^* hasta u . Entonces tenemos que $d_{RT(n)}(u, v) = l - k + d_{RT(n)}(u, v^*)$. Por definición, tenemos que m es la distancia anillo entre v^* y u . Podemos decir entonces que $d_{RT(n)}(u, v)$ es igual a $l - k$ más la distancia en $RT(n)$ entre dos vértices cuya distancia anillo es m .

Por otro lado tenemos que $D'_n(k, m, l)$ también es $l - k$ más la distancia en $RT(n)$ entre dos vértices cuya distancia anillo es m . Por el análisis realizado en secciones anteriores (ver Lema 2.2.4 y Lema 2.2.5) tenemos que dado una distancia anillo (en nuestro caso m) hay a lo más dos opciones, consecutivas, de distancias en el grafo. Esto nos permite concluir que $d_{RT(n)}(u, v)$ y $D'_n(k, m, l)$ o bien son iguales o bien difieren por uno.

Un análisis similar de $D'_n(k, m \pm 1, l)$ nos dice que su valor corresponde a $l - k$ más la distancia en el grafo entre dos vértices cuya distancia anillo es $m \pm 1$. Debemos entonces comparar las diferencias entre las distancias en el grafo asociadas a distancias anillo $m - 1$, m y $m + 1$. Separaremos este análisis en dos casos, primero veremos que ocurre si m es una distancia destacada (ver Definición 2.2.3). En este caso sólo hay una posibilidad para $d_{RT(n)}(u, v)$, en particular se tiene $d_{RT(n)}(u, v) = D'_n(k, m, l)$. Notamos entonces, recordando Lema 2.2.4 y Lema 2.2.5, que para una distancia anillo de $m \pm 1$ hay a lo más dos opciones consecutivas, y una de esas opciones es $D'_n(k, m, l)$. Se sigue así la conclusión.

Vamos por el segundo caso, en el que m no es distancia anillo destacada. En este caso tenemos dos valores posibles para $d_{RT(n)}(u, v)$. Aparecen nuevamente dos opciones, si $m + 1$ es distancia anillo destacada, entonces hay sólo una opción para su distancia en el grafo asociada, y esta opción es también una de las posibilidades para $d_{RT(n)}(u, v)$, se sigue que su diferencia es a lo más 1. Si $m + 1$ no es distancia anillo destacada, entonces hay dos valores posibles para su distancia en el grafo. Estas dos opciones son exactamente las mismas para $d_{RT(n)}(u, v)$, se sigue también que su diferencia es a lo más uno. El análisis para $m - 1$ es análogo, tenemos entonces la conclusión deseada. \square

Resumiendo nuestra estrategia hasta ahora, tenemos que dados u, v vértices de $RT(n)$ les asignamos los vértices (k, m) y $(l, 0)$. De momento hemos demostrado la relación que hay entre las distancias en el grafo de nuestros vértices originales y los vértices asignados. Falta demostrar la relación entre las distancias de sus imágenes bajo f en el disco de Poincaré, este será el último ingrediente para demostrar la cuasi-isometría.

Antes de proceder daremos algo de intuición para las cotas del teorema siguiente. Primero notamos que nuestra función f no distribuye los ángulos de los vértices como en Figura 2.1 o Figura 2.2, si no que lo hace como en Figura 2.3.

Teniendo en cuenta esa distribución de los ángulos, daremos un par de ejemplos para ilustrar el motivo de las cotas del siguiente teorema. Primero con $n = 3$ consideremos $u = (2, 3)$ y $v = (3, 1)$,

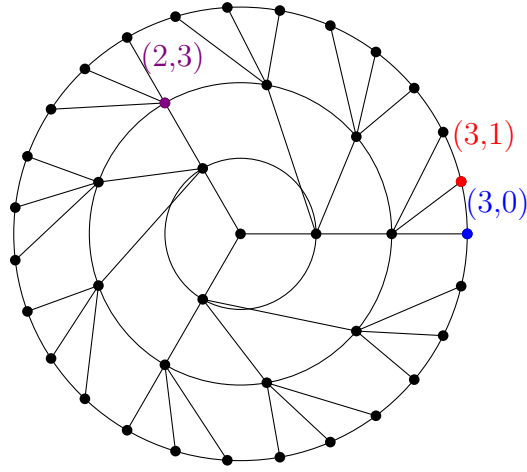


Figura 2.4: Los 3 primeros niveles de $f(RT(3))$. Nuestro procedimiento asigna a $(2,3)$ y $(3,1)$ los vértices $(2,3)$ y $(3,0)$. Notamos que la distancia entre $f((2,3))$ y $f((3,1))$ es menor a la distancia entre $f((2,3))$ y $f((3,0))$.

Demostración. Antes de comenzar recordamos la fórmula de distancia en el disco de Poincaré

$$d_P(r_0 e^{i\theta_0}, r_1 e^{i\theta_1}) = \operatorname{arcosh} \left(1 + \frac{2(r_0 - r_1)^2 + 8r_0 r_1 \sin^2(\frac{\theta_1 - \theta_0}{2})}{(1 - r_0^2)(1 - r_1^2)} \right).$$

Un análisis de esta fórmula nos dice que lo único que importa a la hora de calcular la distancia sería el radio de cada punto (en nuestro caso correspondería al nivel de u y el de v , los cuales no variaremos) y al ángulo entre ellos. Notamos también que esta distancia es creciente respecto al ángulo entre los puntos cuando este ángulo está entre 0 y π . En lo que resta siempre trabajaremos con ángulos entre 0 y π , por lo cual podremos comparar los ángulos para comparar las distancias. Por brevedad hablaremos del ángulo asociado a $D_n(k, m, l)$, con esto nos referiremos al ángulo (entre 0 y π) entre $f((k, m))$ y $f((l, 0))$.

Partamos con el caso $m = 0$.

- El ángulo entre $f(u)$ y $f(v)$ es $2\pi \left(\frac{m_2}{n^l} - \frac{m_1}{n^k} \right)$;
- El ángulo asociado a $D(k, 1, l)$ es $2\pi \frac{1}{n^k}$;
- El ángulo asociado a $D(k, 0, l)$ es 0 .

Como $m = 0$ esto nos indica que $m_1 = \left\lfloor \frac{m_2}{n^{l-k}} \right\rfloor$, trabajamos las siguientes desigualdades

$$\begin{aligned} m_1 &\leq \frac{m_2}{n^{l-k}} < m_1 + 1 && \left| \cdot \frac{1}{n^k} \right. \\ \Leftrightarrow \frac{m_1}{n^k} &\leq \frac{m_2}{n^l} < \frac{m_1}{n^k} + \frac{1}{n^k} && \left| - \frac{m_1}{n^k} \right. \\ \Leftrightarrow 0 &\leq \frac{m_2}{n^l} - \frac{m_1}{n^k} < \frac{1}{n^k} && \left| \cdot 2\pi \right. \\ \Leftrightarrow 0 &\leq 2\pi \left(\frac{m_2}{n^l} - \frac{m_1}{n^k} \right) < 2\pi \cdot \frac{1}{n^k} \end{aligned}$$

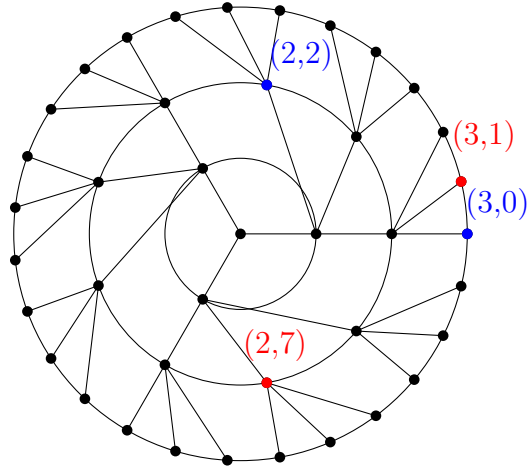


Figura 2.5: Los 3 primeros niveles de $f(RT(3))$, notamos comparando los ángulos, que la distancia entre nuestros vértices originales (en rojo) es mayor a la distancia entre los vértices asignados (en azul).

Tenemos entonces que el ángulo entre $f(u), f(v)$ está acotado por los ángulos asociados a $D_n(k, 0, l)$ y $D_n(k, 1, l)$. Por lo comentado anteriormente podemos concluir el primer punto.

Para demostrar el segundo punto separaremos en 4 casos dependiendo que forma tiene m .

– **Caso 1:** $m = m_1 - \lfloor \frac{m_2}{n^{l-k}} \rfloor$.

Los ángulos relevantes son los siguientes

- El ángulo entre $f(u)$ y $f(v)$ es $2\pi \left(\frac{m_1}{n^k} - \frac{m_2}{n^l} \right)$;
- El ángulo asociado a $D_n(k, m, l)$ es $2\pi \frac{m}{n^k} = 2\pi \left(\frac{m_1 - \lfloor \frac{m_2}{n^{l-k}} \rfloor}{n^k} \right)$;
- El ángulo asociado a $D_n(k, m - 1, l)$ es $2\pi \frac{m - 1}{n^k} = 2\pi \left(\frac{m_1 - \lfloor \frac{m_2}{n^{l-k}} \rfloor - 1}{n^k} \right)$.

Trabajamos las desigualdades

$$\begin{aligned} & \left\lfloor \frac{m_2}{n^{l-k}} \right\rfloor \leq \frac{m_2}{n^{l-k}} < \left\lfloor \frac{m_2}{n^{l-k}} \right\rfloor + 1 & \left| \cdot \left(-\frac{1}{n^k} \right) \right. \\ \Leftrightarrow & -\frac{\left\lfloor \frac{m_2}{n^{l-k}} \right\rfloor}{n^k} \geq -\frac{m_2}{n^l} > -\frac{\left\lfloor \frac{m_2}{n^{l-k}} \right\rfloor}{n^k} - \frac{1}{n^k} & \left| + \frac{m_1}{n^k} \right. \\ \Leftrightarrow & \frac{m_1}{n^k} - \frac{\left\lfloor \frac{m_2}{n^{l-k}} \right\rfloor}{n^k} \geq \frac{m_1}{n^k} - \frac{m_2}{n^l} > \frac{m_1}{n^k} - \frac{\left\lfloor \frac{m_2}{n^{l-k}} \right\rfloor}{n^k} - \frac{1}{n^k}. \end{aligned}$$

Multiplicando todo por 2π obtenemos que el ángulo entre $f(u)$ y $f(v)$ es menor o igual al ángulo asociado a $D_n(k, m, l)$ y es mayor o igual al ángulo asociado a $D_n(k, m - 1, l)$. Obtenemos entonces que

$$D_n(k, m, l) \geq d_P(f(u), f(v)) \geq D_n(k, m - 1, l).$$

– **Caso 2:** $\mathbf{m} = \left\lfloor \frac{\mathbf{m}_2}{\mathbf{n}^{l-k}} \right\rfloor - \mathbf{m}_1$.

Los ángulos relevantes son los siguientes

- El ángulo entre $f(u)$ y $f(v)$ es $2\pi \left(\frac{m_2}{n^l} - \frac{m_1}{n^k} \right)$;
- El ángulo asociado a $D_n(k, m, l)$ es $2\pi \frac{m}{n^k} = 2\pi \left(\frac{\lfloor \frac{m_2}{n^{l-k}} \rfloor - m_1}{n^k} \right)$;
- El ángulo asociado a $D_n(k, m + 1, l)$ es $2\pi \frac{m + 1}{n^k} = 2\pi \left(\frac{\lfloor \frac{m_2}{n^{l-k}} \rfloor - m_1 + 1}{n^k} \right)$.

Trabajamos las desigualdades

$$\begin{aligned} & \left\lfloor \frac{m_2}{n^{l-k}} \right\rfloor \leq \frac{m_2}{n^{l-k}} < \left\lfloor \frac{m_2}{n^{l-k}} \right\rfloor + 1 & \left| \cdot \frac{1}{n^k} \right. \\ \Leftrightarrow & \frac{\lfloor \frac{m_2}{n^{l-k}} \rfloor}{n^k} \leq \frac{m_2}{n^l} < \frac{\lfloor \frac{m_2}{n^{l-k}} \rfloor}{n^k} + \frac{1}{n^k} & \left| - \frac{m_1}{n^k} \right. \\ \Leftrightarrow & \frac{\lfloor \frac{m_2}{n^{l-k}} \rfloor}{n^k} - \frac{m_1}{n^k} \leq \frac{m_2}{n^l} - \frac{m_1}{n^k} < \frac{\lfloor \frac{m_2}{n^{l-k}} \rfloor}{n^k} - \frac{m_1}{n^k} + \frac{1}{n^k}. \end{aligned}$$

Multiplicando por 2π obtenemos que el ángulo entre $f(u)$ y $f(v)$ es mayor o igual al ángulo asociado a $D_n(k, m, l)$ y menor o igual al ángulo asociado a $D_n(k, m + 1, l)$. Obtenemos entonces que

$$D_n(k, m, l) \leq d_P(f(u), f(v)) \leq D_n(k, m + 1, l).$$

– **Caso 3:** $\mathbf{m} = \mathbf{n}^k - \left(\mathbf{m}_1 - \left\lfloor \frac{\mathbf{m}_2}{\mathbf{n}^{l-k}} \right\rfloor \right)$.

Los ángulos relevantes son los siguientes

- El ángulo entre $f(u)$ y $f(v)$ es $2\pi - 2\pi \left(\frac{m_1}{n^k} - \frac{m_2}{n^l} \right) = 2\pi \left(1 - \frac{m_1}{n^k} + \frac{m_2}{n^l} \right)$;
- El ángulo asociado a $D_n(k, m, l)$ es $2\pi \frac{m}{n^k} = 2\pi \left(1 - \frac{m_1}{n^k} + \frac{\lfloor \frac{m_2}{n^{l-k}} \rfloor}{n^k} \right)$;
- El ángulo asociado a $D_n(k, m + 1, l)$ es $2\pi \frac{m + 1}{n^k} = 2\pi \left(1 - \frac{m_1}{n^k} + \frac{\lfloor \frac{m_2}{n^{l-k}} \rfloor}{n^k} + \frac{1}{n^k} \right)$.

Trabajamos las desigualdades

$$\begin{aligned} & \left\lfloor \frac{m_2}{n^{l-k}} \right\rfloor \leq \frac{m_2}{n^{l-k}} < \left\lfloor \frac{m_2}{n^{l-k}} \right\rfloor + 1 & \left| \cdot \frac{1}{n^k} \right. \\ \Leftrightarrow & \frac{\lfloor \frac{m_2}{n^{l-k}} \rfloor}{n^k} \leq \frac{m_2}{n^l} < \frac{\lfloor \frac{m_2}{n^{l-k}} \rfloor}{n^k} + \frac{1}{n^k} & \left| + 1 - \frac{m_1}{n^k} \right. \\ \Leftrightarrow & 1 - \frac{m_1}{n^k} + \frac{\lfloor \frac{m_2}{n^{l-k}} \rfloor}{n^k} \leq 1 - \frac{m_1}{n^k} + \frac{m_2}{n^l} < 1 - \frac{m_1}{n^k} + \frac{\lfloor \frac{m_2}{n^{l-k}} \rfloor}{n^k} + \frac{1}{n^k} \end{aligned}$$

Multiplicando por 2π obtenemos que el ángulo entre $f(u)$ y $f(v)$ es mayor o igual al ángulo asociado a $D_n(k, m, l)$ y menor o igual al ángulo asociado a $D_n(k, m + 1, l)$. Obtenemos entonces que

$$D_n(k, m, l) \leq d_P(f(u), f(v)) \leq D_n(k, m + 1, l).$$

– **Caso 4:** $\mathbf{m} = \mathbf{n}^k - \left(\left\lfloor \frac{\mathbf{m}_2}{\mathbf{n}^{l-k}} \right\rfloor - \mathbf{m}_1 \right)$.

Los ángulos relevantes son los siguientes

- El ángulo entre $f(u)$ y $f(v)$ es $2\pi - 2\pi \left(\frac{m_2}{n^l} - \frac{m_1}{n^k} \right) = 2\pi \left(1 - \frac{m_2}{n^l} + \frac{m_1}{n^k} \right)$;
- El ángulo asociado a $D_n(k, m, l)$ es $2\pi \frac{m}{n^k} = 2\pi \left(1 - \frac{\lfloor \frac{m_2}{n^{l-k}} \rfloor}{n^k} + \frac{m_1}{n^k} \right)$;
- El ángulo asociado a $D_n(k, m - 1, l)$ es $2\pi \frac{m - 1}{n^k} = 2\pi \left(1 - \frac{\lfloor \frac{m_2}{n^{l-k}} \rfloor}{n^k} + \frac{m_1}{n^k} - \frac{1}{n^k} \right)$.

Trabajamos las desigualdades

$$\begin{aligned} & \left\lfloor \frac{m_2}{n^{l-k}} \right\rfloor \leq \frac{m_2}{n^{l-k}} < \left\lfloor \frac{m_2}{n^{l-k}} \right\rfloor + 1 & \left| \cdot \left(-\frac{1}{n^k} \right) \right. \\ \Leftrightarrow & -\frac{\lfloor \frac{m_2}{n^{l-k}} \rfloor}{n^k} \geq -\frac{m_2}{n^l} > -\frac{\lfloor \frac{m_2}{n^{l-k}} \rfloor}{n^k} - \frac{1}{n^k} & \left| + 1 + \frac{m_1}{n^k} \right. \\ \Leftrightarrow & 1 - \frac{\lfloor \frac{m_2}{n^{l-k}} \rfloor}{n^k} + \frac{m_1}{n^k} \geq 1 - \frac{m_2}{n^l} + \frac{m_1}{n^k} > 1 - \frac{\lfloor \frac{m_2}{n^{l-k}} \rfloor}{n^k} + \frac{m_1}{n^k} - \frac{1}{n^k} \end{aligned}$$

Multiplicando por 2π obtenemos que el ángulo entre $f(u)$ y $f(v)$ es menor o igual al ángulo asociado a $D_n(k, m, l)$ y mayor o igual al ángulo asociado a $D_n(k, m - 1, l)$. Obtenemos entonces que

$$D_n(k, m, l) \geq d_P(f(u), f(v)) \geq D_n(k, m - 1, l).$$

Notamos que en todos los casos se tiene que

$$D_n(k, m - 1, l) \leq d_P(f(u), f(v)) \leq D_n(k, m + 1, l),$$

por ende estamos listos. □

Finalmente demostraremos la cuasi-isometría, partiremos con el caso $n = 2$.

Teorema 2.5.7. *La función f es una $(\frac{1}{\log(2)}, \log(1312))$ -cuasi-isometría entre $RT(2)$ y el disco de Poincaré.*

Demostración. Sean u, v vértices de $RT(2)$. Sin pérdida de generalidad asumiremos que v está en el nivel más bajo, denotemos $u = (k, m_1)$ y $v = (l, m_2)$ con $k \leq l$. Definimos m como en (2.3). Si $m \neq 0$ el Teorema 2.5.6 nos indica que

$$D_2(k, m - 1, l) \leq d_P(f(u), f(v)) \leq D_2(k, m + 1, l).$$

Acotaremos por arriba, usando Lema 2.5.2 y Lema 2.5.5

$$\begin{aligned} d_P(f(u), f(v)) &\leq D_2(k, m+1, l) \leq \log(2)D'_2(k, m+1, l) + \log(656) \\ &\leq \log(2)d_{RT(2)}(u, v) + \log(1312). \end{aligned}$$

Acotemos por abajo, usando los mismos lemas

$$\begin{aligned} d_P(f(u), f(v)) &\geq D_2(k, m-1, l) \geq \log(2)D'_2(k, m-1, l) + \log\left(\frac{2}{25}\right) \\ &\geq \log(2)d_{RT(2)}(u, v) - \log(25). \end{aligned}$$

Uniando ambas cotas obtenemos

$$\log(2)d_{RT(2)}(u, v) - \log(25) \leq d_P(f(u), f(v)) \leq \log(2)d_{RT(2)}(u, v) + \log(1312).$$

Veamos el caso $m = 0$, el Teorema 2.5.6 nos indica que

$$D_2(k, 0, l) \leq d_P(f(u), f(v)) \leq D_2(k, 1, l).$$

Acotemos por arriba, usando Lema 2.5.2 y Lema 2.5.5

$$\begin{aligned} d_P(f(u), f(v)) &\leq D_2(k, 1, l) \leq \log(2)D'_2(k, 1, l) + \log(656) \\ &\leq \log(2)d_{RT(2)}(u, v) + \log(1312). \end{aligned}$$

Acotemos por abajo, usando los mismos lemas y notando que $D'_2(k, 0, l) = l - k = d_{RT(2)}(u, v)$

$$\begin{aligned} d_P(f(u), f(v)) &\geq D_2(k, 0, l) \geq \log(2)D'_2(k, 0, l) + \log\left(\frac{2}{25}\right) \\ &= \log(2)d_{RT(2)}(u, v) + \log(2) - \log(25). \end{aligned}$$

Uniando ambas cotas obtenemos

$$\log(2)d_{RT(2)}(u, v) + \log(2) - \log(25) \leq d_P(f(u), f(v)) \leq \log(2)d_{RT(2)}(u, v) + \log(1312).$$

Para ambos casos tenemos que se cumple

$$\log(2)d_{RT(2)}(u, v) - \log(25) \leq d_P(f(u), f(v)) \leq \log(2)d_{RT(2)}(u, v) + \log(1312). \quad (2.4)$$

Notando que $\frac{1}{\log(2)} > \log(2)$ y que $\log(1312) > \log(25)$ obtenemos

$$\log(2)d_{RT(2)}(u, v) - \log(1312) \leq d_P(f(u), f(v)) \leq \frac{1}{\log(2)}d_{RT(2)}(u, v) + \log(1312).$$

Tenemos entonces que f es una $(\frac{1}{\log(2)}, \log(1312))$ -incrustación cuasi-isométrica. Solamente falta demostrar que una $\log(1312)$ vecindad de $f(RT(2))$ cubre al disco de Poincaré. Para esto veremos que cualquier punto del disco de Poincaré está a una distancia menor a $\log(1312)$ de una imagen de f . Notamos que las imágenes de vértices en $RT(2)$ que están en el mismo nivel forman círculos concéntricos. Revisando la demostración de Lema 2.4.1 notamos que la distancia entre estos círculos está acotada por arriba por $\log(6)$.

Dentro de cada nivel los vértices están equiespaciados, nuevamente revisando la demostración de 2.4.1 tenemos que

$$D_2(k, 1, k) \leq \operatorname{arcosh}(1 + 8\pi^2) \leq \operatorname{arcosh}(80) \leq \log(160).$$

Esto nos dice que la distancia en el disco de Poincaré entre imágenes de vértices vecinos de anillo en $RT(2)$ está acotada por arriba por $\log(160)$. Para un punto cualquiera en el disco de Poincaré su distancia más corta a la imagen bajo f de un vértice de $RT(2)$ está acotada por arriba por $\log(6) + \log(160) = \log(960)$, podemos ver esto moviéndonos radialmente lejos del origen hasta encontrar un círculo de imágenes y luego tomamos el camino hasta el vértice más cercano en ese círculo. \square

Demostraremos ahora la cuasi-isometría para el caso $n \geq 3$.

Teorema 2.5.8. *Sea $n \geq 3$ y sea $\varepsilon = \max\{n^4, 164n^2, 640n\}$. La función f es una $(\log(n), \varepsilon)$ -cuasi-isometría entre $RT(n)$ y el disco de Poincaré.*

Demostración. Sean u, v vértices de $RT(n)$. Sin pérdida de generalidad asumiremos que v está en el nivel más bajo, denotaremos $u = (k, m_1)$ y $v = (l, m_2)$ con $k \leq l$. Definimos m como en (2.3). Si $m \neq 0$ el Teorema 2.5.6 nos indica que

$$D_n(k, m-1, l) \leq d_P(f(u), f(v)) \leq D_n(k, m+1, l).$$

Acotemos por arriba, usando Lema 2.5.2 y Lema 2.5.5

$$\begin{aligned} d_P(f(u), f(v)) &\leq D_n(k, m+1, l) \leq \log(n)D'_n(k, m+1, l) + \log(164n) \\ &\leq \log(n)d_{RT(n)}(u, v) + \log(164n^2). \end{aligned}$$

Acotemos por abajo, usando los mismos lemas

$$\begin{aligned} d_P(f(u), f(v)) &\geq D_n(k, m-1, l) \geq \log(n)D'_n(k, m-1, l) - 3\log(n) \\ &\geq \log(n)d_{RT(n)}(u, v) - 4\log(n). \end{aligned}$$

El caso $m = 0$ se hace similar a su equivalente en la demostración del teorema para $n = 2$. Obtenemos finalmente que en ambos casos se cumple la siguiente desigualdad

$$\log(n)d_{RT(n)}(u, v) - \log(n^4) \leq d_P(f(u), f(v)) \leq \log(n)d_{RT(n)}(u, v) + \log(164n^2). \quad (2.5)$$

Notando que como $n \geq 3$ se tiene que $\log(n) > \frac{1}{\log(n)}$ y recordando como definimos ε tenemos que

$$\frac{1}{\log(n)}d_{RT(n)}(u, v) - \varepsilon \leq d_P(f(u), f(v)) \leq \log(n)d_{RT(n)}(u, v) + \varepsilon.$$

Por ende f es una $(\log(n), \varepsilon)$ -incrustación cuasi-isométrica. Falta solamente demostrar que una ε vecindad de $f(RT(n))$ cubre el disco de Poincaré. Para esto veremos una cota por arriba para la distancia entre un punto del disco de Poincaré y la imagen más cercana de f . Al igual que en el caso $n = 2$ partiremos notando que las imágenes de vértices de $RT(n)$ bajo f forman círculos concéntricos. Revisando la demostración del Lema 2.4.1 notamos que la distancia entre círculos consecutivos está acotada por arriba por $\log(4n)$ y que la distancia entre imágenes de vértices vecinos dentro de un mismo círculo está acotada por arriba por $\log(160)$. Tenemos entonces que la distancia entre un punto cualquiera del disco de Poincaré y la imagen de f más cercana está acotada por arriba por $\log(4n) + \log(160) = \log(640n)$, esta cota la obtenemos alejándonos radialmente del origen hasta un círculo de imágenes de f y luego tomando el camino más corto hacia una imagen de ese círculo. Por como definimos ε concluimos que f es una $(\log(n), \varepsilon)$ -cuasi-isometría. \square

2.6. Consecuencias de la cuasi-isometría

Habiendo ya demostrado la cuasi-isometría entre los árboles anillados y el plano hiperbólico, podremos hacer explícita la noción (mencionada en la introducción) de que los espacios tienen la misma geometría a gran escala.

Teorema 2.6.1. *Sea $n \geq 2$ y sea f la cuasi-isometría definida en Ecuación (2.2), tenemos la siguiente relación entre $d_{RT(n)}$ y d_P :*

$$\lim_{d_{RT(n)}(u,v) \rightarrow \infty} \frac{d_P(f(u), f(v))}{d_{RT(n)}(u, v)} = \log(n).$$

Demostración. Se sigue de analizar las desigualdades (2.4) y (2.5). Notamos que estas desigualdades, las cuales obtuvimos en la sección anterior, son más ajustadas que lo necesario para demostrar la cuasi-isometría. El hecho de que tengamos estas desigualdades más ajustadas permite obtener este resultado el cual es más fuerte que lo que obtendríamos solo con la cuasi-isometría. \square

El teorema recién demostrado nos indica que para u, v vértices de $RT(n)$ suficientemente lejos se tiene que su distancia en $RT(n)$ multiplicada por $\log(n)$ es aproximadamente igual a la distancia entre sus imágenes bajo f en el plano hiperbólico, y a mayor distancia entre u y v mejor es la aproximación.

Volviendo a otra idea de la introducción, podremos ser más específicos respecto al hecho de por qué no usaremos el método de [41] que incrusta árboles arbitrarios en el espacio hiperbólico. Como comentamos antes, este método no logra una cuasi-isometría, y esto se refleja en que su método obtiene una cota de la siguiente forma para u, v un par de vértices de un árbol arbitrario T de ramificación menor o igual a n (esta cota se sigue de la sección 5 de aquel trabajo escogiendo de manera adecuada ε):

$$\log(n) \leq \frac{d_P(\Phi(u), \Phi(v))}{d_T(u, v)} \leq \log(n) + C_1.$$

Donde Φ corresponde a la incrustación de T en el espacio hiperbólico y C_1 es una constante que depende solo de n .

Por otro lado, nuestro trabajo obtiene cotas de la forma:

$$\log(n) + \frac{C_2}{d_{RT(n)}(u, v)} \leq \frac{d_P(f(u), f(v))}{d_{RT(n)}(u, v)} \leq \log(n) + \frac{C_3}{d_{RT(n)}(u, v)}.$$

Con C_2 y C_3 constantes que dependen solo de n . Tenemos entonces, que el método propuesto por [41] no presenta el comportamiento de que la aproximación mejora a medida que aumenta la distancia entre los vértices originales. Más aún, se aprecia en aquel trabajo que si queremos hacer que C_1 tienda a cero, se debe tener que $\min_{u,v \in T} \frac{d_P(\Phi(u), \Phi(v))}{d_T(u, v)}$ tiende a infinito. Es decir, Φ dilata demasiado las distancias.

2.7. Convergencia de una discretización del IMCF en el espacio hiperbólico

Recordando nuevamente la introducción, tenemos que no se conoce una manera canónica de discretizar el flujo por curvatura media inversa. Aprovechando los resultados de la sección 1 y 2

del presente trabajo, describiremos a grandes rasgos un procedimiento para, dado una propuesta de discretización del flujo en el espacio hiperbólico, poder comprobar si muestra características de convergencia deseables.

El punto clave para aplicar este criterio es definir una forma para pasar desde una curva en el plano hiperbólico a una curva en algún árbol anillado. Claramente se tiene que un candidato ideal para este propósito sería alguna cuasi-inversa de nuestra cuasi-isometría. Sin embargo, hay ciertas consideraciones que tener en cuenta a la hora de hacer este proceso, como por ejemplo:

- ¿Cuál de todas las posibles cuasi-inversas usamos?
- ¿Qué entendemos por curva en el árbol anillado? Podría por ejemplo ser un conjunto de vértices con las aristas que los unen, o podría también ser la frontera de algún subgrafo, entre otras ideas.
- ¿Que significaría que nuestra curva en el grafo fuera convexa?
- ¿Cuál sería el conjunto de curvas admisibles para esta transformación? ¿Todas las curvas suaves y convexas? ¿O necesitamos alguna clase más restrictiva?
- ¿Le asignamos algún orden o parametrización a la curva en nuestro árbol anillado? ¿O simplemente lo vemos como un subconjunto del espacio ambiente?

Los resultados obtenidos en la sección 1, donde se aborda la regularidad del flujo continuo y su convergencia hacia círculos en el infinito, junto con los hallazgos de la sección 2, que muestran que la discretización del espacio hiperbólico mejora a grandes distancias, nos llevan a considerar que un enfoque prometedor para la discretización del flujo por curvatura media inversa sería aquel en el que, al aplicar el flujo continuo a una curva inicial en el espacio hiperbólico y a la vez aplicar el flujo discreto a su representación en el árbol anillado, la distancia entre estas dos curvas (vistas ambas en el árbol anillado) se mantenga acotada con el paso del tiempo. Expresaremos esta idea en Criterio 2.7.1 y Figura 2.6.

Criterio 2.7.1 (Criterio de convergencia de propuesta de IMCF discreto.). *Definimos la siguiente notación:*

- *Sea \mathcal{C} una clase de curvas en \mathbb{H} las cuales llamaremos curvas admisibles. \mathcal{C} debe estar contenida en la clase de curvas suaves y convexas (pero podría ser más restrictiva) y también esta clase debe ser invariante bajo el IMCF. Esto significa que dada una curva inicial en \mathcal{C} , su evolución bajo el IMCF está en \mathcal{C} para todo t .*
- *Sea ξ una función que envía cada curva de la clase \mathcal{C} desde el plano hiperbólico al árbol anillado.*
- *Sea $\gamma_0 \in \mathcal{C}$ una curva inicial convexa en el plano hiperbólico. Definimos $\Gamma_0 := \xi(\gamma_0)$, es decir la discretización de nuestra curva inicial.*
- *Denotaremos γ_t como la curva en el espacio hiperbólico resultante al fluir por el IMCF γ_0 hasta tiempo t , en particular $\gamma_t \in \mathcal{C}$.*
- *De manera similar denotaremos Γ_t la curva discreta en $RT(n)$ resultante al fluir con el análogo discreto Γ_0 hasta tiempo t .*

- Por último sea $d(\cdot, \cdot)$ una distancia entre curvas en el árbol anillado, podría ser por ejemplo la distancia de Hausdorff o de Fréchet.

Diremos que el candidato a flujo discreto cumple el criterio de convergencia si, para todo γ_0 existe $C > 0$ tal que la distancia entre $\xi(\gamma_t)$ (la discretización de la curva que fluyó con el flujo usual) y Γ_t (la curva que fluyó con el análogo discreto) se mantiene acotada por C para todo $t > 0$.

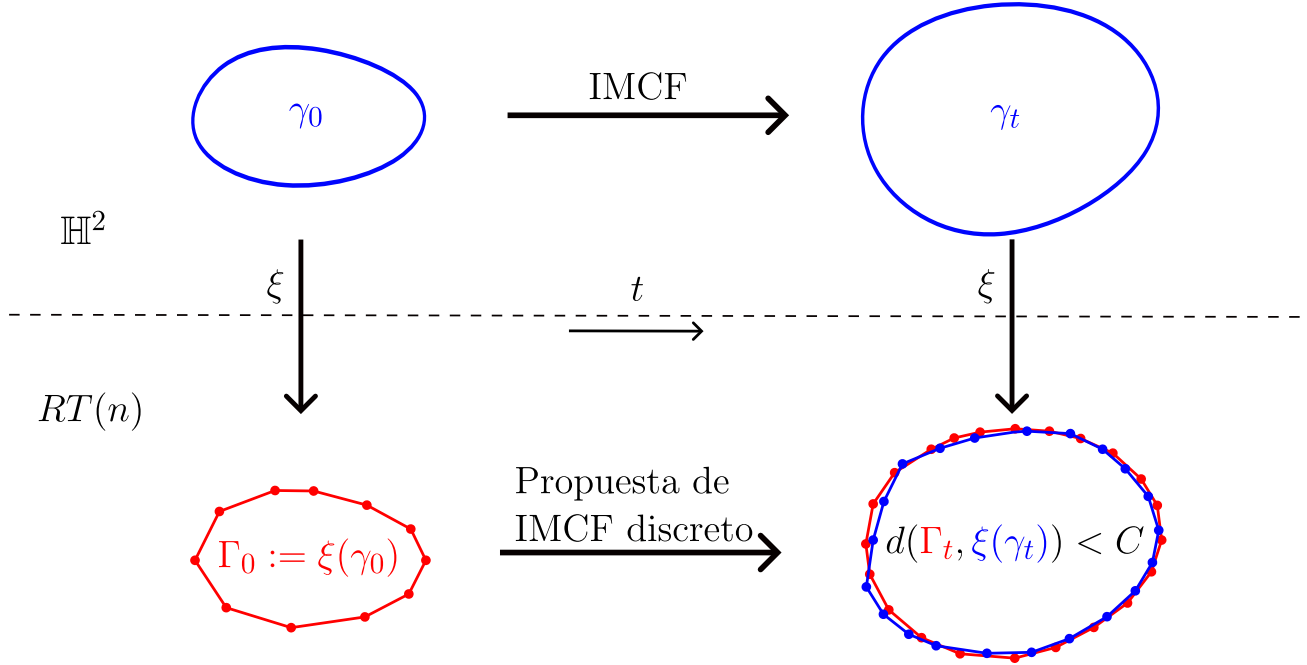


Figura 2.6: Diagrama que ilustra el criterio de convergencia de una propuesta de IMCF discreto. Se aprecia que la validez del criterio es casi equivalente a la conmutatividad del diagrama, módulo una distancia acotada por C .

Los resultados de la sección 1, principalmente Teorema 0.0.1, nos indica que cualquier curva inicial suave y convexa preserva esas características al fluir bajo el IMCF, por lo cual aquel conjunto de curvas es un buen candidato para ser nuestra clase de curvas admisibles \mathcal{C} . Sin embargo, podría llegar a ser necesario elegir una clase que cumpla un criterio de regularidad más fuerte, el cual debería ser demostrado también se mantiene al fluir por IMCF. Por otro lado, la cuasi-isometría demostrada en la sección 2 nos brinda una herramienta prometedora para definir una función ξ que transforme curvas de la clase \mathcal{C} a curvas discretas en el árbol anillado. Considerar aquellos resultados en conjunto nos motiva a pensar que efectivamente existe un análogo discreto del IMCF en el espacio hiperbólico que cumple el criterio recién establecido. Describimos esta idea en el siguiente conjetura.

Conjetura 2.7.2 (Existencia de análogo discreto del IMCF). *Existe ξ , una función que transforma curvas en el plano hiperbólico a curvas discretas en $RT(n)$ para algún n . Existe también, $d(\cdot, \cdot)$ una función distancia entre curvas de $RT(n)$. Finalmente, existe una clase \mathcal{C} y un análogo discreto del IMCF en el espacio hiperbólico definido sobre $RT(n)$ tal que se cumple Criterio 2.7.1.*

Apéndice A

Resultados de EDPs parabólicas lineales

En este apéndice definiremos los espacios naturales para trabajar las EDPs parabólicas que son relevantes para nuestros propósitos y luego daremos un resultado importante sobre esta teoría. Cabe destacar que estas ideas pueden fácilmente ser desarrolladas para ecuaciones con más variables espaciales pero por simplicidad nos centraremos en el dominio $\Omega = S^1 \times [0, T)$ y denotaremos las variables siguiendo la convención $\theta \in S^1$ y $t \in [0, T)$. Comenzamos definiendo los espacios de Hölder tanto elípticos como parabólicos.

Fijamos $\alpha \in (0, 1)$. Para una función $f : U \subseteq S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ definimos

$$[f]_{\alpha;U} = \sup_{\substack{\theta_1, \theta_2 \in U \\ \theta_1 \neq \theta_2}} \frac{|f(\theta_1) - f(\theta_2)|}{|\theta_1 - \theta_2|^\alpha}, \quad |f|_{\alpha;U} = |f|_{0;U} + [f]_{\alpha;U}.$$

Donde $|f|_{0;U} = \sup_U |f|$. Más aún para k natural definimos

$$|f|_{k,U} = \max_{0 \leq i \leq k} \sup_U |\partial_\theta^i f|, \quad |f|_{k+\alpha;U} = |f|_{k;U} + [\partial_\theta^k f]_{\alpha;U}$$

Definimos el espacio $C^0(U)$ como el de funciones definidas sobre U continuas y acotadas, definimos también el espacio $C^k(U)$ como el espacio de funciones sobre U que sean k veces derivables y que estas derivadas sean continuas y acotadas. Finalmente definimos los espacios $C^\alpha(U)$, $C^{k+\alpha}(U)$ como los espacios de funciones en los cuales $|\cdot|_{\alpha;U}$, $|\cdot|_{k+\alpha;U}$ son finitos respectivamente.

Procedemos ahora con los espacios Hölder parabólicos, definimos en Ω la distancia parabólica entre $z_1 := (\theta_1, t_1)$ y $z_2 := (\theta_2, t_2)$ como

$$\rho(z_1, z_2) = |\theta_1 - \theta_2| + |t_1 - t_2|^{1/2}.$$

Para u definida sobre un dominio $Q \subseteq \Omega$ denotamos

$$[u]_{\alpha,\alpha/2;Q} = \sup_{\substack{z_1, z_2 \in Q \\ z_1 \neq z_2}} \frac{|u(z_1) - u(z_2)|}{\rho^\alpha(z_1, z_2)}, \quad |u|_{\alpha,\alpha/2;Q} = |u|_{0;Q} + [u]_{\alpha,\alpha/2;Q}$$

Donde $|u|_{0;Q} = \sup_Q |u|$.

Definimos el espacio $C^{\alpha,\alpha/2}(Q)$ el espacio de todas las funciones u tal que $|u|_{\alpha,\alpha/2;Q}$ es finito.

Para k natural definimos

$$\begin{aligned} [u]_{k+\alpha, (k+\alpha)/2; Q} &= \sum_{i+2j=k} [\partial_\theta^i \partial_t^j u]_{\alpha, \alpha/2; Q}, \\ |u|_{k+\alpha, (k+\alpha)/2; Q} &= \sum_{i+2j \leq k} |\partial_\theta^i \partial_t^j u|_{0; Q} + [u]_{k+\alpha, (k+\alpha)/2; Q}. \end{aligned}$$

El espacio $C^{k+\alpha, (k+\alpha)/2}(Q)$ se define como el espacio de funciones sobre Q tal que $|u|_{k+\alpha, (k+\alpha)/2; Q}$ es finito. Notamos que algunos autores agregan otros terminos a esta norma, mas estos son superfluos debido a que están acotados por los otros términos que si están incluidos en nuestra definición, ver [31] capítulo IV.

Siguiendo el mantra de las ecuaciones parabólicas que indica que una derivada temporal vale como dos derivadas espaciales en lo que a regularidad respecta, definimos los espacios $C^{2k, k}(Q)$ con k entero como el espacio de funciones $2k$ veces derivables en θ y k veces derivables en t y que estas derivadas son acotadas.

En lo que resta de esta sección describiremos un resultado central de la teoría lineal de ecuaciones parabólicas. Nos enfocaremos en ecuaciones de la forma

$$-\partial_t u + Lu = f$$

con

$$Lu = a(\theta, t)\partial_\theta^2 u + b(\theta, t)\partial_\theta u + c(\theta, t)u. \quad (\text{A.1})$$

Pedimos también la condición de que la ecuación sea uniformemente parabólica lo cual corresponde a que existan constantes $\lambda, \Lambda > 0$ tales que

$$\Lambda \geq a(\theta, t) \geq \lambda$$

Teorema A.0.1 (Solubilidad de ecuaciones lineales). *Sea $\alpha \in (0, 1)$ y sea L definido como en (A.1) tal que $|a, b, c|_{\alpha, \alpha/2; \Omega} \leq K$. Luego para cualquier $f \in C^{\alpha, \alpha/2}(\Omega)$ y $u_0 \in C^{2+\alpha}(S^1)$ el problema*

$$\begin{cases} -\partial_t u + Lu = f \\ u(\cdot, 0) = u_0 \end{cases}$$

tiene una solución única en $C^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(\Omega)$ y cumple la desigualdad

$$|u|_{2+\alpha, 1+\alpha/2; \Omega} \leq c(\Omega, \alpha, K, \lambda) (|f|_{\alpha, \alpha/2; \Omega} + |u_0|_{2+\alpha; S^1}).$$

Demostración. La demostración de [28] Capítulo IV, teorema 5.1. aplica cuando reemplazamos un dominio en \mathbb{R}^n por S^1 . También ver [27] teorema 10.2.2, teorema 10.3.3. y la observación 10.3.5. donde mencionan que la demostración puede adaptarse para aplicar en una variedad suave en lugar de un dominio en \mathbb{R}^n . \square

Bibliografía

- [1] B. Andrews and C. Hopper. *The Ricci Flow in Riemannian Geometry: A Complete Proof of the Differentiable 1/4-Pinching Sphere Theorem*. Number v. 2011 in Lecture Notes in Mathematics. Springer, 2011.
- [2] Richard L. Arnowitt, Stanley Deser, and Charles W. Misner. Coordinate invariance and energy expressions in general relativity. *Physical Review*, 122:997–1006, 1961.
- [3] Miklós Bergou, Basile Audoly, Etienne Vouga, Max Wardetzky, and Eitan Grinspun. Discrete viscous threads. *ACM Trans. Graph.*, 29(4), jul 2010.
- [4] Miklós Bergou, Max Wardetzky, Stephen Robinson, Basile Audoly, and Eitan Grinspun. Discrete Elastic Rods. *ACM Transactions on Graphics (SIGGRAPH)*, 27(3):63:1–63:12, aug 2008.
- [5] Kenneth A. Brakke. *The Motion of a Surface by Its Mean Curvature. (MN-20)*. Princeton University Press, 1978.
- [6] Wei Chen, Wenjie Fang, Guangda Hu, and Michael W. Mahoney. On the hyperbolicity of small-world and tree-like random graphs. In Kun-Mao Chao, Tsan-sheng Hsu, and Der-Tsai Lee, editors, *Algorithms and Computation*, pages 278–288, Berlin, Heidelberg, 2012. Springer Berlin Heidelberg.
- [7] Keenan Crane, Ulrich Pinkall, and Peter Schröder. Robust fairing via conformal curvature flow. *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, 32:1 – 10, 2013.
- [8] Mattias Dahl, Romain Gicquaud, and Anna Sakovich. Penrose type inequalities for asymptotically hyperbolic graphs. *Annales Henri Poincaré*, 14(5):1135–1168, nov 2012.
- [9] Qi Ding. The inverse mean curvature flow in rotationally symmetric spaces. *Chin. Ann. Math. Ser. B*, 32:27–44, 01 2011.
- [10] M.P. do Carmo. *Riemannian Geometry*. Mathematics (Boston, Mass.). Birkhäuser, 1992.
- [11] Abdallah El, Abderrahim Elmoataz, and Ahcene Sadi. On the mean curvature flow on graphs with applications in image and manifold processing. In *2013 IEEE International Conference on Computer Vision*, pages 697–704, 2013.
- [12] M. Gage and R. S. Hamilton. The heat equation shrinking convex plane curves. *Journal of Differential Geometry*, 23(1):69 – 96, 1986.

- [13] Jie Gao, Xianfeng David Gu, and Feng Luo. *Discrete Ricci Flow for Geometric Routing*, pages 556–563. Springer New York, New York, NY, 2016.
- [14] Claus Gerhardt. Flow of nonconvex hypersurfaces into spheres. *Journal of Differential Geometry*, 32(1):299 – 314, 1990.
- [15] Claus Gerhardt. *Curvature Problems*. Series in Geometry and Topology. International Press of Boston, Somerville, MA, 2007.
- [16] Claus Gerhardt. Inverse curvature flows in hyperbolic space. *Journal of Differential Geometry*, 89(3):487 – 527, 2011.
- [17] Robert Geroch. Energy extraction. *Annals of the New York Academy of Sciences*, 224(1):108–117, 1973.
- [18] R.L. Graham, D.E. Knuth, and O. Patashnik. *Concrete Mathematics: A Foundation for Computer Science*. A @foundation for computer science. Addison-Wesley, 1994.
- [19] Matthew A. Grayson. The heat equation shrinks embedded plane curves to round points. *Journal of Differential Geometry*, 26(2):285 – 314, 1987.
- [20] Richard Hamilton. The formations of singularities in the ricci flow. *Surveys in differential geometry*, 2(1):7–136, 1993.
- [21] Richard S. Hamilton. Three-manifolds with positive Ricci curvature. *Journal of Differential Geometry*, 17(2):255 – 306, 1982.
- [22] Richard S. Hamilton. Four-manifolds with positive curvature operator. *Journal of Differential Geometry*, 24:153–179, 1986.
- [23] Gerhard Huisken. Flow by mean curvature of convex surfaces into spheres. *Journal of Differential Geometry*, 20(1):237 – 266, 1984.
- [24] Gerhard Huisken and Tom Ilmanen. The Inverse Mean Curvature Flow and the Riemannian Penrose Inequality. *Journal of Differential Geometry*, 59(3):353 – 437, 2001.
- [25] Pei-Ken Hung and Mu-Tao Wang. Inverse mean curvature flows in the hyperbolic 3-space revisited, 2014.
- [26] N.V. Krylov. *Nonlinear Elliptic and Parabolic Equations of the Second Order*. Mathematics and its Applications. Springer Netherlands, 1987.
- [27] N.V. Krylov. *Lectures on Elliptic and Parabolic Equations in Holder Spaces*. Graduate studies in mathematics. American Mathematical Society, 1996.
- [28] O.A. Ladyzhenskaia, V.A. Solonnikov, and N.N. Ural'tseva. *Linear and Quasi-linear Equations of Parabolic Type*. American Mathematical Society, translations of mathematical monographs. American Mathematical Society, 1988.
- [29] Juan Lanfranco. An introduction to quasi-isometry and hyperbolic groups. Master's thesis, University of Pennsylvania, 2019.

- [30] J.M. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 2003.
- [31] G.M. Lieberman. *Second Order Parabolic Differential Equations*. World Scientific, 1996.
- [32] D.G. Luenberger. *Optimization by Vector Space Methods*. Professional Series. Wiley, 1997.
- [33] R Malladi and J A Sethian. Image processing via level set curvature flow. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 92(15):7046–7050, 1995.
- [34] C. Mantegazza. *Lecture Notes on Mean Curvature Flow*. Progress in Mathematics. Springer Basel, 2011.
- [35] Thomas Marquardt. *The inverse mean curvature flow for hypersurfaces with boundary*. PhD thesis, Freien Universität Berlin, 2012.
- [36] Benjamin Meco. Expanding flows of curves in the hyperbolic plane. Master’s thesis, Uppsala University, 2021.
- [37] M. Miglioranza. *The Volume Preserving Mean Curvature Flow in a Compact Riemannian Manifold*. UCL (University College London), 2020.
- [38] John W. Morgan and Gang Tian. Ricci flow and the poincare conjecture, 2007.
- [39] Ulrich Pinkall, Boris Springborn, and Steffen Weißmann. A new doubly discrete analogue of smoke ring flow and the real time simulation of fluid flow. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 40(42):12563, oct 2007.
- [40] T. Ruen and R. Nelso. Hyperbolic tiling shown in the poincaré ball model, 2020.
- [41] Rik Sarkar. Low distortion delaunay embedding of trees in hyperbolic plane. In Marc van Kreveld and Bettina Speckmann, editors, *Graph Drawing*, pages 355–366, Berlin, Heidelberg, 2012. Springer Berlin Heidelberg.
- [42] Sebastian Scholtes, Henrik Schumacher, and Max Wardetzky. Variational convergence of discrete elasticae, 2019.
- [43] Vladimir Shchur. Quasi-isometries between hyperbolic metric spaces, quantitative aspects. *HAL*, 2013.
- [44] Guoliang Xu, Qing Pan, and Chandrajit L. Bajaj. Discrete surface modeling using geometric flows. 2003.