



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

TESIS DE MAGÍSTER

Teorema de Frankel sobre variedades con borde

Autor:

Víctor F. VALENCIA HERNÁNDEZ

Profesor Guía:

Dr. Pedro GASPAR

*Tesis presentada como requisito para optar
al grado de Magíster en Matemática*

en la

Facultad de Matemáticas
Pontificia Universidad Católica de Chile

Comisión:

Dra. Mariel SÁEZ TRUMPER

Dra. Carolina A. REY

16 de marzo de 2026

«Los paréntesis hacen un mundo mejor.»

Ignacio Valencia

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

Resumen

Facultad de Matemáticas

Magíster en Matemática

Teorema de Frankel sobre variedades con borde

por Víctor F. VALENCIA HERNÁNDEZ

La presente tesis se enmarca en la Geometría Riemanniana de variedades con borde, extendiendo resultados clásicos mediante herramientas de cálculo variacional. En los **Capítulos 1, 2 y 3** se sistematiza el marco teórico de las variedades riemannianas con borde y se compilan resultados sobre convexidad bajo una perspectiva variacional. En el **Capítulo 4** se presentan los resultados conseguidos en este trabajo. Además, en los **Apéndices A y B** se referencian los resultados necesarios en la teoría de variedades y tensores.

Como parte de los aportes principales, se presenta una demostración detallada del Teorema de Frankel [**Fra61**] bajo hipótesis de curvatura seccional no negativa y estricta convexidad del borde, utilizando para ello el análisis de puntos críticos del funcional energía. Asimismo, se discute el papel de los resultados de Petersen y Wilhelm [**PW03**] y la perspectiva de Fraser y Li [**FL17**] para formular teoremas de rigidez, demostrando que las subvariedades totalmente geodésicas con borde libre ven restringida su libertad de movimiento si no se intersectan; esto fuerza configuraciones isométricas a modelos rígidos, tales como cilindros o toros de mapeo.

El trabajo concluye que el enfoque variacional permite reconstruir la geometría global de la variedad a partir de las condiciones de criticidad en el borde, abriendo nuevas vías para el estudio de otros teoremas clásicos en este marco.

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por ANID FONDECYT 11230874.

Agradecimientos

Quiero empezar agradeciendo a Pedro Gaspar, mi profesor guía, ya que de no ser por él nada de este trabajo podría haberse completado. Especialmente por confiar en mi progreso y apoyarme en mis estudios, no creo poder decir lo suficiente para poder hacer notar lo importante que fue su ayuda. Por lo que muchas gracias.

Quiero también agradecer a mi familia que me apoyó en este largo camino. A Sofía por apoyarme emocionalmente estos años. Mis amigos que constantemente me recordaban el trabajo a realizar.

Sé que no hay mucha gente que falta por mencionar aquí, pero a todos muchas gracias.

Índice general

Resumen	III
Agradecimientos	v
Lista de Símbolos	IX
0. Introducción	1
1. Variedades riemannianas	7
1.1. Conceptos categóricos	7
1.2. Herramientas diferenciales	9
1.2.1. Conexión riemanniana	9
1.2.2. Transporte paralelo	10
1.2.3. Geodésicas	12
1.2.4. Vecindades	13
1.3. Curvatura de una conexión afín	15
1.4. Operador diferenciales	17
2. Subvariedades riemannianas	21
2.1. Subvariedades riemannianas	21
2.2. Conexión inducida	23
2.3. Segundo Tensor Fundamental	23
2.4. Geodésicas en subvariedades	25
2.5. Variedades con borde	26
3. Geometría variacional de geodésicas	31
3.1. Distancia Riemanniana	31
3.2. Funcional Energía	36
3.3. Coordenadas periféricas	38
3.4. Funcional Volumen	41
3.5. Campos Jacobi	44
3.6. Convexidad	47

4. Resultados principales	55
4.1. Teorema de Frankel	55
4.2. Curvatura de Ricci	58
4.3. Curvatura Seccional	59
4.4. Rigidez	64
A. Variedades Diferenciales	71
A.1. Subvariedades suaves	71
A.2. Orientabilidad	71
A.3. Variedad doble	72
B. Álgebra Tensorial	75
B.1. Fibrados vectoriales	75
B.2. Campos tensoriales	77
B.3. Derivada de Lie	79
Bibliografía	81

Lista de Símbolos

Símbolo	Descripción	Página
M, \tilde{M}	variedades suaves o riemannianas	7
p, q	puntos en una variedad	7
$\delta, \tilde{\delta}, \langle \cdot \cdot \rangle$	métricas riemannianas	7
$\mathbf{T}_p M$	espacio tangente a M en el punto p	7
$\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$	vectores	7
$\ \vec{u}\ $	norma de \vec{u}	8
Φ, Ψ	mapas entre variedades	7
$\mathbf{D}\Phi_p$	derivada de Φ en el punto p	7
\cong	isometría	8
\mathcal{U}, \mathcal{V}	abiertos o vecindades	8
$\mathfrak{X}(M)$	espacio de campos vectoriales suaves sobre M	8
X, Y, Z	campos vectoriales suaves	8
$\mathcal{F}(M)$	espacio de funciones suaves sobre M	8
f, g, h	funciones suaves	8
Tr	traza	8
$\dim M$	dimensión de M	8
vol_M	forma de volumen de M	8
∇	conexión riemanniana	9
\mathbf{L}_X	derivada de Lie respecto a X	9
Γ^i_{jk}	símbolos de Christoffel	10
α, β	curvas admisibles	11
$\bar{\mathfrak{X}}(\alpha), \Gamma(\mathbf{T}M \upharpoonright \alpha)$	espacio de campos vectoriales sobre M a lo largo de α	11
\mathbf{D}_t	derivada covariante	11
γ, σ	geodésicas	12
$\Omega_{p,q}, \Omega(M; p, q)$	espacio de caminos de p a q en M	12
$\Gamma_{p,q}, \Gamma(M; p, q)$	espacio de caminos geodésicos de p a q en M	12
\exp, \exp^M	mapa exponencial de M	13
$\mathcal{B}(p, \varepsilon)$	bola geodésica con centro p y radio ε	13
R, R_∇	tensor de curvatura de Riemann	15

Símbolo	Descripción	Página
Sec	curvatura seccional	16
Ric	curvatura de Ricci	17
∇f	gradiente de f	18
$\nabla \cdot X$	divergencia de X	18
Hf	hessiana de f	18
$\nabla^2 f$	laplaciano de f	19
P, Q	subvariedades de M	21
$N_p P$	espacio normal a P en el punto p	22
Tan^P	proyección tangente	22
Nor^P	proyección normal	22
∇^P	conexión inducida sobre P	23
Π^P	segundo tensor fundamental de P	23
ℓ^P	segunda forma fundamental de P	24
S^P	operador de forma de P	24
H^P	curvatura media de P	25
$\text{Int}(M)$	interior de M	26
∂M	borde de M	26
Fr	frontera topológica	26
\mathcal{L}	funcional longitud	31
\mathcal{E}	funcional energía	31
dist_M	distancia riemanniana	31
$B(p, \varepsilon)$	bola métrica con centro p y radio ε	32
$\mathcal{D}(M)$	doble variedad de M	39
\mathcal{V}	funcional volumen	41
$\mathfrak{J}(\sigma)$	espacio de campos Jacobi sobre σ	44
I_σ	forma de índice de σ	45
Φ^*	aplicación regrediente de Φ (<i>pullback</i>)	78
Φ_*	aplicación progrediente de Φ (<i>pushforward</i>)	78

Capítulo 0

Introducción

La Geometría Diferencial y su sub-área natural, la Geometría Riemanniana, que estudia las variedades diferenciales con un tensor métrico incorporado, constituye un campo fundamental de las matemáticas. La trascendencia de este marco teórico queda evidenciada por la robustez de sus teoremas fundamentales. EXAMPLI GRATIA, el Teorema de Hopf-Rinow [HR31] nos da una equivalencia entre poseer la estructura de espacio métrico completo y poder unir dos puntos mediante una trayectoria de longitud mínima (geodésica). Por otro lado, el Teorema de Comparación de Rauch [Rau51] nos permite predecir el comportamiento de una variedad cualquiera comparándola con un espacio más simple, como una esfera o \mathbb{R}^n . Más allá de estas propiedades globales, la Geometría Riemanniana también nos permite caracterizar la topología de sus subestructuras internas de menor dimensión.

En este contexto, la tesis está motivada por el Teorema de Frankel [Fra61], el cual establece que: «en una variedad riemanniana completa conexa con curvatura seccional positiva, dos subvariedades compactas totalmente geodésicas tienen intersección no vacía si la suma de sus dimensiones es mayor o igual a la dimensión ambiente». Las subvariedades totalmente geodésicas pueden imaginarse como copias «planas» o perfectas dentro de un espacio curvo, la línea del Ecuador en la tierra; su importancia radica en que preservan las distancias mínimas del ambiente. El ejemplo canónico es la intersección de dos círculos maximales en una esfera, que siempre tienen dos puntos en común.

El método clásico de demostración, usado por Frankel [Fra66], es el método variacional, que determina la existencia de una geodésica minimizadora del funcional de energía entre las dos subvariedades y utiliza la curvatura positiva/no negativa para llegar a una contradicción al calcular la segunda variación del funcional. Frankel mismo mostró en 1966 que el resultado se extiende reemplazando la hipótesis de curvatura seccional por curvatura de Ricci si se supone que las subvariedades son hipersuperficies mínimas.

Petersen y Wilhelm [PW03] profundizaron en este análisis, ofreciendo dos demostraciones del teorema original: una por el método variacional y otra utilizando la idea de Calabi de acotar el laplaciano de las funciones distancia. Usando este último método, estudiaron el fenómeno

de «rigidez» en casos con curvatura de Ricci no negativa donde las hipersuperficies no se intersecan. El resultado es la obtención de un producto de variedades que impone restricciones a la topología del dominio encerrado. Suponiendo cierta orientabilidad, obtenemos: un producto de variedades, un toro, un cilindro o un doble cilindro; en todos los casos tenemos una asociada una métrica producto que impone restricciones a la topología del dominio encerrado por las hipersuperficies.

El problema central y la transición a variedades con borde

Destaquemos que todos los trabajos mencionados anteriormente suponen que la variedad ambiente es completa y no posee borde. Una continuación natural de esta línea de investigación es precisamente considerar un borde suave, lo cual abordaron Fraser y Li [FL17]. En su artículo, demuestran que: «en una variedad riemanniana orientable compacta con curvatura de Ricci no negativa y borde estrictamente convexo, dos hipersuperficies mínimas orientables propiamente incrustadas con borde libre deben intersectarse». Una de sus demostraciones usa el método del laplaciano de las funciones distancias.

Aquí nace la pregunta fundacional de esta tesis:

¿Se puede demostrar un equivalente usando el método variacional?

Es evidente la necesidad de varias hipótesis extra cuando estudiamos el caso con borde.

De partida, la convexidad del borde juega un papel fundamental. Intuivamente, un borde es convexo si cualquier geodésica que une dos puntos de la variedad permanece contenida dentro de ella, sin escaparse por el borde.

Al transicionar de variedades cerradas a variedades con borde, surgen dificultades técnicas mayores. En ausencia de borde, el Teorema de Hopf-Rinow asegura que siempre existe una geodésica minimizante; sin embargo, en presencia de un borde, la curva que intenta minimizar la distancia podría verse obligada a chocar contra el borde o incluso seguirlo, perdiendo una suavidad necesaria de una geodésica. La hipótesis de convexidad es, por lo tanto, lo que nos garantiza que las herramientas variacionales clásicas sigan siendo válidas.

La otra propiedad importante es el borde libre que viene a ser la ortogonalidad de la subvariedad con el borde del ambiente. Esta se desprende de suponer 0 el término de borde en la fórmula de la variación de volumen, *ID EST, free*. Y nos permite obtener que la geodésica minimizadora en el método variacional es ortogonal en sus extremos y, en consecuencia, determinar la existencia de campos variacionales tangentes a las subvariedad que son los que permiten obtener una contradicción en el caso que las subvariedades no se interseccionen.

Es interesante contrastar las hipótesis. En el Teorema de Frankel original (sin borde), se requiere una curvatura seccional estrictamente positiva ($\text{Sec} > 0$) para forzar la intersección. En nuestra

extensión a variedades con borde, permitimos que la curvatura sea simplemente no negativa ($\text{Sec} \geq 0$), pero compensamos esta debilidad exigiendo que el borde sea estrictamente convexo. Esta «positividad» desplazada del interior al borde es la que permite que las hipersuperficies sigan sintiendo la presión geométrica necesaria para encontrarse.

Contribuciones principales de la tesis

Las principales contribuciones de esta investigación al campo de la Geometría Riemanniana son las siguientes:

- Se presenta una compilación y completación rigurosa de las distintas condiciones de convexidad en variedades con borde, formalizando conceptos que no se encuentran condensados en un único texto. Este trabajo relaciona la curvatura del borde con aspectos métricos, como la existencia de geodésicas que minimizan distancias entre subvariedades.
- Se presenta un tratamiento unificado y variacional sobre las propiedades de intersección de subvariedades totalmente geodésicas en ambientes de curvatura positiva/no negativa, abarcando los fenómenos de rigidez asociados.
- Se logra responder afirmativamente la pregunta central de la tesis, demostrando un equivalente del teorema de intersección para variedades con borde utilizando el método variacional, lo cual proporciona una perspectiva complementaria a las demostraciones existentes basadas en el laplaciano de las funciones distancia.

Enunciado de los teoremas centrales

Para facilitar la comparación de las diferentes hipótesis entre los trabajos anteriores y los resultados de esta investigación, se enuncian a continuación los teoremas centrales de esta tesis, los cuales se demuestran formalmente en el **Capítulo 4**:

Teorema (página 63). *Sea M una n -variedad riemanniana compacta con borde $\partial M \neq \emptyset$. Suponga que M tiene curvatura seccional no negativa y el borde es convexo. Además, sean P, Q dos subvariedades de M compactas totalmente geodésicas bilaterales con borde libre. Si $\dim P + \dim Q \geq n$, entonces $P \cap Q \neq \emptyset$.*

Teorema (página 66). *Sea M una n -variedad riemanniana completa de curvatura seccional no negativa y P, Q dos hipersuperficies conexas cerradas totalmente geodésicas bilaterales. Si $P \cap Q = \emptyset$ y delimitan un dominio $\Omega \subset M$, entonces $\Omega \cong P \times [0, \lambda]$, donde $\lambda = \text{dist}(P, Q)$.*

Teorema (página 68). *Sea M una n -variedad compacta convexa de curvatura seccional no negativa; y sean P, Q dos hipersuperficies conexas compactas con borde libre totalmente geodésicas y homólogas*

relativamente a ∂M . Si $P \cap Q = \emptyset$, entonces la región delimitada por P y Q es isométrica a un producto

$$P \times [0, \lambda], \quad \lambda = \text{dist}(P, Q).$$

Para un lector no familiarizado con la terminología técnica de la Geometría Riemanniana, los resultados anteriores pueden entenderse mejor bajo las siguientes claves geométricas:

- **Borde libre.** En inglés *free boundary*. Las subvariedades P y Q chocan con el borde de la variedad ambiente ∂M en un ángulo recto (ortogonalidad). Esta condición nos permite variar una subvariedad de manera ortogonal y que esta misma se «deslice» por el borde.
- **bilateral.** En inglés *2-sided*. La subvariedad tiene dos caras claramente definidas dentro del ambiente (es orientable respecto a su entorno). Esto es fundamental para los resultados de rigidez.

Contextualización con la literatura reciente

Esta tesis se contextualiza a la luz de trabajos muy recientes, como el artículo de Naff y Zhu [NZ24]. Si bien su trabajo también contiene resultados relacionados con la intersección y la rigidez, su enfoque se limita a las hipersuperficies mínimas y no considera subvariedades de codimensión mayor a uno, que es un ámbito crucial de esta tesis. Además, su metodología utiliza argumentos basados en resultados de comparación para el Laplaciano de las funciones distancia, mientras que esta tesis prioriza la perspectiva variacional. Por completitud, se hace una breve referencia a la tesis de magíster de Moore [Moo21], cuyas técnicas son similares en el contexto del Laplaciano, aunque el contexto geométrico general de su trabajo es distinto al de la curvatura de Ricci estándar abordada aquí.

Estructura de la tesis

Esta tesis está estructurada en cuatro capítulos:

- **Capítulo 1:** Repaso de los aspectos más generales y resultados fundamentales de las variedades riemannianas, entre los que se encuentran: isometrías, conexiones afines, curvaturas y operadores relacionados con la derivada covariante.
- **Capítulo 2:** Detalle de la teoría para subvariedades, con el fin de poder trabajar en variedades riemannianas con borde. El énfasis se centra en diferencial lo que son las propiedades intrínsecas (como se vio en el capítulo anterior) y las extrínsecas.
- **Capítulo 3:** Compilación y completación de los conceptos requeridos para generalizar el Teorema de Frankel para el caso con borde. Esto incluye la definición de una variedad riemanniana como un espacio métrico, el desarrollo de la teoría clásica del funcional de

energía, y la definición rigurosa del concepto de convexidad en el contexto de variedades riemannianas.

- **Capítulo 4:** Enunciación formal y demostración de los teoremas antes mencionados para el caso con borde, además de exponer demostraciones adicionales para los casos de rigidez.

Algunas de las notaciones no están definidas en el contenido de la tesis, mas en la lista de símbolos.

Capítulo 1

Variedades riemannianas

En este capítulo se introducen las nociones fundamentales de la geometría riemanniana que servirán de base para los resultados posteriores. Partiendo del marco de las variedades diferenciales, se desarrollan las ideas de conexión afín y conexión riemanniana, junto con sus objetos asociados: curvatura, geodésicas y coordenadas normales. Finalmente, se estudian algunos operadores diferenciales naturales, como el gradiente, la divergencia, el hessiano y el laplaciano.

Para la notación tensorial empleada a lo largo del texto, se asume familiaridad con los conceptos básicos de álgebra tensorial y campos tensoriales. Una revisión concisa de estos se encuentra en el [Apéndice B](#), que puede consultarse como referencia complementaria.

1.1. Conceptos categóricos

Definición. Sea M una variedad suave. Una *métrica riemanniana* sobre M es un 2-campo tensorial covariante simétrico definido positivo.

Definición. Una *variedad riemanniana* es un par (M, δ) donde M es una variedad suave y δ es una métrica riemanniana sobre M .

Observación. A menudo se usará la notación $\langle u|v \rangle_\delta(p) \doteq \delta_p(u, v)$. Si se define M sin especificar la métrica, se asume que es $\langle \cdot | \cdot \rangle$.

Teorema 1.1.1. *Toda variedad suave posee una métrica riemanniana.*

Demostración. Ver [Jos17, Teorema 1.4.1].

Q.E.D.

Definición. Sean $(M, \delta), (\tilde{M}, \tilde{\delta})$ variedades riemannianas y $\Phi : M \rightarrow \tilde{M}$ un mapa suave. Se dice que Φ *preserva la métrica* si para todo $p \in M$

$$\langle u|v \rangle_\delta = \langle \mathbf{D}\Phi_p(u) | \mathbf{D}\Phi_p(v) \rangle_{\tilde{\delta}}, \quad \forall u, v \in \mathbf{T}_p M.$$

Si Φ es un difeomorfismo que preserva la métrica, se dice que Φ es una *isometría* y $M \cong \tilde{M}$.

Además, se dice que Φ es una *isometría local* si para todo $p \in M$ existe una vecindad \mathcal{U} tal que $\Phi \upharpoonright \mathcal{U}$ es una isometría sobre su imagen y $\Phi(\mathcal{U})$ es un abierto en \tilde{M} .

Diremos que un campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ es *unitario* si $\|X|_p\| = 1$ para todo $p \in P$.

A partir de la métrica, podemos introducir la operación de contracción que da origen a la definición de traza de un tensor covariante.

Definición. Sea M una n -variedad riemanniana y T un 2-campo tensorial covariante sobre M . La *traza* de T es el 0-campo tensorial sobre M , ID EST , $\text{Tr } T \in \mathcal{F}(M)$; definido, en cada punto $p \in M$, por

$$\text{Tr } T|_p \doteq \sum_{i=1}^n T(e_i, e_i)$$

donde $\{e_1, \dots, e_n\}$ es una base ortonormal de $\mathbf{T}_p M$.

Ejemplo. El ejemplo más natural es calcular la traza de la misma métrica. Sea (M, δ) una variedad riemanniana y $\{e_1, \dots, e_n\}$ es una base ortonormal de $\mathbf{T}_p M$ con $p \in M$. Entonces,

$$\text{Tr } \delta|_p = \sum_{i=1}^n \langle e_i | e_i \rangle = \sum_{i=1}^n \delta_{ii} = n = \dim M.$$

El uso de la *delta de Kronecker* motiva a usar la letra δ para denotar la métrica.

Vale mencionar que se puede generalizar la traza para cualquier tipo de tensor, ya que la métrica nos permite convertir cualquier campo tensorial en uno covariante. Luego, basta identificar qué coordenadas queremos contraer, reduciendo el tipo del tensor en 2.

En una variedad riemanniana, la métrica permite medir áreas y volúmenes de manera intrínseca; esto se formaliza mediante la forma de volumen, un objeto diferencial natural asociado a la métrica.

Definición. Sea M una n -variedad riemanniana orientable. La *forma de volumen* de M es una n -forma sobre M definida, en cada $p \in M$, por

$$\text{vol}_M(v_1, \dots, v_n) \doteq \det[\langle v_i | e_j \rangle]$$

donde $\{e_1, \dots, e_n\}$ es una base ortonormal de $\mathbf{T}_p M$.

La orientabilidad es necesaria para poder definir esta forma de manera global. A pesar de ello podemos hacerlo localmente tomando un referencial local y aplicando la definición sobre el abierto escogido.

1.2. Herramientas diferenciales

En esta sección presentamos las principales herramientas diferenciales necesarias para el estudio de variedades riemannianas. Comenzaremos con la conexión riemanniana, que es el resultado más importante en la materia; de ella se desprende el transporte paralelo, geodésicas y vecindades normales, fundamentales para analizar la geometría local.

1.2.1. Conexión riemanniana

Consideremos M una variedad suave de dimensión n .

Definición. Una *conexión afín* sobre M es un mapa $\nabla : (\mathfrak{X}(M))^2 \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ que verifica las siguientes propiedades:

- (a) $\nabla(fX + gY, Z) = f\nabla(X, Z) + g\nabla(Y, Z)$, para $f, g \in \mathcal{F}(M)$
- (b) $\nabla(X, Y + Z) = \nabla(X, Y) + \nabla(X, Z)$.
- (c) $\nabla(X, fY) = f\nabla(X, Y) + (Xf)Y$, para $f \in \mathcal{F}(M)$.

Observación. Denotamos $\nabla(X, Y) = \nabla_X Y$, como tradicionalmente se hace.

Definición. Sea ∇ una conexión afín sobre M . Se dice que ∇ es *simétrica* si

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y], \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Definición. Sea M una variedad riemanniana y ∇ una conexión afín sobre M . Se dice que ∇ es *compatible con la métrica* si

$$\mathbf{L}_X \langle Y | Z \rangle = \langle \nabla_X Y | Z \rangle + \langle Y | \nabla_X Z \rangle, \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M),$$

donde \mathbf{L} es la *derivada de Lie* (vease [Apéndice B](#)).

Teorema 1.2.1 (Levi-Civita). *Sea M una variedad riemanniana. Existe una única conexión afín sobre M simétrica y compatible con la métrica.*

Demostración. Ver [[O'N83](#), Teorema 3.11].

Q.E.D.

Observación. Llamamos a la conexión afín del teorema anterior *conexión riemanniana* de M .

Proposición 1.2.2 (Fórmula de Koszul). *Sea M una variedad riemanniana y ∇ su conexión riemanniana. Entonces, para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ se cumple que*

$$2 \langle \nabla_X Y | Z \rangle = \mathbf{L}_X \langle Y | Z \rangle + \mathbf{L}_Y \langle Z | X \rangle - \mathbf{L}_Z \langle X | Y \rangle - \langle X | [Y, Z] \rangle + \langle Y | [Z, X] \rangle + \langle Z | [X, Y] \rangle. \quad (1.1)$$

Demostración. Ver [[O'N83](#), Teorema 3.11].

Q.E.D.

Proposición 1.2.3. Sean M, \tilde{M} variedades riemannianas y $\nabla, \tilde{\nabla}$ sus respectivas conexiones riemannianas. Si $\Phi : M \rightarrow \tilde{M}$ es una isometría, entonces

$$\Phi_* \nabla_X Y = \tilde{\nabla}_{\Phi_* X} \Phi_* Y, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Demostración. Ver [Lee18, Lema 4.37].

Q.E.D.

Observación. En términos tensoriales, ∇ es **no es un campo tensorial**, puesto que no es lineal en la segunda coordenada.

Para realizar cálculos concretos resulta necesario expresar la conexión en un sistema local de coordenadas. Consideremos $\{E_i\}$ un referencial sobre \mathcal{U} . Dado que todo campo vectorial puede ser escrito como combinación lineal del referencial, tenemos que

$$\nabla_X E_i = \sum_{j=1}^n \omega_j^i(X) E_j \quad \text{con } X \in \mathfrak{X}(\mathcal{U}).$$

Luego, por la condición (a) de las conexiones afines, tenemos que cada ω_j^i es una 1-forma diferencial sobre \mathcal{U} . Estas reciben el nombre de **formas de conexión**, y la matriz $\omega = [\omega_j^i]$, **matriz de conexión**, relativas al referencial $\{E_i\} \subset \mathfrak{X}(\mathcal{U})$.

Proposición 1.2.4. Sea M una variedad riemanniana y ∇ su conexión riemanniana. Entonces, la matriz de conexión $[\omega_j^i]$ relativa a cualquier referencial ortonormal es antisimétrica, esto es, $\omega_j^i = -\omega_i^j$.

Demostración. Ver [Tu17, Proposición 11.4].

Q.E.D.

Un caso más práctico es tomar una carta local (\mathcal{U}, φ) denotando $\partial_i \doteq \frac{\partial}{\partial \varphi^i}$ para todo i . Entonces, existen números $\Gamma^k_{ij}(p)$ en cada punto $p \in \mathcal{U}$ tales que

$$\nabla_{\partial_i} \partial_j = \sum_{k=1}^n \Gamma^k_{ij} \partial_k.$$

Las funciones $\Gamma^k_{ij} \in \mathcal{F}(\mathcal{U})$ se llaman **símbolos de Christoffel** sobre la carta local (\mathcal{U}, φ) .

Proposición 1.2.5. Sea M una variedad riemanniana y ∇ su conexión riemanniana. Entonces, en toda carta local, el símbolo de Christoffel Γ^k_{ij} es simétrico en i y j , es decir, $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$.

Demostración. Ver [Tu17, Proposición 13.5].

Q.E.D.

1.2.2. Transporte paralelo

Consideremos M una variedad riemanniana y $\alpha : [a, b] \rightarrow M$ una curva continua.

Definición. Se define la velocidad de α en t_0 como su derivada $\alpha'(t_0)$, esto es,

$$\alpha'(t_0) \doteq \mathbf{D}\alpha_{t_0} \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t_0} \right) \in \mathbf{T}_{\alpha(t_0)}M.$$

Definición. Se dice que α es una curva *regular* si es derivable y $\alpha'(t) \neq 0$ para todo $t \in [a, b]$. Además, se dice que α es una curva *admisibile* si es regular a trozos.

Observación. Cuando el dominio es el intervalo $[0, 1]$, a una curva $\alpha : [0, 1] \rightarrow M$ se le llama *camino*. En este caso, hablamos de *camino regular* o *camino admisibile* según las condiciones anteriores.

Lema 1.2.6. Sea α una curva admisibile, ∇ una conexión afín sobre M y $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{U})$ con \mathcal{U} un abierto de M . Si $\alpha(t) \in \mathcal{U}$ y $X|_{\alpha(t)} = Y|_{\alpha(t)}$, entonces $\nabla_{\alpha'(t)}X = \nabla_{\alpha'(t)}Y$.

Demostración. Ver [Lee12, Lema 4.1].

Q.E.D.

Definición. Sea α una curva admisibile. Un *campo vectorial de M a lo largo de α* es un mapa $X : [a, b] \rightarrow \mathbf{T}M$ tal que $X(t) \in \mathbf{T}_{\alpha(t)}M$ para todo $t \in [a, b]$.

Ejemplo. Si α es una curva admisibile, entonces notar que $\alpha' : [a, b] \rightarrow \mathbf{T}M$ es un campo vectorial de M a lo largo de α .

Observación. Denotamos por $\overline{\mathfrak{X}}(\alpha)$ al espacio de campos vectoriales de M a lo largo de la curva α .

Definición. Sea ∇ una conexión afín sobre M . Se define la *derivada covariante* como el mapa

$$\mathbf{D}_\alpha : \overline{\mathfrak{X}}(\alpha) \rightarrow \overline{\mathfrak{X}}(\alpha) \quad \text{dado por} \quad \mathbf{D}_\alpha X(t) = \nabla_{\alpha'(t)}X.$$

Proposición 1.2.7. Sean $X, Y \in \overline{\mathfrak{X}}(\alpha)$. La derivada covariante cumple las siguientes propiedades:

1. $\mathbf{D}_\alpha(aX + bY) = a\mathbf{D}_\alpha X + b\mathbf{D}_\alpha Y$, para $a, b \in \mathbb{R}$;
2. $\mathbf{D}_\alpha(hX) = h'X + h\mathbf{D}_\alpha X$, para $h \in \mathcal{F}(I)$;
3. $\frac{d}{dt}(\langle X|Y \rangle) = \langle \mathbf{D}_\alpha X|Y \rangle + \langle X|\mathbf{D}_\alpha Y \rangle$.

Demostración. Ver [O'N83, Proposición 3.18].

Q.E.D.

Definición. Sea X un campo vectorial de M a lo largo de α . Se dice que X es *paralelo* si su derivada covariante es nula, ID EST, $\mathbf{D}_\alpha X \equiv 0$.

Teorema 1.2.8. Sea (M, δ) una variedad riemanniana, ∇ una conexión afín sobre M y $\alpha : [a, b] \rightarrow M$ una curva suave.

1. Para todo $v \in \mathbf{T}_{\alpha(a)}M$, existe un único campo vectorial paralelo $V \in \overline{\mathfrak{X}}(\alpha)$ tal que $V(a) = v$.
2. Para todo $t \in [a, b]$, el mapa $P_{c,t} : \mathbf{T}_{\alpha(a)}M \rightarrow \mathbf{T}_{\alpha(t)}M$ dado por $P_{c,t}(v) = V(t)$ es un isomorfismo lineal.
3. Si ∇ es compatible con la métrica, entonces $P_{\alpha,t}$ es una isometría respecto a los productos internos $\delta_{\alpha(a)}$ y $\delta_{\alpha(t)}$.

Demostración. Ver [O'N83, Proposición 3.19] y O'Neill [O'N83, Lema 3.20]. Q.E.D.

Observación. El campo vectorial V del teorema anterior recibe el nombre de **transporte paralelo** de v a lo largo de α .

1.2.3. Geodésicas

Consideremos M una variedad riemanniana sin borde, ∇ su conexión riemanniana e $\mathbb{I} \doteq [0, 1]$.

Definición. Sea $\sigma : [a, b] \rightarrow M$ una curva admisible. Decimos que σ es una **geodésica** (respecto a la métrica) si σ' es paralelo, ID EST, $\mathbf{D}_\sigma \sigma' \equiv 0$.

Observación. Es útil denotar por $\Omega(M; p, q)$ al conjunto de caminos (admisibles) de p a q en M , es decir,

$$\Omega(M; p, q) \doteq \{ \alpha \in \mathcal{C}^0(\mathbb{I}; M) : \alpha \text{ es admisible y } (\alpha(0), \alpha(1)) = (p, q) \}.$$

Además, por $\Gamma(M; p, q)$ al conjunto de caminos geodésicos de p a q en M , a saber,

$$\Gamma(M; p, q) \doteq \{ \sigma \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{I}; M) : \sigma \in \Omega(M; p, q) \text{ y } \mathbf{D}_\sigma \sigma' \equiv 0 \}.$$

Si fuese claro la imagen del camino, se usaran las siguientes notaciones:

$$\Omega_{p,q} \doteq \Omega(M; p, q) \quad \text{y} \quad \Gamma_{p,q} \doteq \Gamma(M; p, q). \quad (1.2)$$

Proposición 1.2.9. Sea (\mathcal{U}, φ) una carta local tal que $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$ y $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$. Entonces, $\sigma : \mathbb{I} \rightarrow \mathcal{U}$ es una geodésica si y solo si sus funciones coordenadas $x^i \circ \sigma$ satisfacen

$$\frac{d^2(x^k \circ \sigma)}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^n \Gamma^k_{ij}(\sigma) \frac{d(x^i \circ \sigma)}{dt} \frac{d(x^j \circ \sigma)}{dt} = 0, \quad \forall k = 1, \dots, n. \quad (1.3)$$

Demostración. Ver [O'N83, Corolario 3.21]. Q.E.D.

La **Ecuación (1.3)** recibe el nombre de **Ecuación Geodésica**.

Proposición 1.2.10. Para todo $v \in \mathbf{T}_p M$, existe $\varepsilon > 0$ y una única geodésica $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ tal que $\gamma'(0) = v$.

Demostración. Ver [O'N83, Lema 3.22].

Q.E.D.

Proposición 1.2.11. Sean $\alpha, \beta : \mathbb{I} \rightarrow M$ geodésicas. Si existe $a \in \mathbb{I}$ tal que $\alpha(a) = \beta(a)$ y $\alpha'(a) = \beta'(a)$, entonces $\alpha = \beta$.

Demostración. Ver [O'N83, Lema 3.23].

Q.E.D.

Proposición 1.2.12. Para todo $v \in \mathbf{TM}$, existe $\varepsilon > 0$ y una vecindad \mathcal{U} de v tal que $(w, s) \mapsto \gamma_w(s)$ es un mapa suave bien definido de $\mathcal{U} \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ en M .

Demostración. Ver [O'N83, Lema 3.27].

Q.E.D.

Corolario. Una geodésica definida en un abierto $\mathcal{U} \subset M$ es suave.

Todo lo anterior nos permite definir, para $\mathcal{V} \subset \mathbf{TM} \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ una vecindad abierta de $(w, 0)$, el mapa $\gamma : \mathcal{V} \rightarrow M$ tal que $\gamma(q, v; 0) = q$, $\frac{d}{ds}(\gamma(q, v; s)) = v$ y $s \mapsto \gamma(q, v; s)$ es una geodésica con $(q, v) = w \in \mathbf{TM}$.

Definición. Sean $\tilde{\sigma} : \tilde{I} \rightarrow M$ y $\sigma : I \rightarrow M$ dos geodésicas. Decimos que $\tilde{\sigma}$ es una *extensión* de σ si $I \subsetneq \tilde{I}$ e $\sigma(t) = \tilde{\sigma}(t)$ para todo $t \in I$.

Definición. Una geodésica $\sigma : I \rightarrow M$ se denomina *maximal* si no existe una extensión σ sobre un intervalo que contenga estrictamente a I .

1.2.4. Vecindades

Definición. Sea $p \in M$ y $\mathcal{U} \subset \mathbf{TM}$ una vecindad de $(p, 0)$ tal que $\gamma_w(1) \in M$ para todo $w \in \mathcal{U}$. Entonces, el mapa $\exp : \mathcal{U} \rightarrow M$ dado por

$$\exp(q, v) = \gamma\left(q, \frac{v}{|v|}; |v|\right) = \gamma(q, v; 1),$$

es llamado el *mapa exponencial* sobre \mathcal{U} . Además, se define $\exp_q : \mathcal{U}_q \subset \mathbf{T}_q M \rightarrow M$ dado por $\exp_q(v) = \exp(q, v)$.

Observación. Por **Proposición 1.2.12**, se tiene que el mapa exponencial está bien definido.

Definición. Para $p \in M$ y $\varepsilon > 0$, la bola (geodésica) abierta

$$\mathcal{B}(p, \varepsilon) \doteq \{\exp_p(tu) \in M : t \in [0, 1] \text{ y } \|u\| < \varepsilon\} \quad (1.4)$$

y la bola (geodésica) cerrada

$$\overline{\mathcal{B}}(p, \varepsilon) \doteq \{\exp_p(tu) \in M : t \in [0, 1] \text{ y } \|u\| \leq \varepsilon\}. \quad (1.5)$$

Lema 1.2.13. Si $\Phi_0 : \mathbf{T}_p M \rightarrow \mathbf{T}_0(\mathbf{T}_p M)$ es la identificación canónica dada por

$$\Phi_0(v) = \alpha'_v(0), \quad \text{donde } \alpha_v(t) = tv,$$

entonces $\mathbf{D}(\exp_p)_0 \circ \Phi_0 = \text{id}_{\mathbf{T}_p M}$. Por ende, $\mathbf{D}(\exp_p)_0$ es un isomorfismo lineal.

Demostración. Ver [Tu17, Proposición 15.3].

Q.E.D.

Lema 1.2.14 (Gauss). Sea $p \in M$ y $v \in \mathbf{T}_p M$ tal que $\exp_p v$ está definida. Sea $w \in \mathbf{T}_p M \cong \mathbf{T}_v(\mathbf{T}_p M)$. Entonces,

$$\left\langle \mathbf{D}(\exp_p)_v(v) \mid \mathbf{D}(\exp_p)_v(w) \right\rangle = \langle v \mid w \rangle. \quad (1.6)$$

Demostración. Ver [O'N83, Lema 5.1].

Q.E.D.

Observación. Notar que $\mathbf{D}(\exp_p)_v : \mathbf{T}_v(\mathbf{T}_p M) \rightarrow \mathbf{T}_{\exp(p,v)} M$ es la derivada de \exp_p en v .

Definición. Sea $\mathcal{U} \subset M$ una vecindad abierta de p . Decimos que \mathcal{U} es:

- una **vecindad normal** si $\exp_p : \mathcal{V} \subset \mathbf{T}_p M \rightarrow \mathcal{U}$ es un difeomorfismo y \mathcal{V} es una vecindad estrellada de $\vec{0}$.
- una **vecindad convexa** si, es una vecindad normal para todo $q \in \mathcal{U}$.

Proposición 1.2.15. Todo punto $p \in M$ posee una vecindad normal.

Demostración. Ver [O'N83, Proposición 3.30].

Q.E.D.

Proposición 1.2.16. Si \mathcal{U} es una vecindad normal de $p \in M$, entonces para todo punto $q \in \mathcal{U}$ existe una única geodésica $\sigma \in \Omega(\mathcal{U}; p, q)$; en particular, $\sigma'(0) = \exp_p^{-1}(q)$.

Demostración. Ver [O'N83, Proposición 3.31].

Q.E.D.

Proposición 1.2.17. Todo punto $p \in M$ posee una vecindad convexa.

Demostración. Ver [do 92, Teorema 5.3.7].

Q.E.D.

Corolario. Si \mathcal{U} es una vecindad convexa de $o \in M$, entonces para todo par de puntos $p, q \in \mathcal{U}$ existe una única geodésica $\sigma \in \Omega(\mathcal{U}; p, q)$.

Notar que do Carmo [do 92] llama **vecindad totalmente normal** a las vecindades convexas. Esto se debe a que, si no suponemos que \mathcal{U} es un conjunto abierto, las geodésicas podrían salir de la vecindad.

Si \mathcal{U} es una vecindad normal de p , podemos definir las **coordenadas normales** como sigue: sea $\{e_i\}$ una base ortonormal de $\mathbf{T}_p M$, entonces $x^i(q) = \left\langle e_i \mid \exp_p^{-1}(q) \right\rangle$. En resumen, definimos una

carta normal (\mathcal{U}, φ) de p donde \mathcal{U} es una vecindad normal de p y $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$ coordenadas normales.

Proposición 1.2.18. *Sea (\mathcal{U}, φ) una carta normal de p . Entonces,*

$$\Gamma_{ij}^k(p) = 0, \quad \nabla_{\partial_i} \partial_j \Big|_p = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \Big|_p = 0.$$

Demostración. Ver [O'N83, Proposición 3.33].

Q.E.D.

Observación. Es necesario mencionar que todo el trabajo hecho anteriormente es hecho y citado en el contexto sin borde, a saber, $\partial M = \emptyset$. En el caso con borde, hay variedades riemannianas que no tienen vecindades normales en todo punto. EXAMPLI GRATIA, para $(0, 1) \in \mathbb{R}^2 \setminus B(\vec{0}, 1)$ no existe una vecindad normal.

Proposición 1.2.19. *Sean M, \tilde{M} variedades riemannianas. Si $\Phi : M \rightarrow \tilde{M}$ es una isometría, entonces*

$$(\Phi \circ \exp)(p, v) = \exp(\Phi(p), \mathbf{D}\Phi_p(v)), \quad \forall (p, v) \in \text{Dom}(\exp^M).$$

Demostración. Ver [Tu17, Teorema 15.2].

Q.E.D.

1.3. Curvatura de una conexión afín

En esta sección estudiamos la *curvatura de una conexión afín*. Presentaremos sus propiedades fundamentales, su expresión local en términos de las formas de conexión y discutiremos cómo de ella se derivan nociones clave en geometría riemanniana: la *curvatura seccional* y la *curvatura de Ricci*.

Definición. Sea M una variedad suave y ∇ una conexión afín sobre M . Se define la *curvatura* de ∇ como el mapa

$$R_\nabla : (\mathfrak{X}(M))^3 \rightarrow \mathfrak{X}(M) \quad \text{dado por} \quad R_\nabla(X, Y, Z) = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z.$$

Observación. Denotamos $R_\nabla(X, Y, Z) = R(X, Y)Z$, si no hay confusión.

Observación. Notemos que do Carmo define la curvatura como

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z,$$

por lo que hay que estar atento a los signos.

Proposición 1.3.1. *Sea R la curvatura de una conexión afín sobre una variedad suave M . Entonces,*

1. R es $\mathcal{F}(M)$ -lineal en todas las entradas.

$$2. R(X, Y)Z = -R(Y, X)Z.$$

Demostración. Ver [O'N83, Lema 3.35].

Q.E.D.

Proposición 1.3.2 (Identidad de Bianchi). *Sea R la curvatura de una conexión afín sobre una variedad suave M . Entonces,*

$$R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0, \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M). \quad (1.7)$$

Demostración. Ver [O'N83, Proposición 3.36].

Q.E.D.

Observación. Llamamos a la curvatura determinada por la conexión riemanniana de M simplemente *curvatura* de M .

Proposición 1.3.3. *Sea M una variedad riemanniana y R su curvatura. Entonces,*

$$\langle R(X, Y)V|W \rangle = -\langle R(X, Y)W|V \rangle = -\langle R(Y, X)V|W \rangle = \langle R(V, W)X|Y \rangle,$$

para todo $V, W, X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Demostración. Ver [O'N83, Lema 3.36].

Q.E.D.

Corolario (*Pushforward*). *Sean M, \tilde{M} variedades riemannianas y R, \tilde{R} sus respectivas curvaturas. Si $\Phi : M \rightarrow \tilde{M}$ es una isometría, entonces*

$$\Phi_*(R(X, Y)Z) = \tilde{R}(\Phi_*X, \Phi_*Y)\Phi_*Z, \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M).$$

Demostración. Ver [Lee18, Proposición 7.6].

Q.E.D.

Para la definición de *Pushforward*, ver [Apéndice B](#).

Observación. En términos tensoriales, R es un campo $(1, 3)$ -tensorial.

Curvatura seccional

Definición. *Sea M una variedad riemanniana y R su curvatura. Se define la *curvatura seccional* en $p \in M$ como*

$$\text{Sec}(u, v) \doteq \frac{\langle R(u, v)v|u \rangle}{\|u\|^2\|v\|^2 - \langle u|v \rangle^2} \quad \text{con } u, v \in \mathbf{T}_pM.$$

Notar que $\text{Sec}(u, v) = 0$, si $u = \lambda v$ con $\lambda \in \mathbb{R}$. Por tanto, para calcular la curvatura seccional de una variedad se requiere de un subespacio lineal de \mathbf{T}_pM con dimensión 2, esto es, u y v deben ser linealmente independientes. La siguiente proposición muestra que la curvatura seccional está bien definida en ese sentido.

Proposición 1.3.4. Sea M una variedad riemanniana. Si $\{u, v\}$ y $\{x, y\}$ generan el mismo subespacio vectorial de $\mathbf{T}_p M$, entonces $\text{Sec}(u, v) = \text{Sec}(x, y)$.

Demostración. Ver [O'N83, Lema 3.39].

Q.E.D.

Decimos que una variedad riemanniana con dimensión mayor o igual a 2 tiene curvatura seccional constante κ si $\text{Sec}(u, v) = \kappa$ para todo par de vectores u, v linealmente independientes.

Lema 1.3.5. Sea M una variedad riemanniana y R su curvatura. Se define el operador multilinear $S : (\mathbf{T}_p M)^3 \rightarrow \mathbf{T}_p M$ dado por

$$\langle S(x, y, u)|v \rangle = \langle x|u \rangle \langle y|v \rangle - \langle y|u \rangle \langle x|v \rangle, \quad \forall u, v, x, y \in \mathbf{T}_p M.$$

Entonces, M tiene curvatura seccional constante κ si, y sólo si, $R = \kappa S$.

Demostración. Ver [do 92, Lema 4.3.4].

Q.E.D.

Curvatura de Ricci y otras

Definición. Sea M una n -variedad riemanniana y R su curvatura. Se define la *curvatura de Ricci* en $p \in M$ como la traza de la curvatura. ID EST, para una base ortonormal $\{e_1, \dots, e_n\}$ de $\mathbf{T}_p M$,

$$\text{Ric}(u, v) \doteq \sum_{i=1}^n \langle R(u, e_i)v|e_i \rangle \quad \text{con } u, v \in \mathbf{T}_p M.$$

Adicionalmente, la *curvatura escalar* se define como la traza del tensor de Ricci. Sea $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base ortonormal de $\mathbf{T}_p M$,

$$\text{Ric}(x) \doteq \sum_{i=1}^n \text{Sec}(x, e_i) = \sum_{i=1}^n \langle R(x, e_i)x|e_i \rangle = \text{Ric}(x, x) \quad \text{con } x \in \mathbf{T}_p M.$$

$$\text{Scal} \doteq \sum_{i=1}^n \text{Ric}(e_i) = \sum_{i,j=1}^n \text{Sec}(e_j, e_i) = \sum_{i,j=1}^n \langle R(e_j, e_i)e_j|e_i \rangle.$$

Definición. Sea P una subvariedad de M . Decimos que P tiene *curvatura k -intermedia* positiva si para cualquier base ortonormal $\{e_0, e_1, \dots, e_k\}$ la suma $\sum_{i=1}^k \text{Sec}(e_0, e_i)$ es positiva.

1.4. Operador diferenciales

En esta sección se presentan los operadores diferenciales fundamentales en variedades riemannianas: gradiente, divergencia, hessiano y laplaciano. Véase el **Apéndice B** para una breve revisión de campos tensoriales

Sea M una n -variedad riemanniana y ∇ su conexión riemanniana.

Definición. Sea $f \in \mathcal{F}(M)$. El *gradiente* de f es el campo vectorial ∇f tal que $\langle \nabla f | X \rangle = L_X f$ para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Definición. Sea $X \in \mathfrak{X}(M)$. La *divergencia* de X es la traza del campo 2-tensorial ∇X , ID EST, $\nabla \cdot X \doteq \text{Tr}(\nabla X)$.

Observación. Recordemos que la traza de ∇X se calcula tomando, para todo $p \in M$, $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base ortonormal de $\mathbf{T}_p M$,

$$\nabla \cdot X|_p = \text{Tr}(\nabla X)|_p = \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{e_i} X|_p | e_i \rangle.$$

Además, notar que $\nabla : \mathcal{F}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ y $\nabla \cdot : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathcal{F}(M)$.

Proposición 1.4.1. Sea M una n -variedad riemanniana. Entonces,

$$\nabla \cdot (fX) = \langle \nabla f | X \rangle + f \nabla \cdot X, \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M) \quad \forall f \in \mathcal{F}(M).$$

Demostración. Sea $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base ortonormal de $\mathbf{T}_p M$, $X \in \mathfrak{X}(M)$ tal que $X|_p = v$ y $f \in \mathcal{F}(M)$. Entonces,

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (fX)|_p &= \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{e_i} (fX)|_p | e_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \langle (e_i f)v + f(p) \nabla_{e_i} v | e_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n (e_i f) \langle v | e_i \rangle + f(p) \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{e_i} v | e_i \rangle \\ &= \left\langle \sum_{i=1}^n (e_i f) e_i \middle| v \right\rangle + f(p) \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{e_i} v | e_i \rangle \\ &= \langle \nabla f|_p | X|_p \rangle + f(p) \nabla \cdot X|_p. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\nabla \cdot (fX) = \langle \nabla f | X \rangle + f \nabla \cdot X$.

Q.E.D.

Definición. Sea $f \in \mathcal{F}(M)$. La *hessiana* f es el campo 2-tensorial covariante $\mathbf{H}f$ tal que

$$\mathbf{H}f(X, Y) = \langle \nabla_X \nabla f | Y \rangle, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Sea (\mathcal{U}, φ) una carta local con $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$. Entonces,

$$\mathbf{H}f = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial x^k} \right) dx^i \wedge dx^j.$$

Proposición 1.4.2. Sea M una variedad riemanniana y $f \in \mathcal{F}(M)$. Entonces,

$$\mathbf{H}f(X, Y) = \mathbf{L}_X(\mathbf{L}_Y f) - \langle \nabla f | \nabla_X Y \rangle, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Además, la hessiana es simétrica, es decir, $\mathbf{H}f(X, Y) = \mathbf{H}f(Y, X)$.

Demostración. Sean $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ y $f \in \mathcal{F}(M)$. Entonces,

$$\begin{aligned} \mathbf{H}f(X, Y) &= \langle \nabla_X \nabla f | Y \rangle \\ &= \mathbf{L}_X \langle \nabla f | Y \rangle - \langle \nabla f | \nabla_X Y \rangle \\ &= \mathbf{L}_X(\mathbf{L}_Y f) - \langle \nabla f | \nabla_X Y \rangle. \end{aligned}$$

Luego, para la simetría,

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{[X, Y]} f &= \mathbf{L}_X(\mathbf{L}_Y f) - \mathbf{L}_Y(\mathbf{L}_X f) \\ &= \mathbf{L}_X \langle Y | \nabla f \rangle - \mathbf{L}_Y \langle X | \nabla f \rangle \\ &= \langle \nabla_X Y | \nabla f \rangle + \langle Y | \nabla_X \nabla f \rangle - \langle \nabla_Y X | \nabla f \rangle - \langle X | \nabla_Y \nabla f \rangle \\ &= \langle [X, Y] | \nabla f \rangle + \langle Y | \nabla_X \nabla f \rangle - \langle X | \nabla_Y \nabla f \rangle \\ &= \mathbf{L}_{[X, Y]} f + \langle Y | \nabla_X \nabla f \rangle - \langle X | \nabla_Y \nabla f \rangle \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\langle Y | \nabla_X \nabla f \rangle = \langle X | \nabla_Y \nabla f \rangle$.

Q.E.D.

Observación. La hessiana también se puede interpretar como la segunda derivada de una función. Si $f \in \mathcal{F}(M)$ y $\vec{u} \in \mathbf{T}_p M$, entonces

$$\mathbf{D}f_p(\vec{u}) = \left. \frac{d}{dt} (f \circ \exp_p(t\vec{u})) \right|_{t=0} \quad \text{y} \quad \mathbf{H}f_p(\vec{u}, \vec{u}) = \left. \frac{d^2}{dt^2} (f \circ \exp_p(t\vec{u})) \right|_{t=0}.$$

Definición. Sea $f \in \mathcal{F}(M)$. El *laplaciano* de f es la divergencia de su gradiente, ID EST, $\nabla^2 f \doteq \nabla \cdot (\nabla f)$.

Capítulo 2

Subvariedades riemannianas

En este capítulo estudiamos la geometría de las subvariedades riemannianas, aquellas que heredan de manera natural una métrica inducida del espacio ambiente. A partir de esta métrica, se introduce la conexión inducida y el segundo tensor fundamental, que permiten comparar la geometría intrínseca y extrínseca de la subvariedad.

Posteriormente, se analizan las geodésicas contenidas en subvariedades y su relación con la curvatura del espacio ambiente. Finalmente, se aborda el caso de variedades riemannianas con borde, donde la noción de curvatura y las condiciones de ortogonalidad en el borde adquieren un papel fundamental en el estudio de propiedades de rigidez y extensiones geométricas.

2.1. Subvariedades riemannianas

En esta sección abordaremos las definiciones y propiedades de las métricas para ser consideradas una subvariedad. Se recomienda ver el [Apéndice A](#) para comprender algunos conceptos sobre subvariedades suaves.

Proposición 2.1.1. Sean (M, δ) una variedad riemanniana, P una variedad suave y $\Phi : P \rightarrow M$ un mapa suave. Entonces, $\Phi^*\delta$ es una métrica riemanniana sobre P si, y solo si, Φ es una inmersión.

Demostración. Ver [[Lee18](#), Lema 2.11].

Q.E.D.

Este resultado nos permite hablar de *métricas inducidas* por una inmersión.

Definición. Sea P una subvariedad regular de M . Decimos que (P, ζ) es una *subvariedad riemanniana* (M, δ) si ζ es la métrica inducida por el mapa inclusión $\iota : P \rightarrow M$. En particular, diremos que P es una *hipersuperficie* si $\dim P = \dim M - 1$.

Al igual que en el [Capítulo 1](#), omitiremos la métrica en la definición, quedando P subvariedad riemanniana de M .

Definición. Sea P una subvariedad riemanniana de M . Un vector $v \in \mathbf{T}_p M$ se dice *normal* (u *ortogonal*) a P si $\langle u|v \rangle = 0$ para todo $u \in \mathbf{T}_p P$. También se puede denotar $u \perp v$.

Definimos el *fibrado normal* de P como el subconjunto de $\mathbf{T}M$ que consiste de los vectores normales a P , ID EST,

$$\mathbf{N}P \doteq \{(p, v) \in \mathbf{T}M : v \perp \mathbf{T}_p P\}.$$

Proposición 2.1.2. Sea M una m -variedad riemanniana y P una n -subvariedad riemanniana de M . Entonces, $\mathbf{N}P$ es un subfibrado vectorial de rango $(m - n)$ del fibrado tangente ambiente $\mathbf{T}M \upharpoonright P$. Además, existen morfismos de fibrados:

$$\text{Tan}^P : \mathbf{T}M \upharpoonright P \rightarrow \mathbf{T}P \quad \text{y} \quad \text{Nor}^P : \mathbf{T}M \upharpoonright P \rightarrow \mathbf{N}P;$$

llamados *proyección tangente y normal*, respectivamente.

Demostración. Ver [Lee18, Proposición 2.16].

Q.E.D.

Si $X \in \Gamma(\mathbf{T}M \upharpoonright P)$, entonces podemos descomponerlo en su *parte tangente* y *parte normal* a P , es decir,

$$X = \text{Tan}^P(X) + \text{Nor}^P(X) \quad \text{con} \quad \text{Tan}^P(X) \in \mathfrak{X}(P) \quad \text{y} \quad \text{Nor}^P(X) \in \Gamma(\mathbf{N}P).$$

A los campos vectores $X \in \Gamma(\mathbf{N}P)$ se les llama *campos vectoriales normales* a P .

Ahora bien, se desprenden algunas propiedades topológicas de analizar el fibrado normal de una subvariedad.

Proposición 2.1.3. Sea M una variedad riemanniana orientable y P una subvariedad riemanniana de M . Entonces:

1. Si P tiene fibrado normal trivial, entonces P es orientable.
2. Si P es una hipersuperficie orientable, entonces P tiene fibrado normal trivial.

Demostración. Ver Problema 15-8 de Lee [Lee12].

Q.E.D.

Definición. Una hipersuperficie se dice *bilateral* si tiene fibrado normal trivial, y *unilateral* en el caso contrario.

Observación. Otra definición que se suele dar para la bilateral es si existe un campo vectorial normal unitario sobre la hipersuperficie, a saber, existe $N \in \Gamma(\mathbf{N}P)$ tal que $\|N_p\| = 1$ para todo $p \in P$.

2.2. Conexión inducida

Consideremos P una subvariedad riemanniana de M y ∇ la conexión riemanniana de M .

Definición. Definimos la *conexión inducida* sobre P como el mapa $\nabla^P : \mathfrak{X}(P) \times \Gamma(\mathbf{TM} \upharpoonright P) \rightarrow \mathfrak{X}(P)$ dado por

$$\nabla_V^P W = \text{Tan}^P(\nabla_V W), \quad \forall V, W \in \mathfrak{X}(P)$$

Lema 2.2.1. *La conexión inducida está bien definida, ID EST, no depende las cartas locales.*

Demostración. Ver [O'N83, Lema 4.1].

Q.E.D.

La conexión inducida cumple las cinco propiedades de la conexión riemanniana.

Proposición 2.2.2. *Sea ∇^P la conexión inducida en $P \subset M$. Si $V, W \in \mathfrak{X}(P)$, $X, Y \in \Gamma(\mathbf{TM} \upharpoonright P)$ y $f \in \mathcal{F}(P)$, entonces*

1. ∇^P es $\mathcal{F}(P)$ -lineal en la primera coordenada.
2. $\nabla_X^P(Y + Z) = \nabla_X^P Y + \nabla_X^P Z$.
3. $\nabla_X^P(fY) = f\nabla_X^P Y + (Xf)Y$.
4. $[X, Y] = \nabla_X^P Y - \nabla_Y^P X$.
5. $L_V \langle X | Y \rangle = \langle \nabla_V^P X | Y \rangle + \langle X | \nabla_V^P Y \rangle$.

Demostración. Ver [O'N83, Lema 4.2].

Q.E.D.

Teorema 2.2.3. *La conexión inducida en P coincide con la conexión riemanniana de P .*

Demostración. Ver [O'N83, Lema 4.3].

Q.E.D.

2.3. Segundo Tensor Fundamental

Consideremos P una subvariedad riemanniana de M y ∇ la conexión riemanniana de M .

Definición. Definimos el *segundo tensor fundamental* de P como el mapa bilineal simétrico

$$\mathbb{I}^P : \mathfrak{X}(P) \times \mathfrak{X}(P) \rightarrow \Gamma(\mathbf{NP}) \quad \text{dado por} \quad \mathbb{I}^P(X, Y) \doteq \text{Nor}^P(\nabla_X Y).$$

Observación. Con la conexión inducida y el segundo tensor fundamental tenemos la siguiente descomposición

$$\nabla_X Y = \text{Tan}^P(\nabla_X Y) + \text{Nor}^P(\nabla_X Y) = \nabla_X^P Y + \mathbb{I}^P(X, Y), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(P).$$

Observación. Se definen dos objetos más que suelen tener el mismo rol que el segundo tensor fundamental. Sea $\nu \in \mathbf{N}_p P$ se define la **segunda forma fundamental** como la forma bilineal real

$$\ell_\nu^P : \mathbf{T}_p P \times \mathbf{T}_p P \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{dado por} \quad \ell_\nu^P(x, y) = \langle \Pi^P(x, y) | \nu \rangle.$$

y el **operador de forma**

$$\mathcal{S}_\nu^P : \mathbf{T}_p P \rightarrow \mathbf{T}_p P \quad \text{dado por} \quad \mathcal{S}_\nu^P(x) = \nabla_x \nu.$$

Notar también que se cumple la siguiente propiedad

$$\langle \mathcal{S}_\nu^P(x) | y \rangle = \langle \nabla_x \nu | y \rangle = - \langle \nu | \nabla_x y \rangle = -\ell_\nu^P(x, y).$$

Notación de operadores. En este trabajo, utilizaremos la simbología de sucesor para denotar el orden parcial entre operadores lineales simétricos (o formas bilineales). Un operador lineal T se dice **definido positivo** si $T \succ 0$, ID EST, $\langle T(\vec{v}) | \vec{v} \rangle > 0$ para todo vector no nulo \vec{v} . De manera análoga:

- La notación $T \succeq 0$ indica que el operador es **semi-definido positivo**.
- La inversión de la notación $T \prec 0$ o $T \preceq 0$ indican que el operador es **definido negativo** o **semi-definido negativo**, respectivamente.
- Para denotar que un operador **no es definido positivo**, utilizaremos el símbolo de sucesor tachado $0 \not\succeq T$, esto se extiende al resto de notaciones.

O'Neill [O'N83] deja como ejercicio 4.3 la siguiente proposición.

Proposición 2.3.1. Sea $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función tal que $P = f^{-1}(\lambda)$ es una hypersuperficie riemanniana de M y $\nu = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}$. Entonces, para todo $p \in P$,

$$\frac{\mathbf{H}f(x, y)}{\|\nabla f\|} = - \langle \mathcal{S}_\nu^P(x) | y \rangle, \quad \forall x, y \in \mathbf{T}_p P.$$

Demostración. Consideremos las hipótesis de la proposición.

$$\begin{aligned} - \langle \mathcal{S}_\nu^P(x) | y \rangle &= \langle \nabla_x \nu | y \rangle \\ &= \left\langle \nabla_x \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} \middle| y \right\rangle \\ &= \frac{\langle \nabla_x \nabla f | y \rangle}{\|\nabla f\|} \\ &= \frac{\mathbf{H}f(x, y)}{\|\nabla f\|}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, se cumple la igualdad.

Q.E.D.

La siguiente fórmula recibe el nombre de *ecuación de Gauss*.

Teorema 2.3.2. *Sea P una subvariedad riemanniana de M , con R^P y R sus curvaturas y Π el segundo tensor fundamental. Entonces, para los campos vectoriales $V, W, X, Y \in \mathfrak{X}(P)$,*

$$\langle R^P(V, W)X|Y \rangle = \langle R(V, W)X|Y \rangle + \langle \Pi(V, X)|\Pi(W, Y) \rangle - \langle \Pi(V, Y)|\Pi(W, X) \rangle. \quad (2.1)$$

Demostración. Ver [O'N83, Teorema 4.5].

Q.E.D.

Usando la definición de curvatura seccional (página 16) podemos convertir la ecuación anterior en una algo más aplicable a los cálculos.

Corolario. *Si x, y es una base de un plano tangente en P , entonces*

$$\text{Sec}^P(x, y) = \text{Sec}^M(x, y) + \frac{\|\Pi(x, y)\|^2 - \langle \Pi(x, x)|\Pi(y, y) \rangle}{\|x\|^2\|y\|^2 - \langle x|y \rangle^2}.$$

Demostración. Ver [O'N83, Teorema 4.6].

Q.E.D.

Definición. Sea P^k una subvariedad riemanniana de M^n . Se define la *curvatura media* como la traza del segundo tensor fundamental. ID EST, para todo $p \in P$, tomamos $\{e_1, \dots, e_k\}$ una base ortonormal de T_pP ,

$$H^P|_p \doteq \text{Tr } \Pi^P|_p = \sum_{i=1}^k \Pi^P(e_i, e_i).$$

Observación. Notar que $H^P \in \Gamma(NP)$.

2.4. Geodésicas en subvariedades

Proposición 2.4.1. *Sea $Y \in \mathfrak{X}(P)$ sobre una curva $\sigma \in P \subset M$. Entonces,*

$$\nabla_{\sigma'} Y = \nabla_{\sigma'}^P Y + \Pi^P(\sigma', Y).$$

Demostración. Ver [O'N83, Proposición 4.8].

Q.E.D.

Corolario. *Si σ es una curva en $P \subset M$, entonces*

$$\nabla_{\sigma'} \sigma' = \nabla_{\sigma'}^P \sigma' + \Pi^P(\sigma', \sigma').$$

Demostración. Ver [O'N83, Corolario 4.9].

Q.E.D.

Corolario. Una curva σ en $P \subset M$ es una geodésica en P si y sólo si su aceleración en M es normal a P en todo punto.

Demostración. Ver [O'N83, Corolario 4.10].

Q.E.D.

Definición. Una subvariedad riemanniana P de M se dice **totalmente geodésica** si su segundo tensor fundamental es nulo, ID EST, $\Pi^P \equiv 0$.

Proposición 2.4.2. Sea P una subvariedad riemanniana de M . Lo siguiente es equivalente.

1. P es totalmente geodésica.
2. Toda geodésica de P es una geodésica de M .
3. Si $v \in \mathbf{T}_p M$ es tangente a P
4. Si α es una curva en P y, entonces el transporte paralelo de v a lo largo de α es el mismo P y M .

Demostración. Ver [O'N83, Proposición 4.13].

Q.E.D.

Definición. Una hipersuperficie P de M se dice **mínima** si su curvatura media es nula, ID EST, $H^P \equiv 0$.

De la definición, es evidente que toda hipersuperficie totalmente geodésica es mínima.

2.5. Variedades con borde

Consideremos el *semi-espacio superior cerrado* como el conjunto

$$\overline{\mathbb{H}^n} \doteq \{(x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n : x^n \geq 0\}.$$

Definición. Una n -*variedad suave con borde* es un espacio topológico Hausdorff segundo contable tal que para todo $p \in M$ existe una vecindad abierta \mathcal{U} y un difeomorfismo $\varphi : \mathcal{U} \rightarrow \varphi(\mathcal{U}) \subset \overline{\mathbb{H}^n}$, es decir, una carta local (\mathcal{U}, φ) .

Una carta local (\mathcal{U}, φ) se dice:

- **interior** si $\varphi(\mathcal{U}) \cap \text{Fr}(\mathbb{H}^n) = \emptyset$.
- **periférica** si $\varphi(\mathcal{U}) \cap \text{Fr}(\mathbb{H}^n) \neq \emptyset$.

La notación $\text{Fr}(\mathbb{H}^n)$ corresponde la **frontera topológica** respecto a \mathbb{R}^n con la topología usual.

Los puntos que posee una carta interior son llamados **puntos interiores** de M , y los puntos que no, son llamados **puntos periféricos** de M . Estos dos conjuntos se denotan como $\text{Int}(M)$ y ∂M ,

respectivamente. Por motivos de redacción, a las cartas interiores las llamaremos simplemente cartas. La siguiente proposición nos permite decir que estos conjuntos son disjuntos.

Proposición 2.5.1. *Si M es una variedad con borde, entonces cada punto de M es, o bien, un punto interior, o bien, un punto en el borde, esto es, $\partial M \cap \text{Int}(M) = \emptyset$.*

Demostración. Ver [Lee18, Teorema 1.37].

Q.E.D.

Observación. Es fundamental distinguir la noción de borde y frontera. Mientras que el borde ∂M se ha definido como una propiedad intrínseca de la variedad, la frontera es una noción relativa a un espacio topológico ambiente. Por esta razón, reservaremos estrictamente el símbolo ∂ para la estructura de la variedad y Fr para el conjunto topológico.

En la literatura se suele considerar φ un homeomorfismo, pero en nuestro caso es un difeomorfismo. Esto nos permitirá decir que ∂M es una subvariedad regular de M . En términos más técnicos:

Proposición 2.5.2. *Sea M una n -variedad suave con borde. Entonces,*

1. $\text{Int}(M)$ es una n -variedad suave tal que $\partial(\text{Int}(M)) = \emptyset$.
2. ∂M es una $(n - 1)$ -variedad suave tal que $\partial(\partial M) = \emptyset$.

Demostración. Sea $p \in \text{Int}(M)$ y (\mathcal{U}, φ) una carta interior de p . Notemos que $\varphi(\mathcal{U})$ es un abierto de \mathbb{R}^n y φ es un difeomorfismo. Entonces, $\text{Int}(M)$ cumple la definición inicial de variedad suave, es decir, sin borde. En consecuencia, por **Proposición 2.5.1**, p no puede pertenecer a ∂M . Por lo tanto, $\partial(\text{Int}(M)) = \emptyset$.

Por otro lado, sea $p \in \partial M$ y (\mathcal{U}, φ) una carta local de p . Como p es un punto periférico de M , entonces (\mathcal{U}, φ) es una carta periférica de p . Escribimos $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$. Si $q \in \mathcal{U} \cap \partial M$, entonces $\varphi(q) = (x^1(q), \dots, x^{n-1}(q), 0)$, ya que de lo contrario existiría una carta interior para q . En particular, se cumple para p . Luego, sea $\tilde{\mathcal{U}} \subset \mathcal{U} \cap \partial M$ la componente conexa que contiene a p y definimos $\psi : \tilde{\mathcal{U}} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ dado por (x^1, \dots, x^{n-1}) , esto es, la restricción de φ respecto a $\tilde{\mathcal{U}}$ que es un abierto respecto a la topología que ∂M . Entonces, ψ es un difeomorfismo en su imagen. Por lo tanto, al igual que en el primer caso, ∂M cumple la definición inicial de variedad suave y $\partial(\partial M) = \emptyset$.

Q.E.D.

Observación. ■ Una variedad sin borde se puede interpretar como una variedad con borde vacío. Por lo que cuando se hable de variedad con borde se considerarán los dos casos. Mientras que si decimos variedad riemanniana, a secas, se considerará sin borde, a saber, $\partial M = \emptyset$.

- Usaremos el término *variedad cerrada* para referirnos a una variedad riemanniana compacta (sin borde).

Ahora bien, no podemos dado una métrica riemanniana en el interior, inducir una métrica en el borde.

Ejemplo. Sea $\overline{\mathbb{B}^n} \doteq \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\| \leq 1\}$ la bola euclidea cerrada de radio 1, en consecuencia, $\partial\overline{\mathbb{B}^n} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\| = 1\} = \mathbb{S}^{n-1}$ es la esfera unitaria. Esta es un ejemplo de variedad suave con borde. Podemos dotar al interior de la bola con la métrica hiperbólica. Por temas de compacidad, no podemos obtener una métrica que coincida con el disco de Poincaré en todo el borde.

Aunque habitualmente se omiten los bordes en el estudio de variedades riemannianas, este trabajo los considera como un caso de estudio particular. Sin embargo, la construcción de la métrica riemanniana en el borde no presenta variaciones respecto a la definición estándar para variedades sin borde.

Definición. Una *variedad riemanniana con borde* es un par (M, δ) donde M es una variedad suave con borde y δ es una métrica riemanniana sobre M .

Proposición 2.5.3. *Sea M una variedad riemanniana con borde. Entonces, $\mathbf{N}\partial M$ es un fibrado vectorial de rango 1 sobre ∂M y existe un único campo vectorial unitario normal a ∂M que apunta al interior.*

Demostración. Ver [Lee18, Proposición 2.17].

Q.E.D.

La proposición anterior es importante porque nos cuenta lo siguiente:

Corolario. *Sea M una variedad riemanniana con borde. Entonces, ∂M es una subvariedad riemanniana de M orientable.*

Denotaremos por $N^{\partial M}$ al campo vectorial enunciado en la **Proposición 2.5.3**.

Por último, una proposición muy común es interpretar una subvariedad como el gráfico de una función. Denotamos la gráfica de una función $h : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$\Gamma(h) \doteq \{(\vec{\mathbf{x}}, y) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} : h(\vec{\mathbf{x}}) = y\}.$$

Proposición 2.5.4. *Sea M una variedad riemanniana completa con borde y (\mathcal{U}, φ) una vecindad convexa de $p \in \partial M$ sobre $\mathcal{D}(M)$ tal que $\{\partial_i|_p\}$ es una base ortonormal de $\mathbf{T}_p M \cong \mathbb{R}^n$ con $\{\partial_n|_p\} \in \mathbf{N}_p \partial M$ interior, donde $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$. Entonces, existe una función $h : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\varphi(\partial M \cap \mathcal{U}) = \Gamma(h)$. Más aún, $\mathbf{H}h_{\vec{\mathbf{0}}}(\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}) = \left\langle \Pi^{\partial M}(\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}) \Big| \partial_n|_p \right\rangle$ para todo $\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}} \in \mathbf{T}_p \partial M$.*

Demostración. Consideremos la proyección $\omega : \mathbf{T}_p M \rightarrow \mathbf{T}_p \partial M$ dada por $\omega(u_1, \dots, u_n) = (u_1, \dots, u_{n-1})$ y $B \doteq \varphi(\partial M \cap \mathcal{U})$. Notemos que $\Pi \doteq \omega \upharpoonright B$ es un difeomorfismo local en 0. Así consideremos $\Pi : B \rightarrow \omega(B)$ y $\Psi : \omega(B) \rightarrow B$ su inversa con $\Psi = (\psi^1, \dots, \psi^n)$. Por tanto,

para $\vec{\mathbf{u}} \in \varpi(B)$,

$$\vec{\mathbf{u}} = \Pi \circ \Psi(\vec{\mathbf{u}}) = \Pi(\psi^1(\vec{\mathbf{u}}), \dots, \psi^n(\vec{\mathbf{u}})) = (\psi^1(\vec{\mathbf{u}}), \dots, \psi^{n-1}(\vec{\mathbf{u}})).$$

Luego, $\Psi(\vec{\mathbf{u}}) = (\vec{\mathbf{u}}, \psi^n(\vec{\mathbf{u}}))$. Por último, $h = \psi^n : \varpi(B) \rightarrow \mathbb{R}$ es la función que buscamos.

Ahora bien, analicemos la diferenciabilidad de h . Sea $\vec{\mathbf{u}} \in \mathbf{T}_p \partial M$, entonces

$$\mathbf{D}\Psi_{\vec{\mathbf{0}}}(\vec{\mathbf{u}}) = \mathbf{D}(\Pi^{-1})_{\vec{\mathbf{0}}}(\vec{\mathbf{u}}) = (\mathbf{D}\Pi_{\vec{\mathbf{0}}})^{-1}(\vec{\mathbf{u}}) = (\vec{\mathbf{u}}, 0).$$

Por otro lado,

$$\mathbf{D}\Psi_{\vec{\mathbf{0}}}(\vec{\mathbf{u}}) = \left. \frac{d}{dt}(\Psi(t\vec{\mathbf{u}})) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt}(t\vec{\mathbf{u}}, h(t\vec{\mathbf{u}})) \right|_{t=0} = (\vec{\mathbf{u}}, \mathbf{D}h_{\vec{\mathbf{0}}}(\vec{\mathbf{u}})).$$

Por lo tanto, $\mathbf{D}h_{\vec{\mathbf{0}}}(\vec{\mathbf{u}}) = 0$, es decir, $\vec{\mathbf{0}} \in \mathbf{T}_p \partial M$ es un punto crítico de h .

Lo que queda ahora es determinar la hessiana de h en $\vec{\mathbf{0}}$. Si $\vec{\mathbf{u}} \in \mathbf{T}_p \partial M$ y $\hat{\mathbf{n}} = \partial_n|_p$, entonces

$$\mathbf{H}h_{\vec{\mathbf{0}}}(\partial_i, \partial_j) = \left. \frac{\partial^2 h}{\partial x^i \partial x^j} \right|_{\vec{\mathbf{0}}}.$$

Usamos Ψ para empujar los campos coordenados del borde.

$$\mathbf{D}\Psi(\partial_k) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \psi^i}{\partial x^k} \partial_i = \frac{\partial \psi^i}{\partial x^i} \partial_i + \frac{\partial \psi^n}{\partial x^i} \partial_n = \partial_i + \frac{\partial h}{\partial x^i} \partial_n.$$

Ahora bien, calculamos la derivada covariante de las coordenadas.

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{D}\Psi(\partial_i)} \mathbf{D}\Psi(\partial_j) &= \nabla_{\partial_i} \mathbf{D}\Psi(\partial_j) + \frac{\partial h}{\partial x^i} \nabla_{\partial_n} \mathbf{D}\Psi(\partial_j) \\ &= \nabla_{\partial_i} \partial_j + \frac{\partial^2 h}{\partial x^i \partial x^j} \partial_n + \frac{\partial h}{\partial x^j} \nabla_{\partial_i} \partial_n + \nabla_{\partial_n} \partial_i + \nabla_{\partial_n} \frac{\partial h}{\partial x^j} \partial_n. \end{aligned}$$

Por **Proposición 1.2.18**, tenemos que $\nabla_{\partial_i} \partial_j = 0$ en $\vec{\mathbf{0}}$ y, en consecuencia, $\nabla_{\mathbf{D}\Psi(\partial_i)} \mathbf{D}\Psi(\partial_j) = \frac{\partial^2 h}{\partial x^i \partial x^j} \partial_n$. Por último, calculamos la segunda forma fundamental

$$\left\langle \Pi^{\partial M}(\partial_i, \partial_j) \Big|_{\hat{\mathbf{n}}} \right\rangle = \left\langle \nabla_{\mathbf{D}\Psi(\partial_i)} \mathbf{D}\Psi(\partial_j) \Big|_{\hat{\mathbf{n}}} \right\rangle = \left. \frac{\partial^2 h}{\partial x^i \partial x^j} \right|_{\vec{\mathbf{0}}}.$$

Por lo tanto, $\mathbf{H}h_{\vec{\mathbf{0}}} = \ell_{\hat{\mathbf{n}}}^{\partial M}$.

Q.E.D.

Capítulo 3

Geometría variacional de geodésicas

Este capítulo desarrolla las herramientas analíticas para el estudio de la variación de geodésicas, lo que permitirá deducir diversas propiedades geométricas y topológicas de las variedades riemannianas. En la [Sección 3.1](#), se analizan las variedades desde su estructura como espacios métricos, culminando en la exposición del [Teorema de Hopf-Rinow](#). Posteriormente, se establece la teoría de los funcionales de energía y volumen, marcos que permiten caracterizar tanto las geodésicas como las hipersuperficies mínimas del espacio.

En particular, para la [Sección 3.6](#), se ha realizado un esfuerzo especial por organizar y sistematizar los resultados que abordan las variedades riemannianas con borde. Dado que este caso suele recibir un tratamiento menos detallado en la literatura clásica, esta sección intenta clarificar dichas configuraciones, buscando ofrecer un desarrollo coherente y operativo que sirva de base para el estudio de la convexidad y estabilidad que prosigue.

3.1. Distancia Riemanniana

Consideremos M una variedad riemanniana e $\mathbb{I} \doteq [0, 1]$.

Definición. Sea $\alpha \in \mathcal{C}(\mathbb{I}; M)$ una curva admisible. Definimos la *longitud* y *energía* de α por

$$\mathcal{L}(\alpha) \doteq \int_0^1 \|\alpha'\| \, d\alpha \quad \text{y} \quad \mathcal{E}(\alpha) \doteq \frac{1}{2} \int_0^1 \|\alpha'\|^2 \, d\alpha.$$

Definición. Definimos la *distancia riemanniana* como la función

$$\text{dist}_M : M \times M \rightarrow \mathbb{R} \setminus \mathbb{R}^- \quad \text{dada por} \quad \text{dist}_M(p, q) = \inf\{\mathcal{L}(\alpha) : \alpha \in \Omega(M; p, q)\}.$$

Proposición 3.1.1. La función $\text{dist} \doteq \text{dist}_M$ es una distancia en M , ID EST, para todo $x, y, z \in M$,

- $\text{dist}(x, y) = 0 \iff x = y$.
- $\text{dist}(x, y) = \text{dist}(y, x)$.

- $\text{dist}(x, y) + \text{dist}(y, z) \geq \text{dist}(x, z)$.

Demostración. Ver [Lee18, Teorema 2.55].

Q.E.D.

Observación. En la teoría de espacios métricos, a la distancia definida por el largo de las curvas se le llama *distancia intrínseca*. Si no hay confusión, podemos usar la notación «dist».

Proposición 3.1.2. *La topología de M definida por la distancia coincide con la topología de M .*

Demostración. Ver [Pet16, Teorema 5.3.8].

Q.E.D.

Las dos proposiciones anteriores nos permite heredar todas las propiedades de los espacios métricos. Mi principal material de referencia es el libro de Lima [Lim13].

Denotamos las bolas (métricas) abiertas y cerradas de M como sigue:

$$B(x, \rho) \doteq \{p \in M : \text{dist}(x, p) < \rho\} \quad \text{y} \quad \bar{B}(x, \rho) \doteq \{p \in M : \text{dist}(x, p) \leq \rho\}.$$

Lema 3.1.3. *Sea $\alpha : [0, 1] \rightarrow M$ una curva suave. Entonces, $\mathcal{L}(\alpha) \leq \sqrt{\mathcal{E}(\alpha)}$; la igualdad se da si, y sólo si, $\|\alpha'\|$ es constante.*

Demostración. Ver [Jos17, Lema 1.4.2].

Q.E.D.

Lema 3.1.4. *Sea $\alpha : [0, 1] \rightarrow M$ una curva suave y $\tau : [0, 1] \rightarrow [a, b]$ una reparametrización; entonces*

$$\mathcal{L}(\alpha) = \mathcal{L}(\alpha \circ \tau).$$

Demostración. Ver [Jos17, Lema 1.4.3].

Q.E.D.

Definición. Una curva $\alpha \in \Omega_{p,q}$ se dice *minimizadora* si $\|\alpha'\|$ es constante y $\mathcal{L}(\alpha) = \text{dist}(p, q)$.

Teorema 3.1.5. *Toda curva geodésica es una minimizadora en una variedad riemanniana.*

Demostración. Ver [Lee18, Teorema 6.4].

Q.E.D.

Observación. Puede pasar el caso que dos puntos tengan una distancia definida, pero no exista una curva minimizadora que los conecte. Una parte importante del trabajo en este documento se basa en dar condiciones para la existencia de estas curvas.

Al igual que en los espacios métricos podemos definir la *distancia entre dos subconjuntos* no vacíos $P, Q \subset M$ como

$$\text{dist}(P, Q) \doteq \inf\{\text{dist}(p, q) : p \in P \text{ y } q \in Q\}.$$

Vale la pena recordar que si $P \cap Q \neq \emptyset$, entonces $\text{dist}(P, Q) = 0$; pero el recíproco es falso.

Al momento de hablar sobre espacios métricos sale a la luz una de las propiedades más importantes: la *completitud*. El siguiente Teorema es uno de los más trascendentales en el área de la Geometría Diferencial.

Teorema 3.1.6 (Hopf y Rinow, 1931). *Sea M una variedad riemanniana. Entonces, las siguientes proposiciones son equivalentes.*

1. M es geodésicamente completa, ID EST, todas las geodésicas están definidas en todo tiempo.
2. M es geodésicamente completa en p , ID EST, todas las geodésicas en p están definidas en todo tiempo.
3. M satisface la propiedad de Heine-Borel, ID EST, todo conjunto cerrado y acotado es compacto.
4. M es un espacio métrico completo.

Demostración. Ver [O'N83, Teorema 5.21].

Q.E.D.

Corolario. *Si M es una variedad riemanniana geodésicamente completa, entonces cualquier par de puntos en M pueden ser conectados por una geodésica minimizadora.*

Demostración. Ver [O'N83, Proposición 5.22].

Q.E.D.

Observación. En Geometría Diferencial se suele decir que una variedad es completa si es geodésicamente completa. Esto es porque se suele estudiar el caso sin borde, donde las nociones son equivalentes. En este documento lo haremos al revés, diremos que una variedad es completa si es métricamente completa y especificaremos si es geodésicamente completa.

Ahora bien, discutiremos algunos resultados sobre espacios métricos completos.

Proposición 3.1.7. *Sea $\alpha : X \rightarrow M$ una aplicación y $\mathcal{B}_\alpha(X; M)$ el conjunto de las aplicaciones $f : X \rightarrow M$ tales que $d(f, \alpha) \doteq \sup\{d(f(x), \alpha(x)) : x \in X\} < \infty$. Si M es completo, entonces $\mathcal{B}_\alpha(X; M)$ es completo para cualquier α .*

Demostración. Ver [Lim13, Proposición 7.8].

Q.E.D.

Una *completación* de M es un par $(\tilde{M}, \tilde{\varphi})$, donde \tilde{M} es completo y $\tilde{\varphi} : M \rightarrow \tilde{M}$ es una inmersión isométrica cuyo recorrido es denso en \tilde{M} .

Proposición 3.1.8 (Existencia). *Todo espacio métrico posee una completación.*

Demostración. Ver [Lim13, Proposición 7.13].

Q.E.D.

Proposición 3.1.9 (Unicidad). Sean $(\tilde{M}, \tilde{\varphi})$ y $(\hat{M}, \hat{\varphi})$ dos completaciones del mismo espacio métrico M . Existe una única isometría $\Phi : \tilde{M} \rightarrow \hat{M}$ tal que $\Phi \circ \tilde{\varphi} = \hat{\varphi}$.

Demostración. Ver [Lim13, Proposición 7.14].

Q.E.D.

Proposición 3.1.10. Todo espacio métrico compacto es completo.

Demostración. Ver [Lim13, pág. 236].

Q.E.D.

Por último, revisemos un poco del estudio de mapas en espacios métricos.

Definición. Sea (Y, d) un espacio métrico. Sea \mathcal{F} un subconjunto del espacio de funciones $\mathcal{C}(X, Y)$. Si $x_0 \in X$, el conjunto \mathcal{F} se dice **equicontinuo en x_0** si dado $\varepsilon > 0$, existe una vecindad U de x_0 tal que para todo $x \in U$ y todo $f \in \mathcal{F}$

$$d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

Si el conjunto \mathcal{F} es equicontinuo en x_0 para cada $x_0 \in X$, se dice simplemente que es **equicontinuo**.

Definición. Sea $f_n : X \rightarrow M$ una sucesión de mapas con $n \in \mathbb{N}$. Se dice que $\{f_n\}$ **converge puntualmente** a f si

$$f_n \rightarrow f \quad \text{si, y solo si,} \quad \forall x \in X : \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x).$$

Se dice que $\{f_n\}$ **converge uniformemente** a f si

$$f_n \rightrightarrows f \quad \text{si, y solo si,} \quad (\forall \varepsilon)(\exists m)(\forall x)[m < n \implies \text{dist}(f_n(x), f(x)) < \varepsilon]$$

Teorema 3.1.11 (Arzelà-Ascoli). Sea X un espacio métrico compacto y $f_n \in \mathcal{C}(X; \mathbb{R}^k)$. Si la colección $\{f_n\}$ está puntualmente acotada y es equicontinua, entonces f_n tiene una subsucesión que converge uniformemente.

Demostración. Ver [Mun02, pág. 319].

Q.E.D.

Proposición 3.1.12. Sea M una variedad riemanniana compacta y $\sigma_m : \mathbb{I} \rightarrow M$ una sucesión de caminos geodésicos de longitud λ que convergen puntualmente a $\bar{\sigma} : \mathbb{I} \rightarrow M$. Entonces, σ es un camino geodésico.

Demostración. Como σ_m es una geodésica, entonces su velocidad es $\|\sigma'_m(t)\| = \lambda$ para todo t . Tomamos $t_0 \in \mathbb{I}$ y sin pérdida de generalidad supongamos que $t_0 < t$, luego

$$\text{dist}(\sigma_m(t), \sigma_m(t_0)) = \int_{t_0}^t \|\sigma'_m(s)\| ds = \lambda|t - t_0|.$$

Por lo tanto, $\{\sigma_m\}$ es un conjunto equicontinuo. Por **Teorema de Arzelà-Ascoli**, tenemos que σ_m converge uniformemente a $\bar{\sigma}$, es decir, $\sigma_m \rightrightarrows \bar{\sigma}$.

Para verificar la **Ecuación Geodésica** en el límite, trabajaremos en coordenadas locales. Sea $p = \bar{\sigma}(t_0)$, elegimos una carta local (\mathcal{U}, φ) de p con coordenadas $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$ y un subintervalo $[a, b] \subset \mathbb{I}$ tal que $\bar{\sigma}([a, b]) \subset \mathcal{U}$. Entonces,

$$\frac{d^2(x^k \circ \sigma_m)}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^n \Gamma^k_{ij}(\sigma_m) \frac{d(x^i \circ \sigma_m)}{dt} \frac{d(x^j \circ \sigma_m)}{dt} = 0. \quad (3.1)$$

Consideremos un cubrimiento de M por cartas locales; por compacidad, existe un subcubrimiento finito. Dado que los símbolos de Christoffel son funciones suaves, estos resultan uniformemente acotados en dicho subcubrimiento por una constante global κ . Además, las velocidades $\frac{d(x^i \circ \sigma_m)}{dt}$ están uniformemente acotadas por la hipótesis $\|\sigma'_m(t)\| = \lambda$. En consecuencia, la aceleración $\frac{d^2(x^k \circ \sigma_m)}{dt^2}$ está uniformemente acotada, a saber,

$$\|\sigma''_m(t)\| \leq \mu(\kappa, \lambda) < \mu_0 < \infty.$$

De lo anterior se desprende que la sucesión de velocidades $\{\sigma'_m\}$ es equicontinua. Por otro lado, como las velocidades están uniformemente acotadas y $\sigma_m \rightrightarrows \bar{\sigma}$, entonces σ'_m converge puntualmente a $\bar{\sigma}'$, esto es, $\sigma'_m \rightarrow \bar{\sigma}'$. Luego, por **Teorema de Arzelà-Ascoli**, tenemos que $\sigma'_m \rightrightarrows \bar{\sigma}'$.

Consideremos la **Ecuación (3.1)**. Tenemos que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\sum_{i,j=1}^n \Gamma^k_{ij}(\sigma_m) \frac{d(x^i \circ \sigma_m)}{dt} \frac{d(x^j \circ \sigma_m)}{dt} \right) = \sum_{i,j=1}^n \Gamma^k_{ij}(\bar{\sigma}) \frac{d(x^i \circ \bar{\sigma})}{dt} \frac{d(x^j \circ \bar{\sigma})}{dt}.$$

Mientras que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{d^2(x^k \circ \sigma_m)}{dt^2} \right) = \frac{d^2(x^k \circ \bar{\sigma})}{dt^2}.$$

Entonces,

$$\frac{d^2(x^k \circ \bar{\sigma})}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^n \Gamma^k_{ij}(\bar{\sigma}) \frac{d(x^i \circ \bar{\sigma})}{dt} \frac{d(x^j \circ \bar{\sigma})}{dt} = 0.$$

Por lo tanto, $\bar{\sigma}$ es una geodésica.

Q.E.D.

Por último revisemos el caso con borde.

Proposición 3.1.13. Sea M una variedad riemanniana conexa completa con borde. Entonces, para todo $p, q \in M$ existe una curva $\alpha \in \Omega_{p,q}$ minimizadora.

Demostración. Ver [Pet23, pág. 16].

Q.E.D.

3.2. Funcional Energía

Consideremos M una variedad riemanniana e $\mathbb{I} \doteq [0, 1]$.

Definición. Sea $\alpha : \mathbb{I} \rightarrow M$ una curva admisible. Una *variación* de α es un mapa $\mathbf{x} : \mathbb{I} \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ tal que $\alpha(u) = \mathbf{x}(u, 0)$ para todo $u \in \mathbb{I}$.

El campo vectorial V sobre α dado por $V(u) = \mathbf{x}_v(u, 0)$ es llamado *campo variacional* de \mathbf{x} .

Una variación \mathbf{x} se dice *geodésica* si la curva $u \mapsto \mathbf{x}(u, v)$ es una geodésica para todo $v \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Dicha curva recibe el nombre de *curva longitudinal* de \mathbf{x} , mientras que la curva $v \mapsto \mathbf{x}(u, v)$ es llamada *transversal*.

Observación. Una variación geodésica se suele llamar en inglés: *geodesic variation, variation through geodesics* o *one-parameter family of geodesics*.

Definimos la primera y segunda variación de Energía como

$$\mathcal{E}'_{\mathbf{x}}(v) \doteq \frac{d}{dv} \left(\int_{\mathbb{I}} \|\mathbf{x}_u(u, v)\|^2 du \right) \quad \text{y} \quad \mathcal{E}''_{\mathbf{x}}(v) \doteq \frac{d^2}{dv^2} \left(\int_{\mathbb{I}} \|\mathbf{x}_u(u, v)\|^2 du \right).$$

Proposición 3.2.1. Sea $\alpha : [a, b] \rightarrow M$ una curva admisible y \mathbf{x} una variación de α , entonces

$$\mathcal{E}'_{\mathbf{x}}(v) = \int_a^b \langle \mathbf{x}_{uu} | \mathbf{x}_v \rangle du + \langle \mathbf{x}_u | \mathbf{x}_v \rangle \Big|_{(a,v)}^{(b,v)} + \sum_{i=1}^{m-1} \langle \mathbf{x}_{u^-} - \mathbf{x}_{u^+} | \mathbf{x}_v \rangle \Big|_{(a_i,v)}. \quad (3.2)$$

Demostración. Ver [Lee18, Teorema 6.3].

Q.E.D.

Proposición 3.2.2. Sea $\sigma : [a, b] \rightarrow M$ una geodésica y \mathbf{x} una variación de σ , entonces

$$\mathcal{E}''_{\mathbf{x}}(v) = \int_a^b \left\{ \|\mathbf{x}_{vu}\|^2 - \langle R(\mathbf{x}_v, \mathbf{x}_u) \mathbf{x}_u | \mathbf{x}_v \rangle \right\} du + \langle \mathbf{x}_{vv} | \mathbf{x}_u \rangle \Big|_a^b. \quad (3.3)$$

Demostración. Ver [Lee18, Teorema 10.22].

Q.E.D.

Sea \mathbf{x} es una variación de $\alpha : \mathbb{I} \rightarrow M$ con campo variacional $V \in \overline{\mathfrak{X}}(\alpha)$, se usarán las siguientes notaciones a conveniencia

$$\frac{\delta \mathcal{E}}{\delta V} \Big|_{\alpha} = \delta \alpha(V) = \mathcal{E}'_{\mathbf{x}}(0) \quad \text{y} \quad \frac{\delta^2 \mathcal{E}}{\delta V^2} \Big|_{\alpha} = \delta^2 \alpha(V, V) = \mathcal{E}''_{\mathbf{x}}(0).$$

En este caso, decimos que V es un campo variacional de α .

Corolario. Sea $\alpha : [a, b] \rightarrow M$ una curva suave y $V \in \overline{\mathfrak{X}}(\alpha)$ un campo variacional de α . Entonces,

$$\left. \frac{\delta \mathcal{E}}{\delta V} \right|_{\alpha} = \int_a^b \langle \mathbf{D}_{\sigma} \alpha' | V \rangle d\alpha + \langle \alpha' | V \rangle \Big|_a^b. \quad (3.4)$$

Además, si α es una geodésica, entonces

$$\left. \frac{\delta^2 \mathcal{E}}{\delta V^2} \right|_{\alpha} = \int_a^b \left\{ \|\mathbf{D}_{\sigma} V\|^2 - \langle R(V, \alpha') \alpha' | V \rangle \right\} d\alpha + \langle \nabla_V V | \alpha' \rangle \Big|_a^b. \quad (3.5)$$

Al igual que el típico curso de cálculo 1, al momento de derivar una función queremos obtener sus puntos críticos para encontrar máximos o mínimos. El caso de curvas no es distinto, obteniendo el siguiente resultado.

Corolario. Si $\sigma \in \Omega_{p,q}$ es una geodésica, entonces σ es un punto crítico de \mathcal{E} , ID EST, $\mathcal{E}'_{\mathbf{x}}(0) = 0$ para toda variación \mathbf{x} tal que $\mathbf{x}(a, v) = p$ y $\mathbf{x}(b, v) = q$.

Demostración. Por Corolario de **Proposición 1.2.12**, si $\sigma : [a, b] \rightarrow M$ es una geodésica, entonces σ es suave, $\mathbf{x}_{uu} \equiv 0$ y $\mathbf{x}_v(a, 0) = \mathbf{x}_v(b, 0) = 0$. Por lo tanto, $\mathcal{E}'_{\mathbf{x}}(0) = 0$. Q.E.D.

Proposición 3.2.3. Sea \mathcal{U} una vecindad normal de $p \in M$. Para todo $q \in \mathcal{U}$, la geodésica $\sigma \in \Gamma(\mathcal{U}; p, q)$ es minimizadora.

Demostración. Ver [Lee18, Proposición 6.11]. Q.E.D.

El estudio de las curvas críticas de la energía se centra en las dos configuraciones fundamentales de la literatura riemanniana: el problema de extremos fijos y el de extremos en subvariedades.

Problema de extremos fijos (PEF). Sean $p, q \in M$. Queremos encontrar la curva $\alpha \in \Omega = \Omega(M; p, q)$ que minimiza la energía. En este caso, debemos escoger un campo variacional $V \in \overline{\mathfrak{X}}(\alpha)$ tal que $V(0) = V(1) = \vec{0}$. Se suele denotar a este conjunto como $\mathbf{T}_{\alpha} \Omega \subset \overline{\mathfrak{X}}(\alpha)$. Finalmente, las **ecuaciones (3.4) y (3.5)** quedan como

$$\left. \frac{\delta \mathcal{E}}{\delta V} \right|_{\alpha} = \int_0^1 \langle \mathbf{D}_t \alpha' | V \rangle d\alpha \quad \text{y} \quad \left. \frac{\delta^2 \mathcal{E}}{\delta V^2} \right|_{\alpha} = \int_0^1 \left\{ \|\mathbf{D}_t V\|^2 - \langle R(V, \alpha') \alpha' | V \rangle \right\} d\alpha.$$

Problema de extremos en subvariedades (PEV). Sean P, Q subvariedades riemannianas de M . Como anteriormente, queremos que al hacer una variación \mathbf{x} de una curva $\alpha \in \tilde{\Omega} = \Omega(M; P, Q)$, la curva $u \mapsto \mathbf{x}(u, v)$ pertenezca a $\tilde{\Omega}$ para todo $v \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Por tanto, el campo variacional $V \in \overline{\mathfrak{X}}(\alpha)$ de \mathbf{x} debe cumplir que $A = V(0) \in \mathbf{T}_{\alpha(0)} P$ y $B = V(1) \in \mathbf{T}_{\alpha(1)} Q$.

Igual que antes, decimos que $V \in \mathbf{T}_\alpha \bar{\Omega}$. Entonces, la **ecuación (3.4)** permanece idéntica, pero la **ecuación (3.5)** cambia a

$$\left. \frac{\delta^2 \mathcal{E}}{\delta V^2} \right|_\alpha = \int_0^1 \left\{ \|\mathbf{D}_t V\|^2 - \langle R(V, \alpha') \alpha' | V \rangle \right\} d\alpha + \langle \Pi^Q(B, B) | \alpha'(1) \rangle - \langle \Pi^P(A, A) | \alpha'(0) \rangle.$$

Valen mencionar que $\alpha'(1)$ apunta hacia el otro lado P que donde se encuentra la curva, por lo que se suele escribir

$$-\langle \Pi^Q(B, B) | -\alpha'(1) \rangle = \langle \Pi^Q(B, B) | \alpha'(1) \rangle.$$

Notemos que si $(p, q) \in P \times Q$, entonces $\mathbf{T}_\alpha \Omega \subset \mathbf{T}_\alpha \bar{\Omega}$. Esto quiere decir que si $\delta\alpha(V) = 0$ para todo $V \in \mathbf{T}_\alpha \bar{\Omega}$, entonces $\delta\alpha(V) = 0$ para todo $V \in \mathbf{T}_\alpha \Omega$.

Definición. Una curva $\alpha \in \Omega(M; P, Q)$ se dice **normal** si $\alpha'(0) \perp \mathbf{T}_p P$ y $\alpha'(1) \perp \mathbf{T}_q Q$.

Esta propiedad es deseable, porque nos permitirá convertir la **ecuación (3.4)** de PEV a la ecuación de PEF.

Proposición 3.2.4. *Sea M una variedad riemanniana completa conexa sin borde y P, Q subvariedades riemannianas de M cerradas. Entonces, existe una geodésica $\sigma \in \Omega_{P, Q}$ minimizadora normal.*

Demostración. Como la función distancia dist_M es continua y $P \times Q$ es un conjunto compacto, existe un mínimo global (p, q) . Esto quiere decir que, en caso de existir una curva $\alpha \in \bar{\Omega} = \Omega_{P, Q}$ minimizadora, $\alpha \in \Omega = \Omega_{p, q}$.

Por **Teorema de Hopf-Rinow**, existe una geodésica minimizadora $\sigma \in \Omega$. Luego, como $\mathcal{L}(\sigma) = \text{dist}(P, Q)$, entonces $\delta\sigma(V) = 0$ para todo $V \in \mathbf{T}_\sigma \bar{\Omega}$.

Tomamos un campo variacional $V \in \mathbf{T}_\sigma \bar{\Omega}$ y calculamos su primera variación

$$\left. \frac{\delta \mathcal{E}}{\delta V} \right|_\sigma = \int_a^b \langle \mathbf{D}_t \sigma' | V \rangle d\sigma + \langle \sigma' | V \rangle \Big|_a^b = \langle \sigma'(b) | V(b) \rangle - \langle \sigma'(a) | V(a) \rangle = 0.$$

Tomamos $f \in \mathcal{F}([a, b])$ tal que $f(a) = 0$ y $f(b) = 1$, entonces $X = fV$ también es un campo variacional de σ y, en consecuencia,

$$0 = \langle \sigma'(b) | X(b) \rangle - \langle \sigma'(a) | X(a) \rangle = \langle \sigma'(b) | V(b) \rangle.$$

Por lo tanto, $\sigma'(b) \perp V(b)$. De la misma manera, se concluye que $\sigma'(a) \perp V(a)$. Q.E.D.

3.3. Coordenadas periféricas

Para estudiar el comportamiento geométrico cerca del borde, resulta conveniente introducir un sistema de coordenadas adaptado a éste, en el que una de las direcciones sea normal al borde.

Consideremos M una variedad riemanniana con borde $\partial M \neq \emptyset$. No podemos directamente generalizar el concepto de geodésicas en el borde, para ello usaremos la doble variedad $\mathcal{D}(M)$. Notemos que M es una subvariedad regular cerrada de $\mathcal{D}(M)$. Por [Teorema A.3.2](#), existe una extensión suave de la métrica de M . Luego, ∂M es una hipersuperficie riemanniana de $\mathcal{D}(M)$, además, por [Proposición 2.5.3](#), existe $N^{\partial M}$.

Definición. Sea M una n -variedad riemanniana. Las coordenadas locales (x^1, \dots, x^n) sobre un abierto \mathcal{U} se dice *coordenadas semigeodésicas* si cada curva $t \mapsto (x^1, \dots, x^{n-1}, t)$ es una geodésica que intersecta el conjunto de nivel de x^n ortogonalmente.

Proposición 3.3.1. Sea M una n -variedad riemanniana y (\mathcal{U}, φ) una carta local. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. (x^1, \dots, x^n) son coordenadas semigeodésicas.
2. $\|\partial_n\| \equiv 1$ y $\langle \partial_i | \partial_n \rangle \equiv 0$ para todo $i = 1, \dots, n-1$.
3. $\|dx^n\| \equiv 1$ y $\langle dx^i | dx^n \rangle \equiv 0$ para todo $i = 1, \dots, n-1$.
4. $\|\nabla x^n\| \equiv 1$ y $\langle \nabla x^i | \nabla x^n \rangle \equiv 0$ para todo $i = 1, \dots, n-1$.
5. x^n es una función distancia local y x^1, \dots, x^{n-1} son constantes a lo largo de las curvas integrales de ∇x^n .
6. $\nabla x^n \equiv \partial_n$.

Demostración. Ver [[Lee18](#), Proposición 6.41].

Q.E.D.

Definición. Sea M una variedad riemanniana con borde ∂M . Las coordenadas $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$ se dicen *coordenadas periféricas normales* sobre M si (x^1, \dots, x^{n-1}) son coordenadas de ∂M y $\Phi: \partial M \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathcal{U} \subset M$ tal que $p = \Phi(q, t) = \exp_q(tN^q)$.

Lo importante de la definición es que son coordenadas semigeodésicas y como definimos la exponencial en $\mathcal{D}(M)$ no hay problemas.

Definición. Sea P una subvariedad riemanniana de M . Se define el *mapa exponencial normal* como la restricción $\exp^\perp \doteq \exp|_{\mathbf{NP}}: \mathbf{NP} \rightarrow M$.

Definición. Una *vecindad tubular* de P es una vecindad $\mathcal{U} \subset M$ tal que $\mathcal{U} = \exp^\perp(\mathcal{V})$ y $\exp^\perp: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{U}$ es un difeomorfismo, donde

$$\mathcal{V} = \{(p, \mathbf{v}) \in \mathbf{NP} : \|\mathbf{v}\| < \varepsilon(p)\}$$

para alguna función continua $\varepsilon: P \rightarrow \mathbb{R}^+$. Se dice que \mathcal{U} es una *vecindad tubular uniforme* si ε es una función constante.

Teorema 3.3.2. *Sea M una variedad riemanniana. Toda subvariedad regular de M posee una vecindad tubular en M , y toda subvariedad compacta posee una vecindad tubular uniforme.*

Demostración. Ver [Lee18, Tubular Neighborhood Theorem].

Q.E.D.

La importancia del **Teorema de la Vecindad Tubular** radica en que garantiza la existencia de un $\varepsilon > 0$ tal que la aplicación Φ es un difeomorfismo sobre su imagen. Sin este soporte analítico, no se podría asegurar la inyectividad de las coordenadas periféricas.

La siguiente proposición nos permite caracterizar cuándo un punto pertenece al borde mediante la comparación de las aplicaciones exponenciales \exp y $\exp^{\partial M}$.

Proposición 3.3.3. *Sea M una variedad riemanniana con borde $\partial M \neq \emptyset$ y $\varepsilon > 0$ tal que*

$$\exp_p : B(\vec{0}, \varepsilon) \subset \mathbf{T}_p M \rightarrow \mathcal{D}(M) \quad \text{y} \quad \exp_p^{\partial M} : B(\vec{0}, \varepsilon) \subset \mathbf{T}_p \partial M \rightarrow \partial M$$

son difeomorfismos. Si $\exp_p(\mathbf{u}) = q$ con $\mathbf{u} \in B(\vec{0}, \varepsilon)$, entonces

$$q \in \partial M \quad \iff \quad \exists \mathbf{v} \in \mathbf{T}_p \partial M : \left(\mathbf{u}^\perp = f(\mathbf{v})\hat{\mathbf{n}} \quad \text{y} \quad \mathbf{u}^\top = \left\langle \mathbf{v} \middle| \exp_p^{-1} \left(\exp_p^{\partial M}(\mathbf{v}) \right) \right\rangle \mathbf{v} \right),$$

donde $\mathbf{u} = \mathbf{u}^\top + \mathbf{u}^\perp$ y $f(\mathbf{v}) = \left\langle \hat{\mathbf{n}} \middle| \exp_p^{-1} \left(\exp_p^{\partial M}(\mathbf{v}) \right) \right\rangle$.

Demostración. Supongamos que $q \in \partial M$. Entonces, existe $\mathbf{v} \in \mathbf{T}_p \partial M$ tal que $q = \exp_p^{\partial M}(\mathbf{v})$. Luego,

$$f(\mathbf{v}) = \left\langle \hat{\mathbf{n}} \middle| \exp_p^{-1} \left(\exp_p^{\partial M}(\mathbf{v}) \right) \right\rangle = \left\langle \hat{\mathbf{n}} \middle| \exp_p^{-1}(q) \right\rangle = \mathbf{u}^\perp.$$

Notando también que

$$\left\langle \mathbf{v} \middle| \exp_p^{-1} \left(\exp_p^{\partial M}(\mathbf{v}) \right) \right\rangle \mathbf{v} = \left\langle \mathbf{v} \middle| \exp_p^{-1}(q) \right\rangle \mathbf{v} = \langle \mathbf{v} | \mathbf{u} \rangle \mathbf{v} = \mathbf{u}^\top.$$

Por otro lado, supongamos que $f(\mathbf{v})\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{u}^\perp$.

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{u}^\top + \mathbf{u}^\perp \\ &= \left\langle \mathbf{v} \middle| \exp_p^{-1} \left(\exp_p^{\partial M}(\mathbf{v}) \right) \right\rangle \mathbf{v} + f(\mathbf{v})\hat{\mathbf{n}} \\ &= \left\langle \mathbf{v} \middle| \exp_p^{-1} \left(\exp_p^{\partial M}(\mathbf{v}) \right) \right\rangle \mathbf{v} + \left\langle \hat{\mathbf{n}} \middle| \exp_p^{-1} \left(\exp_p^{\partial M}(\mathbf{v}) \right) \right\rangle \hat{\mathbf{n}} \\ &= \exp_p^{-1} \left(\exp_p^{\partial M}(\mathbf{v}) \right). \end{aligned}$$

Luego, como \exp_p es un difeomorfismo, $\exp_p(\mathbf{u}) = \exp_p^{\partial M}(\mathbf{v})$. Por lo tanto, existe $\mathbf{v} \in \mathbf{T}_p \partial M$ tal que $q = \exp_p^{\partial M}(\mathbf{v})$, es decir, $q \in \partial M$. Q.E.D.

3.4. Funcional Volumen

Consideremos M una variedad riemanniana de dimensión n .

Definición. Sea $\Phi : P \hookrightarrow M$ una subvariedad inmersa. Una *variación* de P es mapa diferenciable $\mathbf{F} : P \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ tal que $\mathbf{F}(p, 0) = \Phi(p)$ para todo $p \in P$.

El campo vectorial X a lo largo de P dado por $X(u) = \mathbf{F}_v(u, 0)$ es llamado *campo variacional* de \mathbf{F} .

Definimos la primera y segunda variación del volumen como

$$\mathcal{V}'_{\mathbf{F}}(t) \doteq \left. \frac{d}{dv} \mathcal{V}(\mathbf{F}(P, v)) \right|_{v=t} \quad \text{y} \quad \mathcal{V}''_{\mathbf{F}}(t) \doteq \left. \frac{d^2}{dv^2} \mathcal{V}(\mathbf{F}(P, v)) \right|_{v=t}. \quad (3.6)$$

Hay varias notaciones para las variaciones

$$\left. \frac{\delta \mathcal{V}}{\delta X} \right|_P = \delta P(X) = \mathcal{V}'_{\mathbf{F}}(0) \quad \text{y} \quad \left. \frac{\delta^2 \mathcal{V}}{\delta X^2} \right|_P = \delta^2 P(X, X) = \mathcal{V}''_{\mathbf{F}}(0).$$

Cada una ofrece ventajas al momento de escribir.

Proposición 3.4.1. Sea $\Phi : P \hookrightarrow M$ una subvariedad inmersa con P, M orientables. Si \mathbf{F} es una variación de P con campo variacional $X = X^\top + X^\perp$, entonces

$$\left. \frac{\delta \mathcal{V}}{\delta X} \right|_D = \int_{\partial D} \langle X^\top | N^{\partial D} \rangle \text{vol}_{\partial D} - \int_D \langle X^\perp | H^P \rangle \text{vol}_P, \quad (3.7)$$

donde D es un dominio regular de P y $N^{\partial D} \in \mathfrak{X}(D) \cap \Gamma(\mathbf{N}\partial D)$ es un campo vectorial interior unitario.

Demostración. Ver Schoen [Sch06].

Q.E.D.

Vale mencionar que, si P es una superficie compacta, entonces podemos calcular $\left. \frac{\delta \mathcal{V}}{\delta X} \right|_P$.

Problema de borde libre. El problema de borde libre consiste en, dada una subvariedad $Q \subset M$, minimizar el volumen de las subvariedades $P_\alpha \subset M$ tales que $\partial P_\alpha \subset Q$. Esto implica que, si $\Phi : P \hookrightarrow M$ es una inmersión isométrica y \mathbf{F} es una variación de P , entonces $\mathbf{F}_v(q, 0) \in \mathbf{T}_q Q$ para todo $q \in \partial P$. Por tanto, el conjunto de los campos variaciones para el problema son

$$S = \{X \in \Gamma(\mathbf{T}M \upharpoonright P) : \forall p \in \partial P, X_p \in \mathbf{T}_p Q\}.$$

Ahora bien, si tomamos P un punto crítico del volumen, es decir, $\frac{\delta \mathcal{V}}{\delta X}|_P = 0$ para todo $X \in \mathcal{S}$, entonces tenemos dos condiciones. Si $X = X^\perp$,

$$0 = \frac{\delta \mathcal{V}}{\delta X}|_P = \int_P \langle X | H^P \rangle \text{vol}_P \implies H^P \equiv 0.$$

Esta es la condición común de subvariedad mínima, ver [Capítulo 2](#). Además, si $X = X^\top$,

$$0 = \frac{\delta \mathcal{V}}{\delta X}|_P = \int_{\partial P} \langle X | N^{\partial P} \rangle \text{vol}_{\partial P} \implies \langle X | N^{\partial P} \rangle = 0.$$

Como $X \perp N^{\partial P}$ con $X_p \in \mathbf{T}_p Q$ y $N_p^{\partial P} \in \mathbf{N}_p \partial P$, obtenemos que $\mathbf{T}Q \perp \mathbf{N} \partial P$. Esta propiedad se le conoce como **condición borde libre**.

A nosotros nos interesará el caso donde $Q = \partial M$. Motivando la siguiente definición:

Definición. Una inmersión $\Phi : P \hookrightarrow M$ se dice que tiene **borde libre** si $\partial P \subset \partial M$ y $\mathbf{N}_p \partial P \perp \mathbf{T}_p \partial M$ para todo $p \in \partial P$.

Lema 3.4.2. Sea M una variedad riemanniana con borde $\partial M \neq \emptyset$ y P una subvariedad de M con borde libre. Si $p \in \partial P$ y $\vec{u} \in \mathbf{T}_p P$, entonces $\text{Tan}^{\partial P}(\vec{u}) = \text{Tan}^{\partial M}(\vec{u})$.

Demostración. Debemos probar que las proyecciones ortogonales $\text{Tan}^{\partial P}$ y $\text{Tan}^{\partial M}$ de P sobre ∂P son iguales. Si $\vec{u} \in \mathbf{T}_p \partial P \subset \mathbf{T}_p \partial M$, entonces $\text{Tan}^{\partial P}(\vec{u}) = \vec{u}$ y $\text{Tan}^{\partial M}(\vec{u}) = \vec{u}$. De manera complementaria, si $\vec{u} \in \mathbf{N}_p \partial P$, entonces $\text{Tan}^{\partial P}(\vec{u}) = \vec{0}$. Además, por hipótesis de borde libre, tenemos que $\mathbf{N}_p \partial P \perp \mathbf{T}_p \partial M$ y, en consecuencia, $\text{Tan}^{\partial M}(\vec{u}) = \vec{0}$ para todo $\vec{u} \in \mathbf{N}_p \partial P$. Dado que cualquier vector $\vec{u} \in \mathbf{T}_p P$ se puede escribir de forma única como $\vec{u} = \vec{u}^\top + \vec{u}^\perp$ con $\vec{u}^\top \in \mathbf{T}_p \partial P$ y $\vec{u}^\perp \in \mathbf{N}_p \partial P$, se tiene que $\text{Tan}^{\partial P}(\vec{u}) = \text{Tan}^{\partial M}(\vec{u})$. Q.E.D.

Corolario. Sea M una variedad riemanniana con borde $\partial M \neq \emptyset$ y P una subvariedad de M con borde libre. Si $p \in \partial P$ y $\vec{u} \in \mathbf{T}_p P$, entonces $\text{Nor}^{\partial P}(\vec{u}) = \text{Nor}^{\partial M}(\vec{u})$.

Al igual que en el caso de la energía, queremos calcular la segunda derivada de los puntos críticos.

En particular, es más simple tomar una variación normal.

Proposición 3.4.3. Sean M^n, P^k variedades riemannianas orientables y $\Phi : P \rightarrow M$ una inmersión isométrica. Si P es mínima y X es un campo variacional normal a P , esto es, $X = X^\perp$; entonces

$$\frac{\delta^2 \mathcal{V}}{\delta X^2}|_D = \int_D |\text{Nor}(\nabla X)|^2 - \sum_{i=1}^k \langle R(E_i, X)E_i | X \rangle - |\langle \mathbf{II} | X \rangle|^2 \text{vol}_P + \int_{\partial D} \langle \nabla_X X | N^{\partial D} \rangle \text{vol}_{\partial D},$$

donde D es un dominio regular de P y $\{E_i\}$ un referencial ortonormal de D .

Demostración. Ver Schoen [[Sch06](#)].

Q.E.D.

Por último, agregamos la condición de borde libre a la segunda variación. Entonces, para P una subvariedad borde libre de M se tiene que

$$\langle \nabla_X X | N^{\partial M} \rangle = \langle \Pi^{\partial M}(X, X) | N^{\partial M} \rangle.$$

Observación. Todo lo anterior se ve en la fórmula enunciada por Fraser y Li [FL17] que, en particular, utilizan el caso para una hipersuperficie. Sea $\Sigma^{n-1} \hookrightarrow M^n$, $X \in \Gamma(\mathbf{N}\Sigma)$ y $N \in \Gamma(\mathbf{N}\partial M)$ tal que $\|N\| = 1$,

$$\frac{\delta^2 \mathcal{V}}{\delta X^2} \Big|_{\Sigma} = \int_{\Sigma} \left[\|\nabla^{\Sigma} X\|^2 - \text{Ric}(X) - \|\langle \Pi^{\Sigma} X \rangle\|^2 \right] \text{vol}_{\Sigma} - \int_{\partial \Sigma} \langle \Pi^{\partial M}(X, X) | N \rangle \text{vol}_{\partial \Sigma}. \quad (3.8)$$

Lema 3.4.4. *Sea M una variedad riemanniana completa con borde $\partial M \neq \emptyset$ y P, Q subvariedades riemannianas de M compactas con borde libre. Entonces, la curva minimizadora $\alpha \in \Omega_{P, Q}$ es normal.*

Demostración. Si p, q pertenecen al interior de P, Q , respectivamente, entonces deben ser normales a P y Q como en **Proposición 3.2.4**.

Sea α la curva minimizadora de P y Q . Supongamos que $\alpha(a) \in \partial P$ y $\langle \alpha'(a) | n \rangle > 0$ con $n \in \mathbf{N}_p \partial M$ apuntando al interior.

Sea X el transporte paralelo de n a lo largo de α y $f \in \mathcal{F}(\alpha)$ dado por $f(t) = \frac{b-t}{b-a}$.

Calculamos la variación de α respecto al campo variacional fX , entonces

$$\begin{aligned} \frac{\delta E}{\delta(fX)} \Big|_{\alpha} &= E'_x(0) = \int_a^b \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial v} \langle \mathbf{x}_u | \mathbf{x}_u \rangle \Big|_0 du \\ &= \int_a^b \langle \mathbf{x}_{uv} | \mathbf{x}_u \rangle \Big|_0 du \\ &= \int_a^b \langle \mathbf{x}_{vu} | \mathbf{x}_u \rangle \Big|_0 du \\ &= \int_a^b \langle \nabla_{\alpha'} f X | \alpha' \rangle dt \\ &= \int_a^b \langle f \nabla_{\alpha'} X + (\alpha' f) X | \alpha' \rangle dt \\ &= \int_a^b \alpha' f \langle X | \alpha' \rangle dt \\ &= \int_a^b \frac{-1}{b-a} \langle X | \alpha' \rangle dt \\ &= \frac{-1}{b-a} \int_a^b \langle X | \alpha' \rangle dt < 0. \end{aligned}$$

Notar que $\langle X|\alpha' \rangle > 0$, dado que $\langle n|\alpha'(a) \rangle > 0$ y X es transporte paralelo. Esto es una contradicción, porque α es un mínimo. Por lo tanto, $\alpha'(a) \perp \mathbf{T}_p P$. De la misma manera, se concluye que $\alpha'(b) \perp \mathbf{T}_q Q$. Q.E.D.

3.5. Campos Jacobi

Los campos Jacobi describen la variación infinitesimal de geodésicas y permiten analizar la influencia de la curvatura en su comportamiento, constituyendo la base del Teorema de Rauch.

Consideremos $\sigma : [a, b] \rightarrow M$ una geodésica arcoparametrizada.

Definición. Un campo $X \in \bar{\mathfrak{X}}(\sigma)$ que satisface la *ecuación (diferencial) de Jacobi* (3.9) es llamado *campo Jacobi*.

$$\mathbf{D}_\sigma \mathbf{D}_\sigma X + R(\sigma', X)\sigma' \equiv 0. \quad (3.9)$$

Observación. Denotamos por $\mathfrak{J}(\sigma) \subset \bar{\mathfrak{X}}(\sigma)$ al conjunto de campos Jacobi sobre una geodésica σ .

Proposición 3.5.1. *El campo variacional de una variación geodésica es un campo de Jacobi.*

Demostración. Ver [O'N83, Lema 8.3] y definición «variación geodésica» (Sección 3.2). Q.E.D.

Proposición 3.5.2. *Para todo par de vectores $v, w \in \mathbf{T}_{\sigma(a)} M$, existe un único $X \in \mathfrak{J}(\sigma)$ tal que $X(a) = v$ y $\mathbf{D}_\sigma X(a) = w$.*

Demostración. Ver [O'N83, Lema 8.5]. Q.E.D.

Proposición 3.5.3. *Un campo $X \in \mathfrak{J}(\sigma)$ con $X(a) = 0$, $\mathbf{D}_\sigma X(a) = w$ y $\sigma(a) = p$ está dado por*

$$X(t) = \mathbf{D} \left(\exp_p \right)_{t\sigma'(a)}(tw), \quad t \in [a, b].$$

Demostración. Ver [do 92, Corolario 5.2.5]. Q.E.D.

Proposición 3.5.4. *Sea $\gamma : I \rightarrow M$ una geodésica. Si M es geodésicamente completa o I es un intervalo compacto, entonces $X \in \mathfrak{J}(\gamma)$ es un campo variacional de una variación geodésica de γ .*

Demostración. Ver [Lee18, Proposición 10.4]. Q.E.D.

Proposición 3.5.5. *Suponga que M y \tilde{M} son variedades riemannianas y $\Phi : M \rightarrow \tilde{M}$ es una isometría local. Sean $\gamma : I \rightarrow M$ y $\tilde{\gamma} : I \rightarrow \tilde{M}$ geodésicas relacionadas por $\tilde{\gamma} = \Phi \circ \gamma$, y sean $J \in \mathfrak{J}(\gamma)$ y $\tilde{J} \in \mathfrak{J}(\tilde{\gamma})$ relacionados por $\mathbf{D}\Phi_{\gamma(t)}(J(t)) = \tilde{J}(t)$ para todo $t \in I$. Entonces, J es un campo Jacobi si, y solo si, \tilde{J} lo es.*

Demostración. Ver [Lee18, Lema 10.5, Local Isometry Invariance of Jacobi Fields]. Q.E.D.

Proposición 3.5.6. Sea M una variedad riemanniana, $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo que contiene al 0, y $\sigma : I \rightarrow M$ una geodésica. Suponga $J : I \rightarrow M$ es un campo Jacobi tal que $J(0) = 0$. Si M es geodésicamente completa o I es compacto, entonces J es el campo variacional de la siguiente variación geodésica de σ :

$$\mathbf{x}(u, v) = \exp_p(t(v + sw)),$$

donde $p = \gamma(0)$, $v = \gamma'(0)$ y $w = \mathbf{D}_\sigma J(0)$.

Demostración. Ver [Lee18, Lema 10.9].

Q.E.D.

Desde aquí consideraremos $\sigma \in \Gamma(M; p, q)$.

Definición. La *forma de índice* I_σ de una geodésica no nula $\sigma \in \Omega = \Omega(M; p, q)$ es la única forma bilineal simétrica

$$I_\sigma : \mathbf{T}_\sigma \Omega \times \mathbf{T}_\sigma \Omega \rightarrow \mathbb{R},$$

tal que $I_\sigma(V, V) = \mathcal{L}''_{\mathbf{x}}(0)$ para todo $V \in \mathbf{T}_\sigma \Omega$, donde \mathbf{x} es una variación de extremos fijos de σ y campo variacional V .

Proposición 3.5.7. Sea $\sigma : [0, b] \rightarrow M$ una geodésica, entonces

$$I_\sigma(V, W) = \frac{\varepsilon}{c} \int_0^b \left\{ \langle \mathbf{D}_\sigma V^\perp | \mathbf{D}_\sigma W^\perp \rangle - \langle R(V, \sigma')W | \sigma' \rangle \right\} du, \quad \forall V, W \in \mathbf{T}_\sigma \Omega.$$

Demostración. Ver [O'N83, Corolario 10.7].

Q.E.D.

Proposición 3.5.8. Un campo vectorial X a lo largo de una geodésica $\sigma : [a, b] \rightarrow M$ es un campo de Jacobi si, y solo si, la forma de índice de σ satisface

$$I_\sigma(X, Y) = 0, \quad \forall Y \in \mathbf{T}_\sigma \Omega.$$

Demostración. Ver [Jos17, Lema 6.2.1].

Q.E.D.

Proposición 3.5.9. Un campo vectorial X a lo largo de una geodésica $\sigma : [a, b] \rightarrow M$ es un campo de Jacobi si, y solo si,

$$\left. \frac{d}{ds} I_\sigma(X + sY, X + sY) \right|_{s=0} = 0, \quad \forall Y \in \mathbf{T}_\sigma \Omega.$$

Demostración. Ver [Jos17, Lema 6.2.2].

Q.E.D.

Definición. Definimos el *índice* de una geodésica σ como la cantidad de valores propios negativos de la hessiana de la función energía aplicada a la geodésica.

Definición. Sea σ una geodésica. Se dice que $\sigma(a)$ y $\sigma(b)$ son *conjugados* a lo largo de σ si existe un campo de Jacobi no nulo X sobre σ tal que $X(a) = X(b) = 0$.

Proposición 3.5.10. Sea $\sigma : [a, b] \rightarrow M$ una geodésica. Las siguientes proposiciones son equivalentes:

1. $\sigma(b)$ es un punto conjugado de $\sigma(a)$ a lo largo de σ .
2. Existe una variación geodésica \mathbf{x} no trivial de σ tal que $\mathbf{x}(b, 0) = 0$.
3. El mapa exponencial $\exp_{\sigma(a)} : \mathbf{T}_{\sigma(a)}M \rightarrow M$ es singular en $b\sigma'(a)$;

Demostración. Ver [O'N83, Proposición 10.10].

Q.E.D.

Proposición 3.5.11. Sea $\sigma \in \Gamma(M; p, q)$.

1. Si no existen puntos conjugados de p a lo largo de σ , entonces I_σ es definida positiva.
2. Si q es el único punto conjugado de p a lo largo de σ , entonces I_σ semi-definida positiva.
3. Si hay un punto conjugado $\sigma(t)$ de p a lo largo de σ con $t \in (0, 1)$, entonces I_σ no es semi-definida, a saber, existen $U, V \in \mathbf{T}_\sigma\Omega$ tales que $I_\sigma(U, U) < 0 < I_\sigma(V, V)$.

Demostración. Ver [O'N83, Proposición 10.17].

Q.E.D.

Teorema 3.5.12 (Rauch). Suponga que J_i para $i \in \{1, 2\}$ son soluciones de $\mathbf{D}_\sigma \mathbf{D}_\sigma J_i + R_i J_i = 0$ con $\lambda_-(R_1) \geq \lambda_+(R_2)$ y

$$\mathbf{D}_\sigma J_i(0) = 0, \quad \|J_1(0)\| = \|J_2(0)\|.$$

Entonces, $\|J_1\| \leq \|J_2\|$ hasta el primer cero de J_1 .

Demostración. Ver [Esc94, Rauch II].

Q.E.D.

Notemos que el Teorema de Rauch (1951) permite controlar cómo varía la distancia entre puntos al deformar una geodésica por un campo Jacobi. Intuitivamente, cuando tenemos curvatura seccional no negativa, las geodésicas tienden a converger en comparación con el comportamiento en el espacio euclideo. La siguiente proposición formaliza este fenómeno al establecer que, si realizamos una variación de los extremos de un camino geodésico σ mediante un campo paralelo X , la distancia de los nuevos puntos extremos será menos o igual al largo original de σ . El caso de la igualdad nos permite detertar la presencia de regiones planas (rectángulos totalmente geodésicos) dentro de la variedad.

Proposición 3.5.13. Sea M una variedad riemanniana completa con curvatura seccional no negativa y $\sigma \in \Gamma(M; p, q)$ con $p, q \in M$. Además, sean $X \in \bar{\mathcal{X}}(\sigma)$ paralelo tal que $X \perp \sigma'$ y $\mathbf{x}(u, v) = \exp(vX(u))$ para todo $u \in \mathbb{I}$. Entonces,

$$\text{dist}(\mathbf{x}(0, v), \mathbf{x}(1, v)) \leq \text{dist}(p, q),$$

con igualdad para algún $v > 0$ sólo si $\{p, q, \mathbf{x}(0, v), \mathbf{x}(1, v)\}$ forman un rectángulo plano totalmente geodésico.

Demostración. Ver [Esc94, Corolario 3.4].

Q.E.D.

3.6. Convexidad

Consideremos M una variedad riemanniana conexa con borde.

Definición. Decimos que M es *convexa* si cualquier par de puntos pueden ser unidos por una curva geodésica minimizadora, ID EST,

$$\forall p, q \in M, \quad \exists \sigma \in \Gamma(M; p, q) \quad \text{tal que} \quad \text{dist}(p, q) = \mathcal{L}(\sigma).$$

Esta es la definición más usual y natural de convexidad. No confundir con *geodésicamente convexa* donde se pide la unicidad de la geodésica minimizadora.

Corolario. *Toda variedad riemanniana conexa completa sin borde es convexa.*

Demostración. Ver **Teorema de Hopf-Rinow**.

Q.E.D.

Como la definición de convexidad depende de considerar una variedad con borde omitiremos eso al hablar de una variedad convexa.

En el área de Geometría Métrica se tiene la siguiente definición de convexidad.

Definición. Un espacio métrico (\mathcal{X}, δ) se dice *convexo* si para todo par de puntos $x, y \in \mathcal{X}$ y $r_1, r_2 \geq 0$, tenemos que

$$r_1 + r_2 \geq \delta(x, y) \quad \implies \quad \bar{B}(x, r_1) \cap \bar{B}(y, r_2) \neq \emptyset,$$

donde $\bar{B}(p, \varepsilon)$ es la bola cerrada con la métrica intrínseca.

En la **Sección 1.2**, se definió el concepto de bola geodésica (\mathcal{B}). Geométricamente, nos referimos a el conjunto dado por los puntos a los que podemos llegar por caminos geodésicos. Por otro lado, en la **Sección 3.1**, recordamos la definición de una bola métrica (B), esto porque las variedades riemannianas tienen naturalmente una estructura de espacio métrico. Dado que tenemos dos definiciones de bolas en M , es útil probar la siguiente relación.

Lema 3.6.1. *Sean M una variedad riemanniana con borde, $p \in M$ y $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Entonces, $B(p, \varepsilon)$ es una vecindad normal de p si, y solo si, $B(p, \varepsilon) = \mathcal{B}(p, \varepsilon)$.*

Demostración. Supongamos que $B(p, \varepsilon)$ es vecindad normal de p , es decir, $\exp_p : \mathcal{V} \rightarrow B(p, \varepsilon)$ es un difeomorfismo y \mathcal{V} es una vecindad estrellada de $\vec{0}$.

Si $q \in \mathcal{B}(p, \varepsilon)$, entonces existe $u \in \mathbf{T}_p M$ tal que $q = \exp_p(u)$ y $\|u\| < \varepsilon$. Luego, definiendo $\gamma(t) = \exp_p(tu)$, tenemos que

$$\text{dist}(p, q) \leq \int_{\mathbb{I}} \|\gamma'(t)\| dt = \int_{\mathbb{I}} \|u\| dt = \|u\| < \varepsilon.$$

Por lo tanto, $q \in \mathcal{B}(p, \varepsilon)$. Vale mencionar que esta inclusión se cumple a pesar de la suposición inicial.

Sea $q \in \mathcal{B}(p, \varepsilon)$, a saber, $\text{dist}(p, q) < \varepsilon$. Como \exp_p es un difeomorfismo, existe $u \in \mathcal{V}$ tal que $\exp_p(u) = q$. Además, como $\gamma : \mathbb{I} \rightarrow M$ dada por $\gamma(t) \doteq \exp_p(tu)$ es una geodésica,

$$\|u\| = \int_{\mathbb{I}} \|\gamma'(t)\| dt = \mathcal{L}(\gamma) = \text{dist}(p, q) < \varepsilon.$$

Notar que $\mathcal{L}(\gamma) = \text{dist}(p, q)$ por **Proposición 3.2.3**. Por lo tanto, $q \in \mathcal{B}(p, \varepsilon)$.

Por otro lado, supongamos que $\mathcal{B}(p, \varepsilon) = \mathcal{B}(p, \varepsilon)$. Por definición, $\mathcal{B}(p, \varepsilon)$ es una vecindad normal de p . Por lo tanto, $\mathcal{B}(p, \varepsilon)$ es una vecindad normal de p . Q.E.D.

Haciendo un par de arreglos tenemos lo siguiente:

Proposición 3.6.2 (Caracterización de convexos). *Una variedad riemanniana M es convexa si, y solo si, para todo par de puntos $p, q \in M$ y $a, b \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ tal que $a + b \geq \text{dist}(p, q)$, tenemos que*

$$\exists x \in \overline{\mathcal{B}}(p, a) \cap \overline{\mathcal{B}}(q, b) \quad \text{tal que} \quad \alpha'(1) = -\beta'(1) \quad \text{con} \quad \alpha \in \Gamma_{p,x} \text{ y } \beta \in \Gamma_{q,x}$$

Demostración. Consideramos $p, q \in M$. Primero supongamos que M es convexa, esto es, existe $\sigma \in \Gamma_{p,q}$ tal que $\mathcal{L}(\sigma) = d \doteq \text{dist}(p, q)$. Supongamos que $a < d$ y $b < d$, ya que de lo contrario $p \in \overline{\mathcal{B}}(q, d)$ o $q \in \overline{\mathcal{B}}(p, d)$, obteniendo la tesis trivialmente. Si $a + b \geq d$, entonces $x = \sigma(|a - b + d|/2d)$ cumple todo lo solicitado.

Por otro lado, si existen $x \in M$, $\alpha \in \Gamma_{p,x}$ y $\beta \in \Gamma_{q,x}$ tal que $\alpha'(1) = -\beta'(1)$, es fácil ver que $\alpha * \beta \in \Gamma_{p,q}$, con su reparametrización correspondiente. En este caso, $a = \text{dist}(x, p)$ y $b = \text{dist}(x, q)$. Queremos mostrar que $\mathcal{L}(\alpha * \beta) = \text{dist}(p, q)$. Por hipótesis, podemos tomar $x \in M$ tal que $\text{dist}(p, q) = \text{dist}(p, x) + \text{dist}(x, q)$. Entonces,

$$\text{dist}(p, q) = \text{dist}(p, x) + \text{dist}(x, q) \leq \mathcal{L}(\alpha) + \mathcal{L}(\beta) = \mathcal{L}(\alpha * \beta).$$

Así pues, basta probar que $\text{dist}(p, x) = \mathcal{L}(\alpha)$ y $\text{dist}(q, x) = \mathcal{L}(\beta)$. Supongamos que $\mathcal{L}(\alpha) > \text{dist}(p, x)$. Como $\alpha \subset \overline{\mathcal{B}}(p, \text{dist}(p, x))$, entonces $\alpha(t) = \exp_p(tv)$ y

$$\mathcal{L}(\alpha) = \int_0^1 \|\alpha'(t)\| dt = \int_0^1 \|v\| dt = \|v\| > \text{dist}(p, x).$$

Pero $x \in \overline{B}(p, \text{dist}(p, x))$ quiere decir que $\|v\| \leq \text{dist}(p, x)$. Por lo tanto, $\mathcal{L}(\alpha) = \text{dist}(p, x)$. De la misma manera se tiene que $\mathcal{L}(\beta) = \text{dist}(q, x)$, completando la demostración. Q.E.D.

Lema 3.6.3. *Sea M una variedad riemanniana convexa. Para todo $p \in \partial M$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(p, \varepsilon)$ es vecindad normal de p .*

Demostración. Sea $p \in \partial M \subset \mathcal{D}(M)$. Por **Proposición 1.2.17**, existe $\varepsilon > 0$ tal que $\mathcal{U} \doteq \{q \in \mathcal{D}(M) : \text{dist}_{\mathcal{D}(M)}(p, q) < \varepsilon\}$ es una vecindad convexa. Luego, para todo $q \in B(p, \varepsilon) = M \cap \mathcal{U}$, existe una única $\sigma \in \Gamma(\mathcal{U}; p, q)$ minimizadora. Por hipótesis de convexidad, σ está completamente contenida en M . Por lo tanto, $B(p, \varepsilon)$ es una vecindad normal de p . Q.E.D.

Proposición 3.6.4. *Sea M una variedad riemanniana completa con borde. Entonces, M es convexa si, y solo si, para todo $o \in M$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(o, \varepsilon)$ es una vecindad convexa.*

Demostración. Supongamos que M es convexa. Si $o \in \text{Int}(M)$, por **Proposición 1.2.17**, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(o, \varepsilon)$ es una vecindad convexa. Si $o \in \partial M$, por **Lema 3.6.3**, existe $\varepsilon' > 0$ tal que $B(o, \varepsilon')$ es una vecindad normal de o , a saber, $\mathcal{V} \doteq \exp_o^{-1}(B(o, \varepsilon'))$ es una vecindad estrellada de $\vec{0}$.

Sea $\xi = (x^1, \dots, x^n)$ las coordenadas normales de $B(o, \varepsilon')$. Sean $\varepsilon = \varepsilon'/2$ y $p, q \in B(o, \varepsilon)$. Por convexidad, existe $\sigma \in \Gamma_{p,q}$ minimizadora, IN SPECIE, $\sigma(\mathbb{I}) \subset B(o, \varepsilon')$. Definimos la función $\Phi : B(o, \varepsilon') \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\Phi(m) = \sum_{i=1}^n (x^i(m))^2.$$

Supongamos que $\sigma(\mathbb{I}) \not\subset B(o, \varepsilon)$. Luego, existe $t_0 \in (1, 0)$ tal que $\text{dist}(\sigma(t_0), o) \geq \varepsilon$ y $\sigma(t_0)$ es un valor máximo de $\Phi \circ \sigma$. Calculamos la derivada de $\Phi \circ \sigma$ en t_0 . Por simplicidad, denotamos $\sigma^i \doteq x^i \circ \sigma$.

$$\frac{d}{dt} \Phi \circ \sigma(t) = \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n (\sigma^i(t))^2 \right) = 2 \sum_{i=1}^n \sigma^i(t) \cdot \frac{d}{dt} (\sigma^i(t)).$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \Phi \circ \sigma(t) = \frac{d}{dt} \left(2 \sum_{i=1}^n \sigma^i(t) \cdot \frac{d}{dt} (\sigma^i(t)) \right) = 2 \sum_{i=1}^n \left(\left(\frac{d}{dt} \sigma^i(t) \right)^2 + \sigma^i(t) \cdot \frac{d^2}{dt^2} (\sigma^i(t)) \right).$$

Usando la ecuación diferencial de las geodésicas obtenemos que

$$\frac{d^2}{dt^2} \Phi \circ \sigma = 2 \sum_{i,j=1}^n \left(\delta_{i,j} - \sum_{k=1}^n \sigma^k \Gamma_{i,j}^k \right) \frac{d\sigma^i}{dt} \frac{d\sigma^j}{dt}.$$

Luego podemos reducir lo suficiente ε para que el tensor anterior sea definido positivo. Obteniendo que $\frac{d^2}{dt^2} \Phi \circ \sigma(t_0) > 0$ y contradiciendo la maximalidad de $\sigma(t_0)$. Por lo tanto, $\sigma(\mathbb{I}) \subset B(o, \varepsilon)$ y $B(o, \varepsilon)$ es una vecindad convexa.

Por otro lado, supongamos que para todo $o \in M$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(o, \varepsilon)$ es una vecindad convexa. Sean $p, q \in M$ y $\alpha \in \Omega_{p,q}$ minimizadora, por **Proposición 3.1.13**. Sea $\mathcal{B}_t \doteq B(\alpha(t), \varepsilon_t)$ un cubrimiento de $\alpha(\mathbb{I})$ tal que todo \mathcal{B}_t es una vecindad convexa. Por compacidad de \mathbb{I} , tenemos un subcubrimiento finito $\{\mathcal{B}_k\} \subset \{\mathcal{B}_t\}$ con $k = 1, \dots, m$. Tomamos un punto en cada intersección de las dos vecindades consecutivas, esto es, $t_0 \doteq 0$, $t_m \doteq 1$ y $t_k \in \mathcal{B}_{k-1} \cap \mathcal{B}_k$. Denotamos $\alpha_k \doteq \alpha(t_k)$. Ahora bien, podemos encontrar una segunda curva minimizadora $\beta \in \Omega_{p,q}$ dada por las geodésicas minimizadoras en los tramos escogidos, es decir, $\beta(t) \in \Gamma(\mathcal{B}_k; \alpha_{k-1}, \alpha_k)$ si $t \in [t_{k-1}, t_k]$. Si β tiene un vértice en algún t_k , entonces podemos construir un campo vectorial con primera variación negativa. Esto contradiría el hecho de que β tiene largo mínimo y, por tanto, α no es una curva minimizadora, quedando como única opción que β sea una geodésica minimizadora. Por lo tanto, M es convexa. Q.E.D.

Proposición 3.6.5. *Sea M una variedad riemanniana completa convexa. Entonces, $\ell_v^{\partial M}$ es semidefinida positiva para todo $(p, v) \in \mathbf{N}\partial M$ interior.*

Demostración. Sea $h : \mathbf{T}_p\partial M \rightarrow \mathbf{N}_p\partial M$ la función dada por **Proposición 2.5.4**. Sea $\vec{u} \in \Gamma h \subset \mathbf{T}_pM$. Por convexidad de M , existe una geodésica minimizadora $\alpha(t) = \exp_p(t\vec{u})$ contenida en M . Si denotamos $\vec{u} = (u_1, \dots, u_n)$, entonces

$$th(u_1, \dots, u_{n-1}) = tu_n \geq h(tu_1, \dots, tu_{n-1}), \quad \forall t \in \mathbb{I}.$$

Recordando que $Dh_{\vec{0}} = 0$, tenemos que $h(u_1, \dots, u_{n-1}) \geq 0$, esto es, $\vec{0}$ es un mínimo local de h . Por lo tanto, $\mathbf{H}h_{\vec{0}} = \ell_v^{\partial M} \geq 0$. Q.E.D.

Observación. Notar que Bishop [**Bis74**] llama a las hipersuperficies con la propiedad anterior *infinitesimalmente convexas*. También menciona que la proposición recíproca «*is not as obvious as it sound*», mas resulta ser cierto.

Las dos proposiciones anteriores son entregan una equivalencia entre las geodésicas y una condición en el borde.

Teorema 3.6.6. *Sea M una variedad riemanniana completa con borde. Si $\ell_v^{\partial M} \succ 0$, entonces cualquier par de puntos pueden ser unidos por una curva geodésica minimizadora contenida en $\text{Int}(M)$.*

Demostración. Por Bishop [**Bis74**], existe una geodésica minimizadora $\sigma \in \Omega_{p,q}$ para cualquier $p, q \in M$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $\sigma(\frac{1}{2}) = x \in \partial M$ y $\sigma'(\frac{1}{2}) = v$, en consecuencia $v \in \mathbf{T}_x\partial M$. Entonces,

$$0 < \ell_v^{\partial M}(v, v) = \left\langle \Pi^{\partial M}(v, v) \Big| v \right\rangle = \langle \nabla_v v | v \rangle - \left\langle \nabla_v^{\partial M} v \Big| v \right\rangle = 0.$$

Vale mencionar que $\nabla_v v = 0$, porque σ es geodésica, y $\nabla_v^{\partial M} v \perp v$. Finalmente, obtenemos el resultado por *modus tollendo tollens*. Q.E.D.

Definición. Decimos que M es *estrictamente convexa* si $\ell_v^{\partial M} \succ 0$.

El **Teorema 3.6.6** nos motiva a pensar que agregar condiciones de borde es suficiente para tener propiedades geométricas. Así pues definimos una condición aún más «fuerte».

Definición. Decimos que M es *fuertemente convexa* si existe $k \in \mathbb{R}^+$ tal que $\ell_v^{\partial M} \succeq k$.

Observación. Es fácil notar que fuertemente convexo implica estrictamente convexo.

Teorema 3.6.7. *Sea M una variedad riemanniana compacta. Si M es estrictamente convexa, entonces M es fuertemente convexa.*

Demostración. Sea $\emptyset \neq \partial M$ el borde de M , de lo contrario no hay mucho que probar. Tomamos $N \in \Gamma(\mathbf{N}\partial M)$ con vectores normales apuntando al interior de M . Definimos la función $\Phi : \partial M \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\Phi(p, v) = \left\langle \Pi^{\partial M}(v, v) \Big|_{N_p} \right\rangle.$$

Luego, basta notar que Φ es una función continua con dominio compacto. La convexidad estricta nos dice que $\Phi(p, v) > 0$ para todo $(p, v) \in \partial M \times \mathbb{S}^1$, entonces Φ tiene valor mínimo global positivo, es decir, existe $k \in \mathbb{R}^+$ tal que $\ell_v^{\partial M} \succeq k$ con $v = N_p$. Por lo tanto, M es fuertemente convexo. Q.E.D.

Lo que queremos hacer ahora es generalizar un Corolario de **Teorema de Hopf-Rinow**. La demostración del siguiente lema está fuertemente inspirada en la presentada por Jost [Jos17] para el **Teorema de Hopf-Rinow**.

Proposición 3.6.8. *Sea M una variedad riemanniana completa estrictamente convexa y P, Q subvariedades riemannianas de M compactas tal que $\partial P, \partial Q \subset \partial M$. Entonces, existe una geodésica minimizadora $\sigma \in \Omega_{P, Q}$.*

Demostración. Dado que P y Q son conjuntos compactos, existen $p \in P$ y $q \in Q$ tales que

$$\lambda = \text{dist}(p, q) = \text{dist}(P, Q).$$

Luego, sea $\{\alpha_n\} \in \Omega_{p, q}$ una sucesión de Cauchy. Como M es un espacio métrico completo, entonces existe una curva $\alpha \in \Omega_{p, q}$ minimizadora. Vamos a considerar $\alpha : [0, 1] \rightarrow M$ y $\|\alpha'(t)\| = \lambda$ para todo $t \in [0, 1]$.

Sea $\rho > 0$ y $p_0 \in \partial B(p, \rho)$ es un mínimo de la función $d_q(t) \doteq \text{dist}(q, t)$. Entonces, $p_0 = \exp_p(\rho v)$ para algún $v \in \mathbf{T}_p M$ tal que $\|v\| = \lambda$; y consideremos la geodésica $\sigma(t) = \exp_p(tv)$. Queremos probar que

$$\sigma(1) = q.$$

Para este propósito, usaremos un argumento de abierto-cerrado. Sea

$$I \doteq \{t \in [0, 1] : d_q(\alpha(t)) = d_q(\sigma(t))\}.$$

Sabemos que $I \neq \emptyset$, ya que $0 \in I$, y que I es cerrado por continuidad de d_q . Por tanto, basta probar que I es abierto, para que $I = [0, 1]$.

Sea $t_0 \in I$ y $\rho_0 > 0$ tal que podemos definir una bola normal de $\sigma_0 \doteq \sigma(t_0)$, sin pérdida de generalidad $\rho_0 < 1 - t_0$. Sea $m \in \partial B(\sigma_0, \rho_0)$ el valor mínimo de la función d_q . Entonces

$$\text{dist}(p, m) + \text{dist}(m, q) \geq \lambda.$$

Para cualquier curva $\beta \in \Omega_{\sigma_0, q}$ existe $\beta(t) \in \partial B(\sigma_0, \rho_0)$. Luego,

$$\mathcal{L}(\beta) \geq \text{dist}(\sigma_0, \beta(t)) + \text{dist}(\beta(t), q) = \rho_0 + \text{dist}(\beta(t), q) \geq \rho_0 + \text{dist}(m, q).$$

En particular,

$$\text{dist}(\sigma_0, q) \geq \text{dist}(\sigma_0, m) + \text{dist}(m, q)$$

y la desigualdad triangular nos da la igualdad. Identificamos por $\gamma : [0, \rho_0] \rightarrow M$ a la geodésica que una m y σ_0

$$\text{dist}(\sigma_0, q) = \text{dist}(\sigma_0, m) + \text{dist}(m, q). \quad (3.10)$$

Procedemos usar la **Proposición 3.2.1** para determinar si $\bar{\sigma}$ es una curva mínima, definiendo $\bar{\sigma} : [0, t_0 + \rho_0] \rightarrow M$ dada por

$$\bar{\sigma}(t) = \begin{cases} \sigma(t), & \text{si } t \in [0, t_0]; \\ \gamma(t - t_0), & \text{si } t \in t_0 + [0, \rho_0]. \end{cases}$$

Sea x una variación de extremos fijos tal que $x_v(t_0, 0) = (x_{u^+} - x_{u^-})(t_0, 0)$, entonces

$$\mathcal{E}'_x(v) = \langle x_{u^-} - x_{u^+} | x_v \rangle \Big|_{(t_0, v)} \implies \mathcal{E}'_x(0) = -\|(x_{u^-} - x_{u^+})(t_0, 0)\|^2 \leq 0.$$

Por tanto concluimos, por contradicción, que $\sigma'(t_0) = \gamma'(0)$. Esto a su vez nos dice que $\bar{\sigma}$ es una geodésica y, unicidad de las geodésicas, $\sigma = \bar{\sigma}$. Finalmente, $m = \sigma(t_0 + \rho_0)$.

Luego,

$$\begin{aligned}
 \text{dist}(\sigma(t_0 + \rho_0), q) &= \text{dist}(\sigma_0, q) - \text{dist}(\sigma_0, \sigma(t_0 + \rho_0)) \\
 &= \text{dist}(\alpha(t_0), q) - \rho_0 \lambda \\
 &= \int_{t_0}^1 \lambda \, dt - \int_0^{\rho_0} \lambda \, dt \\
 &= \int_{t_0 + \rho_0}^1 \lambda \, dt \\
 &= \text{dist}(\alpha(t_0 + \rho_0), q).
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $t_0 + \rho_0 \in I$.

Q.E.D.

Teorema 3.6.9. *Sea M una variedad riemanniana estrictamente convexa. Sean P, Q subvariedades riemannianas de M compactas borde libre. Entonces, existe una geodésica $\sigma \in \Omega_{P,Q}$ minimizadora normal.*

Demostración. Se tiene de [Proposición 3.6.8](#) y [Lema 3.4.4](#).

Q.E.D.

Ya habiendo visto que el borde es muy importante para el trabajo de las geodésicas, es natural pensar en trabajar el álgebra tensorial de la segunda forma fundamental. Con eso motivamos las siguientes definiciones.

Definición (medio-convexidad). Decimos que una variedad riemanniana compacta es *estrictamente medio-convexa* si $\text{Tr}(\ell_n^{\partial M}(x, x)) \succ 0$. De la misma manera, diremos que M *medio-convexa* si $\text{Tr}(\ell_n^{\partial M}(x, x)) \succeq 0$.

Definición. Decimos que una variedad compacta es *k-convexa* si la suma de sus k menores curvaturas principales (con respecto al vector normal interior) es positiva.

Definición (k -convexidad). Sea M una variedad riemanniana con borde ∂M . Decimos que M es *k-convexa* si en cada punto $p \in \partial M$, la suma de las k menores curvaturas principales del operador de forma

$$S_p : T_p(\partial M) \rightarrow T_p(\partial M)$$

es no negativa.

En particular, si ∂M no es conexo, se asume que cada componente conexa de ∂M es una variedad con borde (posiblemente con borde libre), y la condición anterior se aplica de manera independiente en cada componente.

Observación. La hipótesis sobre componentes conexas con borde libre no altera los resultados posteriores: las demostraciones dependen únicamente de la condición local de curvatura en los puntos de ∂M .

Capítulo 4

Resultados principales

En este capítulo se desarrollan los resultados centrales de esta tesis. El capítulo comienza en las [Secciones 4.1 y 4.2](#), donde se aborda el [Teorema de Frankel](#) tanto en su formulación clásica basada en curvatura seccional como en el caso de hipersuperficies con curvatura de Ricci positiva. Posteriormente, en la [Sección 4.3](#), se desarrollan los resultados obtenidos en el caso de variedades riemannianas con borde, lo que representa uno de los puntos clave del análisis. El capítulo concluye en la [Sección 4.4](#) con la presentación de un resultado de rigidez usando las técnicas estudiadas de variaciones de geodésicas.

4.1. Teorema de Frankel

Lema 4.1.1. *Sea M una n -variedad riemanniana con borde y P, Q dos subvariedades de M tal que existe una geodésica $\sigma \in \Gamma_{P,Q}$ normal. Si $\text{Int}(\sigma) \subset \text{Int}(M)$ y $\dim P + \dim Q \geq n$, entonces existe un campo vectorial paralelo a lo largo de σ con extremos tangentes a P y Q .*

Demostración. Sea $V \subset \mathbf{T}_{\sigma(1)}M$ el subespacio vectorial de vectores $X(1)$ donde $X \in \overline{\mathfrak{X}}(\sigma)$ es un campo vectorial paralelo tal que $X(0) \in \mathbf{T}_{\sigma(0)}P$. El espacio de campos vectoriales paralelos tangentes a P y Q está identificado por $V \cap \mathbf{T}_{\sigma(1)}Q$, a este conjunto lo denotamos por $\mathfrak{V} \subset \overline{\mathfrak{X}}(\sigma)$. Calculamos la dimensión de dicho espacio vectorial.

$$\begin{aligned} \dim P + \dim Q &= \dim V + \dim(\mathbf{T}_{\sigma(1)}Q) \\ &= \dim(V \cap \mathbf{T}_{\sigma(1)}Q) + \dim(V + \mathbf{T}_{\sigma(1)}Q) \\ &\leq \dim(V \cap \mathbf{T}_{\sigma(1)}Q) + \dim M - 1 \end{aligned}$$

La desigualdad se deduce de que las subvariedades deben tener codimensión al menos 1 para que exista una geodésica normal. Luego, por hipótesis de dimensión.

$$\dim M \leq \dim(V \cap \mathbf{T}_{\sigma(1)}Q) + \dim M - 1 \implies 1 \leq \dim \mathfrak{V}.$$

Por lo tanto, $\mathfrak{V} \neq \emptyset$.

Q.E.D.

Teorema 4.1.2 (Frankel, 1961). *Sea M una variedad riemanniana completa con curvatura seccional positiva y P, Q dos subvariedades de M cerradas totalmente geodésicas. Si $\dim P + \dim Q \geq \dim M$, entonces $P \cap Q \neq \emptyset$.*

Demostración. Supongamos que $P \cap Q = \emptyset$. Por **Proposición 3.2.4**, existe una geodésica $\sigma \in \Gamma_{P,Q}$ minimizadora normal y, por **Lema 4.1.1**, existe un campo vectorial paralelo $X \in \bar{\mathcal{X}}(\sigma)$ con extremos tangentes a P y Q , esto último considerando que $\partial M = \emptyset$. Ahora bien, calculamos la segunda variación de la energía respecto a X con $\vec{u} = X(0)$ y $\vec{v} = X(1)$.

$$\begin{aligned} \left. \frac{\delta^2 \mathcal{E}}{\delta X^2} \right|_{\sigma} &= \int_{\mathbb{I}} \left\{ \|\mathbf{D}_t X\|^2 - \langle R(X, \sigma') \sigma' | X \rangle \right\} d\sigma + \langle \Pi^Q(\vec{v}, \vec{v}) | \sigma'(1) \rangle - \langle \Pi^P(\vec{u}, \vec{u}) | \sigma'(0) \rangle \\ &= - \int_{\mathbb{I}} \langle R(X, \sigma') \sigma' | X \rangle d\sigma < 0. \end{aligned}$$

dato que $\mathbf{D}_t X \equiv 0$, $\Pi^P(\vec{u}, \vec{u}) = \Pi^Q(\vec{v}, \vec{v}) = \vec{0}$ y $X \perp \sigma'$. Esto es una contradicción, puesto que σ es una curva minimizadora. Por lo tanto, $P \cap Q \neq \emptyset$. Q.E.D.

Para clarificar el impacto geométrico de este teorema, damos el ejemplo de la esfera.

Ejemplo. Sea (\mathbb{S}^2, δ) la 2-esfera con la métrica inducida de \mathbb{R}^3 . Está muy estudiado que \mathbb{S}^2 es una variedad riemanniana completa con curvatura seccional positiva y tiene dimensión 2. Consideramos P un círculo maximal que une el polo norte y sur (meridiano), mientras que Q por la línea del ecuador. Las subvariedades P, Q son cerradas y totalmente geodésicas de dimensión 1. Un hecho bastante demostrado es $1 + 1 = 2$, entonces el teorema de Frankel nos dice que $P \cap Q \neq \emptyset$ (ver **Figura 4.1**).

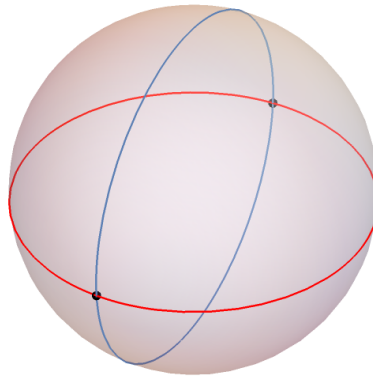


FIGURA 4.1: P en azul y Q en rojo.

Ejemplo. A pesar de que el ejemplo anterior es el más icónico y graficable, se debe tener en cuenta que la hipótesis funciona para codimensión mayor a 1. Consideremos (\mathbb{S}^n, δ) la n -esfera con la métrica inducida de \mathbb{R}^{n+1} y V, W dos subespacios vectoriales de \mathbb{R}^{n+1} tales que $\dim V + \dim W \doteq k + h \geq n + 2$. Lee [Lee18, pág. 137] explica que las subvariedades $P = V \cap \mathbb{S}^n$ y

$Q = W \cap S^n$ son totalmente geodésicas, en particular todas las subvariedades de S^n totalmente geodésicas se obtienen intersectando un subespacio vectorial de \mathbb{R}^{n+1} con la n -esfera. Notemos además que $\dim P = k - 1$ y $\dim Q = h - 1$, en consecuencia

$$\dim P + \dim Q = k - 1 + h - 1 = (k + h) - 2 \geq (n + 2) - 2 = \dim S^n.$$

Por el teorema de la dimensión de subespacios vectoriales, obtenemos que $V \cap W > 1$ y por tanto hay puntos que pertenecen a $P \cap Q$.

El Teorema de Frankel establece un precedente sobre la intersección de subvariedades en espacios sin borde; sin embargo, al introducir un borde convexo, es posible emplear las mismas herramientas variacionales para estudiar la estabilidad de las geodésicas ortogonales al borde.

Lema 4.1.3. *Sea M una n -variedad compacta con borde estrictamente convexo $\partial M \neq \emptyset$ y $\text{Sec}^M \geq 0$. Entonces, cualquier camino geodésico σ ortogonal a ∂M en sus extremos posee índice $\text{Ind}(\sigma) \geq 1$.*

Demostración. Por **Lema 4.1.1**, existe un campo vectorial paralelo $X \in \bar{\mathfrak{X}}(\sigma)$ con extremos tangentes a ∂M , ya que $\sigma' \perp \partial M$. En particular, analizando la demostración de **Lema 4.1.1**, existen $n - 1$ campos vectoriales paralelos $\mathcal{F}(\sigma)$ -linealmente independientes. Usamos la **Ecuación (3.5)**,

$$\begin{aligned} \left. \frac{\delta^2 \mathcal{E}}{\delta X^2} \right|_{\sigma} &= \int_{\mathbb{I}} \left\{ \|\mathbf{D}_t X\|^2 - \langle R(X, \sigma') \sigma' | X \rangle \right\} d\sigma + \left\langle \Pi^{\partial M}(X, X) \middle| \gamma' \right\rangle \Big|_0^1 \\ &< - \int_{\mathbb{I}} \langle R(X, \sigma') \sigma' | X \rangle d\sigma \leq 0. \end{aligned}$$

La desigualdad estricta se da por la condición de convexidad,

$$\left\langle \Pi^{\partial M}(X(0), X(0)) \middle| \gamma'(0) \right\rangle > 0 \quad \text{y} \quad - \left\langle \Pi^{\partial M}(X(1), X(1)) \middle| \gamma'(1) \right\rangle > 0.$$

Por lo tanto, existen $n - 1$ campos vectoriales $X \in \bar{\mathfrak{X}}(\sigma)$ tales que $I_{\sigma}(X, X) < 0$, es decir, $\text{Ind}(\sigma) \geq n - 1$. Q.E.D.

Schoen [**Sch06**] nos entrega un resultado más general, puesto que 1-convexo es por definición estrictamente convexo.

Proposición 4.1.4. *Sea M una variedad compacta con borde no vacío. Supongase $\text{Sec}^M \geq 0$ y el borde ∂M es k -convexo, para algún $1 \leq k \leq n - 1$. Entonces cualquier segmento geodésico γ , ortogonal a ∂M en sus extremos, satisface $\text{Ind}(\gamma) \geq n - k$ donde el índice es tomado para la condición de borde libre relativo a $N = \partial M$.*

Demostración. Ver [**Sch06**, E3]. Q.E.D.

4.2. Curvatura de Ricci

La curvatura de Ricci impone fuertes restricciones en la geometría y topología de una variedad. En particular, bajo hipótesis de positividad o no negatividad, se obtienen resultados de intersección y conexidad que condicionan la disposición de hipersuperficies minimales y la estructura del borde.

Teorema 4.2.1. *En una variedad riemanniana completa conexa de curvatura de Ricci positiva cualquier par de hipersuperficies minimales deben intersectarse.*

Demostración. Supongamos que $P \cap Q = \emptyset$. Por [Proposición 3.2.4](#), existe una geodésica $\sigma \in \Gamma_{P,Q}$ minimizadora normal. De la demostración de [Lema 4.1.1](#), se puede concluir que $\dim \mathfrak{A} \geq \dim P + \dim Q + 1 - n$. Pero, por hipótesis, tenemos que P y Q son hipersuperficies, por tanto $n - 1 \leq \dim \mathfrak{A}$ y, en consecuencia, existen $n - 1$ campos vectoriales paralelos $X_i \in \tilde{\mathfrak{X}}(\sigma)$ linealmente independientes con extremos tangentes a P y Q . Haciendo la suma de las variaciones de dichos campos, se ve que

$$\sum_{i=1}^{n-1} \left. \frac{\delta^2 \mathcal{E}}{\delta X_i^2} \right|_{\sigma} = - \sum_{i=1}^{n-1} \int_{\mathbb{I}} \langle R(X_i, \sigma') \sigma' | X_i \rangle d\sigma = - \int_{\mathbb{I}} \text{Ric}(\sigma') d\sigma < 0.$$

Obteniendo la misma contradicción que en [Teorema de Frankel](#). Por tanto, $P \cap Q \neq \emptyset$. Q.E.D.

Teorema 4.2.2. *Sea M una n -variedad riemanniana compacta orientable con borde no vacío ∂M . Supóngase M tiene curvatura de Ricci no negativa y borde estrictamente convexo. Entonces, cualquier par de hipersuperficies propiamente incrustadas minimales orientables Σ_1 y Σ_2 en M con borde libre sobre ∂M deben intersectarse, ID EST, $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 \neq \emptyset$.*

Demostración. Ver [[FL17](#), Lema 2.4], o bien, Naff y Zhu [[NZ24](#)].

Q.E.D.

Observación. La demostración del [Teorema 4.2.2](#) presentada por Fraser y Li emplea métodos fundamentados en el análisis de ecuaciones en derivadas parciales, específicamente mediante el uso del principio del máximo aplicado a la comparación del Laplaciano de funciones distancia. En contraste, los enfoques clásicos de Frankel y Petersen y Wilhelm son de naturaleza esencialmente variacional; estos se basan en el estudio de la estabilidad de geodésicas a través de la fórmula de la segunda variación de la energía y el análisis de campos de Jacobi. El interés de este trabajo radica en adaptar estas últimas técnicas de corte geométrico-variacional para abordar el problema de intersección en el contexto de variedades riemannianas con borde convexo, donde la presencia del borde introduce términos adicionales en el índice de Morse. La demostración del Teorema anterior expuesta por Fraser y Li involucra herramientas más «analíticas», como la comparación de Laplaciano de funciones distancias. Por lo que pensamos

en cómo resolver un problema similar usando las herramientas que usó Frankel o Petersen y Wilhelm.

Los siguientes resultados están relacionados con el artículo de Fraser y Li.

Proposición 4.2.3. *Sea M una n -variedad riemanniana compacta con borde no vacío ∂M . Supóngase M tiene curvatura de Ricci no negativa y borde estrictamente convexo. Entonces, ∂M es conexo, y el homomorfismo*

$$\pi_1(\partial M) \xrightarrow{\iota^*} \pi_1(M),$$

inducido por el mapa inclusión $\iota : \partial M \rightarrow M$ es sobreyectivo.

Demostración. Ver [FL17, Proposición 2.8].

Q.E.D.

Proposición 4.2.4. *Sea M una n variedad riemanniana compacta con borde no vacío ∂M . Supóngase M tiene curvatura de Ricci no negativa y borde estrictamente convexo. Sea Σ una hipersuperficie mínima propiamente incrustada en M con borde libre sobre ∂M . Si tanto Σ como M son orientables, entonces Σ divide M en dos componentes conexas Ω_1 y Ω_2 .*

Demostración. Ver [FL17, Corolario 2.10].

Q.E.D.

4.3. Curvatura Seccional

Del Teorema de Frankel sabemos que la curvatura seccional es una condición más fuerte que la de Ricci. Surge entonces la pregunta de si pueden obtenerse resultados de intersección y conexidad al debilitar la curvatura imponiendo condiciones a la dimensión de las subvariedades. En esta sección presentamos los resultados originales de esta tesis.

Proposición 4.3.1. *Sea M una n -variedad riemanniana compacta con borde $\partial M \neq \emptyset$. Suponga que M es estrictamente convexa y tiene curvatura seccional positiva. Además, sean P y Q dos subvariedades de M compactas totalmente geodésicas con borde libre. Si $\dim P + \dim Q \geq n$, entonces $P \cap Q \neq \emptyset$.*

Demostración. Supongamos que $P \cap Q = \emptyset$. Por Teorema 3.6.9, existe una geodésica $\sigma \in \Gamma_{P,Q}$ minimizadora normal. Sea $\sigma(0) = p \in P$ y $\sigma(1) = q \in Q$. Además, sean p' y q' sus respectivos vectores velocidad. Si $p \in \partial P$, entonces $p' \in \mathbf{T}_p \partial M$, por la condición de borde libre. Luego, obtenemos la siguiente contradicción utilizando la convexidad

$$0 < \langle \Pi^{\partial M}(p', p') | \nu \rangle = \langle \nabla_{p'} p' | \nu \rangle - \langle \nabla_{p'}^{\partial M} p' | \nu \rangle = 0,$$

con $\nabla_{p'} p' = 0$ y $\nu \in \mathbf{N}_p \partial M$. Por lo tanto, $p \in \text{Int}(P)$. De manera análoga, $q \in \text{Int}(Q)$.

Por **Lema 4.1.1**, existe un campo vectorial paralelo $X \in \bar{\mathfrak{X}}(\sigma)$ tangente a P y Q . Usamos la **Ecuación (3.5)** con $\vec{u} = X(0)$ y $\vec{v} = X(1)$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\delta^2 \mathcal{E}}{\delta X^2} \right|_{\sigma} &= \int_{\mathbb{I}} \left\{ \|\mathbf{D}_t X\|^2 - \langle R(X, \sigma') \sigma' | X \rangle \right\} d\sigma + \langle \Pi^Q(\vec{v}, \vec{v}) | q' \rangle - \langle \Pi^P(\vec{u}, \vec{u}) | p' \rangle \\ &= - \int_{\mathbb{I}} \langle R(X, \sigma') \sigma' | X \rangle d\sigma < 0. \end{aligned}$$

Esto es una contradicción, puesto que σ es una geodésica minimizante.

Q.E.D.

Observación. La demostración es muy similar a la de **Teorema de Frankel**, a excepción que debemos revisar qué ocurre en el borde de la variedad. Buscamos obtener la misma conclusión bajo convexidad y curvatura seccional no negativa.

Lema 4.3.2. *Sea M una n -variedad riemanniana compacta con borde $\partial M \neq \emptyset$. Si M es estrictamente convexa y tiene curvatura seccional no negativa, entonces ∂M es conexo.*

Demostración. Supongamos que ∂M no es conexo, entonces $P \cup Q = \partial M$, donde P, Q son hipersuperficies no vacías que tienen segunda forma fundamental definida positiva respecto al vector normal apuntando al interior. Por **Teorema 3.6.9**, existe una geodésica $\sigma \in \Omega(P, Q)$ minimizadora normal. Por **Lema 4.1.1**, existe un campo vectorial paralelo $X \in \bar{\mathfrak{X}}(\sigma)$ tal que $v \doteq X(0) \perp \sigma'(0)$. Notamos que $u \perp \sigma'(1)$, donde $u \doteq X(1)$. Como M es estrictamente convexa, existe $k \in \mathbb{R}^+$ tal $\ell_v^{\partial M}(x, x) \geq k$. Calculamos la segunda variación de σ respecto a X ,

$$\begin{aligned} \left. \frac{\delta^2 \mathcal{E}}{\delta X^2} \right|_{\sigma} &= \int_0^1 \left\{ \|\nabla_{\sigma'} X\|^2 - \langle R(X, \sigma') \sigma' | X \rangle \right\} dt + \left. \langle \nabla_X X | \sigma' \rangle \right|_0^1 \\ &= - \int_0^1 \langle R(X, \sigma') \sigma' | X \rangle dt - \langle \nabla_u u | -\sigma'(1) \rangle - \langle \nabla_v v | \sigma'(0) \rangle \\ &= - \int_0^1 \sec(X, \sigma) \|X\|^2 \|\sigma'\|^2 dt - \langle \Pi(u, u) | -\sigma'(1) \rangle - \langle \Pi(v, v) | \sigma'(0) \rangle \\ &\leq 0 - k - k < 0. \end{aligned}$$

Notar que $\sigma'(1)$ apunta al exterior. La desigualdad contradice que σ es una geodésica minimizante. Por tanto, ∂M es conexo.

Q.E.D.

Observación. El lema anterior es un caso particular de **Proposición 4.2.3**.

Lema 4.3.3. *Sea M una n -variedad riemanniana compacta con borde $\partial M \neq \emptyset$. Suponga que M es estrictamente convexa y tiene curvatura seccional no negativa. Si P es una subvariedad de M compacta totalmente geodésica con borde libre y $\dim P > 0$, entonces $\partial P \neq \emptyset$.*

Demostración. Supongamos que $P \cap \partial M = \emptyset$. Como P y ∂M son conjuntos compactos, entonces $\text{dist}(P, \partial M) > 0$. Por **Teorema 3.6.9**, existe una geodésica $\sigma \in \Omega_{P, \partial M}$ minimizadora normal. Notemos que ∂M tiene borde libre, ya que $\partial(\partial M) = \emptyset$.

Por el **Lema 4.1.1**, existe un campo vectorial paralelo $X \in \bar{\mathcal{X}}(\sigma)$ tangente a P y ∂M en p y q , respectivamente. Si x es una variación con X su campo variacional, entonces

$$\begin{aligned} \left. \frac{\delta^2 \mathcal{E}}{\delta X^2} \right|_{\sigma} &= \int_0^1 \|\nabla_{\sigma'} X\|^2 - \langle R(X, \sigma') \sigma' | X \rangle dt + \langle \nabla_X X | \sigma' \rangle \Big|_0^1 \\ &= - \int_0^1 \langle R(X, \sigma') \sigma' | X \rangle dt - \langle \nabla_u u | -\sigma'(1) \rangle - \langle \nabla_v v | \sigma'(0) \rangle \\ &= - \int_0^1 \sec(X, \sigma) \|X\|^2 \|\sigma'\|^2 dt - \langle \Pi(u, u) | -\sigma'(1) \rangle - \langle \Pi(v, v) | \sigma'(0) \rangle \\ &\leq 0 - k - 0 < 0. \end{aligned}$$

Esto último contradice que σ es una geodésica minimizadora normal, luego $P \cap \partial M \neq \emptyset$. Como M es estrictamente convexa, P no puede intersectar tangencialmente a ∂M . En conclusión, $\partial P \neq \emptyset$. Q.E.D.

Otra manera de demostrar lo anterior es como consecuencia de la siguiente proposición.

Proposición 4.3.4. *Sea M una n -variedad riemanniana compacta con borde $\partial M \neq \emptyset$. Suponga que M es estrictamente convexa y tiene curvatura seccional no negativa. Si σ es una geodésica maximal, entonces $\sigma \cap \partial M \neq \emptyset$. Más aún, si $\sigma(b) \in \partial M$, entonces $\sigma'(b) \notin \mathbf{T}_{\sigma(b)} \partial M$.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad, sea $\sigma : [0, b) \rightarrow M$ una geodésica maximal con $\|\sigma'\| \equiv 1$, donde $b \in (0, \infty]$. Además, denotamos

$$\lambda \doteq \text{dist}(\sigma, \partial M) = \inf \{ \text{dist}(\sigma(t), \partial M) : t \in [0, b) \}.$$

Queremos decir que σ se aproxima al borde de manera transversal. La demostración se consiste de cuatro casos.

Primero, supongamos que $\lambda > 0$ y $b < \infty$. Notemos que, usando $\|\sigma'\| \equiv 1$ y la compacidad de M , podemos definir $\sigma(b) \in \text{Int}(M)$ y, en consecuencia, podemos extender σ a $\bar{\sigma} : [0, b + \varepsilon) \rightarrow M$ para $\varepsilon > 0$. Esto contradice la maximalidad de σ .

En segundo lugar, supongamos que $\lambda > 0$ y $b = \infty$. Por un lado, si existe $a \in [0, \infty)$ tal que $\text{dist}(\sigma(a), \partial M) = \lambda$, entonces podemos usar la **segunda fórmula de variación Energía**. Explícitamente,

$$\left. \frac{\delta^2 \mathcal{E}}{\delta X^2} \right|_{\gamma} = \int_{\mathbb{I}} \left\{ \|\mathbf{D}_t X\|^2 - \langle R(X, \gamma') \gamma' | X \rangle \right\} d\gamma + \langle \Pi(X, X) | \gamma' \rangle(1),$$

donde $\gamma \in \Gamma_{\sigma(a), \partial M}$ minimizadora y $X \in \bar{\mathfrak{X}}(\gamma)$ paralelo tal que $X(0) = \sigma'(a)$ y $X(1) \in \mathbf{T}_p \partial M$. Luego, por convexidad y curvatura,

$$- \int_{\mathbb{I}} \langle R(X, \gamma') \gamma' | X \rangle d\gamma + \langle \Pi(X, X) | \gamma' \rangle (1) \leq 0 + \langle \Pi(X, X) | \gamma' \rangle (1) < 0.$$

Por otro lado, si el mínimo no se alcanzara, entonces $\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(\sigma(t), \partial M) = \lambda$. Luego, podemos encontrar una sucesión creciente $\{t_n\}_n \subset \mathbb{R}$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{dist}(\sigma(t_n), \partial M) = \lambda$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \infty$. Sea $\sigma_n(t) = \sigma(t_n + t)$ para $t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$. Por corolario de **Teorema de Arzelà-Ascoli**, existe una subsucesión de $\{\sigma_n\}$ que converge uniformemente a la geodésica $\bar{\sigma} : [-\varepsilon, \varepsilon] \rightarrow M$. Notemos que $\bar{\sigma}(0)$ es el punto de $\bar{\sigma}$ más cercano a ∂M , dado que

$$\text{dist}(\bar{\sigma}(0), \partial M) = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{dist}(\sigma(t_n), \partial M) \geq \lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{dist}(\sigma(t_n), \partial M) = \text{dist}(\bar{\sigma}(0), \partial M).$$

Ahora bien, basta usar la fórmula de la segunda variación para llegar a una contradicción como se hizo anteriormente.

Para el tercer caso, supongamos que $\lambda = 0$ y $b = \infty$. Usamos la misma construcción del caso anterior para obtener la geodésica $\bar{\sigma} : [-\varepsilon, \varepsilon] \rightarrow M$ tal que $\bar{\sigma}(0) = p \in \partial M$. Luego, tenemos que $\bar{\sigma}'(0) \in \mathbf{T}_p \partial M$. Lo que no puede pasar por la estricta convexidad del borde.

Como último caso, supongamos que $\lambda = 0$ y $b < \infty$. Sea $\{t_n\} \subset [0, b)$ una sucesión creciente, por tanto convergente, tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(t_n) = p \in \partial M$. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = a \neq b$, entonces $\sigma(a) = p \in \partial M$. Por tanto, $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = b$. Dado que σ velocidad constante, podemos extender σ al borde como $\sigma(b) = \lim_{t \rightarrow b^-} \sigma(t) = p \in \partial M$. Además, por la convexidad de M , no podemos tener que $\sigma'(b) \in \mathbf{T}_p \partial M$. Q.E.D.

La próxima proposición es un paso previo al caso general.

Proposición 4.3.5. *Sea M una n -variedad riemanniana compacta con borde $\partial M \neq \emptyset$. Suponga que M es estrictamente convexa y tiene curvatura seccional no negativa. Además, sean P y Q dos subvariedades de M compactas totalmente geodésicas con borde libre. Si $\dim P + \dim Q > n$, entonces $P \cap Q \neq \emptyset$.*

Demostración. Por el **Lema 4.3.3**, P y Q tienen borde no vacío. Por **Proposición 2.5.2** tenemos que $\dim \partial M = n - 1$ y

$$\dim P + \dim Q \geq n + 1 \implies \dim \partial P + \dim \partial Q \geq n - 1.$$

Por tanto, podemos usar el **Teorema de Frankel** en ∂M si mostramos las hipótesis correspondientes.

El borde ∂M es un subconjunto cerrado de M y, por tanto, es un conjunto compacto. Luego, por corolario del **Teorema de Hopf-Rinow**, ∂M es una variedad riemanniana completa.

La compacidad de ∂P y ∂Q sale de que son subconjuntos cerrados de M que es compacta.

Para mostrar que ∂P es totalmente geodésica en ∂M , debemos calcular el segundo tensor fundamental de ∂P en ∂M , al que denotaremos $\Pi_{\partial M}^{\partial P}$. Dado que P es totalmente geodésica en M , el segundo tensor fundamental de P se anula, esto es,

$$0 \equiv \Pi^P(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_X^P Y, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(P).$$

En particular, lo anterior se cumple para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(\partial P)$. Tomamos la proyección tangente sobre ∂P y la aplicamos a la igualdad $\nabla_X Y = \nabla_X^P Y$, dando como resultado que

$$\text{Tan}^{\partial M}(\nabla_X Y) = \text{Tan}^{\partial M}(\nabla_X^P Y).$$

Por **Lema 3.4.2**, tenemos que $\text{Tan}^{\partial M}(\bar{\mathbf{u}}) = \text{Tan}^{\partial P}(\bar{\mathbf{u}})$ para todo $\bar{\mathbf{u}} \in \mathbf{T}_p P$ con $p \in \partial P$. Así pues, si $X, Y \in \mathfrak{X}(\partial P)$,

$$\nabla_X^{\partial M} Y = \text{Tan}^{\partial M}(\nabla_X Y) = \text{Tan}^{\partial M}(\nabla_X^P Y) = \text{Tan}^{\partial P}(\nabla_X^P Y) = \nabla_X^{\partial P} Y.$$

Notemos que $\Pi_{\partial M}^{\partial P}(X, Y) \doteq \nabla_X^{\partial M} Y - \nabla_X^{\partial P} Y$. Por lo tanto, ∂P es totalmente geodésica en ∂M . El mismo razonamiento se usa para ∂Q .

Para determinar la curvatura de ∂M , usamos: la **Ecuación de Gauss**, la hipótesis de convexidad y la no-negatividad de la curvatura interior. Sean u, v vectores linealmente independientes de $\mathbf{T}_p \partial M$. Como la segunda forma fundamental es simétrica y definida positiva, por argumentos de Álgebra Lineal, existe una base ortogonal $\{\bar{u}, \bar{v}\}$ de $\langle u, v \rangle$ tal que $\langle S\bar{u} | \bar{v} \rangle = 0$. Luego,

$$\kappa(u, v) = \kappa(\bar{u}, \bar{v}) = \bar{\kappa}(\bar{u}, \bar{v}) + \frac{\langle Su | u \rangle \langle Sv | v \rangle}{(\|\bar{u}\| \|\bar{v}\|)^2} \geq 0 + \frac{k^2}{(\|\bar{u}\| \|\bar{v}\|)^2} > 0.$$

donde κ y $\bar{\kappa}$ son las curvaturas seccionales de ∂M y M , respectivamente.

Q.E.D.

Teorema 4.3.6. *Sea M una n -variedad riemanniana compacta con borde $\partial M \neq \emptyset$. Suponga que M tiene curvatura seccional no negativa y el borde es convexo. Además, sean P, Q dos subvariedades de M compactas totalmente geodésicas bilaterales con borde libre. Si $\dim P + \dim Q \geq n$, entonces $P \cap Q \neq \emptyset$.*

Demostración. Supongamos que $P \cap Q = \emptyset$. Por **Teorema 3.6.9**, existe una geodésica $\sigma \in \Gamma_{P, Q}$ minimizadora normal. Por **Lema 4.1.1**, existe un campo vectorial paralelo $X \in \bar{\mathfrak{X}}(\sigma)$ con extremos tangentes a P y Q .

$$\left. \frac{\delta^2 \mathcal{E}}{\delta X^2} \right|_{\sigma} = \int_a^b \left\{ \|\mathbf{D}_t X\|^2 - \langle R(X, \alpha') \alpha' | X \rangle \right\} d\alpha + \left. \langle \nabla_X X | \alpha' \rangle \right|_a^b \leq 0.$$

Notemos que la expresión anterior no puede ser negativa, ya que eso implica que la geodésica no es minimizadora. Por lo tanto,

$$\left. \frac{\delta^2 \mathcal{E}}{\delta X^2} \right|_{\sigma} = 0.$$

Construimos la variación $x(u, v) = \exp(vX(u))$. Como P y Q son totalmente geodésicas, la variación x es una variación de curvas en $\Omega_{P,Q}$. Por **Proposición 3.5.13**, la variación reduce la distancia entre P y Q , lo que no es posible porque σ es una geodésica minimizadora. Por lo tanto, x es una variación geodésica que preservan la distancia y son normales.

Sin pérdida de generalidad, por **Proposición 4.3.4**, la geodésica $t \mapsto \exp(tX(0))$ intersecta ∂M en tiempo t_0 . Luego, la geodésica $\gamma(t) = \exp(t_0 X(t))$ tiene vector tangente en el espacio tangente al borde, esto es una contradicción. Por lo tanto, $P \cap Q \neq \emptyset$. Q.E.D.

Observación. Al igual que el principio de conexidad enunciado por Fraser y Li [FL17], podemos decir algo de la conexidad de las subvariedades.

Corolario. *Con las condiciones sobre M y ∂M como en el Teorema anterior, toda subvariedad totalmente geodésica en M con borde libre y dimensión $\lceil n/2 \rceil$ es conexa.*

4.4. Rigidez

En esta sección estudiamos la rigidez de regiones delimitadas por hipersuperficies totalmente geodésicas, motivados por el Teorema 4 de Petersen y Wilhelm [PW03], que clasifica hipersuperficies mínimas cerradas disjuntas. Recordemos primero dicho resultado.

Teorema 4.4.1. *Sea M una variedad riemanniana completa y conexa de curvatura de Ricci no negativa, y sean N_1, N_2 dos hipersuperficies mínimas cerradas y conexas. Si las dos hipersuperficies no se intersectan, entonces ambas son totalmente geodésicas y se cumple uno de los siguientes casos:*

- *Ambas hipersuperficies son bilaterales y dividen M en 3 componentes conexas; la región entre las dos hipersuperficies se descompone como un producto $N_1 \times [a, b]$, con frontera en $N_1 \simeq N_1 \times \{a\}$ y $N_2 \simeq N_1 \times \{b\}$.*
- *Ambas hipersuperficies son bilaterales y dividen M en 2 componentes conexas; ambas hipersuperficies son isométricas entre sí y M es isométrico a un toro de mapeo*

$$\frac{N_1 \times [a, b]}{(x, b) \simeq (y, b) \text{ si y solo si } \phi(x) = y'}$$

donde $\phi : N_1 \rightarrow N_1$ es una isometría.

- *Una hipersuperficie, digamos N_1 , es unilateral y la otra bilateral. La región entre las hipersuperficies se descompone de la siguiente manera: Existe una aplicación de recubrimiento riemanniano*

doble $\pi : N_2 \rightarrow N_1$ y la región entre las hipersuperficies es isométrica al cilindro de mapeo

$$\frac{N_2 \times [a, b]}{(x, b) \simeq (y, b) \text{ si y solo si } \pi(x) = \pi(y)}.$$

- Ambas hipersuperficies son unilaterales. Existen aplicaciones de recubrimiento riemanniano doble $\pi_i : N \rightarrow N_i$ desde una hipersuperficie totalmente geodésica en M y M es isométrico a un doble cilindro de mapeo

$$\frac{N_1 \times [a_1, a_2]}{(x, a_i) \simeq (y, a_i) \text{ si y solo si } \pi_i(x) = \pi_i(y)}.$$

Demostración. Ver [PW03, Teorema 4].

Q.E.D.

Observación. En los casos descritos, las expresiones en forma de fracciones representan el espacio cociente del producto riemanniana definido en el numerador, bajo la relación de equivalencia explicitada en el denominador.

El siguiente es un ejemplo del primer caso del Teorema anterior.

Ejemplo. Si (M, δ) una n -variedad riemanniana cerrada, entonces $(M \times \mathbb{R}, \delta + dt^2)$ es una variedad riemanniana completa. Luego, para $a, b \in \mathbb{R}$ tenemos que $P \doteq M \times \{a\}$ y $Q \doteq M \times \{b\}$ son dos subvariedades totalmente geodésicas. Por tanto, la región que delimitan P y Q es

$$\Omega = \{(p, t) \in M \times \mathbb{R} : a \leq t \leq b\}.$$

En particular, si $M = S^1$ tenemos algo parecido a la [Figura 4.2](#).

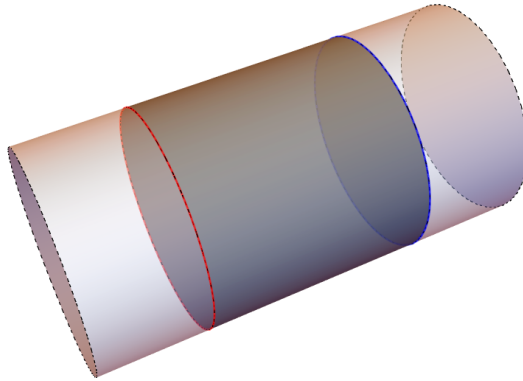


FIGURA 4.2: Ω en gris, P en azul y Q en rojo.

Observación. Fraser y Li [FL17] mencionan el [Teorema 4.4.1](#) como resultado de «rigidez», tras comentar que la [Teorema 4.2.2](#) no es cierta si se asume sólo curvatura de Ricci no negativa y borde débilmente convexo.

Nos referiremos por *rigidez* a aquellos fenómenos donde una variedad que satisface una cota geométrica alcanza el caso límite de una desigualdad, forzando a que la estructura geométrica sea única, esto se traduce en isometrías.

Este resultado motiva a usar las técnicas variacionales, estudiadas en el [Capítulo 3](#), para dar una demostración alternativa. Para ello debemos suponer algunas hipótesis más fuertes, a saber, curvatura *seccional* no negativa e hipersuperficies *totalmente geodésicas*. Además, demostraremos una versión para variedades riemannianas con borde, agregando las hipótesis de convexidad y borde libre.

Bajo las hipótesis de curvatura seccional y convexidad del borde, la fórmula de la segunda variación actúa como un detector de rigidez, es decir, si las subvariedades no se intersectan, la estabilidad de la geodésica minimizante fuerza la anulación del índice de la geodésica. Esto permite identificar la existencia de campos de Jacobi paralelos que generan un producto cartesiano. Así, el enfoque variacional proporciona un camino para reconstruir la geometría global de la variedad ambiente.

Teorema 4.4.2 (Rigidez I). *Sea M una n -variedad riemanniana completa de curvatura seccional no negativa y P, Q dos hipersuperficies conexas cerradas totalmente geodésicas bilaterales. Si $P \cap Q = \emptyset$ y delimitan un dominio $\Omega \subset M$, entonces $\Omega \cong P \times [0, \lambda]$, donde $\lambda = \text{dist}(P, Q)$.*

Demostración. Aunque M no es necesariamente compacta, enfatizamos que P, Q sí lo son y no tienen borde. Por [Proposición 3.2.4](#), existe una geodésica $\sigma \in \Gamma_{P,Q}$ minimizadora normal, de modo que $(p, q) \doteq (\sigma(0), \sigma(1))$. Además, arcoparametrizamos σ , esto es, $\sigma : [0, \lambda] \rightarrow M$ y $\|\sigma'\| \equiv 1$. Luego, para una vecindad normal $\mathcal{U} \subset P$ de p , definimos el mapa $\Phi : \mathcal{U} \times [0, \lambda] \rightarrow M$ dado por

$$\Phi(x, t) = \exp_{\sigma(t)}(P_{\sigma(t)}(\exp_p^{-1}(x))),$$

recordando que $P_{\sigma(t)}(v)$ es el transporte paralelo de $v \in \mathbf{T}_p P$ a lo largo de σ . Notemos que

$$\Phi(x, 0) = \exp_{\sigma(0)}(P_{\sigma(0)}(\exp_p^{-1}(x))) = \exp_p(\exp_p^{-1}(x)) = x, \quad \forall x \in \mathcal{U}.$$

Además, $\Phi(x, \lambda) \in Q$ para todo $x \in \mathcal{U}$, puesto que $P_{\sigma(\lambda)}(\exp_p^{-1}(x)) \in \mathbf{T}_q Q$ y

$$\Phi(x, \lambda) = \exp_{\sigma(\lambda)}(P_{\sigma(\lambda)}(\exp_p^{-1}(x))) = \exp_q(P_{\sigma(\lambda)}(\exp_p^{-1}(x))).$$

Lo siguiente es mostrar que $\left\| \frac{\partial}{\partial t}(\Phi(x, t)) \right\|$ es constante. Definimos la familia de curvas suaves $\gamma_x : [0, \lambda] \rightarrow M$ tal que $\gamma_x(t) = \Phi(x, t)$ con $x \in \mathcal{U}$. Por [Proposición 3.5.13](#), tenemos que $\mathcal{L}(\gamma_x) \leq \lambda$. Eso, sumado a que $\hat{\gamma}_x \in \Omega_{P,Q}$ para todo $x \in \mathcal{U}$, nos permite concluir que $\mathcal{L}(\gamma_x) = \lambda$ y, por lo tanto, γ_x es una geodésica. Luego, $\left\| \frac{\partial}{\partial t}(\Phi(x, t)) \right\| = \|\gamma'_x\| = 1$ para todo $x \in \mathcal{U}$.

Cabe mencionar del argumento anterior que las geodésicas γ_x , además de minimizadoras, también son normales a P y Q por **Lema 3.4.4**. Por ende, podemos expresar y definir Φ globalmente usando el mapa exponencial normal a $\mathcal{U} \subset P$. Sea $\Psi : P \times [0, \lambda] \rightarrow M$ dado por

$$\Psi(x, t) = \exp_x(tN(x)),$$

donde N es un campo unitario normal a P , entonces $\Psi(x, t) = \Phi(x, t)$ para todo $x \in \mathcal{U}$.

Relativo al punto anterior, el conjunto de puntos $x \in P$ tales que: $\text{dist}(x, Q) = \text{dist}(p, Q)$ y $\Psi(x, \lambda) \in Q$; es abierto en P . Además, este conjunto también es cerrado por la continuidad de la función distancia y exponencial normal. Por lo tanto, $\Phi(x, t) = \Psi(x, t)$ para todo $x \in P$.

Ahora bien, analizamos $\left\| \frac{\partial}{\partial x}(\Phi(x, t)) \right\|$. Sea $u \in \mathbf{T}_q P \times [0, \lambda]$, definimos $\alpha : [0, \kappa] \rightarrow P \times [0, \lambda]$ dada por $\alpha(s) = \exp_q(su)$. En particular, elegimos u tal que $\alpha(s) = (\exp_x(su), c)$.

Por **Proposición 3.5.13**, tenemos que $\{(x, t), (x, 0), \alpha(s), \Phi \circ \alpha(s)\}$ es un rectángulo plano totalmente geodésico para todo $s \in [0, \kappa]$. Esto quiere decir que $\Phi \circ \alpha : [0, \kappa] \rightarrow P \times [0, \lambda]$ es una geodésica tal que $\kappa = \mathcal{L}(\alpha) = \mathcal{L}(\Phi \circ \alpha)$. Entonces,

$$\|\mathbf{D}\Phi(x, t)(u)\| = \left\| \frac{d}{ds}(\Phi \circ \alpha(s)) \Big|_{s=0} \right\| = \|(\Phi \circ \alpha)'(0)\| = \|\alpha'(0)\| = \|u\|.$$

Además, $\langle \partial_t | u \rangle = 0$. Por lo tanto, Φ es una isometría local.

Ahora bien, para probar que Φ es una isometría falta ver que es biyectiva. Definimos el conjunto

$$\mathcal{S} = \left\{ t \in (0, \lambda) : \Psi \Big|_{P \times [0, t]} \text{ es inyectiva} \right\}.$$

Dado que P es una hipersuperficie regular, el **Teorema de la Vecindad Tubular** garantiza la existencia de un $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño tal que la aplicación Ψ restringida a $P \times [0, \varepsilon]$ es un difeomorfismo sobre su imagen y, por tanto, inyectiva. Esto muestra que $\mathcal{S} \neq \emptyset$. Luego, al \mathcal{S} ser un subconjunto de los números reales acotado superiormente, el Axioma del Supremo nos asegura que existe $\tau \doteq \sup \mathcal{S}$.

Supongamos que $\tau < \lambda$ y denotamos por Ω_τ al conjunto de puntos en Ω que están a distancia τ de P . Notemos que Ω_τ viene dado por la imagen de P por la exponencial normal en tiempo τ , esto es, $\Omega_\tau = \{\Psi(x, \tau) : x \in P\}$. Además, como demostramos que Ψ es una isometría, el conjunto Ω_τ es una hipersuperficie totalmente geodésica. Observemos que $\Omega_\tau \cap Q = \emptyset$, ya que están a distintas distancias de P . En consecuencia, podemos hacer el mismo razonamiento reemplazando P por Ω_τ , es decir, existe $\tau' > \tau$ tal que $\Psi \Big|_{P \times [0, t]}$ es inyectiva para todo $t < \tau'$; esto contradice la condición de supremo de τ . Por lo tanto, $\tau = \lambda$ y Φ es inyectiva.

Para la sobreyectividad, notemos que estamos trabajando en un dominio convexo Ω , ya que el borde del dominio es $P \cup Q$ que es totalmente geodésica. Entonces, para todo $\tilde{p} \in \Omega$ existe una geodésica α que minimiza la distancia a P . Dicha geodésica es normal a P y podemos escribirla

como parte de la familia γ_x para algún $x \in P$. Si \tilde{p} está a distancia t de P , entonces $\tilde{p} = \gamma_x(t) = \Psi(x, t)$; esto quiere decir que Φ es sobreyectiva. Por lo tanto, Φ es una isometría. Q.E.D.

A continuación, extendemos estos resultados al caso de variedades con borde, incorporando hipótesis de convexidad para garantizar la rigidez de las regiones delimitadas.

Teorema 4.4.3 (Rigidez II). *Sea M una n -variedad compacta convexa de curvatura seccional no negativa; y sean P, Q dos hipersuperficies conexas compactas con borde libre totalmente geodésicas y homólogas relativamente a ∂M . Si $P \cap Q = \emptyset$, entonces la región delimitada por P y Q es isométrica a un producto*

$$P \times [0, \lambda], \quad \lambda = \text{dist}(P, Q).$$

Definición. Decimos que dos hipersuperficies cerradas $P, Q \subset M$ son *homólogas relativamente al borde* si representan la misma clase en la homología relativa:

$$[P] - [Q] = 0 \in H_{n-1}(M, \partial M).$$

Demostración. Como M es convexa y por **Lema 3.4.4**, existe una geodésica $\sigma \in \Gamma_{P,Q}$ minimizadora normal. Al igual que en el teorema anterior, consideramos: σ arcoparametrizada, $(p, q) \doteq (\sigma(0), \sigma(1))$, $\mathcal{U} \subset P$ vecindad normal de p y el mapa $\Phi : \mathcal{U} \times [0, \lambda] \rightarrow M$ dado por

$$\Phi(x, t) = \exp_{\sigma(t)}(P_{\sigma,t}(\exp_p^{-1}(x))).$$

En consecuencia, $\Phi(x, 0) \in P$ y $\Phi(x, \lambda) \in Q$ para todo $x \in \mathcal{U}$.

Es importante remarcar que el dominio Ω delimitado es convexo y una variedad diferencial con esquinas, a saber, el borde no es suave.

Lo siguiente es mostrar que $\left\| \frac{\partial}{\partial t}(\Phi(x, t)) \right\|$ es constante. Definimos la familia de curvas $\gamma_x : [0, \lambda] \rightarrow M$ tal que $\gamma_x(t) = \Phi(x, t)$ con $x \in \mathcal{U}$. Por **Proposición 3.5.13**, tenemos que $\mathcal{L}(\gamma_x) \leq \lambda$. Eso, sumado a que $\hat{\gamma}_x \in \Omega_{P,Q}$ para todo $x \in \mathcal{U}$, nos permite concluir que $\mathcal{L}(\gamma_x) = \lambda$ y, por lo tanto, γ_x es una geodésica. Luego, $\left\| \frac{\partial}{\partial t}(\Phi(x, t)) \right\| = \|\gamma'_x\| = 1$ para todo $x \in \mathcal{U}$.

En el caso que exista $c \in [0, \lambda]$ tal que $\gamma_x(c) \in \partial M$, tenemos que $\gamma'_x(c) \in \mathbf{T}_{\Phi(x,c)}\partial M$. Más aún, $\gamma_x(t) \in \partial M$ para todo $t \in [0, \lambda]$.

Luego, volvemos a definir $\Psi : P \times [0, \lambda] \rightarrow M$ dado por $\Psi(x, t) = \exp_x(t(N(x)))$ y, en consecuencia, $\Psi(x, t) = \Phi(x, t)$ para todo $x \in P$.

Ahora bien, analizamos $\left\| \frac{\partial}{\partial x}(\Phi(x, t)) \right\|$. Sea $u \in \mathbf{T}_q P \times [0, \lambda]$, definimos $\alpha : [0, \kappa] \rightarrow P \times [0, \lambda]$ dada por $\alpha(s) = \exp_q(su)$. En particular, elegimos u tal que $\alpha(s) = (\exp_x(su), c)$.

Por **Proposición 3.5.13**, tenemos que $\{(x, t), (x, 0), \alpha(s), \Phi \circ \alpha(s)\}$ es un rectángulo plano totalmente geodésico para todo $s \in [0, \kappa]$. Esto quiere decir que $\Phi \circ \alpha : [0, \kappa] \rightarrow P \times [0, \lambda]$ es una

geodésica tal que $\kappa = \mathcal{L}(\alpha) = \mathcal{L}(\Phi \circ \alpha)$. Entonces,

$$\|\mathbf{D}\Phi(x, t)(u)\| = \left\| \frac{d}{ds}(\Phi \circ \alpha(s)) \Big|_{s=0} \right\| = \|(\Phi \circ \alpha)'(0)\| = \|\alpha'(0)\| = \|u\|.$$

Además, $\langle \partial_t | u \rangle = 0$. Por lo tanto, Φ es una isometría local.

Ahora bien, para probar que Φ es una isometría falta ver que es biyectiva. Definimos el conjunto

$$\mathcal{S} = \left\{ t \in (0, \lambda] : \Psi \upharpoonright_{P \times [0, t]} \text{ es inyectiva} \right\}.$$

Dado que P es una hipersuperficie regular, el **Teorema de la Vecindad Tubular** garantiza la existencia de un $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño tal que la aplicación Ψ restringida a $P \times [0, \varepsilon]$ es un difeomorfismo sobre su imagen y, por tanto, inyectiva. Esto muestra que $\mathcal{S} \neq \emptyset$. Luego, al \mathcal{S} ser un subconjunto de los números reales acotado superiormente, el Axioma del Supremo nos asegura que existe $\tau \doteq \sup \mathcal{S}$.

Supongamos que $\tau < \lambda$ y denotamos por Ω_τ al conjunto de puntos en Ω que están a distancia τ de P . Notemos que Ω_τ viene dado por la imagen de P por la exponencial normal en tiempo τ , esto es, $\Omega_\tau = \{\Psi(x, \tau) : x \in P\}$. Además, como demostramos que Ψ es una isometría, el conjunto Ω_τ es una hipersuperficie totalmente geodésica. Observemos que $\Omega_\tau \cap Q = \emptyset$, ya que están a distintas distancias de P . En consecuencia, podemos hacer el mismo razonamiento reemplazando P por Ω_τ , es decir, existe $\tau' > \tau$ tal que $\Psi \upharpoonright_{P \times [0, t]}$ es inyectiva para todo $t < \tau'$; esto contradice la condición de supremo de τ . Por lo tanto, $\tau = \lambda$ y Φ es inyectiva.

Para la sobreyectividad, notemos que estamos trabajando en un dominio convexo Ω , ya que el borde del dominio es $P \cup Q$ que es totalmente geodésica. Entonces, para todo $\tilde{p} \in \Omega$ existe una geodésica α que minimiza la distancia a P . Dicha geodésica es normal a P y podemos escribirla como parte de la familia γ_x para algún $x \in P$. Si \tilde{p} está a distancia t de P , entonces $\tilde{p} = \gamma_x(t) = \Psi(x, t)$; esto quiere decir que Φ es sobreyectiva. Por lo tanto, Φ es una isometría. Q.E.D.

Apéndice A

Variedades Diferenciales

En este apéndice se busca dar algunas aclaraciones y notaciones sobre las propiedades topológicas de las variedades suaves.

A.1. Subvariedades suaves

Es importante distinguir entre subvariedades inmersas e incrustadas. Intuitivamente, una subvariedad inmersa puede quebrarse o auto-intersectarse, mientras que una subvariedad incrustada se identifica suavemente sin pliegues ni cruces. Esta discusión es necesaria para poder ofrecer condiciones y la mayoría de los libros las definen de manera distinta, en función de sus necesidades.

Definición. Sean P, M variedades suaves y $\Phi : P \rightarrow M$ una mapa suave. Se dice que Φ es una *inmersión* si $D\Phi_p : \mathbf{T}_p P \rightarrow \mathbf{T}_{\Phi(p)} M$ es inyectiva para todo $p \in P$.

En este caso, decimos que P es una *subvariedad inmersa* de M y denotamos $\Phi : P \hookrightarrow M$.

Definición. Sean P, M variedades suaves tales que $P \subset M$. Decimos que P es una *subvariedad regular* de M si el mapa inclusión $\iota : P \rightarrow M$ es una inmersión.

A.2. Orientabilidad

Si V es un espacio vectorial finito, una *orientación de V* es una clase de equivalencia de bases ordenadas de V , donde dos bases son equivalentes si la matriz de paso tiene determinante positivo. Todo espacio vectorial admite exáctamente dos orientaciones.

Sea M una variedad suave con o sin borde. Se dice que M es *orientable* si existe una colección $\mathcal{O} = \{(\mathcal{U}_\alpha, E_{\alpha,1}, \dots, E_{\alpha,n})\}_\alpha$ donde $\mathcal{U}_\alpha \subset M$ son abiertos que cubren M , $E_{\alpha,1}, \dots, E_{\alpha,n} \in \mathfrak{X}(\mathcal{U}_\alpha)$ son un referencial en \mathcal{U}_α y, si $\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta \neq \emptyset$, entonces $\{E_{\alpha,1}|_p, \dots, E_{\alpha,n}|_p\}$ y $\{E_{\beta,1}|_p, \dots, E_{\beta,n}|_p\}$ tienen la misma orientación en $\mathbf{T}_p M$ para todo $p \in \mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta$.

En este caso, decimos que \mathcal{O} es una *orientación para M* .

Proposición A.2.1. *Sea M una n -variedad suave con o sin borde. Cualquier nonvanishing n -forma $\omega \in \Omega^n(M)$ determina una única orientación para M declarando que una base ordenada $\{e_1, \dots, e_n\} \subset \mathbf{T}_p M$ es positivamente orientada si, y sólo si, $\omega_p(e_1, \dots, e_n) > 0$.*

Demostración. Ver [Lee18, Proposición B.15].

Q.E.D.

Proposición A.2.2. *Sean M, \tilde{M} variedades diferenciales. Entonces,*

1. *Si M es orientable, entonces cualquier abierto $\mathcal{U} \subset M$ es orientable.*
2. *Si M es orientable y \tilde{M} es difeomorfo a M , entonces \tilde{M} es orientable.*
3. *Si M y \tilde{M} son orientables, entonces $M \times \tilde{M}$ es orientable.*

Demostración. Ver [Lee12, Proposición 15.7 y Proposición 15.15].

Q.E.D.

Proposición A.2.3. *El espacio proyectivo real $\mathbb{R}P^n$ es orientable si, y sólo si, n es impar.*

Demostración. Ver [Lee12, Problema 15-3].

Q.E.D.

Proposición A.2.4. *Si M es una variedad suave orientable con borde, entonces ∂M es orientable.*

Demostración. Ver [Lee12, Proposición 15.24].

Q.E.D.

Proposición A.2.5. *Si M es una variedad suave conexa no-orientable, entonces existe una variedad suave orientable \tilde{M} y una aplicación recubridora de 2 hojas $\tilde{\omega} : \tilde{M} \rightarrow M$.*

Demostración. Ver [Lee12, Proposición 15.41].

Q.E.D.

La variedad \tilde{M} , de la proposición anterior, recibe el nombre de **recubrimiento orientado de M** .

A.3. Variedad doble

Definición. Sea M una variedad topológica con borde. Se define el **Doble M** como la variedad topológica cociente $\mathcal{D}(M)$ formada por la unión de dos copias de M dígase M_1 y M_2 , identificando cada punto en ∂M_1 con su correspondiente punto en ∂M_2 . En símbolos, si $\omega : M_1 \cup M_2 \rightarrow M$ es la proyección canónica, entonces

$$\mathcal{D}(M) = \frac{M_1 \cup M_2}{\mathcal{R}} \quad \text{donde} \quad p\mathcal{R}q \iff \omega(p) = \omega(q) \text{ y } p \in \partial M_1.$$

Proposición A.3.1. *Sea M una variedad diferencial con borde. Entonces $\mathcal{D}(M)$ es una variedad topológica sin borde, y posee una estructura diferencial tal que los mapas naturales $M \rightarrow M_i \rightarrow \mathcal{D}(M)$ son incrustaciones diferenciales para $i = 1, 2$.*

Demostración. Ver [Lee18, Proposición A.31].

Q.E.D.

De esta manera tenemos que $\mathcal{D}(M)$ es una variedad diferencial que nos permite definir $\mathbf{T}_p M$ con $p \in \partial M$. En particular, definimos $\mathbf{T}_p M^+$ como los vectores interiores de M .

Proposición A.3.2. *Sea (M, δ) una variedad riemanniana con borde. Entonces, existe una extensión suave de δ en $\mathcal{D}(M)$.*

Demostración. Ver [Tom65, Proposición].

Q.E.D.

Apéndice B

Álgebra Tensorial

Este apéndice reúne algunos conceptos básicos sobre fibrados vectoriales y álgebra tensorial que se utilizan en el trabajo. Los resultados siguen principalmente a Tu [Tu08, cap. 12] y Lee [Lee12, cap. 10-12].

B.1. Fibrados vectoriales

Consideremos M una variedad suave de dimensión n .

Definición. Un *fibrado vectorial de rango k sobre M* es una terna (E, ω, M) donde:

- E, M son variedades suaves, llamadas *espacio total* y *espacio base*, respectivamente;
- $\omega : E \rightarrow M$ es un mapa suave sobreyectivo, llamado la *proyección*;

tal que, para cada $p \in M$,

1. el conjunto $E_p \doteq \omega^{-1}(p)$ es un espacio vectorial real de dimensión k , llamado *fibra en p* ;
2. existe una vecindad \mathcal{U} de p tal que existe un difeomorfismo que preserva fibras

$$\Phi_{\mathcal{U}} : \omega^{-1}(\mathcal{U}) \rightarrow \mathcal{U} \times \mathbb{R}^k$$

que es restringido a un isomorfismo lineal $E_p \rightarrow \{p\} \times \mathbb{R}^k$. El conjunto \mathcal{U} es llamado *trivialización local*.

Ejemplo. Un ejemplo simple de fibrado vectorial de rango k sobre M es considerar $E = M \times \mathbb{R}^k$ con $\omega : M \times \mathbb{R}^k \rightarrow M$ su proyección. Este recibe el nombre de *fibrado producto*.

Ejemplo. Dados (E, ω_E, M) y (F, ω_F, M) dos fibrados vectoriales, podemos construir un nuevo fibrado vectorial sobre M llamado *suma de Whitney de E y F* , definido por

$$E \oplus F \doteq \{(p, v) : p \in M \text{ y } v \in E_p \oplus F_p\}$$

con la proyección $\omega : E \oplus F \rightarrow M$.

Ejemplo. Sea (E, ω, M) un fibrado vectorial y $\Phi : P \hookrightarrow M$ una subvariedad inmersa. Podemos definir un fibrado vectorial sobre P como

$$\Phi^*E \doteq \left\{ (p, v) : p \in P \text{ y } v \in E_{\Phi(p)} \right\}$$

con la proyección obvia. En el caso que P sea una subvariedad regular, podemos denotar $E \upharpoonright P \doteq \Phi^*E$.

Definición. Sea (E, ω, M) un fibrado vectorial. Una *sección* de E es un mapa suave $X : M \rightarrow E$ tal que $\omega \circ X = \text{id}_M$.

Más generalmente, podemos definir una *sección local* de E como un mapa suave $X : \mathcal{U} \subset M \rightarrow E$ con \mathcal{U} un abierto y $\omega \circ X = \text{id}_{\mathcal{U}}$.

Denotamos al conjunto de todas secciones suaves de E como $\Gamma(E)$. Mientras que si necesitamos hablar de secciones locales denotaremos $\Gamma(\mathcal{U}, E)$, con \mathcal{U} un abierto de M .

Ejemplo. ■ \mathbf{TM} es llamado el fibrado tangente de M y sus secciones son los campos vectoriales suaves, ID EST, $\Gamma(\mathbf{TM}) = \mathfrak{X}(M)$;

- \mathbf{T}^*M es llamado el fibrado cotangente de M y sus secciones son las 1-formas suaves, ID EST, $\Gamma(\mathbf{T}^*M) = \Omega^1(M)$.

Ejemplo. Dado $\Phi : P \hookrightarrow M$ una subvariedad inmersa, una sección de Φ^*M es llamado *campo vectorial a lo largo de P* . Según el caso, se denotará $\Gamma(\Phi^*M)$ o $\Gamma(\mathbf{TM} \upharpoonright P)$.

Proposición B.1.1. Sea (E, ω, M) un fibrado vectorial y \mathcal{U} un abierto de M . Entonces, $\Gamma(\mathcal{U}, E)$ es un módulo sobre el anillo $\mathcal{F}(\mathcal{U})$.

Demostración. Ver [Tu08, Proposición 12.8].

Q.E.D.

Definición. Sea (E, ω, M) un fibrado vectorial y \mathcal{U} una trivialización local. Un *referencial* de E sobre \mathcal{U} es una colección de secciones, tales que los elementos forman una base para la fibra E_p , para todo $p \in \mathcal{U}$.

Proposición B.1.2. Sea (E, ω, M) un fibrado vectorial y \mathcal{U} un abierto de M . Suponga que (X_i) es un referencial de E sobre \mathcal{U} . Entonces, $X = \sum f^k X_k \in \Gamma(E; \mathcal{U})$ si, y solo si, $f^k \in \mathcal{F}(\mathcal{U})$ para todo k .

Demostración. Ver [Tu08, Proposición 12.10].

Q.E.D.

Definición. Sean $\omega_{E,F} : E, F \rightarrow M$ fibrados vectoriales sobre M . Se define un *morfismo de fibrados* como un par de mapas suaves $(\Phi : E \rightarrow F, \phi : M \rightarrow M)$ tal que

$$\omega_F \circ \Phi = \phi \circ \omega_E \quad \text{y} \quad \Phi|_{E_p} \in \mathcal{L}(E_p, F_{\phi(p)}), \quad \forall p \in M.$$

Definición. Se dice que Φ es un *isomorfismo de fibrados* si Φ es un difeomorfismo y Φ, Φ^{-1} son morfismos fibrados, y decimos que E es *isomorfo* a F sobre M , denotado $E \simeq_M F$.

Definición. Se dice que un fibrado vectorial (E, ω, M) es *trivial* si es isomorfo al fibrado producto $\tilde{\omega} : M \times \mathbb{R}^r \rightarrow M$ sobre M , ID EST, $E \simeq_M M \times \mathbb{R}^r$.

B.2. Campos tensoriales

Definición. Un (r, s) -*tensor* en p es un elemento del espacio

$$\mathfrak{T}_s^r(\mathbf{T}_p M) \doteq \underbrace{(\mathbf{T}_p M \otimes \cdots \otimes \mathbf{T}_p M)}_r \otimes \underbrace{(\mathbf{T}_p^* M \otimes \cdots \otimes \mathbf{T}_p^* M)}_s.$$

Ejemplo. ■ **vectores:** $v \in \mathbf{T}_p M$ son tensores de tipo $(1, 0)$;

■ **covectores:** $\alpha \in \mathbf{T}_p^* M$ son tensores de tipo $(0, 1)$;

■ **endomorfismos:** $\mathbf{T}_p M \rightarrow \mathbf{T}_p M$ son tensores de tipo $(1, 1)$.

Observación. El Álgebra Tensorial admite operaciones naturales: producto tensorial, contracción de índices y permutación de factores.

Definición. El (r, s) -*fibrado tensorial* sobre M es el fibrado vectorial $(\mathfrak{T}_s^r(M), \omega, M)$, donde

$$\mathfrak{T}_s^r(M) \doteq \{(p, v) : p \in M \text{ y } v \in \mathfrak{T}_s^r(\mathbf{T}_p M)\}$$

y $\omega : \mathfrak{T}_s^r(M) \rightarrow M$ la proyección canónica dada por $(p, v) \mapsto p$.

Definición. Un (r, s) -*campo tensorial* sobre M es una sección suave del (r, s) -fibrado tensorial.

Ejemplo. ■ $\mathbf{T}M = \mathfrak{T}_0^1(M)$ y $\mathbf{T}^*M = \mathfrak{T}_1^0(M)$;

Las operaciones definidas punto a punto (producto tensorial, contracción, etc.) se extienden naturalmente a campos tensoriales.

Definición. Decimos que un k -campo tensorial es:

■ *covariante* si es de tipo $(0, k)$;

■ *contravariante* si es de tipo $(k, 0)$.

Proposición B.2.1. Un mapa $X : (\mathfrak{X}(M))^k \rightarrow \mathcal{F}(M)$ es inducido por un k -campo tensorial covariante si, y solo si, es multilineal sobre $\mathcal{F}(M)$.

Demostración. Ver [Lee12, Lema 12.24].

Q.E.D.

Definición. Sea T un 2-campo tensorial covariante sobre M . Se dice que T es *simétrico* si

$$T(X, Y) = T(Y, X), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Definición. Sea $\Phi : M \rightarrow \tilde{M}$ un mapa suave. Definimos la *aplicación regrediente* (o *pullback*) por Φ como el mapa $\Phi^* : \mathfrak{T}_k^0(\tilde{M}) \rightarrow \mathfrak{T}_k^0(M)$ dado por

$$(\Phi^*T)(X_1, \dots, X_k) \doteq T(\mathbf{D}\Phi(X_1), \dots, \mathbf{D}\Phi(X_k)).$$

Proposición B.2.2. Sea $\Phi : M \rightarrow \tilde{M}$ un mapa suave y S, T campos tensoriales covariantes sobre M . Entonces,

1. $\Phi^*(aS + bT) = a\Phi^*(S) + b\Phi^*(T)$, para todo $a, b \in \mathbb{R}$;
2. $\Phi^*(fT) = (f \circ \Phi)\Phi^*(T)$, para todo $f \in \mathcal{F}(M)$;
3. $\Phi^*(S \otimes T) = \Phi^*(S) \otimes \Phi^*(T)$.

Demostración. Ver [Lee12, Lema 12.25].

Q.E.D.

Definición. Sean M, \tilde{M} variedades suaves y $\Phi : M \rightarrow \tilde{M}$ un difeomorfismo. Definimos la *aplicación progrediente* (o *pushforward*) de Φ como el mapa $\Phi_* : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(\tilde{M})$ dado por

$$\Phi_*X|_q \doteq \mathbf{D}\Phi_p \left(X|_p \right), \quad \forall q \in \tilde{M} : \Phi(p) = q.$$

Si $X \in \mathfrak{X}(M)$ y $f \in \mathcal{F}(\mathcal{U})$ sobre un abierto $\mathcal{U} \subset M$, obtenemos una nueva función $Xf \in \mathcal{F}(\mathcal{U})$, definida por

$$(Xf)(p) \doteq X|_p f.$$

Proposición B.2.3. Existe una única aplicación progrediente de Φ . Para todo $g \in \mathcal{F}(\tilde{M})$, se cumple que

$$((\Phi_*X)f) \circ \Phi = X(f \circ \Phi), \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M)$$

Demostración. Ver [Lee12, Proposición 8.19 y Corolario 8.21].

Q.E.D.

Observación. A menudo, en la literatura se usa Φ_* para referirse a la *diferencial total* de Φ . EXAMPLI GRATIA, ver [Tu17].

B.3. Derivada de Lie

Definición. Sean $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Definimos el *corchete de Lie entre X e Y* como el operador $[X, Y] : \mathcal{F}(M) \rightarrow \mathcal{F}(M)$ dado por

$$[X, Y](f) \doteq XYf - YXf, \quad \forall f \in \mathcal{F}(M).$$

Proposición B.3.1. *El corchete de Lie de cualquier par de campos vectoriales suaves es un campo vectorial suave.*

Demostración. Ver [Lee12, Lema 8.25].

Q.E.D.

Proposición B.3.2. *Sea M una variedad suave con o sin borde y $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.*

1. $[X, Y]$ es bilineal sobre \mathbb{R} como una función de X e Y .
2. $[X, Y] = -[Y, X]$ (antisimetría).
3. $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$ (identidad de Jacobi).
4. $[fX, gY] = fg[X, Y] + (Xg)fY - (Yf)gX$, para $f, g \in \mathcal{F}(M)$.

Demostración. Ver [Lee12, Proposición 8.28].

Q.E.D.

Definición. Sea $V \in \mathfrak{X}(M)$, definimos la *derivada de Lie respecto a V* como la derivación L_V tal que

$$L_V f \doteq Vf \quad \text{y} \quad L_V X \doteq [V, X], \quad f \in \mathcal{F}(M) \quad \text{y} \quad X \in \mathfrak{X}(M).$$

Proposición B.3.3. *Sea $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ y $f \in \mathcal{F}(M)$. Entonces,*

1. $L_Y(fX) = L_Y(f)X + fL_Y X$;
2. $L_{aX+bY} = aL_X + bL_Y$, para todo $a, b \in \mathbb{R}$;
3. $[L_X, L_Y] = L_{[X, Y]}$;
4. $L_X(df) = d(L_X f)$.

Demostración. Ver [Lee12, Corolario 9.39].

Q.E.D.

Proposición B.3.4. *Si $\Phi : M \rightarrow \tilde{M}$ es un difeomorfismo, entonces*

$$\Phi_*[X, Y] = [\Phi_* X, \Phi_* Y], \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Demostración. Ver [Lee12, Corolario 9.39].

Q.E.D.

Proposición B.3.5. Sea M una variedad suave y $X \in \mathfrak{X}(M)$. La derivada de Lie $\mathbf{L}_X : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ puede ser extendido únicamente a un mapa de $\mathfrak{D}(M)$ en si mismo tal que:

- $\mathbf{L}_X f = Xf$, para $f \in \mathcal{F}(M)$.
- \mathbf{L}_X es una derivación de $\mathfrak{D}(M)$ que preserva el tipo de tensor, ID EST,

$$\mathbf{L}_X(S \otimes T) = \mathbf{L}_X S \otimes T + S \otimes \mathbf{L}_X T, \quad \forall S, T \in \mathfrak{D}(M).$$

- \mathbf{L}_X conmuta con contracciones, ID EST, $\mathbf{L}_X \circ \text{tr} = \text{tr} \circ \mathbf{L}_X$.

Demostración. Ver [[Hel78](#), pág. 89].

Q.E.D.

Bibliografía

- [Bis74] R. L. Bishop. «Infinitesimal Convexity Implies Local Convexity». En: *Indiana University Mathematics Journal* 24.2 (1974), págs. 169-172.
- [do 92] M. P. do Carmo. *Riemannian Geometry*. Trad. portugués por F. Flaherty. 1.^a ed. Mathematics. Theory and applications. Boston, MA: Birkhäuser, 1992. ISBN: 0-8176-3490-8, 3-7643-3490-8.
- [Esc94] J.-H. Eschenburg. «Comparison theorems in Riemannian geometry». Lecture Notes. 1994. URL: <https://www.math.utoronto.ca/vtk/eschenburg-comparison.pdf>.
- [FL17] A. Fraser y M. M. Li. *Compactness of the space of embedded minimal surfaces with free boundary in three-manifolds with nonnegative Ricci curvature and convex boundary*. 24 de ago. de 2017. arXiv: 1204.6127v2 [math.DG].
- [Fra61] T. T. Frankel. «Manifolds with positive curvature». En: *Pacific Journal of Mathematics* 11.1 (1961), págs. 165-174. DOI: 10.2140/pjm.1961.11.165.
- [Fra66] T. T. Frankel. «On the fundamental group of a compact minimal submanifold». En: *Annals of Mathematics* 83.1 (ene. de 1966), págs. 68-73. DOI: 10.2307/1970471.
- [Hel78] S. Helgason. *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces*. Vol. 80. Pure and Applied Mathematics. San Diego, CA: Academic Press, 1978. ISBN: 0-12-338460-5.
- [HR31] H. Hopf y W. Rinow. «Ueber den Begriff der vollständigen differentialgeometrischen Fläche». En: *Commentarii Mathematici Helvetici* 3 (1931), págs. 209-225. DOI: 10.5169/seals-4688.
- [Jos17] J. Jost. *Riemannian Geometry and Geometric Analysis*. 7.^a ed. Universitext. Cham: Springer, 2017. DOI: 10.1007/978-3-319-61860-9.
- [Lee12] J. M. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds*. 2.^a ed. Vol. 218. Graduate Texts in Mathematics. New York, NY: Springer, 2012. DOI: 10.1007/978-1-4419-9982-5.
- [Lee18] J. M. Lee. *Introduction to Riemannian Manifolds*. 2.^a ed. Vol. 176. Graduate Texts in Mathematics. Cham: Springer, 2018. DOI: 10.1007/978-3-319-91755-9.
- [Lim13] E. L. Lima. *Espaços métricos*. 5.^a ed. Projeto Euclides. Rio de Janeiro, RJ: IMPA, 2013. ISBN: 978-85-244-0158-9.
- [Moo21] K. Moore. «Bakry-Émery Ricci curvature on manifolds with boundary». Tesis mag. Alberta: University of Alberta, 2021. URL: <https://ualberta.scholaris.ca/>

- [server / api / core / bitstreams / 87a01a20 - 4c24 - 4acd - 90ef - 3d2b6bc3dd98 / content.](#)
- [Mun02] J. R. Munkres. *Topología*. Trad. inglés por Á. Ferrández Izquierdo et al. 2.^a ed. Madrid: Pearson Educación, 2002. ISBN: 84-205-3180-4.
- [NZ24] K. Naff y J. J. Zhu. *Half-space intersection properties for minimal hypersurfaces*. 19 de jul. de 2024. arXiv: [2401.09669v2 \[math.DG\]](#).
- [O’N83] B. O’Neill. *Semi-Riemannian geometry. With Applications to Relativity*. Vol. 103. Pure and Applied Mathematics. San Diego, CA: Academic Press, 1983. ISBN: 0-12-526740-1.
- [Pet16] P. Petersen. *Riemannian Geometry*. 3.^a ed. Vol. 171. Graduate Texts in Mathematics. Cham: Springer, 2016. DOI: [10.1007/978-3-319-26654-1](#).
- [Pet23] A. Petrunin. *Pure metric geometry. Introductory lectures*. 25 de abr. de 2023. arXiv: [2007.09846v9 \[math.MG\]](#).
- [PW03] P. Petersen y F. Wilhelm. «On Frankel’s Theorem». En: *Canadian Mathematical Bulletin* 46.1 (2003), págs. 130-139. DOI: [10.4153/CMB-2003-013-4](#).
- [Rau51] H. E. Rauch. «A Contribution to Differential Geometry in the Large». En: *Annals of Mathematics* 54.1 (jul. de 1951), págs. 38-55. DOI: [10.2307/1969309](#).
- [Sch06] R. Schoen. «Minimal submanifolds in higher codimension». En: *Matemática Contemporânea* 30 (2006). XIV Escola de Geometria Diferencial, págs. 169-199. DOI: [10.21711/231766362006/rmc3011](#).
- [Tom65] A. Tominaga. «Extensions of Riemannian metrics». En: *Journal of Science of the Hiroshima University* 29.1 (1965), págs. 135-145. DOI: [10.32917/hmj/1206139319](#).
- [Tu08] L. W. Tu. *An Introduction to manifolds*. 1.^a ed. Universitext. New York, NY: Springer, 2008. ISBN: 978-0-387-48098-5.
- [Tu17] L. W. Tu. *Differential Geometry. Connections, Curvature, and Characteristic Classes*. 1.^a ed. Vol. 275. Graduate Texts in Mathematics. Cham: Springer, 2017. DOI: [10.1007/978-3-319-55084-8](#).