



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

TESIS DE MAGÍSTER

Teoría Ergódica Subaditiva

Autor:

Ignacio Rojas Aravena

Supervisor:

Godofredo Iommi Echeverría

Tesis presentada a la Facultad de Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica de Chile, como requisito para optar al grado de Magíster en Matemática.

Santiago, Chile

Agradecimientos

En primer lugar, me gustaría agradecer al profesor Godofredo Iommi por su disposición y apoyo, siempre yendo más allá de la intuición con sus explicaciones y ejemplos. Extiendo mi gratitud a los profesores del comité, Raimundo Briceño y Aníbal Velozo, quienes me guiaron con la escritura y me brindaron nuevas perspectivas para abordar las temáticas de mi trabajo.

A mis padres, gracias por aguantarme y escucharme hablar incansablemente de temas que no entendían. Un agradecimiento especial a mi hermana, que gracias a ella estoy estudiando esta maravillosa carrera. Sin sus consejos y sabiduría, no hubiese entrado al mundo de las matemáticas.

Un agradecimiento muy especial a todos mis amigos de la Oficina M23. A Benjamín Hurtado, por escucharme atentamente cada vez que tenía un problema de matemáticas y por la compañía en los momentos que nadie iba a la facultad. A Sofía Errázuriz por su buena disposición y todos los paseos al cerro que hicimos. A Felipe Hernández y Francisco Gallardo, por contagiarme con su amor por las matemáticas y en más de una ocasión acompañar con unas cervezas. Gracias a Rodrigo Galaz, quien desde cuarto medio me ha acompañado en este viaje de las matemáticas. A Miguel Donoso y Francisco Monardes por inspirarme con su pasión por la Teoría Ergódica, y por siempre estar dispuestos a ayudarme con temas que no son de mi total entendimiento. Y a Felipe Caster, por escucharme siempre cuando necesitaba hablar con alguien.

Quiero destacar también al Profesor José Samper, quien siempre me estuvo motivando y mostrando lo maravilloso que es el mundo de las matemáticas, y lo amplio que puede ser. Mostrándome intersecciones que no tenía idea que existían e historias de personas que me motivaron a seguir estudiando y dar lo mejor de mí.

Finalmente quería agradecer a todas las personas que fueron parte de este proceso, Paulina y Soledad, todos los estudiantes de la facultad de matemáticas con lo que he compartido una carcajada, mis amigos del colegio que siguen siendo amigos míos al día de hoy y a todos los demás amigos que he hecho en el camino, gracias por ser parte de mi vida.

Índice general

1. Medidas Finitamente Aditivas	6
1. Definición y Propiedades Básicas	6
2. Medidas Finitamente Aditivas Puras	11
3. El Dual de L^∞	14
4. Ejemplos	19
4.1. El conjunto \mathfrak{G}	21
4.2. El Ejemplo de Valadier-Hensgen	26
2. El Teorema de Descomposición de Kingman	29
1. El Teorema Ergódico Subaditivo	30
2. Demostración para el caso invertible	35
3. Demostración para el caso no invertible	39
4. El Teorema de Komlós	42
3. Formalismo Termodinámico No Aditivo	49
1. Principio Variacional para potenciales subaditivos	50
1.1. Lemas Previos	52
1.2. Demostración del Principio Variacional	57
2. Sucesiones casi-aditivas y asintóticamente aditivas	62
3. Formalismo Termodinámico No Aditivo	67

Introducción

El primer resultado en Teoría Ergódica, demostrado por Henri Poincaré en 1890, establece que, dado un sistema que preserva la medida y un conjunto A de medida positiva, entonces la órbita de casi todo punto regresa infinitas veces a A . Sin embargo, este resultado de recurrencia no especifica la frecuencia con la que ocurren estos retornos. Esta cuestión fue abordada más tarde por George Birkhoff en 1931, quien demostró uno de los teoremas fundamentales de la teoría.

Sea (X, \mathcal{B}, μ) un espacio de medida finita. Sea $T: X \rightarrow X$ un mapa que preserva la medida μ y $f \in L^1(X, \mu)$, se usará la notación

$$(S_n f)(x) = \sum_{i=0}^{n-1} (f \circ T^i)(x).$$

Teorema 0.1 (Teorema Ergódico de Birkhoff). *Existe $f^* \in L^1(X, \mu)$ tal que para μ -ctp $x \in X$*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(S_n f)(x)}{n} = f^*(x).$$

Más aún $f^ = f^* \circ T$, $\|f^*\|_1 \leq \|f\|_1$, y $\int f^* d\mu = \int f d\mu$. Si μ es ergódica, entonces f^* es constante μ -ctp y*

$$f^*(x) = \frac{1}{\mu(X)} \int f d\mu.$$

Decimos que una colección de funciones $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset L^1(X, \mu)$ es *subaditiva* con respecto a la transformación $T: X \rightarrow X$ si para cualesquiera $m, n \in \mathbb{N}$

$$\varphi_{m+n} \leq \varphi_m + \varphi_n \circ T^m. \tag{1}$$

Cuando se satisface la igualdad, decimos que la sucesión de funciones es *aditiva* con respecto a T . Notemos que la sucesión de funciones $\{S_n f\}_{n \in \mathbb{N}}$ definida en el Teorema 0.1 satisface esta propiedad.

En este trabajo se estudiará la demostración de un teorema ergódico para este tipo de funciones, es decir, la existencia de $f^* \in L^1(X, \mu)$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi_n(x)}{n} = f^*(x),$$

para μ -ctp $x \in X$. Para esto nos basaremos en el trabajo de J. Kingman [Kin68].

Posteriormente a la demostración de Kingman, se conocen numerosas pruebas de este teorema usando distintas técnicas y recursos. Sin embargo, la original establece que bajo ciertas condiciones si $\{\varphi_n\}_n$ es subaditiva con respecto a una transformación T , entonces existe $f \in L^1(X, \mu)$ tal que

$$\varphi_n = S_n f + \varphi_n^{(\text{ps})}, \tag{2}$$

donde el segundo sumando es una sucesión de funciones puramente subaditivas, es decir, una sucesión de funciones no negativas tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi_n^{(\text{ps})}}{n} = 0.$$

Dicha descomposición no es posible encontrarla en demostraciones más breves del Teorema Ergódico Subaditivo. En la demostración de Kingman se estudian conceptos interesantes de estudiar, tales como medidas finitamente aditivas y el espacio dual de L^∞ . El objetivo de este trabajo es presentar y analizar en detalle la primera demostración de Kingman para este teorema. Para esto, el presente contenido será dividido en tres capítulos.

En el primer capítulo se estudiará el concepto de medidas finitamente aditivas, generalizando la noción de medida. El objetivo es entender el espacio formado por todas estas.

En el segundo capítulo se demostrará el Teorema Ergódico Subaditivo. Para entender la demostración original de Kingman, será necesario asumir que el sistema donde se trabaja es invertible. Luego la demostración se extenderá para el caso no invertible, basándonos en un teorema de Komlós [Kom67].

El trabajo finaliza haciendo una breve introducción al Formalismo Termodinámico No Aditivo, en donde se trabajará con sucesiones que satisfacen propiedades inspiradas en la ecuación (2). En dicho contexto, estudiaremos conceptos básicos del Formalismo Termodinámico tales como estados de equilibrio, exponentes de Lyapunov, medidas de Gibbs, entre otros.

Capítulo 1

Medidas Finitamente Aditivas

El propósito de este capítulo es extender la noción de medida, debilitando la condición de σ -aditividad (también conocida como aditividad numerable) a aditividad finita.

Para esto nos basaremos principalmente en el trabajo de John Toland [Tol20] y en el artículo “Finitely Additive Measures” de Yosida y Hewitt [YH52].

El capítulo está dividido en cuatro secciones, donde el propósito principal será estudiar el espacio de medidas finitamente aditivas, y así poder hacer un buen uso de estas propiedades en la demostración del Teorema Ergódico Subaditivo.

Durante todo el capítulo, se trabajará con (X, \mathcal{F}) un espacio medible, donde X es un conjunto cualquiera y \mathcal{F} una σ -álgebra asociada a X .

1. Definición y Propiedades Básicas

Definición 1.1. Una *medida (finitamente aditiva)* sobre \mathcal{F} es una función $\nu: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ que cumple las siguientes condiciones:

- $\nu(\emptyset) = 0$ y $\sup_{A \in \mathcal{F}} |\nu(A)| < \infty$;
- para todo par $A, B \in \mathcal{F}$ tales que $A \cap B = \emptyset$ se satisface $\nu(A \cup B) = \nu(A) + \nu(B)$.

Se dice además que ν es σ -aditiva, si y solo si

$$\nu\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_k\right) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \nu(E_k),$$

para toda colección $\{E_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ tal que $E_i \cap E_j = \emptyset$ para $i \neq j$.

Durante este capítulo y el siguiente, cuando se mencione una medida, será referido a una medida finitamente aditiva.

Se denotará $\mathcal{BFA}(\mathcal{F})$ al conjunto de medidas sobre \mathcal{F} y $\Sigma(\mathcal{F})$ al subconjunto de medidas σ -aditivas.

Dados $\mu, \nu \in \mathcal{BFA}(\mathcal{F})$, definimos la relación de orden $\mu \leq \nu$ si y solamente si

$$\mu(A) \leq \nu(A),$$

para todo $A \in \mathcal{F}$.

Los siguientes resultados muestran propiedades útiles para caracterizar las medidas σ -aditivas.

Lema 1.2 ([Tol20, Lemma 4.2]). *Sea $\nu \in \mathcal{BFA}(\mathcal{F})$.*

- (a) *La medida ν es σ -aditiva si y solo si para cualquier sucesión $\{A_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ que satisfaga $A_{k+1} \subset A_k$ y $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k = \emptyset$, se tiene que $\nu(A_k) \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow \infty$.*
- (b) *Si $0 \leq \nu \leq \gamma$ para algún $\gamma \in \Sigma(\mathcal{F})$, entonces $\nu \in \Sigma(\mathcal{F})$.*

Demostración. Se demostrará solo el primer inciso, dado que el segundo es directo de la definición. Sea $\nu \in \Sigma(\mathcal{F})$ y $\{A_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$, tal que $A_{k+1} \subset A_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k = \emptyset$. Sea $E_k = A_k \setminus A_{k+1} \in \mathcal{F}$. Entonces $\{E_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de conjuntos disjuntos entre sí con $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_k = A_1$. Como $\nu(A_1)$ es finita y ν es σ -aditiva,

$$\nu(A_1) = \sum_{k=1}^{\infty} \nu(E_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \nu(A_k \setminus A_{k+1}) = \lim_{k \rightarrow \infty} (\nu(A_1) - \nu(A_k)).$$

A consecuencia de esto, $\lim_{k \rightarrow \infty} \nu(A_k) = 0$.

Por otro lado, supongamos que $\nu \in \mathcal{BFA}(\mathcal{F})$ y $\lim_{k \rightarrow \infty} \nu(A_k) = 0$ para toda sucesión anidada $\{A_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ con $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k = \emptyset$. Sea $\{E_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ una sucesión de conjuntos disjuntos entre sí y considere $A_k = \bigcup_{j=k}^{\infty} E_j$. Por hipótesis, $\lim_{k \rightarrow \infty} \nu(A_k) = 0$ pues, $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k = \emptyset$ y por la aditividad finita

$$\sum_{j=1}^{k-1} \nu(E_j) = \nu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) - \nu(A_k) \rightarrow \nu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) \text{ cuando } k \rightarrow \infty.$$

Por lo tanto, ν es σ -aditiva. □

Esta caracterización permite tener una noción de σ -aditividad cuando se está trabajando

con un álgebra en vez de una σ -álgebra tal y como se puede ver en las primeras secciones de [YH52].

Lema 1.3 ([Tol20, Lemma 4.3]). *Sea $\{\gamma_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \Sigma(\mathcal{F})$ tal que*

$$0 \leq \gamma_k(E) \leq \gamma_{k+1}(E) \leq M < \infty,$$

para todo $E \in \mathcal{F}$ y $k \in \mathbb{N}$. Entonces $\gamma \in \Sigma(\mathcal{F})$, donde $\gamma(E) = \lim_{k \rightarrow \infty} \gamma_k(E)$, $E \in \mathcal{F}$.

Demostración. De la linealidad del límite, se sigue que γ es finitamente aditiva. Para demostrar que $\gamma \in \Sigma(\mathcal{F})$, sea $\{E_l\}_{l \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ una sucesión de conjuntos disjuntos entre sí y $a_{jk} = \sum_{l=1}^j \gamma_k(E_l)$. Notemos que si $j \leq j'$, $k \leq k'$, entonces $0 \leq a_{jk} \leq a_{j'k'} \leq M$. Como $\gamma_k \in \Sigma(\mathcal{F})$,

$$\begin{aligned} \gamma \left(\bigcup_{l \in \mathbb{N}} E_l \right) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \gamma_k \left(\bigcup_{l \in \mathbb{N}} E_l \right) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{l=1}^j \gamma_k(E_l) \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{l=1}^j \gamma_k(E_l) \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{l=1}^j \gamma(E_l) = \sum_{l=1}^{\infty} \gamma(E_l). \end{aligned}$$

Esto demuestra que $\gamma \in \Sigma(\mathcal{F})$. □

El espacio $\mathcal{BFA}(\mathcal{F})$ es un \mathbb{R} -espacio vectorial con las operaciones

$$(\nu_1 + \nu_2)(E) = \nu_1(E) + \nu_2(E) \quad \text{y} \quad (\lambda\nu)(E) = \lambda\nu(E), \quad \forall E \in \mathcal{F},$$

y para todo $\nu_1, \nu_2, \nu \in \mathcal{BFA}(\mathcal{F})$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Más aún, es posible dotar este espacio con el orden parcial $\nu_1 \leq \nu_2$ si y solo si $\nu_1(E) \leq \nu_2(E)$ para todo $E \in \mathcal{F}$. Bajo este orden, $\mathcal{BFA}(\mathcal{F})$ es un retículo, es decir, entre cualesquiera dos medidas ν_1, ν_2 existe una única $\nu \in \mathcal{BFA}(\mathcal{F})$ que es la menor cota superior de ambas y otra que es la mayor cota inferior de ambas.

Definición 1.4. Para $\nu_1, \nu_2 \in \mathcal{BFA}(\mathcal{F})$, y $E \in \mathcal{F}$. Definimos

$$\begin{aligned} (\nu_1 \vee \nu_2)(E) &= \sup_{F \in \mathcal{F}: F \subset E} \{\nu_1(F) + \nu_2(E \setminus F)\}. \\ (\nu_1 \wedge \nu_2)(E) &= \inf_{F \in \mathcal{F}: F \subset E} \{\nu_1(F) + \nu_2(E \setminus F)\}. \end{aligned}$$

Es directo verificar que

$$\nu_1 \wedge \nu_2 = -((-\nu_1) \vee (-\nu_2)) \quad (1.1)$$

Teorema 1.5 ([[Tol20](#), Theorem 4.4]). *Sean $\nu_1, \nu_2, \nu \in \mathcal{BFA}(\mathcal{F})$. Se satisfacen las siguientes propiedades.*

(a) *Las funciones $\nu_1 \wedge \nu_2, \nu_1 \vee \nu_2$ son medidas finitamente aditivas, más aún, si $\nu_1, \nu_2 \in \Sigma(\mathcal{F})$ entonces $\nu_1 \wedge \nu_2, \nu_1 \vee \nu_2 \in \Sigma(\mathcal{F})$;*

(b) *sean $\nu^+ = \nu \vee 0$ y $\nu^- = (-\nu) \vee 0$. Entonces*

$$\nu^+ \geq 0, \quad \nu^- \geq 0, \quad \nu = \nu^+ - \nu^- \quad y \quad \nu^+ \vee \nu^- = 0;$$

(c) *si $\gamma_1, \gamma_2 \in \Sigma(\mathcal{F})$ con $\gamma_1 \leq \nu \leq \gamma_2$, entonces $\nu \in \Sigma(\mathcal{F})$.*

Demostración.

(a) Basta demostrar que $\nu_1 \vee \nu_2$ cumple la propiedad de aditividad finita. Sean $E_1, E_2 \in \mathcal{F}$, tales que $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ y $F \subset E_1 \cup E_2$. Sean $F_1 = E_1 \cap F$ y $F_2 = E_2 \cap F$. Por aditividad finita, tenemos

$$\begin{aligned} (\nu_1 \vee \nu_2)(E_1 \cup E_2) &= \sup_{F \in \mathcal{F}: F \subset E_1 \cup E_2} \{\nu_1(F) + \nu_2(E_1 \cup E_2 \setminus F)\} \\ &= \sup_{F_1 \in \mathcal{F}: F_1 \subset E_1} \{\nu_1(F_1) + \nu_2(E_1 \setminus F_1)\} + \sup_{F_2 \in \mathcal{F}: F_2 \subset E_2} \{\nu_1(F_2) + \nu_2(E_2 \setminus F_2)\} \\ &= (\nu_1 \vee \nu_2)(E_1) + (\nu_1 \vee \nu_2)(E_2). \end{aligned}$$

Así $\nu_1 \vee \nu_2 \in \mathcal{BFA}(\mathcal{F})$. Por la ecuación (1.1), se obtiene que $\nu_1 \wedge \nu_2 \in \mathcal{BFA}(\mathcal{F})$.

Si $\nu_1, \nu_2 \in \Sigma(\mathcal{F})$ y $\{E_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ es una sucesión de conjuntos disjuntos de a pares. Entonces para $\varepsilon \in (0, 1)$ y $k \in \mathbb{N}$, existen $F_k \subset E_k$, $F_k \in \mathcal{F}$ tal que

$$\nu_1(F_k) + \nu_2(E_k \setminus F_k) \leq (\nu_1 \wedge \nu_2)(E_k) + \varepsilon^k.$$

Entonces, por σ -aditividad, con $F = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} F_k \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_k =: E$,

$$(\nu_1 \wedge \nu_2)(E) \leq \sum_{k=1}^{\infty} (\nu_1 \wedge \nu_2)(E_k) + \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon},$$

para todo $\varepsilon \in (0, 1)$. Por lo tanto

$$(\nu_1 \wedge \nu_2) \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \right) = (\nu_1 \wedge \nu_2)(E) \leq \sum_{k=1}^{\infty} (\nu_1 \wedge \nu_2)(E_k).$$

Para la desigualdad recíproca, con $F \in \mathcal{F}$ y $F \subset E = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_k$,

$$\nu_1(F) + \nu_2(E \setminus F) = \sum_{k=1}^{\infty} (\nu_1(F \cap E_k) + \nu_2(E_k \setminus F)) \geq \sum_{k=1}^{\infty} (\nu_1 \wedge \nu_2)(E_k).$$

Por lo tanto

$$(\nu_1 \wedge \nu_2) \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \right) = (\nu_1 \wedge \nu_2)(E) \geq \sum_{k=1}^{\infty} (\nu_1 \wedge \nu_2)(E_k).$$

Así $\nu_1 \wedge \nu_2 \in \Sigma(\mathcal{F})$ y se sigue por (1.1) que $\nu_1 \vee \nu_2 \in \Sigma(\mathcal{F})$.

- (b) Por definición se cumple que $\nu^+ \geq 0$ y $\nu^- \geq 0$. Como $\nu(E) = \nu(F) + \nu(E \setminus F)$, para $E, F \in \mathcal{F}$ con $F \subset E$, se sigue que

$$\nu(F) - \nu^-(E) \leq \nu(E) \leq \nu(F) + \nu^+(E).$$

Tomando supremo en la izquierda e ínfimo en la derecha, obtenemos $\nu = \nu^+ - \nu^-$.

Finalmente si $\nu^+ \vee \nu^- \neq 0$, como ν^+ y ν^- son finitamente aditivas, existe $E \in \mathcal{F}$ y $\alpha > 0$ tales que para cualesquiera $F \subset E$, $F \in \mathcal{F}$,

$$0 \leq \alpha \leq \nu^+(E \setminus F) + \nu^-(F) = \nu^+(E) - \nu(F).$$

Por lo tanto para todo $F \subset E$, $F \in \mathcal{F}$, $\nu(F) \leq \nu^+(E) - \alpha$. Como $\alpha > 0$, esto contradice la definición de ν^+ . Se sigue que $\nu^+ \wedge \nu^- = 0$.

- (c) Como $0 \leq \nu - \gamma_1 \leq \gamma_2 - \gamma_1$ y $\gamma_2 - \gamma_1 \in \Sigma(\mathcal{F})$, el Lema 1.2 implica que $\gamma_1 \in \Sigma(\mathcal{F})$, y por lo tanto ν también lo está, se sigue (c).

□

El resultado anterior nos permite hacer la siguiente construcción, para $\nu \in \mathcal{BFA}(\mathcal{F})$ se tiene

$$|\nu| = \nu^+ + \nu^-.$$

Esta medida es no negativa, y de hecho, si consideramos la función $\|\cdot\|: \mathcal{BFA}(\mathcal{F}) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$

dada por

$$\|\nu\| = |\nu|(X). \quad (1.2)$$

Entonces $\|\cdot\|$ es una norma para el espacio $\mathcal{BFA}(\mathcal{F})$.

2. Medidas Finitamente Aditivas Puras

Hasta el momento hemos visto solo propiedades de medidas σ -aditivas, ¿será posible construir alguna medida que sea finitamente aditiva pero no σ -aditiva?

Para responder a esta pregunta es necesario introducir el concepto de medidas puras. El objetivo de esto es construir un espacio que se comporte como un complemento ortogonal de $\Sigma(\mathcal{F})$, es decir, se construirá un espacio $\Pi(\mathcal{F})$ tal que

$$\mathcal{BFA}(\mathcal{F}) = \Sigma(\mathcal{F}) \oplus \Pi(\mathcal{F}).$$

Definición 1.6. Sea $\mu \in \mathcal{BFA}(\mathcal{F})$, decimos que μ es *pura* si

$$\{\gamma \in \Sigma(\mathcal{F}) : 0 \leq \gamma \leq \mu^+\} = \{0\} = \{\gamma \in \Sigma(\mathcal{F}) : 0 \leq \gamma \leq \mu^-\}. \quad (1.3)$$

Denotaremos al espacio $\Pi(\mathcal{F}) \subset \mathcal{BFA}(\mathcal{F})$ como el conjunto de todas las medidas puras sobre \mathcal{F} .

Dos consecuencias directas de la definición son que μ es pura si y solo si μ^+ y μ^- son puras y que $\Pi(\mathcal{F}) \cap \Sigma(\mathcal{F}) = \{0\}$. De hecho cuando $\mu_1, \mu_2 \in \Pi(\mathcal{F})$ y $\mu_1 \leq \nu \leq \mu_2$ para algún $\nu \in \mathcal{BFA}(\mathcal{F})$, es inmediato de la definición que $\nu \in \Pi(\mathcal{F})$, pues $\nu^+ \leq \mu_2^+$ y $\nu^- \leq \mu_1^-$. De forma análoga $|\nu| \leq \mu \in \Pi(\mathcal{F})$ implica que $\nu \in \Pi(\mathcal{F})$.

El próximo resultado da una caracterización de medida pura útil para demostrar que conjunto de medidas puras es un subespacio vectorial de $\mathcal{BFA}(\mathcal{F})$.

Teorema 1.7 ([Tol20, Theorem 4.10]). *Sea $\nu \in \mathcal{BFA}(\mathcal{F})$. Entonces ν es pura si y solo si*

$$\nu^+ \wedge \gamma = 0 = \nu^- \wedge \gamma, \quad \forall 0 \leq \gamma \in \Sigma(\mathcal{F}).$$

Demostración. Sea $\nu \in \Pi(\mathcal{F})$. De la definición, para cualquier $0 \leq \gamma \in \Sigma(\mathcal{F})$

$$0 \leq \nu^+ \wedge \gamma \leq \gamma \quad \text{y} \quad 0 \leq \nu^+ \wedge \gamma \leq \nu^+.$$

Por el Lema 1.2 esto implica que $\nu^+ \wedge \gamma \in \Sigma(\mathcal{F})$. Luego, por la Definición 1.6 se tiene que $\nu^+ \wedge \gamma = 0$. La demostración es análoga para ν^- .

De forma recíproca para $\nu \in \mathcal{BFA}(\mathcal{F})$, si

$$\nu^+ \wedge \gamma = 0 = \nu^- \wedge \gamma,$$

para todo $0 \leq \gamma \in \Sigma(\mathcal{F})$, entonces $0 \leq \gamma \leq \nu^+$ y $0 \leq \gamma \leq \nu^-$. Como $\gamma \in \Sigma(\mathcal{F})$, esto implica que

$$\gamma = \gamma \wedge \nu^+ = \gamma \wedge \nu^-.$$

Por lo tanto $\nu \in \Pi(\mathcal{F})$. □

Por el Teorema 1.7 tenemos que una medida ν es pura si y solo si para todo $0 \leq \gamma \in \Sigma(\mathcal{F})$, $E \in \mathcal{F}$ y $\varepsilon > 0$, existe un subconjunto F de E , medible, tal que

$$\nu(E \setminus F) + \gamma(F) < \varepsilon. \quad (1.4)$$

Lema 1.8. Para $\mu, \mu_1, \mu_2 \in \Pi(\mathcal{F})$ y $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\alpha\mu, \quad \mu_1 + \mu_2, \quad |\mu|, \quad \mu_1 \wedge \mu_2, \quad \mu_1 \vee \mu_2 \in \Pi(\mathcal{F}).$$

Demostración. Notemos que $\alpha\mu \in \Pi(\mathcal{F})$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, pues

$$(-\mu)^+ = \mu^- \quad \text{y} \quad (-\mu)^- = \mu^+$$

Para demostrar que $\mu_1 + \mu_2 \in \Pi(\mathcal{F})$ nos podemos restringir primero al caso cuando μ_1 y μ_2 son no-negativas. Por el Lema 1.7, es suficiente demostrar que $(\mu_1 + \mu_2) \wedge \gamma = 0$ para todo $0 \leq \gamma \in \Sigma(\mathcal{F})$. En otras palabras, es suficiente demostrar que para todo $E \in \mathcal{F}$ y toda $0 \leq \gamma \in \Sigma(\mathcal{F})$,

$$\inf_{F \in \mathcal{F}: F \subset E} \{\mu_1(F) + \mu_2(F) + \gamma(E \setminus F)\} = 0.$$

Como $\mu_1 \wedge \gamma = \mu_2 \wedge \gamma = 0$, para cualquier $\varepsilon > 0$ e $i = 1, 2$, existe $F_i \subset E \in \mathcal{F}$, con

$$\mu_i(F_i) + \gamma(E \setminus F_i) \leq \varepsilon.$$

Por lo tanto, como $\mu_1, \mu_2 \geq 0$ se tiene

$$\mu_1(F_1 \cap F_2) + \mu_2(F_1 \cap F_2) + \gamma(E \setminus (F_1 \cap F_2)) \leq \mu_1(F_1) + \mu_2(F_2) + \gamma(E \setminus F_1) + \gamma(E \setminus F_2) \leq 2\varepsilon. \quad (1.5)$$

Esto demuestra que $\mu_1 + \mu_2 \in \Pi(\mathcal{F})$ para μ_1 y μ_2 no-negativos, y por esta razón, $|\mu| = \mu^+ + \mu^- \in \Pi(\mathcal{F})$ para cualquier $\mu \in \Pi(\mathcal{F})$.

De forma más general, tenemos

$$|\mu_1 + \mu_2| \leq \mu_1^+ + \mu_2^+ + \mu_1^- + \mu_2^- \in \Pi(\mathcal{F}),$$

y así $\mu_1 + \mu_2 \in \Pi(\mathcal{F})$. De forma similar

$$|\mu_1 \wedge \mu_2| + |\mu_1 \vee \mu_2| \leq 2(|\mu_1| + |\mu_2|),$$

para $\mu_1, \mu_2 \in \Pi(\mathcal{F})$, teniendo así que $\mu_1 \wedge \mu_2$ y $\mu_1 \vee \mu_2 \in \Pi(\mathcal{F})$. \square

En el Lema 1.3 se demostró que las medidas σ -aditivas se comportan de cierta forma especial con respecto a una clase monótona. En las medidas puras sucede lo contrario.

Lema 1.9 ([Tol20, Lemma 4.11]). *Para $0 \leq \gamma \in \Sigma(\mathcal{F})$, $0 \leq \mu \in \Pi(\mathcal{F})$ y $\varepsilon > 0$, existe $F \in \mathcal{F}$ con $\gamma(F) \leq \varepsilon$ y $\mu(F) = \mu(X)$.*

Demostración. Si $\mu(X) = 0$, el resultado se sigue con $F = \emptyset$. Si $\mu(X) > 0$, para $\varepsilon > 0$, sea $e_k = 2^{-k}\varepsilon$. Entonces, con $E_0 = X$, existe $F_1 \in \mathcal{F}$, con $\mu(E_0 \setminus F_1) + \gamma(F_1) < e_1$. Con $E_1 = E_0 \setminus F_1$, en \mathcal{F} existe $F_2 \subset E_1$, $F_2 \in \mathcal{F}$ con $\mu(E_1 \setminus F_2) + \gamma(F_2) < e_2$. De forma inductiva, para $k \in \mathbb{N}$

$$\mu(E_k \setminus F_{k+1}) + \gamma(F_{k+1}) < e_{k+1}, \quad E_k \supset F_{k+1} \in \mathcal{F}, \quad \text{donde} \quad E_{k+1} = E_k \setminus F_{k+1}.$$

Se sigue que para $K \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq \mu \left(E_0 \setminus \bigcup_{k=1}^K F_k \right) \leq e_K \quad \text{y} \quad \gamma \left(\bigcup_{k=1}^K F_k \right) \leq \sum_{k=1}^K e_k < \varepsilon.$$

Tomando $F = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k \in \mathcal{F}$, se tiene que $\gamma(F) \leq \varepsilon$ y $\mu(X) = \mu(F)$ pues $\mu(X \setminus F) \leq e_K$ para todo $K \in \mathbb{N}$. \square

Teorema 1.10 ([Tol20, Theorem 4.12]). *Sea $0 \leq \nu \in \mathcal{BFA}(\mathcal{F})$. Entonces $\nu \in \Pi(\mathcal{F})$ si y solo si para toda $\gamma \in \Sigma(\mathcal{F})$ existe una sucesión $\{E_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ tal que*

$$E_{k+1} \subset E_k, \quad \nu(E_k) = \nu(X) \text{ para toda } k \text{ y } \gamma(E_k) \rightarrow 0 \text{ cuando } k \rightarrow \infty.$$

Demostración. Sean $0 \leq \nu \in \Pi(\mathcal{F})$ y $0 \leq \gamma \in \Sigma(\mathcal{F})$. Por el Lema 1.9, para $n \in \mathbb{N}$ existe $F_n \in \mathcal{F}$ con $\nu(F_n) = \nu(X)$ y $0 \leq \gamma(F_n) < 1/n$. Sea $E_k = \bigcap_{n=1}^k F_n$. Entonces $\nu(E_k) = \nu(X)$,

pues

$$\nu(X \setminus E_k) \leq \sum_{n=1}^k \nu(X \setminus F_n) = 0,$$

y $0 \leq \gamma(E_k) \leq \nu(F_k) \leq 1/k$. De forma recíproca, si para todo $\gamma \in \Sigma(\mathcal{F})$ esa sucesión $\{E_k\}$ existe, entonces $\gamma \wedge \nu = 0$. Por lo tanto $\nu \in \Pi(\mathcal{F})$ por el Teorema 1.7. \square

Para concluir esta sección, se demostrará un resultado que establece que toda medida se puede escribir como una suma entre una medida pura y una σ -aditiva, esto se puede hacer de forma única.

Teorema 1.11 ([Tol20, Theorem 4.13]). *Sea $\nu \in \mathcal{BFA}(\mathcal{F})$. Existen únicas $\mu_\nu \in \Pi(\mathcal{F})$ y $\gamma_\nu \in \Sigma(\mathcal{F})$ tales que*

$$\nu = \mu_\nu + \gamma_\nu.$$

Más aún, si ν es no-negativa, entonces μ_ν y γ_ν también lo son.

Demostración. Para demostrar que esta descomposición es única, sea $\nu = \mu_i + \gamma_i$, $\mu_i \in \Pi(\mathcal{F})$ y $\gamma_i \in \Sigma(\mathcal{F})$ para $i = 1, 2$. Entonces por el Teorema 1.8, $\mu_1 - \mu_2 = \gamma_2 - \gamma_1 \in \Pi(\mathcal{F}) \cap \Sigma(\mathcal{F}) = \{0\}$.

Veamos ahora la existencia. Como $\nu = \nu^+ - \nu^-$, y $\Sigma(\mathcal{F})$ y $\Pi(\mathcal{F})$ son espacios vectoriales, basta demostrar que la descomposición existe para $\nu \in \mathcal{BFA}(\mathcal{F})$ no-negativa. Sea

$$\zeta = \sup\{\gamma(X) : 0 \leq \gamma \leq \nu, \gamma \in \Sigma(\mathcal{F})\}$$

y sea $\gamma_k \in \Sigma(\mathcal{F})$ tales que $0 \leq \gamma_k \leq \nu$ y $\lim_{k \rightarrow \infty} \gamma_k(X) = \zeta$.

Reemplazando γ_k por $\bigvee_{j=1}^k \gamma_j$, por el Teorema 1.5 no se pierde generalidad al asumir que $\gamma_k \leq \gamma_{k+1}$. Consecuentemente, $\gamma_\nu(E) = \lim_{k \rightarrow \infty} \gamma_k(E) \leq \nu(E) \leq \nu(X)$ existe para todo $E \in \mathcal{F}$, y $\gamma_\nu \in \Sigma(\mathcal{F})$. Claramente $0 \leq \mu_\nu := \nu - \gamma_\nu \in \mathcal{BFA}(\mathcal{F})$ y $\gamma_\nu(X) = \zeta$.

Para demostrar que $\mu_\nu \in \Pi(\mathcal{F})$, supongamos $0 \leq \gamma \leq \mu_\nu$ para algún $\gamma \in \Sigma(\mathcal{F})$. Entonces $0 \leq \gamma + \gamma_\nu \leq \nu$ que implica que $\gamma(X) + \gamma_\nu(X) \leq \zeta = \gamma_\nu(X)$. Por lo tanto $\gamma(X) = 0$, así $\mu_\nu \in \Pi(\mathcal{F})$. Obviamente de la construcción, γ_ν y μ_ν son no negativas cuando $\nu \geq 0$. \square

3. El Dual de L^∞

A lo largo de estas últimas dos secciones, fijaremos $\mu: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ como una medida σ -aditiva no-negativa tal que el espacio de medida (X, \mathcal{F}, μ) es completo y σ -finito, entonces podemos

decir que (X, \mathcal{F}, μ) es un espacio de medida. Para $1 \leq p \leq \infty$ se definen los espacios

$$L^p(X, \mathcal{F}, \mu) = \left\{ f: X \rightarrow \mathbb{R}, \text{ medible} : \int_X |f|^p d\mu < \infty \right\} / \sim$$

$$L^\infty(X, \mathcal{F}, \mu) = \left\{ f: X \rightarrow \mathbb{R}, \text{ medible} : \inf_{\substack{N \in \mathcal{F}: \\ \mu(N)=0}} \sup_{x \in X \setminus N} |f(x)| < \infty \right\} / \sim,$$

donde \sim es la relación de $f \sim g$ si y solo si $f = g$ μ -c.t.p. Al dotar cada uno de estos espacios con las normas

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p} \quad \text{para } f \in L^p(X, \mathcal{F}, \mu)$$

$$\|f\|_\infty = \inf_{\substack{N \in \mathcal{F}: \\ \mu(N)=0}} \sup_{x \in X \setminus N} |f(x)|,$$

el resultado es un espacio de Banach ([Fol84], [Roy63]). Una buena propiedad de los espacios L^p es que su dual pertenece a la misma clase de espacios, es decir, cuando $1 \leq p < \infty$, el dual está identificado por $L^q(X, \mathcal{F}, \mu)$, donde $(1/p) + (1/q) = 1$. Sin embargo, el caso $L^\infty(X, \mathcal{F}, \mu)$ es distinto.

En esta sección se definirán las nociones necesarias para describir el espacio dual de $L^\infty(X, \mathcal{F}, \mu)$ y relacionarlo con $\mathcal{BFA}(\mathcal{F})$. Para esto, sea

$$\mathcal{N} := \{N \in \mathcal{F} : \mu(N) = 0\}.$$

Dado que (X, \mathcal{F}, μ) es completo, tenemos que \mathcal{N} es cerrado bajo contenciones. Esto motiva a trabajar en el siguiente subespacio.

$$\Gamma^\infty(X, \mathcal{F}, \mu) := \{\nu \in \mathcal{BFA}(\mathcal{F}) : \nu(E) = 0, \forall E \in \mathcal{N}\}.$$

De la definición se tiene que $\nu_1, \nu_2 \in \Gamma^\infty(X, \mathcal{F}, \mu)$ implica que $\nu_1 \wedge \nu_2$ y $\nu_1 \vee \nu_2$ están en $\Gamma^\infty(X, \mathcal{F}, \mu)$.

Teorema 1.12 ([Tol20, Theorem 4.15]). *Sea $\nu \in \Gamma^\infty(X, \mathcal{F}, \mu)$. Entonces $\nu \in \Pi(\mathcal{F})$ si y solo si*

$$\nu^+ \wedge \gamma = \nu^- \wedge \gamma = 0,$$

para todo $\gamma \in \Sigma(\mathcal{F}) \cap \Gamma^\infty(X, \mathcal{F}, \mu)$ no negativa.

Demostración. Notemos que si $\nu \in \Pi(\mathcal{F})$ entonces, del Teorema 1.7, se concluye este resul-

tado. Por otro lado, sea $\nu \in \Gamma^\infty(X, \mathcal{F}, \mu)$ tal que

$$\nu^+ \wedge \gamma = \nu^- \wedge \gamma = 0,$$

para todo $\gamma \in \Sigma(\mathcal{F}) \cap \Gamma^\infty(X, \mathcal{F}, \mu)$. Sea $\hat{\gamma} \in \Sigma(\mathcal{F})$ arbitrario con $0 \leq \hat{\gamma} \leq \nu^+$ y $0 \leq \hat{\gamma} \leq \nu^-$. Como $\nu^+ = \nu^- = 0$ sobre \mathcal{N} se sigue que $\hat{\gamma} \in \Sigma(\mathcal{F}) \cap \Gamma^\infty(X, \mathcal{F}, \mu)$. Por lo tanto,

$$\hat{\gamma} \wedge \nu^+ = \hat{\gamma} \wedge \nu^- = 0.$$

Así $\nu \in \Pi(\mathcal{F})$. □

Esto nos permite obtener la siguiente versión particular del Teorema 1.11.

Teorema 1.13 ([Tol20, Theorem 4.16]). *Para $\nu \in \Gamma^\infty(X, \mathcal{F}, \mu)$, existen únicas $\mu_\nu \in \Pi(\mathcal{F}) \cap \Gamma^\infty(X, \mathcal{F}, \mu)$ y $\gamma_\nu \in \Sigma(\mathcal{F}) \cap \Gamma^\infty(X, \mathcal{F}, \mu)$ tales que*

$$\nu = \mu_\nu + \gamma_\nu \tag{1.6}$$

Demostración. Si $0 \leq \nu \in \Gamma^\infty(X, \mathcal{F}, \mu)$, $0 \leq \gamma_\nu \leq \nu$ implica que $\gamma_\nu(E) = 0$ en el Teorema 1.11. Por lo tanto, $\gamma_\nu \in \Gamma^\infty(X, \mathcal{F}, \mu)$ y como $\mu_\nu = \nu - \gamma_\nu$, entonces esta medida también estará en $\Gamma^\infty(X, \mathcal{F}, \mu)$. Para $\nu \in \Gamma^\infty(X, \mathcal{F}, \mu)$ se sigue dado que ν^+ y ν^- pertenecen a $\Gamma^\infty(X, \mathcal{F}, \mu)$. □

En el Teorema 1.13 se ha probado que

$$(\Sigma(\mathcal{F}) \cap \Gamma^\infty(X, \mathcal{F})) \oplus (\Pi(\mathcal{F}) \cap \Gamma^\infty(X, \mathcal{F})) = \Gamma^\infty(X, \mathcal{F}, \mu).$$

Fijemos $\nu \in \Gamma^\infty(X, \mathcal{F}, \mu)$, construiremos una integral sobre ν para funciones $L^\infty(X, \mathcal{F}, \mu)$, usando la noción dada por la integral de Lebesgue, con el objetivo de caracterizar el dual de $L^\infty(X, \mathcal{F}, \mu)$.

Si $u \in L^\infty(X, \mathcal{F}, \mu)$ y $w(x) = u(x)$ para μ -casi todo punto $x \in X$, entonces $|\nu|(\{x : w(x) \neq u(x)\}) = 0$ para todo $\nu \in \Gamma^\infty(X, \mathcal{F}, \mu)$, pues $|\nu|(N) = 0$ cuando $\mu(N) = 0$. Por lo tanto, de la aditividad finita, la siguiente construcción será independiente de la elección de u o w en $L^\infty(X, \mathcal{F}, \mu)$. Además, será suficiente construir la integral para medidas no negativas $\nu \in \Gamma^\infty(X, \mathcal{F}, \mu)$ y extender esta construcción por linealidad, dado que si $\nu \in \Gamma^\infty(X, \mathcal{F}, \mu)$ implica que las medidas ν^+ y ν^- también se encuentran en este espacio.

Para $u \in L^\infty(X, \mathcal{F}, \mu)$ y $p > \|u\|_\infty$, sea

$$\mathcal{P} := \{-p = y_0 < y_1 < \dots < y_K < y_{K+1} = p\}, K \in \mathbb{N},$$

una partición de $[-p, p]$ y

$$\underline{S}_{\mathcal{P}}(u) := \sum_{k=0}^K y_k \nu(E_k(u)) \leq \sum_{k=0}^K y_{k+1} \nu(E_k(u)) =: \overline{S}_{\mathcal{P}}(u),$$

donde $E_k(u) = \{x : y_k \leq u(x) < y_{k+1}\}$, $0 \leq k < K$. Estas definiciones son independientes de la elección del representante $u \in L^\infty(X, \mathcal{F}, \mu)$. Como ν es no negativa y finitamente aditiva, entonces $\nu(X) < \infty$,

$$0 \leq \overline{S}_{\mathcal{P}}(u) - \underline{S}_{\mathcal{P}}(u) < \rho(\mathcal{P})\nu(X),$$

donde $\rho(\mathcal{P}) = \max\{y_{k+1} - y_k : 0 \leq k \leq K\}$. Más aún, si a \mathcal{P} una partición se le agrega un punto, entonces $\underline{S}_{\mathcal{P}}(u)$ no decrece y $\overline{S}_{\mathcal{P}}(u)$ no crece. Se sigue que sobre todas las particiones \mathcal{P} , $\inf_{\mathcal{P}} \overline{S}_{\mathcal{P}} = \sup_{\mathcal{P}} \underline{S}_{\mathcal{P}}(u)$. Con estas observaciones, la integral de $u \in L^\infty(X, \mathcal{F}, \mu)$ con respecto a $\nu \geq 0$ es definida como

$$\int_X u d\nu = \sup_{\mathcal{P}} \underline{S}_{\mathcal{P}}(u) = \inf_{\mathcal{P}} \overline{S}_{\mathcal{P}}(u),$$

o de forma equivalente

$$\lim_{\rho(\mathcal{P}) \rightarrow 0} \overline{S}_{\mathcal{P}}(u) = \int_X u d\nu = \lim_{\rho(\mathcal{P}) \rightarrow 0} \underline{S}_{\mathcal{P}}(u). \quad (1.7)$$

Esta construcción se extiende para medidas con signo de la siguiente forma

$$\int_X u d\nu = \int_X u d\nu^+ - \int_X u d\nu^-, \quad \forall u \in L^\infty(X, \mathcal{F}, \mu).$$

Las siguientes propiedades siguen de un trabajo análogo al hecho en la construcción de la integral de Lebesgue.

Proposición 1.14. Para $\nu \in \Gamma^\infty(X, \mathcal{F}, \mu)$, $u, v \in L^\infty(X, \mathcal{F}, \mu)$, tenemos

1. Si $u \leq v$ μ -ctp, entonces

$$\int_X u d\nu \leq \int_X v d\nu.$$

2. Para $E \in \mathcal{F}$

$$\int_X \chi_E d\nu = \nu(E).$$

Más aún

$$\left| \int_E u d\nu \right| \leq \|u\|_\infty |\nu|(E) \text{ y } \int_E d\nu = 0 \text{ si } E \in \mathcal{N}.$$

3. Si $E = \bigcup_{n=1}^N E_n$, y para $i \neq j$, $E_i \cap E_j = \emptyset$, tendremos

$$\int_E u \, d\nu = \sum_{n=1}^N \int_{E_n} u \, d\nu.$$

4. Para $\alpha \in \mathbb{R}$ tenemos

$$\int_X u + \alpha v \, d\nu = \int_X u \, d\nu + \alpha \int_X v \, d\nu.$$

A pesar de estas buenas propiedades, los Teoremas de Convergencia Monótona o Dominada no son ciertos para estas medidas. Por ejemplo, en la próxima sección se verá que existe una cantidad no numerable de medidas ν sobre $[0, 1]$ tales que $\nu(0, 1 - 1/k) = 0$ y $\nu(1 - 1/k, 1) = 1$ para todo $k > 1$. Se sigue que para todas estas

$$\int_0^1 1 \, d\nu = 1 \text{ pero } \int_0^{1-\frac{1}{k}} u \, d\nu = 0, \text{ para todo } k \in \mathbb{N}, u \in L^\infty(X, \mathcal{L}, \lambda).$$

Probaremos ahora que $\Gamma^\infty(X, \mathcal{F}, \mu)$ es efectivamente el dual de $L^\infty(X, \mathcal{F}, \mu)$.

Teorema 1.15 ([Tol20, Theorem 3.1]). *Sea $f \in (L^\infty(X, \mathcal{F}, \mu))^*$, es decir, f funcional lineal acotado. Entonces existe $\nu \in \Gamma^\infty(X, \mathcal{F}, \mu)$ tal que para todo $u \in L^\infty(X, \mathcal{F}, \mu)$*

$$f(u) = \int_X u \, d\nu \quad \text{y} \quad |\nu|(X) = \|f\| < \infty, \quad (1.8)$$

donde $\|\cdot\|$ es la norma operador en $(L^\infty(X, \mathcal{F}, \mu))^*$. De forma recíproca, si $\nu \in \Gamma^\infty(X, \mathcal{F}, \mu)$, entonces f en (1.8) es un funcional lineal bien definido sobre $L^\infty(X, \mathcal{F}, \mu)$.

Demostración. Fue demostrado anteriormente que si $f: L^\infty(X, \mathcal{F}, \mu) \rightarrow \mathbb{R}$ es definido por la regla

$$f(u) = \int_X u \, d\nu \implies f \text{ es lineal y } |f(u)| \leq \|u\|_\infty |\nu|(X),$$

es decir $f \in (L^\infty(X, \mathcal{F}, \mu))^*$. Tenemos

$$\|f\| \leq \sup\{|f(u)| : \|u\|_\infty = 1\} \leq |\nu|(X).$$

Para ver que $\|f\| = |\nu|(X)$, usaremos que $\nu^+ \wedge \nu^- = 0$. Esto implica que para cada $\varepsilon > 0$ existe $A \in \mathcal{F}$ con $\nu^+(A) + \nu^-(X \setminus A) < \varepsilon$. Sea $u = \chi_{X \setminus A} - \chi_A \in L^\infty(X, \mathcal{F}, \mu)$. Entonces

$\|u\|_\infty = 1$ y

$$\begin{aligned} f(u) &= -\nu^+(A) + \nu^+(X \setminus A) + \nu^-(A) - \nu^-(X \setminus A) \\ &\geq \nu^+(X \setminus A) + \nu^-(A) - \varepsilon \\ &\geq \nu^+(X) - \nu^+(A) + \nu^-(X) - \nu^-(X \setminus A) - \varepsilon \\ &\geq (|\nu|(X) - 2\varepsilon)\|u\|_\infty. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\|f\| = |\nu|(X)$.

De forma recíproca, dado $f \in (L^\infty(X, \mathcal{F}, \mu))^*$ definimos ν sobre \mathcal{F} por $\nu(E) = f(\chi_E)$, $E \in \mathcal{F}$. El objetivo es demostrar que $\nu \in \Gamma^\infty(X, \mathcal{F}, \mu)$ y se satisface (1.8).

Primero notemos que para todo $E \in \mathcal{N}$, $\nu(E) = 0$, pues $\|\chi_E\|_\infty = 0$. Más aún, ν es finitamente aditiva pues f es lineal y $\chi_{E_1 \cup E_2} = \chi_{E_1} + \chi_{E_2}$, cuando $E_1 \cap E_2 = \emptyset$. Solo queda demostrar que se cumple la primera parte de (1.8).

Sea $u \in L^\infty(X, \mathcal{F}, \mu)$, al ser acotada, tenemos que existen $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $u(X \setminus N) \subset [a, b]$ para $N \in \mathcal{N}$. Tomemos \mathcal{P} una partición de $[a, b]$ en $K + 1$ intervalos I_0, \dots, I_K de igual largo. Para cada I_j sea $E_j(u) = u^{-1}(I_j)$ y $u_K := \sum_{k=0}^K y_k \chi_{E_k(u)} \in L^\infty(X, \mathcal{F}, \mu)$. Como $u_K \rightarrow u \in L^\infty(X, \mathcal{F}, \mu)$ cuando $K \rightarrow \infty$ y f es un funcional lineal acotado tenemos por (1.7)

$$f(u) = \lim_{K \rightarrow \infty} f(u_K) = \lim_{K \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^K y_k f(\chi_{E_k(u)}) = \lim_{K \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^K y_k \nu(E_k(u)) = \int_X u \, d\nu.$$

Por lo tanto, la ecuación (1.8) se cumple y así finalizamos la demostración. \square

Si se considera $\Gamma^\infty(X, \mathcal{F}, \mu)$ con la norma $\|\cdot\|$ definida en (1.2), $(\Gamma^\infty(X, \mathcal{F}, \mu), \|\cdot\|)$ es un espacio vectorial normado. Más aún, el Teorema 1.15 demuestra que la integral es un isomorfismo isométrico de este espacio al dual de $L^\infty(X, \mathcal{F}, \mu)$, lo que hace que este espacio sea Banach.

4. Ejemplos

En esta sección construiremos un ejemplo de una medida que es finitamente aditiva pero no σ -aditiva. Para el primer ejemplo concreto, se hará uso del siguiente conjunto

$$\mathfrak{G} := \{\omega \in \Gamma^\infty(X, \mathcal{F}, \mu) : \omega(X) = 1, \omega(E) \in \{0, 1\}, E \in \mathcal{F}\}. \quad (1.9)$$

Esta sección está dividida en dos partes. En la primera sección describiremos el conjunto \mathfrak{G} ,

mientras que en la segunda, usando este mismo conjunto se construirá un ejemplo particular de una medida pura que integra lo mismo que Lebesgue en funciones continuas.

Antes de comenzar, se demostrará la siguiente propiedad del conjunto \mathfrak{G} que será usada durante toda la sección.

Teorema 1.16 ([Tol20, Theorem 5.1]). *Para $u \in L^\infty(X, \mathcal{F}, \mu)$ y $\omega \in \mathfrak{G}$ existe un único $\alpha \in I := [[u]_\infty^-, [u]_\infty^+]$, donde*

$$\begin{aligned} [u]_\infty^+ &= \inf\{c : u(x) \leq c, \mu\text{-ctp}\}, \\ [u]_\infty^- &= \sup\{c : u(x) \geq c, \mu\text{-ctp}\}, \end{aligned}$$

tal que

$$\omega(\{x \in X : |u(x) - \alpha| < \varepsilon\}) = 1 \forall \varepsilon > 0. \quad (1.10)$$

Es decir, (1.10) se cumple para un único $\alpha \in \mathbb{R}$, independiente de la función escogida para representar la clase de equivalencia $u \in L^\infty(X, \mathcal{F}, \mu)$.

Demostración. Sean u_1 y u_2 dos funciones esencialmente acotadas tales que $u_1(x) = u_2(x)$ para μ casi todo $x \in X$. Supongamos que existen $\alpha_1 \neq \alpha_2$ que satisfacen (1.10) para u_1 y u_2 respectivamente. Sea $\alpha_1 - \alpha_2 =: 2\varepsilon_0 > 0$, entonces

$$\{x \in X : |u_1(x) - \alpha_1| < \varepsilon_0\} \cap \{x \in X : |u_2(x) - \alpha_2| < \varepsilon_0\} \in \mathcal{N}.$$

Por aditividad finita, la ω -medida de la unión sería 2, contradiciendo que $\omega \in \mathfrak{G}$. Entonces si α existe, es único y será independiente de la clase de equivalencia de u en $L^\infty(X, \mathcal{F}, \mu)$.

La existencia será demostrada por contradicción. Supongamos que para cierto $u \in L^\infty(X, \mathcal{F}, \mu)$ no existe dicho α . Entonces para todo $\alpha \in I$ existe $\varepsilon_\alpha > 0$ con $\omega(\{x \in X : |u(x) - \alpha| < \varepsilon_\alpha\}) = 0$. Por compacidad, $I \subset \bigcup_{k=1}^K (\alpha_k - \varepsilon_{\alpha_k}, \alpha_k + \varepsilon_{\alpha_k})$ y consecuentemente

$$\begin{aligned} \omega(X) &= \omega\left(\left\{x : u(x) \in \bigcup_{k=1}^K (\alpha_k - \varepsilon_{\alpha_k}, \alpha_k + \varepsilon_{\alpha_k})\right\}\right) \\ &\leq \sum_{k=1}^K \omega(\{x : u(x) \in (\alpha_k - \varepsilon_{\alpha_k}, \alpha_k + \varepsilon_{\alpha_k})\}) = 0. \end{aligned}$$

Pero $\omega(X) = 1$. A consecuencia de esto, tenemos lo pedido. \square

Notemos que si $\omega \in \mathfrak{G} \setminus \Sigma(\mathcal{F})$, no se sigue que $\omega(\{x \in X : u(x) = \alpha\}) = 1$. No obstante, de la ecuación (1.10) tenemos que $u \in L^\infty(X, \mathcal{F}, \mu)$ es constante ω -ctp.

4.1. El conjunto \mathfrak{G}

En esta subsección probaremos propiedades estructurales del conjunto \mathfrak{G} .

Definición 1.17. Decimos que $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}$ es un *filtro* si

- (I) $X \in \mathcal{F}$ y $\mathcal{N} \cap \mathcal{F} = \emptyset$,
- (II) $E_1, E_2 \in \mathcal{F} \implies E_1 \cap E_2 \in \mathcal{F}$,
- (III) $E_2 \supset E_1 \in \mathcal{F} \implies E_2 \in \mathcal{F}$.

Un filtro \mathcal{U} que es maximal con respecto a la inclusión, es decir,

- (IV) $\mathcal{U} \subset \mathcal{F} \implies \mathcal{U} = \mathcal{F}$,

es llamado un *ultrafiltro* en (X, \mathcal{F}, μ) . Se denotará \mathfrak{U} al conjunto de ultrafiltros.

Teorema 1.18 ([Tol20, Theorem 5.4]). *Para cada $\mathcal{U} \in \mathfrak{U}$, definimos $\omega_{\mathcal{U}}: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por*

$$\omega_{\mathcal{U}}(E) := \begin{cases} 1 & \text{si } E \in \mathcal{U} \\ 0 & \text{caso contrario.} \end{cases} \quad (1.11)$$

Entonces $\omega_{\mathcal{U}} \in \mathfrak{G}$. De forma recíproca, para cada $\omega \in \mathfrak{G}$, definimos

$$\mathcal{U}_{\omega} := \{E \in \mathcal{F} : \omega(E) = 1\}. \quad (1.12)$$

Entonces $\mathcal{U}_{\omega} \in \mathfrak{U}$.

Demostración. Sea $\mathcal{U} \in \mathfrak{U}$. Para demostrar que $\omega_{\mathcal{U}}$ está bien definido sobre \mathcal{F} , es suficiente demostrar que exactamente uno de los conjuntos E y $E' = X \setminus E$ pertenece a \mathcal{U} para todo $E \in \mathcal{F}$. Notemos que a lo más uno está, sino $\emptyset \in \mathcal{U}$, lo que contradiría el hecho de ser ultrafiltro. Supongamos ahora que $E \notin \mathcal{U}$ y que $E \cap F \notin \mathcal{N}$ para todo $F \in \mathcal{U}$. Sea

$$\mathcal{F} = \mathcal{U} \cup \{G \in \mathcal{F} : E \cap F \subset G \text{ para algún } F \in \mathcal{U}\}.$$

Claramente \mathcal{F} es filtro con $\mathcal{U} \subset \mathcal{F}$ y $E \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{U}$. Como esto contradice la maximalidad de \mathcal{U} , se sigue que $E \cap \hat{F} \in \mathcal{N}$ para algún $\hat{F} \in \mathcal{U}$.

Como $E \cap \hat{F}$ y \hat{F} no pertenecen a \mathcal{N} , entonces

$$\hat{F} \setminus E \subset X \setminus E = E' \notin \mathcal{N}.$$

Entonces $E \notin \mathcal{U}$ implica que $E' \notin \mathcal{N}$, equivalentemente $N \in \mathcal{N}$ implica que $N' \in \mathcal{U}$. En

particular $E \cap \hat{F} \in \mathcal{N}$ implica que $E' \cup \hat{F}' \in \mathcal{U}$, y por lo tanto, usando (ii)

$$E' \cap \hat{F}' = (E' \cup \hat{F}') \cap \hat{F}' \in \mathcal{U}.$$

Finalmente, $E' \cap \hat{F} \subset E'$, implica que $E' \in \mathcal{U}$ por (iii). Entonces $E \notin \mathcal{U}$ implica que $X \setminus E \in \mathcal{U}$ y por lo tanto, $\omega_{\mathcal{U}}$ está bien definido.

Basta demostrar ahora que $\omega \in \mathcal{BFA}(\mathcal{F})$. Si $A \cap B = \emptyset$, $A, B \in \mathcal{F}$, de (i) y (ii) se tiene que a lo más uno de los $\omega_{\mathcal{U}}(A)$ y $\omega_{\mathcal{U}}(B)$ es 1, y si uno de ellos es 1, entonces $\omega_{\mathcal{U}}(A \cup B) = 1$, por (iii). Si ambos son cero, $A' \cap B' \in \mathcal{U}$ por (ii), y por lo tanto $\omega_{\mathcal{U}}(A \cup B) = 0$. Por lo tanto, $\omega_{\mathcal{U}} \in \mathcal{BFA}(\mathcal{F})$ y así $\omega_{\mathcal{U}} \in \mathfrak{G}$.

Por otro lado, para demostrar la recíproca, sea $\omega \in \mathfrak{G}$. Notemos que \mathcal{U}_{ω} satisface (i) y (iii), por definición de \mathfrak{G} y aditividad finita. También, para $E_1, E_2 \in \mathcal{U}_{\omega}$,

$$1 = \omega(E_1 \cup E_2) = \begin{cases} \omega(E_1 \setminus E_2) + \omega(E_2) = \omega(E_1 \setminus E_2) + 1 \\ \omega(E_2 \setminus E_1) + \omega(E_1) = \omega(E_2 \setminus E_1) + 1 \end{cases}.$$

Por lo tanto, $\omega(E_1 \setminus E_2) = 0 = \omega(E_2 \setminus E_1)$ implica que $\omega(E_1 \cap E_2) = 1$. Entonces $E_1 \cap E_2 \in \mathcal{U}_{\omega}$ y \mathcal{U}_{ω} satisface (ii).

Finalmente se demostrará por contradicción que \mathcal{U}_{ω} satisface (iv). Supongamos que no lo hace y sea $\hat{\mathfrak{F}}$ la colección de filtros que contienen \mathcal{U}_{ω} . Sea $\mathfrak{F} \subset \hat{\mathfrak{F}}$, entonces $\bigcup_{\mathcal{F} \in \mathfrak{F}} \mathcal{F} \in \hat{\mathfrak{F}}$ es una cota para \mathfrak{F} . Por el Lema de Zorn, $\hat{\mathfrak{F}}$ tiene un elemento maximal, $\mathcal{U} \in \mathfrak{U}$. Por hipótesis \mathcal{U}_{ω} no es maximal, existe $F \in \hat{\mathcal{U}} \setminus \mathcal{U}_{\omega}$ con $\omega_{\hat{\mathcal{U}}}(F) = 1$ y $\omega(F) = 0$. Por lo tanto, $\omega(F') = 1$ implica que $F' \in \mathcal{U}_{\omega}$ y así $\omega_{\hat{\mathcal{U}}}(F') = 1$ y $\omega_{\hat{\mathcal{U}}}(F) = 0$. Esto es una contradicción, por lo que \mathcal{U}_{ω} satisface (iv). \square

Es directo verificar que $\omega_{\mathcal{U}_{\omega}} = \omega \in \mathfrak{G}$ y $\mathcal{U}_{\omega_{\mathcal{U}}} = \mathcal{U} \in \mathfrak{U}$. Por lo que \mathfrak{G} está determinado por la estructura de ultrafiltros de $\mathcal{F} \setminus \mathcal{N}$.

Una consecuencia del Teorema 1.18 es

$$\omega(A \cap B) = \omega(A)\omega(B) \text{ para todo } A, B \in \mathcal{F}, \omega \in \mathfrak{G}. \quad (1.13)$$

Hasta ahora se ha establecido una relación entre el conjunto \mathfrak{G} con los ultrafiltros de $\mathcal{F} \setminus \mathcal{N}$, pero todavía no hemos probado que este conjunto no es vacío. Para esto, necesitaremos introducir el siguiente concepto.

Definición 1.19. Decimos que $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}$ tiene la propiedad de la intersección μ -finita si $E_k \in \mathcal{E}$, $1 \leq k \leq K$, implica $\mu\left(\bigcap_{k=1}^K E_k\right) > 0$.

Teorema 1.20 ([Tol20, Theorem 5.6]). *Si \mathcal{E} tiene la propiedad de intersección μ -finita, existe $\omega \in \mathfrak{G}$ con $\omega(E) = 1$ para todo $E \in \mathcal{E}$.*

Demostración. Consideremos la colección \mathfrak{F} de filtros \mathcal{F} con $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}$. Entonces $\mathfrak{F} \neq \emptyset$, como

$$\left\{ A \in \mathfrak{F} : A \supset \bigcap_{k=1}^K E_k, E_k \in \mathcal{E}, K \in \mathbb{N} \right\} \in \mathfrak{F}.$$

Ahora sea $\mathfrak{J} \subset \mathfrak{F}$ una familia de filtros que es totalmente ordenada por inclusión y sea $\mathcal{F}^* = \bigcup_{\mathcal{F} \in \mathfrak{J}} \mathcal{F}$. Entonces $\mathcal{F}^* \in \mathfrak{F}$ es una cota superior para \mathfrak{J} . Por el Lema de Zorn, \mathfrak{J} tiene un elemento maximal \mathcal{U} que es un ultrafiltro. Por el Teorema 1.18 (a), $\omega_{\mathcal{U}} \in \mathfrak{G}$ satisface el Teorema. \square

Gracias a este resultado es posible asegurar que \mathfrak{G} es no-vacío. Más que eso, bajo ciertas condiciones, este conjunto será muy grande.

Corolario 1.21 ([Tol20, Corollary 5.7]).

(a) *Para $A \in \mathfrak{F} \setminus \mathcal{N}$ existe $\omega \in \mathfrak{G}$ con $\omega(A) = 1$.*

(b) *Supongamos que para $j \in \mathbb{N}$, $F_j \in \mathfrak{F} \setminus \mathcal{N}$ y $F_i \cap F_j \in \mathcal{N}$ con $i \neq j$. Sea*

$$\mathcal{E} = \{E_k : k \in \mathbb{N}\}, \text{ donde } E_k = \bigcup_{j \geq k} F_j.$$

Entonces existen no numerables $\omega \in \mathfrak{G} \setminus \Sigma(\mathfrak{F})$ tal que $\omega(E_k) = 1$ para todo k .

Demostración. La primera parte se sigue de forma directa del Teorema 1.20.

Para lo segundo, sean $a \in (0, 1)$ y $\{q_j(a)\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}$, tal que la sucesión es creciente y $q_j(a) \rightarrow a$ de forma creciente cuando $j \rightarrow \infty$. Sea $Q_a = \{q_j(a) : j \in \mathbb{N}\}$ y notemos que $Q_a \cap Q_b$ es a lo más finita si $a \neq b$. Sea $N_a = \eta(Q_a)$, donde $\eta: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{N}$ es una biyección. Entonces $\{N_a : a \in (0, 1)\}$ es una colección no numerable de subconjuntos de \mathbb{N} con la propiedad $N_a \cap N_b$ es a lo más finita si $a \neq b$. En particular, para $a \neq b \in (0, 1)$ existe $K(a, b) \in \mathbb{N}$ tal que $\{j \in N_a \cap N_b : j \geq K(a, b)\} = \emptyset$. Consecuentemente $a \neq b$ implica que $F_i \cap F_j \in \mathcal{N}$ para todo $i \in N_a, j \in N_b$ con $i, j \geq K(a, b)$.

Ahora, para $a \in (0, 1)$, notemos que $E_k^a := \bigcup_{k \leq j \in N_a} F_j \in \mathfrak{F}$, y sea $\mathcal{E} = \{E_k^a : k \in \mathbb{N}\}$. Entonces por el Teorema 1.20 existe $\omega_a \in \mathfrak{G}$ con $\omega_a(E_k^a) = 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Sin embargo, por construcción $E_k^a \cap E_k^b \in \mathcal{N}$ para todo $k \geq K(a, b)$. Se sigue que $\omega_a \neq \omega_b$. Por construcción, $E_k^a \subset E_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$, así $\omega_a(E_k) = 1$ para todo $a \in (0, 1)$ y $k \in \mathbb{N}$.

Finalmente, $\omega_a \notin \Sigma(\mathcal{F})$ pues $\mu(\bigcap_k E_k^a) = 0$ pero $E_{k+1}^a \subset E_k^a$ y $\omega(E_k^a) = 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$. \square

Teorema 1.22 ([Tol20, Theorem 5.9]). *Para $\omega \in \mathfrak{G}$*

- (a) *Si $\omega = \pi + \gamma$ (Teorema 1.11), donde $\pi \in \Pi(\mathcal{F})$ y $\gamma \in \Sigma(\mathcal{F})$, entonces $\pi = 0$ o $\gamma = 0$, en otras palabras $\omega \in \Pi(\mathcal{F})$ o $\omega \in \Sigma(\mathcal{F})$.*
- (b) *la medida ω es σ -aditiva si y solo si para un átomo $E_\omega \in \mathcal{F}$,*

$$\omega(E) = \frac{\mu(E \cap E_\omega)}{\mu(E_\omega)} \text{ para todo } E \in \mathcal{F}.$$

Demostración.

- (a) Se demostrará lo pedido por contradicción. Supongamos que π y γ son medidas no nulas. Por el Teorema 1.10 existe $\{E_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ con $\pi(E_k) = \pi(X)$ para todo k y $\gamma(E_k) \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow \infty$. Si $\omega(E_k) = 0$ para algún k , entonces $0 = \omega(E_k) \geq \pi(E_k) = \pi(X)$, donde $\pi(X) = 0$ que es falso. Por lo tanto, $\omega \in \mathfrak{G}$, $\omega(E_k) = 1$ para todo k y se sigue

$$1 = \omega(E_k) = \pi(X) + \gamma(E_k) \rightarrow \pi(X),$$

por ende $\pi(X) = 1$, que también es falso.

- (b) Sea $\omega \in \mathfrak{G} \cap \Sigma(\mathcal{F})$. Entonces ω es una medida real y ambos ω y μ son σ -aditivas con $\omega \ll \mu$. Como μ es σ -finita por hipótesis, por Teorema de Radon-Nikodym, existe $g \in L_1(X, \mathcal{F}, \mu)$ con

$$\omega(E) = \int_E g d\mu, \quad E \in \mathcal{F}.$$

Como g es no negativa, μ -ctp sobre X , $\mu(\{x \in X : g(x) \geq n\}) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. Por lo tanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\{x \in X : g(x) \geq n\}} g d\mu = 0.$$

En particular,

$$\omega(\{x \in X : g(x) \geq n\}) = \int_{\{x \in X : g(x) \geq n\}} g d\mu.$$

Ahora, $\omega \in \mathfrak{G}$ implica que para algún $N \in \mathbb{N}$ se tiene que $\omega(\{x \in X : g(x) \geq N\}) = 0$. Se sigue que $\mu(\{x \in X : g(x) \geq N\}) = 0$. Por lo tanto, $g \in L^\infty(X, \mathcal{F}, \mu)$ y para un único $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\omega(\{x \in X : |g(x) - \alpha| < \varepsilon\}) = 1,$$

para todo $\varepsilon > 0$. Como $\omega \in \Sigma(\mathcal{F})$, se sigue que $\omega(E_\omega) = 1$, donde $E_\omega = \{x \in X : g(x) = \alpha\}$. Más aún $\mu(E_\omega) > 0$, pues $\omega(E_\omega) = 1$ y $\omega \in \mathfrak{G}$. Por lo tanto,

$$\omega(E) = \omega(E \cap E_\omega) = \int_{E \cap E_\omega} \alpha d\mu = \alpha \mu(E \cap E_\omega),$$

para todo $E \in \mathcal{F}$. Con $\alpha = 1/\mu(E_\omega)$, E_ω es un átomo con las propiedades requeridas.

De forma recíproca, cuando A es átomo, $\omega(E) = \mu(E \cap A)/\mu(A)$, $E \in \mathcal{F}$ define $\omega \in \mathfrak{G} \cap \Sigma(\mathcal{F})$, ya que μ es σ -aditiva.

□

Finalmente, es posible integrar con respecto a estas medidas haciendo uso del Teorema 1.10.

Teorema 1.23 ([Tol20, Theorem 6.2]). *Sea $\omega \in \mathfrak{G}$*

(a) *Para $u \in L^\infty(X, \mathcal{F}, \mu)$*

$$\int_X u d\omega = \alpha \text{ y } \int_X |u| d\omega = |\alpha| \quad (1.14)$$

donde α es el único tal que

$$\omega(\{x \in X : |u(x) - \alpha| < \varepsilon\}) = 1 \forall \varepsilon > 0.$$

(b) *Para $u, v \in L^\infty(X, \mathcal{F}, \mu)$*

$$\int_X uv d\omega = \left(\int_X u d\omega \right) \left(\int_X v d\omega \right). \quad (1.15)$$

(c) *Si $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es continua, $u \in L^\infty(X, \mathcal{F}, \mu)$*

$$\int_X F(u) d\omega = F\left(\int_X u d\omega\right). \quad (1.16)$$

Demostración. Tomemos $u, v \in L^\infty(X, \mathcal{F}, \mu)$.

(a) Con α dado como se describe, la ecuación(1.14) se sigue por

$$\left| \int_X u d\omega - \alpha \right| = \left| \int_X (u - \alpha) d\omega \right| = \left| \int_{\{x \in X : |u(x) - \alpha| < \varepsilon\}} (u - \alpha) d\omega \right| < \varepsilon$$

para todo $\varepsilon > 0$. La segunda parte se sigue pues

$$\omega(\{x \in X : ||u(x)| - |\alpha|| < \varepsilon\}) \geq \omega(\{x \in X : |u(x) - \alpha| < \varepsilon\}) = 1.$$

(b) Si

$$\int_X u d\omega = \alpha \text{ y } \int_X v d\omega = \beta,$$

se sigue que para todo $\varepsilon > 0$, por (1.13)

$$\omega(\{x \in X : |u(x)v(x) - \alpha\beta| < \varepsilon\}) = 1.$$

(c) Sigue de lo anterior para polinomios y se concluye usando el Teorema de Weierstrass.

□

4.2. El Ejemplo de Valadier-Hensgen

En la presente sección construiremos un ejemplo de una medida pura que integra lo mismo que Lebesgue en funciones continuas.

Definición 1.24. Sea $c(\mathbb{N})$ el espacio de sucesiones convergentes de números reales. Sea $\ell: c(\mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{R}$ el funcional lineal dado por

$$\ell(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n, \quad \text{donde } u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^\infty.$$

Es claro que este funcional es positivo y acotado. Por el Teorema de Hahn Banach, existe L sobre $\ell^\infty(\mathbb{N})$ tal que para todo $u \in \ell^\infty(\mathbb{N})$

$$L|_{c(\mathbb{N})} = \ell \quad \text{y} \quad \|L\|_\infty = \|\ell\|_{c(\mathbb{N})} = 1.$$

Además, si $u \in \ell^\infty(\mathbb{N})$ y definimos $u^{(n)} = (u_{k+n})_{k \in \mathbb{N}}$, entonces

$$L(u) = L(u^{(n)}).$$

A L se le conoce como *límite de Banach*.

Definición 1.25. Definimos el *rango esencial* de $u \in L^\infty(X, \mathcal{F}, \mu)$ como

$$\mathcal{R}(u) = \{\alpha \in \mathbb{R} : \mu(\{x : |u(x) - \alpha| < \varepsilon\}) > 0 \text{ para todo } \varepsilon > 0\} \quad (1.17)$$

Lema 1.26 ([Tol20, Lemma 6.3]). Para $u \in L^\infty(X, \mathcal{F}, \mu)$

$$\mathcal{R}(u) = \left\{ \int_X u d\omega : \omega \in \mathfrak{G} \right\}. \quad (1.18)$$

Demostración. Usando el Teorema 1.23 y 1.20 se sigue la contención del lado izquierdo en

el derecho. Como $\omega(E) = 1$ implica $\mu(E) > 0$, por el Teorema 1.23 el conjunto del lado izquierdo contiene al del lado derecho. \square

Teorema 1.27 ([Tol20, Theorem 6.6]). *Sea $X = [0, 1]$, \mathcal{F} la σ -álgebra completa con respecto a Leb la medida de Lebesgue. Existe $\mu \in \Pi(\mathcal{F}) \cap \Gamma^\infty(X, \mathcal{F}, \text{Leb})$ tal que*

$$\int_0^1 v d\mu = \int_0^1 v d\text{Leb} \quad \text{para toda función continua } v: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \quad (1.19)$$

Demostración. Para $x \in [0, 1]$ sea $\mu^x \in \mathfrak{G}$ dada por Teorema 1.20 con la propiedad $\mu^x((x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap [0, 1]) = 1$ para todo $\varepsilon > 0$, del Teorema 1.23 tenemos

$$\int_0^1 v d\mu^x = v(x), \quad \forall v \in C([0, 1]).$$

Para $n \in \mathbb{N}$, sea $x_j^n = j/2^n$, $0 \leq j \leq 2^n$, $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, y para $v \in C[0, 1]$ sea

$$s_n^v = \frac{1}{2^n + 1} \sum_{j=0}^{2^n} v(x_j^n) = \int_0^1 v d\mu_n \quad \text{donde} \quad \mu_n = \frac{1}{2^n + 1} \sum_{j=0}^{2^n} \mu^{x_j^n}.$$

Para todo $n \in \mathbb{N}$, $\mu_n \in \Gamma^\infty(X, \mathcal{F}, \mu)$ y $\mu_n(E) \in [0, 1]$, $E \in \mathcal{F}$, pues cada $\mu^{x_j^n} \in \mathfrak{G}$.

Notemos que s_n^v es una suma de Riemann, en particular, tenemos que esta sucesión converge a $\int_0^1 v d\mu$.

Definamos μ sobre \mathcal{F} como

$$\mu(E) = L(\{\mu_n\}), \quad E \in \mathcal{F},$$

donde $L: \ell_\infty(\mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{R}$ es un límite de Banach. Claramente $\mu \geq 0$ es finitamente aditiva. Además $\mu(E) = 0$ para todo $E \in \mathcal{N}$.

Veamos que μ es pura. Para $k \in \mathbb{N}$, sea

$$E_k = [0, 1] \cap \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{j=1}^{2^n} \left(x_j^n - \frac{1}{2^{2n}k}, x_j^n + \frac{1}{2^{2n}k} \right) \right).$$

Como $\mu_n(E_k) = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se sigue que $\mu(E_k) = 1 = \mu(X)$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Más aún, como $\{E_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ es una sucesión anidada de conjuntos abiertos de $[0, 1]$ con $\text{Leb}(E_k) \leq 2/k$. Se sigue que $\text{Leb}(\bigcap_{k \in \mathbb{N}} E_k) = 0$. Por lo tanto $\gamma(E_k) \rightarrow \gamma(\bigcap_k E_k) = 0$ si $0 \leq \gamma \in \Sigma(\mathcal{F}) \cap \Gamma^\infty(X, \mathcal{F}, \text{Leb})$. Como $\mu \geq 0$, tenemos que $\mu \wedge \gamma = 0$ para cada $0 \leq \gamma \in \Sigma(\mathcal{F}) \cap \Gamma^\infty(X, \mathcal{F}, \text{Leb})$, por ende μ es pura.

Si g es una función simple sobre $[0, 1]$, se sigue que

$$L\left(\left\{\int_0^1 g d\mu_n\right\}\right) = \int_0^1 g d\mu. \quad (1.20)$$

Para $u \in L^\infty(X, \mathcal{F}, \mu)$, sea $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones simples tal que $u_k \rightarrow u$ uniformemente sobre $[0, 1]$. Sea

$$M = \left|L\left(\left\{\int_0^1 u d\mu_n\right\}\right) - \int_0^1 u d\mu\right|.$$

Entonces para cada $k \in \mathbb{N}$, usando desigualdad triangular tenemos que

$$M \leq \left|L\left(\left\{\int_0^1 u - u_k d\mu_n\right\}\right)\right| + \left|L\left(\left\{\int_0^1 u_k d\mu_n\right\}\right) - \int_0^1 u_k d\mu\right| + \left|\int_0^1 u_k d\mu - \int_0^1 u d\mu\right|.$$

Por lo tanto

$$L\left(\left\{\int_0^1 u d\mu_n\right\}\right) = \int_0^1 u d\mu, \quad \forall u \in L^\infty(X, \mathcal{F}, \mu).$$

En particular, para $v \in C[0, 1]$

$$\int_0^1 v d\mu = L(\{v d\mu_n\}) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n^v = \int_0^1 v d\text{Leb}.$$

□

Capítulo 2

El Teorema de Descomposición de Kingman

La primera demostración del Teorema Ergódico Subaditivo data del año 1968 en el artículo de Kingman [Kin68], en respuesta al artículo [HW65] de Hammersley y Welsh, donde se introduce Teoría Ergódica para sucesiones subaditivas. Esta demostración depende principalmente de un resultado que dice que toda sucesión subaditiva de funciones se puede descomponer como la suma de dos sucesiones de funciones medibles $\{S_n f\}_{n \in \mathbb{N}}$ para alguna $f \in L^1(X, \mathcal{F}, \mu)$ y $\{\omega_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en el espacio de medida (X, \mathcal{F}, μ) , donde $\{\omega_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión no negativa tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int \frac{\omega_n}{n} d\mu = 0.$$

El propósito de este capítulo es demostrar esta descomposición, dando dos ideas distintas. La primera es siguiendo el artículo original de Kingman [Kin68], en este encontraremos una demostración del Teorema de Descomposición que se aplica cuando se trabaja con una transformación invertible. La segunda, es una demostración que hace uso de un Teorema de Komlós, siguiendo el artículo [BDK⁺73] que demuestra el caso no invertible.

Existen otras demostraciones de este teorema que no usan esta descomposición, es posible encontrar una usando un Teorema Ergódico Maximal en [Kar17] y otra usando una idea de Jairo Bochi y Artur Ávila en [VO16]. Existen otras formas más probabilistas de acercarse a esta descomposición como se puede ver en [dJ77].

En todo el capítulo (X, \mathcal{F}, μ) es un espacio de medida, donde X es un conjunto, \mathcal{F} es una σ -álgebra y μ es una medida σ -aditiva no negativa sobre \mathcal{F} . Además, consideraremos $T: X \rightarrow X$ una transformación que preserva la medida μ .

1. El Teorema Ergódico Subaditivo

En esta sección introduciremos el concepto de sucesiones subaditivas para establecer un Teorema Ergódico más general.

Definición 2.1. Sea $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles $\varphi_n: X \rightarrow \mathbb{R}$. Decimos que la sucesión $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es *subaditiva* con respecto a T , si para todo $n, m \in \mathbb{N}$ se satisface

$$\varphi_{m+n} \leq \varphi_m + \varphi_n \circ T^m. \quad (2.1)$$

Si se cumple la desigualdad en la otra dirección, llamamos a esta sucesión *superaditiva* con respecto a T . Mientras que si se satisfacen ambas desigualdades, decimos que $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es *aditiva* con respecto a T .

Sea $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones subaditivas con respecto a T . Iterando T , tendremos que para todo $k, m, n \in \mathbb{N}$

$$\varphi_{m+n} \circ T^k \leq \varphi_m \circ T^k + \varphi_n \circ T^{k+m}. \quad (2.2)$$

Ejemplo 2.1. Sea $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ una función medible y

$$\varphi_n = \sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k.$$

Esta sucesión de funciones es aditiva con respecto a T .

Ejemplo 2.2. Sea $A: X \rightarrow \mathcal{M}_{k \times k}(\mathbb{R})$ una función medible con respecto a la σ -álgebra de Borel hacia el espacio de matrices de $k \times k$ con entradas reales para $k \in \mathbb{N}$. Dote este espacio con la norma

$$\|B\| = \max_{i \in \{1, \dots, k\}} \sum_{j=1}^k |A_{i,j}|.$$

Definamos

$$\psi_n(x) = A(T^{n-1}x) \cdot A(T^{n-2}x) \cdots A(x),$$

entonces, considerando

$$\varphi_n(x) = \log \|\psi_n(x)\|$$

se tiene que $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión subaditiva con respecto a T , debido a que $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$. La convergencia en este caso fue demostrada en el año 1960 por Furstenberg y Kesten en [FK60].

Ejemplo 2.3. Sea G un grupo topológico y $h: X \rightarrow G$ un mapa Borel medible. Sea

$$\psi_n(x) = h(T^{n-1}x) \cdots h(Tx) \cdot h(x),$$

esto usualmente es conocido como un *camino aleatorio*. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos la función

$$\varphi_n(x) = \#\{\psi_i(x) : 1 \leq i \leq n\}.$$

Entonces $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión subaditiva con respecto a T .

Supongamos G es un grupo finitamente generado. Sea S un conjunto generador para G . Se define la norma $|g|$ con respecto al conjunto S como la palabra largo más corto de un palabra w en S equivalente a g . Se conoce como la *métrica palabra*, a la métrica

$$d(g_1, g_2) = |g_1^{-1}g_2|.$$

Para cada n definimos

$$\alpha_n(x) = d(e, \psi_n(x)).$$

Entonces $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de una sucesión subaditiva con respecto a T haciendo uso de la desigualdad triangular y la invarianza de d . Esto se puede generalizar para métricas invariantes por la izquierda. Ambos ejemplos se pueden encontrar en [Der80].

Sea $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión subaditiva con respecto a T . Integrando (2.1) y usando el Lema de Fekete, se obtiene que existe $\gamma \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_X \varphi_n d\mu}{n} = \gamma, \quad \text{donde} \quad \gamma = \inf_{n \in \mathbb{N}} \frac{\int_X \varphi_n d\mu}{n}. \quad (2.3)$$

Cuando γ es finito, diremos que γ es la *constante de tiempo* de $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Antes de demostrar el Teorema Ergódico general, se necesitará el siguiente resultado.

Teorema 2.2 ([Kin68, Theorem 1]). *Sea $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ subaditiva con respecto a T con constante de tiempo γ y sea*

$$\xi = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi_n}{n}, \quad (2.4)$$

entonces ξ es finita casi-seguramente, y

$$\int_X \xi d\mu = \gamma \quad \text{y} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \left| \frac{\varphi_n}{n} - \xi \right| d\mu = 0. \quad (2.5)$$

Consecuentemente, φ_n/n converge a ξ en $L^1(X, \mathcal{F}, \mu)$ cuando $n \rightarrow \infty$.

Demostración. Sea $k \in \mathbb{N}$ fijo. Para cada $n \in \mathbb{N}$ denotaremos $N(n)$ a la parte entera de n/k . Aplicando (2.1) se obtiene

$$\varphi_n \leq \varphi_k + \varphi_{n-k} \circ T^k \leq \varphi_k + \varphi_k \circ T^k + \varphi_{n-2k} \circ T^{2k}.$$

De forma inductiva

$$\varphi_n \leq \sum_{r=1}^{N(n)} \varphi_k \circ T^{(r-1)k} + \varphi_{n-(N(n))k} \circ T^{N(n)k} \leq \sum_{r=1}^{N(n)} \varphi_k \circ T^{(r-1)k} + w_{N(n)} \quad (2.6)$$

donde

$$w_N = \sum_{u=0}^{k-1} |\varphi_u \circ T^{Nk}|.$$

A consecuencia del Teorema Ergódico de Birkhoff, la función

$$\psi_k = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} \varphi_k \circ (T^k)^r = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{r=1}^N \varphi_k \circ T^{(r-1)k} \quad \mu\text{-ctp.}$$

existe con μ -medida total y $\int_X \psi_k d\mu = \int_X \varphi_k d\mu$. Más aún, para cada $\varepsilon > 0$,

$$\sum_{N=1}^{\infty} \mu \left(\frac{w_N}{N} \geq \varepsilon \right) = \sum_{N=1}^{\infty} \mu \left(\frac{w_0}{\varepsilon} \geq N \right) \leq \sum_{N=1}^{\infty} N \mu \left(\frac{w_0}{\varepsilon} \in [N, N+1) \right) \leq \int_X \frac{w_0}{\varepsilon} d\mu < \infty.$$

Aplicando el Lema de Borel Cantelli, se ha demostrado que con medida total

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{w_N}{N} = 0.$$

Tomando límite a la desigualdad (2.6), se tiene que

$$\xi \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi_n}{N(n)k} \leq \frac{1}{k} \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N(n)} \left(\sum_{r=1}^{N(n)} \varphi_k \circ T^{(r-1)k} + w_N \right) = \frac{\psi_k}{k}.$$

En particular ξ es finita μ -ctp, y $\int_X \xi d\mu \leq \int_X \psi_k/k d\mu$. Como k arbitrario, entonces

$$\int_X \xi d\mu \leq \gamma.$$

Para la otra desigualdad, para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos

$$\alpha_n := \sum_{r=1}^n \varphi_1 \circ T^{(r-1)} = S_n \varphi_1.$$

Así α_n es una sucesión aditiva con respecto a T y $\alpha_n \geq \varphi_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Sea $\{\beta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión

$$\beta_n = \alpha_n - \varphi_n$$

es una sucesión superaditiva no negativa para T .

Sea

$$B_n = \inf_{k \geq n} \frac{\beta_k}{k},$$

entonces B_n es una sucesión creciente, convergiendo a

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\beta_k}{k} = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_n - \varphi_n}{n} = \psi_1 - \xi.$$

Por el Teorema de Convergencia Monótona,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X B_n d\mu = \int_X \lim_{n \rightarrow \infty} B_n d\mu = \int_X \psi_1 - \xi d\mu.$$

Pero además,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X B_n d\mu \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \frac{\beta_n}{n} d\mu = \int_X \psi_1 d\mu - \gamma.$$

Por lo tanto,

$$\int_X \psi_1 d\mu - \int_X \xi d\mu \leq \int_X \psi_1 d\mu - \gamma,$$

lo que demuestra la primera parte de (2.5).

Se sigue

$$\int_X \left| \frac{\beta_n}{n} - B_n \right| d\mu = \int_X \psi_1 d\mu - \frac{\int_X \psi_n d\mu}{n} - \int_X B_n d\mu \rightarrow \left(\int_X \psi_1 d\mu - \gamma \right) - \left(\int_X \psi_1 - \gamma d\mu \right) = 0.$$

Como B_n es monótona y converge a $\psi_1 - \xi$, entonces debe converger en L^1 , entonces

$$\frac{\beta_n}{n} \rightarrow \psi_1 - \xi,$$

en $L^1(X, \mathcal{F}, \mu)$. Por el Teorema Ergódico de Birkhoff,

$$\frac{\alpha_n}{n} \rightarrow \psi_1$$

en $L^1(X, \mathcal{F}, \mu)$, y así se cumple la convergencia en L^1 de φ_n a ξ . \square

En el mismo artículo original de Kingman [Kin68, Theorem 3] caracterizan el límite ξ de 2.5 como el límite de la esperanza condicional de φ_n/n sobre los conjuntos T -invariantes.

El Teorema Ergódico Subaditivo dice algo mucho más fuerte, ξ definido, es de hecho el límite de φ_n/n puntualmente, generalizando así el resultado de Birkhoff. Para demostrar esto se necesitará la siguiente definición.

Definición 2.3. Decimos que una sucesión subaditiva $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es *puramente subaditiva* si para cada $n \in \mathbb{N}$, φ_n es no negativa y tiene constante de tiempo $\gamma = 0$.

Teorema 2.4 ([Kin68, Theorem 4]). *Sea $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones subaditivas para T con constante de tiempo γ . Entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ existen $\varphi_n^{(ad)}$ y $\varphi_n^{(ps)}$ tales que*

$$\varphi_n = \varphi_n^{(ad)} + \varphi_n^{(ps)}, \quad (2.7)$$

donde $\{\varphi_n^{(ad)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión aditiva para T , con

$$\int_X \varphi_1^{(ad)} d\mu = \gamma, \quad (2.8)$$

y $\{\varphi_n^{(ps)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión puramente subaditiva.

En la próxima sección se darán dos demostraciones distintas para este resultado. Por ahora, asumiremos esto para demostrar el Teorema Ergódico subaditivo.

Teorema 2.5. *Sea $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ subaditiva con respecto a T con constante de tiempo γ , usando la misma notación del Teorema 2.2, se tiene que*

$$\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi_n}{n} \quad \text{puntualmente } \mu\text{-c.t.p.} \quad (2.9)$$

Demostración. Usando el Teorema 2.4, tenemos que para cada $n \in \mathbb{N}$

$$\varphi_n = \varphi_n^{(ad)} + \varphi_n^{(ps)},$$

donde $\{\varphi_n^{(ad)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ es aditiva y $\{\varphi_n^{(ps)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ es puramente subaditiva. El Teorema 2.2 establece que existe

$$\zeta = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi_n^{(ps)}}{n} \quad \text{y} \quad \int_X \zeta d\mu = 0.$$

Entonces $\zeta = 0$ con medida total. Por lo tanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi_n^{(\text{ps})}}{n} = 0.$$

Por otro lado, del Teorema Ergódico de Birkhoff, se tiene que $\{\varphi_n^{(\text{ad})}/n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es convergente puntualmente μ -ctp, entonces por álgebra de límites tendremos que $\{\varphi_n/n\}_{n \in \mathbb{N}}$ también será convergente puntualmente μ -ctp y en $L^1(X, \mathcal{F}, \mu)$. Esto demuestra el resultado. \square

2. Demostración para el caso invertible

Solo por esta sección se asumirá que $T: X \rightarrow X$ es un mapa medible e invertible tal que $T^{-1}: X \rightarrow X$ también es medible y preserva la medida μ . Además, cuando se hable de $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión subaditiva con respecto a T , se entenderá que φ_0 es la función constante 0.

Para demostrar el Teorema 2.4 basta probar el siguiente resultado.

Lema 2.6. *Sea $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión subaditiva con respecto a T . Entonces existe $f \in L^1(X, \mathcal{F}, \mu)$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$*

$$f + f \circ T + \dots + f \circ T^{n-1} \leq \varphi_n \quad \text{y} \quad \int_X f d\mu = \gamma. \quad (2.10)$$

Demostración. Para cada $m \in \mathbb{N}$ definamos

$$f_m = \frac{1}{m} \sum_{r=1}^m \varphi_r - \varphi_{r-1} \circ T. \quad (2.11)$$

Para cada n , se tiene

$$\begin{aligned} f_m + f_m \circ T + \dots + f_m \circ T^{n-1} &= \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{r=1}^m (\varphi_r \circ T^k - \varphi_{r-1} \circ T^{k+1}) \\ &= \frac{1}{m} \left(\sum_{r=1}^m \varphi_r + \sum_{k=1}^{n-1} \varphi_m \circ T^k - \sum_{r=1}^{m-1} \varphi_r \circ T^n \right). \end{aligned}$$

Tomando $m > n$, se obtiene

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} f_m \circ T^k &= \frac{1}{m} \left(\sum_{r=1}^n \varphi_r + \sum_{r=1}^{m-n} \varphi_{r+n} + \sum_{r=1}^{n-1} \varphi_m \circ T^r - \sum_{r=1}^{m-n} \varphi_r \circ T^n - \sum_{r=1}^{n-1} \varphi_{r+(m-n)} \circ T^n \right) \\ &= \frac{1}{m} \left(\sum_{r=1}^n \varphi_r + \sum_{r=1}^{m-n} (\varphi_{r+n} - \varphi_r \circ T^n) + \sum_{r=1}^{n-1} (\varphi_m \circ T^r - \varphi_{r+(m-n)} \circ T^n) \right) \end{aligned}$$

Notemos que (2.2) implica

$$\varphi_{r+n} - \varphi_r \circ T^n \leq \varphi_n \quad \text{y} \quad \varphi_m \circ T^r - \varphi_{r+(m-n)} \circ T^n \leq \varphi_{n-r} \circ T^r.$$

Concluyendo así que

$$\sum_{k=0}^{n-1} f_m \circ T^k \leq \frac{1}{m} \left(\sum_{r=1}^n \varphi_r + (m-n)\varphi_n + \sum_{r=1}^{n-1} \varphi_{n-r} \circ T^r \right) \quad (2.12)$$

Cuando $m \rightarrow \infty$, tenemos que el lado derecho de la ecuación converge a φ_n . Más aún

$$\int_X f_m d\mu = \frac{1}{m} \sum_{r=1}^m \left(\int_X \varphi_r d\mu - \int_X \varphi_{r-1} d\mu \right) = \frac{\int_X \varphi_m d\mu}{m}. \quad (2.13)$$

Consecuentemente $\int_X f_m d\mu \rightarrow \gamma$ cuando $m \rightarrow \infty$. Por lo tanto, si $\{f_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ tiene un punto límite en $L^1(X, \mathcal{F}, \mu)$ este satisfará las condiciones del Lema 2.6. No obstante, no es posible garantizar la existencia de este punto, por lo que se requerirá el uso de más herramientas.

Un resultado fundamental ya mencionado anteriormente de Teoría de la medida, es que el dual de $L^1(X, \mathcal{F}, \mu)$ está dado por $L^\infty(X, \mathcal{F}, \mu)$ [Roy63, Chapter 8] y este actúa por

$$(\phi, f) = \int_X \phi f d\mu, \quad f \in L^1(X, \mathcal{F}, \mu), \phi \in L^\infty(X, \mathcal{F}, \mu).$$

Luego el dual de $L^\infty(X, \mathcal{F}, \mu)$ está dado por $\Gamma^\infty(X, \mathcal{F}, \mu)$, gracias al Teorema 1.15 y actúa de forma

$$(\nu, \phi) = \int_X \phi d\nu, \quad \phi \in L^\infty(X, \mathcal{F}, \mu), \nu \in \Gamma^\infty(X, \mathcal{F}, \mu).$$

Finalmente, existe un incrustamiento natural del espacio $L^1(X, \mathcal{F}, \mu)$ en su bidual, dado por $\kappa: L^1(X, \mathcal{F}, \mu) \rightarrow \Gamma^\infty(X, \mathcal{F}, \mu)$ y que satisface

$$(\kappa f)(A) = \int_A f d\mu, \quad f \in L^1(X, \mathcal{F}, \mu), A \in \mathcal{F}.$$

Aplicando la desigualdad (2.12), con $n = 1$, se tiene

$$\|f_m\| \leq \|\varphi_1\| + \|\varphi_1 - f_m\| = \|\varphi_1\| + \int_X |\varphi_1 - f_m| d\mu \leq \|\varphi_1\| + \int_X \varphi_1 d\mu - \gamma = M. \quad (2.14)$$

Por lo tanto, los elementos de $\Gamma^\infty(X, \mathcal{F}, \mu)$ se encuentran en el conjunto $\{\nu \in \Gamma^\infty(X, \mathcal{F}, \mu) : \|\nu\| \leq M\}$, donde $\|\nu\| = |\nu|(X)$. Por el Teorema de Bourbaki-Alaoglu este conjunto es compacto en la topología débil-* de $\Gamma^\infty(X, \mathcal{F}, \mu)$, este visto como el dual de $L^\infty(X, \mathcal{F}, \mu)$.

El conjunto $\Gamma^\infty(X, \mathcal{F}, \mu)$ no es secuencialmente compacto. Por lo tanto, no es posible extraer una subsucesión convergente. Sin embargo, es posible trabajar con redes y subredes.

Antes de definir redes, recordemos que un conjunto dirigido es un conjunto D con una relación de preorden, es decir, una relación reflexiva y transitiva tal que cada par de elementos tiene una cota superior en D . Una *red* en un espacio topológico X es una función $\alpha: D \rightarrow X$. Usualmente, se denota $\alpha(d) = x_d$ para todo $d \in D$, y referirse a esta como $\{x_d\}_{d \in D}$. Una subred de una red $\{x_d\}_{d \in D}$ es una red $\{x_{\alpha(e)}\}_{e \in E}$, donde E es un conjunto dirigido y $\alpha: E \rightarrow D$ es una función tal que

1. Si $e_1 \leq e_2$, entonces $\alpha(e_1) \leq \alpha(e_2)$.
2. Para todo $d \in D$, existe un $e \in E$ tal que $\alpha(e) \geq d$.

Es conocido que en espacios compactos toda red tiene una subred convergente [Ver10, Proposition 20]. Por lo que consideraremos $\{\kappa f_{\alpha(e)}\}_{e \in E}$ una subred de $\{\kappa f_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ convergente a ν en $\Gamma^\infty(X, \mathcal{F}, \mu)$ con la topología débil-*.

Consideremos el operador

$$\begin{aligned} S: \Gamma^\infty(X, \mathcal{F}, \mu) &\longrightarrow \Gamma^\infty(X, \mathcal{F}, \mu) \\ \nu &\longmapsto (T^{-1})_* \nu, \end{aligned}$$

es decir, para todo $A \in \mathcal{F}$

$$(S\nu)(A) = \nu(TA).$$

Este operador es débil-* continuo y

$$(S(\kappa f))(A) = \int_{TA} f d\mu = \int_A f \circ T d\mu = \kappa(f \circ T)(A). \quad (2.15)$$

De (2.12) y la igualdad (2.15), se tiene que para todo $m \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{n-1} S^k(\kappa f_m) \leq \frac{1}{m} \left(\sum_{r=1}^n \kappa \varphi_r + (m-n)\kappa \varphi_n + \sum_{r=1}^{n-1} \kappa \varphi_{n-r} \circ T^r \right).$$

Así

$$\sum_{k=0}^{n-1} \kappa f_{\alpha(e)} \circ T^k \leq \frac{1}{\alpha(e)} \left(\sum_{r=1}^n \kappa \varphi_r + (\alpha(e)-n)\kappa \varphi_n + \sum_{r=1}^{n-1} \kappa \varphi_{n-r} \circ T^r \right).$$

Dado que el lado derecho converge a $\kappa \varphi_n$, mientras que el lado izquierdo converge a ν , se obtiene

$$\nu + S\nu + \dots + S^{n-1}\nu \leq \kappa \varphi_n. \quad (2.16)$$

De (2.13)

$$(\kappa f_m, 1) = \int_X 1 d\kappa f_m = (\kappa f_m)(X) = \int_X f_m d\mu = \frac{\int_X \varphi_m d\mu}{m} \rightarrow \gamma.$$

Dado que ν es límite débil-* de $\{\kappa f_m\}$, se tiene

$$(\nu, 1) = \gamma, \text{ es decir, } \nu(X) = \gamma.$$

A consecuencia de (2.16), con $n = 1$, $(\kappa \varphi_1 - \nu): \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ es una medida finitamente aditiva no negativa, y por el Teorema 1.11, admite una única descomposición como suma de una medida σ -aditiva más una medida pura, ambas no negativas. Al despejar ν se obtiene

$$\nu = \lambda - \pi,$$

con λ una medida σ -aditiva con signo y π una medida pura no-negativa. De (2.16) se tiene

$$\lambda + S\lambda + \dots + S^{n-1}\lambda \leq \kappa \varphi_n + \pi_n,$$

donde

$$\pi_n = \pi + S\pi + \dots + S^{n-1}\pi.$$

Usando el Teorema 1.10, se tiene que si π es medida pura, entonces $S\pi$ también lo es. Por lo tanto, π_n también es medida pura. De esta forma

$$(\lambda + S\lambda + \dots + S^{n-1}\lambda - \kappa \varphi_n)^+ \leq \pi_n \implies \lambda + S\lambda + \dots + S^{n-1}\lambda \leq \kappa \varphi_n$$

Consecuentemente

$$\lambda(X) + S\lambda(X) + \dots + S^{n-1}\lambda(X) \leq \kappa\varphi_n(X) = \int_X \varphi_n d\mu \implies \lambda(X) \leq \gamma = \nu(X) = \lambda(X) - \pi(X).$$

Teniendo así que $\pi = 0$ y $\nu = \lambda$ es una medida con signo.

Como $\nu \in \Gamma^\infty(X, \mathcal{F}, \mu)$ y es medida σ -aditiva con signo, es absolutamente continua a μ . Por ende, tiene una función densidad f con respecto a μ . Por lo tanto, $\nu = \kappa f$ y de (2.16) tenemos que para todo $A \in \mathcal{F}$

$$\int_A \sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k d\mu \leq \int_A \varphi_n d\mu,$$

así, podemos concluir que

$$\sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k \leq \varphi_n.$$

Finalmente

$$\int_X f d\mu = (\kappa f)(X) = \nu(X) = \gamma.$$

□

La invertibilidad de T fue usada en la igualdad (2.15), en el artículo original hay un error con esta igualdad.

Con este resultado, la demostración del Teorema 2.4 es directa.

Demostración del Teorema 2.4. Sea $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ una función que satisface las condiciones del Lema 2.6, y definamos

$$\varphi_n^{(\text{ad})} = f + f \circ T + \dots + f \circ T^{n-1}.$$

Entonces $\{\varphi_n^{(\text{ad})}\}_{n \in \mathbb{N}}$ es aditivo, y además $\varphi_n^{(\text{ps})} = \varphi_n - \varphi_n^{(\text{ad})}$ es no negativo y subaditivo. Luego

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int_X \varphi_n - \varphi_n^{(\text{ad})} d\mu = 0.$$

De esta forma se sigue el resultado. □

3. Demostración para el caso no invertible

De ahora en adelante, solo asumiremos que $T: X \rightarrow X$ es medible. Necesitaremos el siguiente resultado que fue dado por Komlós [Kom67] y será demostrado en la siguiente sección.

Teorema 2.7 ([Kom67, Theorem 1]). Sean $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles tales que $\sup_{n \in \mathbb{N}} \int |f_n| d\mu < \infty$. Entonces existe una subsucesión $\{f_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ y una función $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m f_{n_k} = f \quad \mu\text{-c.t.p.}$$

Bastará probar el siguiente lema, pues la demostración del Teorema 2.4 sigue de la misma forma que en la sección anterior.

Lema 2.8. Sea $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión subaditiva con respecto a T . Entonces existe $f \in L^1(X, \mathcal{F}, \mu)$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$f + f \circ T + \dots + f \circ T^{n-1} \leq \varphi_n \quad y \quad \int_X f d\mu = \gamma. \quad (2.17)$$

Demostración. Consideremos $\{f_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ la misma sucesión de funciones definidas en 2.6, esto es, para cada $m \in \mathbb{N}$

$$f_m = \frac{1}{m} \sum_{r=1}^m \varphi_r - \varphi_{r-1} \circ T.$$

De igual forma, tenemos que cuando $m > n$

$$\sum_{k=0}^{n-1} f_m \circ T^k \leq \frac{1}{m} \left(\sum_{r=1}^n \varphi_r + (m-n)\varphi_n + \sum_{r=1}^{n-1} \varphi_{n-r} \circ T^r \right).$$

Cuando $m \rightarrow \infty$, tenemos que el lado derecho de la ecuación converge a φ_n . Por otro lado,

$$\int_X f_m d\mu = \frac{1}{m} \sum_{r=1}^m \left(\int_X \varphi_r d\mu - \int_X \varphi_{r-1} d\mu \right) = \frac{\int_X \varphi_m d\mu}{m}.$$

Consecuentemente $\int_X f_m d\mu \rightarrow \gamma$ cuando $m \rightarrow \infty$.

Por (2.14), tenemos que $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ cumple con las hipótesis necesarias para aplicar el Teorema 2.7. Haciendo uso de este, existe $\{f_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ tales que si definimos para cada $m \in \mathbb{N}$

$$F_m = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m f_{n_j},$$

entonces existe $f \in L^1(X, \mathcal{F}, \mu)$ que satisface

$$\lim_{k \rightarrow \infty} F_k = f \quad \mu\text{-c.t.p.}$$

Notemos que es posible asumir que en la subsucesión escogida $n_1 > n$ para cualquier n fijo,

dado que al tomar k el coeficiente más grande tal que $n_k \leq n$, podemos definir

$$F'_m = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m f_{n_{k+j}}.$$

Y así

$$\lim_{m \rightarrow \infty} F'_m = f \quad (2.18)$$

Hemos construido una subsucesión $\{f_{n'_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ tal que $n'_1 > n$ y que satisface (2.18). Por ende, sea $n \in \mathbb{N}$ fijo y supongamos $n_1 > n$, entonces

$$\sum_{k=0}^{n-1} F'_m \circ T^k = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m f_{n_j} \circ T^k = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \sum_{k=0}^{n-1} f_{n_j} \circ T^k \quad (2.19)$$

$$\leq \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \frac{1}{n_j} \left(\sum_{r=1}^n \varphi_r + (n_j - n)\varphi_n + \sum_{r=1}^{n-1} \varphi_{n-r} \circ T^r \right). \quad (2.20)$$

Como

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{n_j} \left(\sum_{r=1}^n \varphi_r + (n_j - n)\varphi_n + \sum_{r=1}^{n-1} \varphi_{n-r} \circ T^r \right) = \varphi_n,$$

usando el límite de Césaró se tiene que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \frac{1}{n_j} \left(\sum_{r=1}^n \varphi_r + (n_j - n)\varphi_n + \sum_{r=1}^{n-1} \varphi_{n-r} \circ T^r \right) = \varphi_n.$$

Así, tomando $m \rightarrow \infty$ en el lado izquierdo de (2.19) y en (2.20), se tiene

$$\sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k \leq \varphi_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Para terminar la demostración, basta demostrar que

$$\int_X f d\mu = \gamma.$$

Notemos que, por la desigualdad recién demostrada, se tiene

$$\int_X f d\mu = \frac{1}{n} \int_X \sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k d\mu \leq \int_X \frac{\varphi_n}{n} d\mu,$$

tomando $n \rightarrow \infty$, hemos demostrado que

$$\int_X f d\mu \leq \gamma. \quad (2.21)$$

Por otro lado, $\int_X f_n d\mu = \int_X \varphi_n/n d\mu$ por (2.13). Así por Césaro, $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X F_n d\mu = \gamma$. Además, por subaditividad, tenemos que para todo $n \in \mathbb{N}$ $\varphi_1 - f_n \geq 0$, lo que a su vez implica $\varphi_1 - F_m \geq 0$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Finalmente, por el Lema de Fatou

$$\int_X \varphi_1 - f d\mu \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \int_X \varphi_1 - F_m d\mu = \int_X \varphi_1 d\mu - \gamma.$$

Demostrando así que $\int_X f d\mu \geq \gamma$. El resultado se sigue junto a la desigualdad (2.21). □

4. El Teorema de Komlós

En esta sección se demostrará el Teorema 2.7. Este resultado establece que, dada una sucesión acotada de variables aleatorias en $L^1(X, \mathcal{F}, \mu)$, existe una subsucesión que converge según Césaro μ -ctp; es decir, el límite del promedio converge μ -ctp. La demostración seguirá el enfoque de [Sch86], el cual, a diferencia del argumento original de [Kom67], no requiere el uso de esperanzas condicionales ni del teorema del límite central.

A lo largo de esta sección se estará asumiendo que (X, \mathcal{F}, μ) es un espacio de probabilidad.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos

$$I_n(x) := x \cdot \chi_{[-n, n]}(x).$$

Lema 2.9 ([Sch86, Lemma 1]). *Sea $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset L^1(X, \mathcal{F}, \mu)$ una sucesión tal que $\sup_n \int |f_n| d\mu < \infty$. Entonces existe una subsucesión $\{f_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ tal que*

1. *la sucesión de funciones $\{I_k(f_{n_k})\}_{k \in \mathbb{N}}$ es uniformemente integrable;*

2. *la serie*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(|f_{n_k}| > k) < \infty \quad (2.22)$$

es convergente.

3. *para todo $\varepsilon > 0$,*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1+\varepsilon}} \int |I_k(f_{n_k})|^{1+\varepsilon} d\mu < \infty. \quad (2.23)$$

Demostración. Dado que $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es L^1 -acotada, podemos ver que es uniformemente integrable, debido a que para todo $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $N \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que

$$\int_{\{x:|f_n(x)|>N\}} |f_n| d\mu < \varepsilon.$$

En efecto, sea $\varepsilon > 0$ y $\delta < \varepsilon/N_\varepsilon$. Si $\mu(A) < \delta$, obtenemos

$$\left| \int_A f_n d\mu \right| \leq \int_{A \cap \{|f_n| \geq N_\varepsilon\}} |f_n| d\mu + \int_{A \cap \{|f_n| < N_\varepsilon\}} |f_n| d\mu < \varepsilon + N_\varepsilon \mu(A) < 2\varepsilon.$$

Esto implica que cualquier subsucesión de $\{f_n\}$ satisface que $\{I_k(f_{n_k})\}_{k \in \mathbb{N}}$ es uniformemente integrable.

Veamos ahora que se cumple la condición (2.22). Por hipótesis, es posible ver que existe un escalar $M_1 \geq 0$ y una subsucesión $\{f_n^1\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{0 \leq |f_n^1| \leq 1} |f_n^1| d\mu = M_1.$$

De forma recursiva, se pueden construir subsucesiones $\{f_n^j\}_{n \in \mathbb{N}}$ de $\{f_n^{j-1}\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{j-1 < |f_n^j| \leq j} |f_n^j| d\mu = M_j,$$

para ciertos $M_j \geq 0$.

Gracias a un argumento diagonal, podemos escoger $\{f_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$, tal que

$$\frac{M_j}{2} < \int_{j-1 < |f_{n_k}| < j} |f_{n_k}| d\mu < M_j + \frac{1}{j^2}, \quad 1 \leq k, \quad 1 \leq j \leq k^2. \quad (2.24)$$

Dada la hipótesis de que $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, se sigue que $\sum_{j=1}^{\infty} M_j < \infty$.

Notemos ahora que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(|f_{n_k}| > k) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\mu(|f_{n_k}| > k^2) + \sum_{j=k+1}^{k^2} \mu(j-1 < |f_{n_k}| \leq j) \right).$$

Dado que

$$\mu(|f_{n_k}| > k^2) \leq \frac{1}{k^2} \sup_n \int |f_n| d\mu,$$

se obtiene que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(|f_{n_k}| > k^2) < \infty.$$

Por otro lado, usando (2.24)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=k+1}^{k^2} \mu(j-1 < |f_{n_k}| \leq j) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=k+1}^{k^2} \frac{M_j + \frac{1}{j^2}}{j-1} \leq \sum_{j=1}^{\infty} M_j + \frac{1}{j^2} < \infty.$$

Concluyendo así la demostración de (2.22). Finalmente (2.23) sigue de la construcción de la subsucesión que satisface (2.24). \square

Sea $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones en L^1 y $f \in L^1$. Se usará la notación $f_n \rightharpoonup f$ para decir que la sucesión de funciones $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a f en la topología débil $\sigma(L^1, L^\infty)$.

Lema 2.10 ([Sch86, Lemma 2]). *Sea $\{f_n\}_n$ una sucesión tal que $f_n \rightharpoonup f$ y $I_k(f_n) \rightharpoonup g_k$ para f y $g_k \in L^1$ para todo $k \geq 1$. Entonces $g_k \rightarrow f$ μ -ctp y en L^1 .*

Demostración. Al tomar subsucesiones, podemos asumir que se satisface (2.24). De esta forma

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int |g_k - g_{k-1}| d\mu \leq \sum_{k=1}^{\infty} \liminf_{n \rightarrow \infty} \int |I_k(f_n) - I_{k-1}(f_n)| \leq 2 \sum_{k=1}^{\infty} M_k + \frac{1}{k^2} < \infty.$$

Esto implica que g_k converge a una función g μ -ctp y en L^1 . Usando la unicidad del límite débil, podemos ver que es necesario tener que $g = f$. \square

Lema 2.11 ([Sch86, Lemma 3]). *Sea $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sucesión de funciones medibles a valores reales. Entonces existe una subsucesión $\{f_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ y una sucesión $\{g_k\}$ de variables aleatorias acotadas tales que*

$$I_n(f_{n_k}) \rightharpoonup g_n \quad y \quad \left| \int (I_k(f_{n_k})g_k - g_k^2) d\mu \right| \leq 1, \quad \forall k \geq 1 \text{ y } \forall n \geq 1. \quad (2.25)$$

Demostración. Para cada $j \geq 1$, existe una subsucesión $\{f_{j,n}\}_n$ de $\{f_{j-1,n}\}_n$ y una sucesión $\{g_n\}_n$ tal que $|g_j| \leq j$, dada la separabilidad de L^1 y el hecho de que $\{I_k(f_n)\}_n$ es acotada para todo $k \in \mathbb{N}$, podemos escoger esta sucesión tal que

$$I_j(f_{j,n}) \rightharpoonup g_j.$$

En particular, escogiendo $\{f_{j,n}\}_n$ tal que

$$\left| \int (I_j(f_{j,n})g_j - g_j^2) d\mu \right| \leq 1 \quad \forall n \geq 1,$$

y tomando la subsucesión $f_{n_k} = f_{k,k}$ obtenemos la sucesión pedida. \square

Lema 2.12 (Desigualdad Maximal). *Sea $\{f_n\}_n$ una sucesión arbitraria de funciones medibles a valores reales y $\{\alpha_n\}_n \subset L^2$. Entonces existe una subsucesión $\{f_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ y una sucesión $\{g_k\}_k$ de variables aleatorias acotadas tal que para $0 < \varepsilon < \sqrt{2}/2$ y $1 < m < n$*

$$\mu \left(\max_{m \leq j \leq n} \left| \sum_{i=m}^j \alpha_i (I_i(f_{n_i}) - g_i) \right| > \varepsilon \right) \leq \frac{2}{\varepsilon^2} \left(\frac{1}{2^m} + \sum_{i=m}^n \int \alpha_i^2 (I_i(f_{n_i}) - g_i)^2 d\mu \right).$$

Demostración. Para $\varepsilon > 0$, definimos el conjunto

$$A_\varepsilon := \left\{ x \in X : \max_{m \leq j \leq n} \left| \sum_{i=m}^j \alpha_i (I_i(f_{n_i}) - g_i) \right| (x) > \varepsilon \right\}.$$

Se demostrará que

$$\mu(A_\varepsilon) \leq \frac{2}{\varepsilon^2} \left(\frac{1}{2^m} + \sum_{i=m}^n \int \alpha_i^2 (I_i(f_{n_i}) - g_i)^2 d\mu \right).$$

Con este propósito en mente, será necesario definir el siguiente conjunto. Sea $j \in \mathbb{N}$ y tomemos dos sucesiones finitas, estrictamente crecientes $\mathbf{a} = \{a_1, \dots, a_t\}$, $\mathbf{b} = \{b_1, \dots, b_t\} \subset \{1, \dots, j-1\}$ tal que $b_i \leq a_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$ para todo $i \leq t$. Para $l \leq j$ definimos el conjunto

$$A_l(\mathbf{a}; \mathbf{b}) := \left\{ \max_{1 \leq u \leq t-1} \left| \sum_{i=1}^u \alpha_{b_i} (I_{b_i}(f_{n_{a_i}}) - g_{b_i}) \right| \leq 2^{-l/2} \text{ y } \left| \sum_{i=1}^t \alpha_{b_i} (I_{b_i}(f_{n_{a_i}}) - g_{b_i}) \right| > 2^{-l/2} \right\}.$$

Donde $\{f_{n_k}\}_k$ es una subsucesión de $\{f_n\}_n$ que será definida más adelante en la demostración.

Por el Lema 2.11 se obtiene una sucesión $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y además es posible suponer que (2.25) se satisface para una subsucesión de $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, asumiremos que esta es simplemente $\{f_n\}_n$.

Sea $f_{n_1} := f_1$. Suponiendo que ya hemos construido $f_{n_1}, \dots, f_{n_{j-1}}$, podemos construir f_{n_j} tal que

$$\left| \int \alpha_r (I_r(f_{n_i}) - g_r) \alpha_s (I_s(f_{n_j}) - g_s) d\mu \right| < \frac{1}{48 \cdot 2^{j-1}}, \quad (2.26)$$

para $1 \leq i \leq j-1$, $r \leq i$ y $s \leq j$; y además

$$\left| \int_{A_l(\mathbf{a}; \mathbf{b})} \alpha_r(I_r(f_{n_i}) - g_r) \alpha_s(I_s(f_{n_j}) - g_s) d\mu \right| < \frac{1}{48 \cdot 2^{j-1}}. \quad (2.27)$$

Esto es posible de elegir por la densidad de $L^1 \cap L^\infty$ en L^1 , $\alpha_r \cdot \alpha_s \cdot (I_r(f_{n_i}) - g_r) \in L^1$ y por la convergencia débil de $\{I_k(f_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ a g_k .

Sea $1 \leq N \leq m < n$, denotamos $Z_k := I_k(f_{n_k}) - g_k$ para todo $k \geq 1$ y sea $\varepsilon = 2^{-N/2}$. Con la notación establecida, para $m \leq k \leq n$ tomemos $\mathbf{a}_k = (n_j)_{j=m}^k$ y $\mathbf{b}_k := (j)_{j=m}^k$. Definimos

$$B_k := A_N(\mathbf{a}_k; \mathbf{b}_k).$$

Esto debido a que podemos expresar A_ε como la siguiente unión disjunta

$$A_\varepsilon = \bigcup_{k=m}^n B_k.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \int \left(\sum_{i=m}^n \alpha_i Z_i \right)^2 d\mu &\geq \int_{A_\varepsilon} \left(\sum_{i=m}^n \alpha_i Z_i \right)^2 d\mu \\ &= \sum_{k=m}^n \int_{B_k} \left(\sum_{i=m}^n \alpha_i Z_i \right)^2 d\mu \\ &\geq \sum_{k=m}^n \int_{B_k} \left(\sum_{i=m}^k \alpha_i Z_i \right)^2 d\mu + 2 \sum_{k=m}^n \sum_{j=k+1}^n \sum_{i=m}^k \int_{B_k} \alpha_i Z_i \alpha_j Z_j d\mu. \end{aligned}$$

Usando la desigualdad (2.27) y la elección de A_ε

$$\int \left(\sum_{i=m}^n \alpha_i Z_i \right)^2 d\mu \geq \varepsilon^2 \mu(A_\varepsilon) - 2 \sum_{k=m}^n \sum_{j=k+1}^n \sum_{i=m}^k \frac{1}{48 \cdot 2^{j-1}}.$$

Desarrollando esta última suma se obtiene

$$\int \left(\sum_{i=m}^n \alpha_i Z_i \right)^2 d\mu \geq \varepsilon^2 \mu(A_\varepsilon) - \frac{1}{3 \cdot 2^m}.$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \int \left(\sum_{i=m}^n \alpha_i Z_i \right)^2 d\mu &= \sum_{i=m}^n \int (\alpha_i Z_i)^2 d\mu + 2 \sum_{j=m+1}^n \sum_{i=m}^{j-1} \int \alpha_i Z_i \alpha_j Z_j d\mu \\ &\leq \sum_{i=m}^n \int (\alpha_i Z_i)^2 d\mu + 2 \sum_{j=m+1}^n \sum_{i=m}^{j-1} \frac{1}{48 \cdot 2^{j-1}} \\ &\leq \int (\alpha_i Z_i)^2 d\mu + \frac{1}{6 \cdot 2^m}. \end{aligned}$$

De esta forma, obtenemos la desigualdad pedida para $2^{-(N+1)/2} < \varepsilon < 2^{-N/2}$. Por otro lado, si $\varepsilon < 2^{-m/2}$, la desigualdad se sigue de forma directa. \square

Para finalizar la demostración del Teorema de Komlós, necesitaremos los siguientes dos resultados.

Lema 2.13 (Lema de Kronecker). *Si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión tal que la serie $\sum_{m=1}^{\infty} x_m$ es convergente y finita. Entonces para toda sucesión $0 < b_1 \leq b_2 \leq b_3 \leq \dots$ tal que $b_n \rightarrow \infty$, tenemos*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n} \sum_{k=1}^n b_k x_k = 0.$$

Lema 2.14 ([Sch86, Lemma 5]). *Sea $f_n \rightharpoonup f$ para $\{f_n\}_n \subset L^1$ y $f \in L^1$. Entonces existe una subsucesión $\{f_{n_k}\}_k$ de $\{f_n\}$ tal que*

$$\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k f_{n_i} \rightarrow f \quad \mu\text{-ctp.}$$

Demostración. Pasando a subsucesiones es posible asumir que $\{f_n\}_n$ satisface (2.22), (2.23) y (2.11). Por el Lema 2.12, existe una subsucesión $\{f_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ tal que para $\varepsilon > 0$, $1 \leq m < n$

$$\mu \left(\max_{m \leq j \leq n} \left| \sum_{i=m}^n \frac{I_i(f_{n_i}) - g_i}{i} > \varepsilon \right| \right) \leq \frac{2}{\varepsilon^2} \left(\frac{1}{2^m} + \sum_{i=m}^n \int \frac{(I_i(f_{n_i}) - g_i)^2}{i^2} d\mu \right).$$

Por (2.11) y (2.23) se obtiene

$$\sum_{i=1}^{\infty} \int \frac{(I_i(f_{n_i}) - g_i)^2}{i^2} d\mu \leq \sum_{i=1}^{\infty} \int \frac{I_i(f_{n_i})^2}{i^2} d\mu + 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} < \infty.$$

Consecuentemente, tenemos que $\sum_{i=1}^{\infty} Z_i/i$ converge μ -ctp y en L^1 . Por el Lema 2.13, el hecho de que $\{g_k\}_k$ es convergente por el Lema 2.10 y (2.22) (que implica Borel Canteli), se puede concluir que $\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k f_{n_i}$ converge a f μ -ctp. \square

Demostración Teorema 2.7. Por el Lema 2.9 podemos escribir una subsucesión de $\{f_n\}$ de la siguiente forma

$$f_{n_k} = (f_{n_k} - I_k(f_{n_k})) + I_k(f_{n_k}),$$

donde $f_{n_k} - I_k(f_{n_k}) \rightarrow 0$ μ -ctp y $I_k(f_{n_k}) \rightarrow f$ para algún $f \in L^1$. El resultado se sigue al aplicar el Lema 2.14 a la sucesión $\{I_k(f_{n_k})\}_{k \in \mathbb{N}}$. \square

Capítulo 3

Formalismo Termodinámico No Aditivo

Con un Teorema Ergódico establecido para sucesiones de funciones subaditivas, podemos extender el Formalismo Termodinámico a potenciales no aditivos. En este capítulo se definirá el concepto de *Presión topológica* de una familia no aditiva de potenciales, concepto esencial para extender el Formalismo Termodinámico usual al caso no aditivo. Además, se explorarán dos casos, cuando se cuenta con una sucesión de funciones subaditivas, demostrando en este caso un Principio Variacional basándose en el trabajo de [CFH08] y con sucesiones de funciones asintóticamente aditivas estudiando las consecuencias de un Teorema de Cuneo ([Cun20]) que hace posible un mejor entendimiento de este estudio.

El formalismo Termodinámico no aditivo fue introducido por Barreira en [Bar96]. Una de sus principales motivaciones para desarrollar esta teoría fue su aplicación en el área de teoría de la dimensión, en particular para obtener una fórmula de Bowen en sistemas no conformes. Además, el formalismo termodinámico no aditivo permite considerar clases de conjuntos invariantes más generales, en las que podemos encontrar repulsores y conjuntos hiperbólicos para funciones que no son diferenciables.

En la primera sección, se demostrará el Principio Variacional para sucesiones de funciones subaditivas basándose en el trabajo de [CFH08], estableciendo de esta forma un puente entre topología y teoría de la medida. Para esto será necesario definir el concepto de presión para potenciales en general y demostrar algunos resultados previos a la demostración.

En la segunda sección, motivado por el Teorema de Descomposición de Kingman, se demostrará que toda sucesión de funciones continuas casi-aditivas (condición más débil que aditividad) se puede expresar como una suma entre una sucesión aditiva y una que desde el punto de vista del Formalismo Termodinámico no tiene peso. Esta descomposición es más

fuerte que en el Teorema 2.4, ya que depende solamente del espacio topológico y no de la medida escogida. Así, podemos decir que todo potencial que cumpla ciertas características más débiles que ser aditivo será equivalente a uno aditivo.

Finalmente en la última sección se verán consecuencias del Teorema de descomposición en el estudio de estados de equilibrio, medidas Gibbs y medidas débil Gibbs.

A lo largo de todo el capítulo (X, d) será un espacio métrico compacto y \mathcal{F} la σ -álgebra de Borel asociada. Desde este capítulo en adelante, cada vez que se mencione una medida, nos estaremos refiriendo a una medida σ -aditiva y no negativa. Denotaremos por $\mathcal{M}(X)$ al espacio de medidas de probabilidad Borelianas de X . Por otro lado, consideremos $T: X \rightarrow X$ una transformación continua y $\mathcal{M}(X, T)$ el espacio de medidas de probabilidad T -invariantes de X .

Denotaremos $C(X)$ al espacio de funciones continuas a valores reales de X , dotado con la norma $\|\cdot\|_\infty$. Así tenemos que $(C(X), \|\cdot\|_\infty)$ es un espacio de Banach.

En resumen, este capítulo busca establecer las bases del Formalismo Termodinámico para potenciales no aditivos, demostrando resultados clave que amplían su aplicabilidad y mostrando algunos resultados que se tienen actualmente.

1. Principio Variacional para potenciales subaditivos

En esta sección se trabajará una generalización del Principio Variacional para potenciales subaditivos establecida por Cao, Feng y Huang en [CFH08] basada en la demostración de [Mis76] que es posible encontrarla en el capítulo 9 de [Wal82].

Sea (X, d) un espacio métrico compacto y $T: X \rightarrow X$ una función continua. Sea $\Phi := \{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones subaditivas con respecto a T (Definición 2.1) y continuas sobre X . Primero se definirá el concepto de presión de una familia Φ con respecto a la transformación T . Luego se demostrarán unos resultados que serán útiles para la demostración del Principio Variacional y finalmente se establecerá y probará este.

Definición 3.1. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos

$$d_n(x, y) = \max_{k \in \{0, 1, \dots, n-1\}} \{d(T^k x, T^k y)\}.$$

Definición 3.2. Sea $E \subset X$. Decimos que E es (n, ε) -separado si para todo $x, y \in E$, con $x \neq y$ se tiene que $d_n(x, y) \geq \varepsilon$.

Definición 3.3. Sea $\Phi := \{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset C(X)$. Para $n \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon > 0$ definimos

$$P_n(T, \Phi, \varepsilon) = \sup \left\{ \sum_{x \in E} e^{\varphi_n(x)} : E \subset X \text{ y } E \text{ es un conjunto } (n, \varepsilon)\text{-separado} \right\}.$$

Dado que el espacio X es compacto, podemos garantizar que $P_n(T, \Phi, \varepsilon) < \infty$. Definimos ahora

$$P(T, \Phi, \varepsilon) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log P_n(T, \Phi, \varepsilon).$$

Notemos que es posible que $P(T, \Phi, \varepsilon) = \infty$. Sin embargo, dado que la función $P_n(T, \Phi, \varepsilon)$ es decreciente para ε , si $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ y $P(T, \Phi, \varepsilon_2) = \infty$, entonces $P(T, \Phi, \varepsilon_1) = \infty$. Esto nos permite definir la *presión topológica* de Φ como

$$P(T, \Phi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} P(T, \Phi, \varepsilon) \in [-\infty, \infty]. \quad (3.1)$$

Observación 3.1. Sea $r_n(T, \varepsilon)$ la mayor cardinalidad que puede tener un conjunto (n, ε) -separado con respecto a T . Es sabido que cuando X es compacto, $r_n(T, \varepsilon) < \infty$ [Wal82, Chapter 7]. De esta forma, si definimos

$$r(T, \varepsilon) := \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log r_n(T, \varepsilon).$$

Si $r(T, \varepsilon) < \infty$, entonces por la subaditividad de Φ se tiene que

$$P(T, \Phi, \varepsilon) \leq \log \max_{x \in X} \varphi_1(x) + r(X, T, \varepsilon) < \infty.$$

Definición 3.4. Se denotará $\mathcal{M}(X, T)$ al espacio de medidas de probabilidad T -invariantes. Para una medida de probabilidad T -invariante μ , se define el *exponente de Lyapunov* de Φ con respecto a μ al siguiente límite

$$\Phi_*(\mu) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int \varphi_n d\mu.$$

El argumento de la existencia de este límite es posible encontrarlo en el Capítulo 2, Sección 1.

1.1. Lemas Previos

Lema 3.5 ([CFH08, Lemma 2.1]). *Para cada $k \in \mathbb{N}$, se satisface*

$$P(T^k, \Phi^{(k)}) = kP(T, \Phi),$$

donde $T^k := \underbrace{T \circ \dots \circ T}_{k\text{-veces}}$ y $\Phi^{(k)} := \{\varphi_{kn}\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Demostración. Sea $k \in \mathbb{N}$ fijo. Notemos que si E es un conjunto (n, ε) -separado de X con respecto a T^k , entonces este debe ser (nk, ε) -separado con respecto a T . De esta forma

$$\begin{aligned} P_n(T, \Phi^{(k)}, \varepsilon) &= \sup \left\{ \sum_{x \in E} e^{\varphi_{kn}(x)} : E \text{ es un conjunto } (n, \varepsilon)\text{-separado con respecto a } T^k \right\} \\ &\leq \sup \left\{ \sum_{x \in E} e^{\varphi_{kn}(x)} : E \text{ es un conjunto } (nk, \varepsilon)\text{-separado con respecto a } T \right\} \\ &= P_{kn}(T, \Phi, \varepsilon). \end{aligned}$$

De esta forma, es posible concluir que $P(T^k, \Phi^{(k)}) \leq kP(T, \Phi)$.

Para demostrar la desigualdad recíproca, para todo $\varepsilon > 0$, sea $\delta > 0$ suficientemente pequeño tal que si $d(x, y) \leq \delta$ entonces

$$d_k(x, y) < \varepsilon.$$

Sea $C = \max\{1, \sup_{x \in X} e^{\varphi_1(x)}\}$. Entonces

$$e^{\varphi_n(x)} \leq e^{\varphi_1(x)} e^{\varphi_1(Tx)} \dots e^{\varphi_1(T^{n-1}x)} \leq C^n$$

para todo $x \in X$ y $n \in \mathbb{N}$. Sean $n \in \mathbb{N}$ y $\ell \in [kn, k(n+1)) \cap \mathbb{Z}$. Notemos que cualquier subconjunto (ℓ, ε) -separado con respecto a T debe ser (n, δ) -separado con respecto a T^k . Esta observación implica

$$P_\ell(T, \Phi, \varepsilon) = \sup \left\{ \sum_{x \in E} e^{\varphi_\ell(x)} : E \text{ es un conjunto } (\ell, \varepsilon)\text{-separado con respecto a } T \right\}.$$

Como

$$\varphi_\ell(x) \leq e^{\varphi_{kn}(x)} e^{\varphi_{\ell-nk}(T^{kn}x)} \leq C^k e^{\varphi_{kn}(x)}, \quad (3.2)$$

tenemos

$$P_\ell(T, \Phi, \varepsilon) \leq C^k P_n(T^k, \Phi^{(k)}, \delta).$$

Por lo tanto, $kP(T, \Phi) \leq P(T^k, \Phi^{(k)})$. □

Lema 3.6 ([Käe04, Lemma 2.2]). *Sea $n \in \mathbb{N}$, $0 < k < n$ y $x \in X$. Entonces existe una constante positiva C tal que*

$$\frac{1}{n}\varphi_n(x) \leq \frac{1}{kn} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi_k(T^j x) + \frac{3k}{n}C.$$

Demostración. Fijemos $n \in \mathbb{N}$ y $0 < k < n$. Para cada $0 \leq q < k$ definimos $\alpha(q) := \lfloor (n - q - 1)/k \rfloor$. De esta definición podemos ver que α es decreciente y

$$n - k - 1 < \alpha(q)k + q \leq n - 1 \quad \text{y} \quad \frac{n}{k} - 2 < \alpha(q) \leq \frac{n-1}{k}, \quad (3.3)$$

siempre y cuando $0 \leq q < k$. Fijemos q y sean $0 \leq \ell < \alpha(q)$ y $0 \leq i < k$. Se tiene

$$q - 1 < \ell k + q + i < \alpha(q)k + q. \quad (3.4)$$

Sean

$$S_q^1 := \{0, \dots, q-1\} \quad \text{y} \quad S_q^2 := \{\alpha(q)k + q, \dots, n-1\}.$$

Sea $S_q := S_q^1 \cup S_q^2$. Entonces

$$\{0, \dots, n-1\} = \{\ell k + q + i : 0 \leq \ell < \alpha(q), 0 \leq i < k\} \cup S_q. \quad (3.5)$$

Usando (3.3), podemos notar que $1 \leq \#S_q^2 \leq k$ y

$$\alpha(q) \in \left\{ \left\lfloor \frac{n-1}{k} \right\rfloor - 1, \left\lfloor \frac{n-1}{k} \right\rfloor \right\}.$$

Sea q_0 el número más grande tal que $\alpha(q_0) = \lfloor (n-1)/k \rfloor$. Entonces

$$\{\ell k + q : 0 \leq \ell \leq \alpha(q), 0 \leq k < k\} = \{0, \dots, \alpha(q_0)k + q_0\}. \quad (3.6)$$

Dada la elección maximal de q_0 se sigue que $\alpha(q_0) = (n - q_0 - 1)/k$ y así $\alpha(q_0)k + q_0 = n - 1$.

Notemos que si $q_0 = k - 1$, entonces $S_{q_0}^2 = \{n - k + q, \dots, n - 1\}$. Por otro lado, si $q_0 \neq k - 1$, entonces $\alpha(q_0 + 1) = \alpha(q_0) - 1 = (n - q_0 - k - 1)/k$ y entonces $\alpha(q_0 + 1)k + q_0 + 1 = n - k$. Por lo tanto, definiendo una biyección η , entre los conjuntos $\{0, \dots, k\}$ y $\{1, \dots, k\}$ por

$$\eta(q) := \begin{cases} q_0 - q + 1, & 0 \leq q \leq q_0 \\ q_0 - q + k + 1 & q_0 < q < k, \end{cases} \quad (3.7)$$

tenemos entonces que $\#S_q^2 = \eta(q)$ para todo $0 \leq q < k$.

Como $n = \eta(q) + \alpha(q)k + q$ para cualquier $0 \leq q < k$, usando la subaditividad de Φ , tenemos para $x \in X$ y tomando $C = \sup_{x \in X} \{|\varphi_1(x)|\}$, tenemos

$$\begin{aligned} \varphi_n(x) &= \varphi_{\eta(q)}(T^{\alpha(q)k+q}x) + \sum_{\ell=1}^{\alpha(q)} \varphi_k(T^{(\alpha(q)-\ell)k+q}x) + \varphi_q(x) \\ &\leq \sum_{\ell=0}^{\alpha(q)-1} \varphi_k(T^{\ell k+q}x) + 2kC \\ &\leq \sum_{\ell=0}^{\alpha(q)} \varphi_k(T^{\ell k+q}x) + 3kC. \end{aligned}$$

De hecho, usando (3.7) se concluye que

$$\frac{\varphi_n(x)}{n} \leq \frac{1}{kn} \sum_{q=0}^{k-1} \left(\sum_{\ell=0}^{\alpha(q)} \varphi_k(T^{\ell k+q}x) + 3kC \right) = \frac{1}{kn} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi_k(T^j x) + \frac{3k}{n}C.$$

□

De la demostración anterior, es posible concluir que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi_n(x)}{n} \leq \frac{\|\varphi_k\|_\infty}{k}.$$

Lema 3.7 ([CFH08, Lemma 2.3]). *Sea $\{\nu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{M}(X)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos*

$$\mu_n := \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \nu_n \circ T^{-i}.$$

Entonces existe una subsucesión $\{\mu_{n_i}\}_i$ de $\{\mu_n\}_n$ que converge en la topología débil $$ a $\mu \in \mathcal{M}(X, T)$ y*

$$\limsup_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{n_i} \int \varphi_{n_i} d\nu_{n_i} \leq \Phi_*(\mu).$$

Demostración. El hecho de la existencia de $\{\mu_{n_i}\}_i$ y que $\mu \in \mathcal{M}(X, T)$ es sabido [VO16, Lemma 2.2.4]. Para demostrar la desigualdad, sea $n > k$, entonces usando el Lema 3.6

tenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \int \varphi_n d\nu_n &= \frac{1}{kn} \int k\varphi_n d\nu_n \\ &\leq \frac{1}{kn} \left(\int \sum_{j=0}^{n-1} \varphi_k(T^j x) d\nu_n + 3k^2 C \right) \\ &= \frac{1}{k} \int \varphi_k d\mu_n + \frac{3kC}{n}. \end{aligned}$$

Haciendo $n_i \rightarrow \infty$, obtenemos para todo k

$$\limsup_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{n_i} \int \varphi_{n_i} d\nu_{n_i} \leq \frac{1}{k} \int \varphi_k d\mu.$$

La desigualdad se sigue al tomar $k \rightarrow \infty$. □

Lema 3.8 ([CFH08, Lemma 2.4]). *Sea $\nu \in \mathcal{M}(X)$. Supongamos $\xi = \{A_1, \dots, A_k\}$ es una partición de $(X, \mathcal{B}(X))$. Entonces para cualquier par de enteros n, ℓ con $n \geq 2\ell$ se tiene*

$$\frac{1}{n} H_\nu \left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i} \xi \right) \leq \frac{1}{\ell} H_{\nu_n} \left(\bigvee_{i=0}^{\ell-1} T^{-i} \xi \right) + \frac{2\ell}{n},$$

donde $\nu_n = (1/n) \sum_{i=0}^{n-1} \nu \circ T^{-i}$.

Demostración. Para $0 \leq j \leq \ell - 1$, sea t_j el entero t más grande tal que $t\ell + j \leq n$ y sea

$$S_j = \{0, \dots, n-1\} \setminus \{r\ell + j + i : 0 \leq r < t_j, 0 \leq i < \ell\}.$$

Por lo tanto,

$$\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i} \xi = \bigvee_{r=0}^{t_j-1} T^{-r\ell-j} \bigvee_{i=0}^{\ell-1} T^{-i} \xi \vee \bigvee_{m \in S_j} T^{-m} \xi.$$

Notemos que $\#S_j \leq 2\ell$. Entonces

$$H_\nu \left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i} \xi \right) \leq \sum_{r=0}^{t_j-1} H_\nu \left(T^{-r\ell-j} \bigvee_{i=0}^{\ell-1} T^{-i} \xi \right) + 2\ell \log k.$$

Sumando sobre j de 0 a $\ell - 1$, se tiene

$$\begin{aligned}
\ell H_\nu \left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i} \xi \right) &\leq \sum_{j=0}^{\ell-1} \sum_{r=0}^{t_j-1} H_\nu \left(T^{-r\ell-j} \bigvee_{i=0}^{\ell-1} T^{-i} \xi \right) + 2\ell^2 \log k \\
&= \sum_{p=0}^{n-\ell} H_\nu \left(T^{-p} \bigvee_{i=0}^{\ell-1} T^{-i} \xi \right) + 2\ell^2 \log k \\
&\leq \sum_{p=0}^{n-1} H_\nu \left(T^{-p} \bigvee_{i=0}^{\ell-1} T^{-i} \xi \right) + 2\ell^2 \log k \\
&= \sum_{p=0}^{n-1} H_{\nu \circ T^{-p}} \left(\bigvee_{i=0}^{\ell-1} T^{-i} \xi \right) + 2\ell^2 \log k \\
&\leq n H_{\nu_n} \left(\bigvee_{i=0}^{\ell-1} T^{-i} \xi \right) + 2\ell^2 \log k.
\end{aligned}$$

Donde en la última desigualdad se usa la concavidad de $\phi(x) = -x \log x$. □

Finalmente necesitaremos el siguiente resultado demostrado en [Bow08].

Lema 3.9 ([Wal82, Lemma 9.9]). *Sean $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}$. Si $p_i \geq 0$ y $\sum_{i=1}^k p_i = 1$, entonces*

$$\sum_{i=1}^k p_i (a_i - \log p_i) \leq \log \left(\sum_{i=1}^k e^{a_i} \right).$$

La igualdad se tiene si y solo si

$$p_i = \frac{e^{a_i}}{\sum_{j=1}^k e^{a_j}}.$$

Demostración. Sea

$$M = \sum_{j=1}^k e^{a_j},$$

y sea $\phi: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\phi(x) = x \log x$. De la convexidad de ϕ , se tiene

$$0 = \phi(1) \leq \sum_{j=1}^k \frac{e^{a_j}}{M} \frac{p_j M}{e^{a_j}} \log \left(\frac{p_j M}{e^{a_j}} \right) = \sum_{j=1}^k p_j (\log p_j + \log M - a_j).$$

La igualdad se tiene si y solo si $\frac{p_i M}{e^{a_i}}$ es independiente, es decir, $p_i = \frac{e^{a_i}}{M}$. □

1.2. Demostración del Principio Variacional

Teorema 3.10 (Principio Variacional). *Sea (X, d) un espacio métrico compacto y $T: X \rightarrow X$ continua. Sea $\Phi := \{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de potenciales subaditivos con respecto a T . Entonces*

$$P(T, \Phi) = \begin{cases} -\infty, & \text{si } \Phi_*(\mu) = -\infty \text{ para toda } \mu \in \mathcal{M}(X, T), \\ \sup\{h_\mu(T) + \Phi_*(\mu) : \mu \in \mathcal{M}(X, T), \Phi_*(\mu) \neq -\infty\} & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Donde $h_\mu(T)$ es la entropía de Kolmogorov-Sinai de μ ([Wal82, Chapter 4], [VO16, Chapter 9]).

Demostración. La demostración será dividida en tres pasos.

Paso 1: Se demostrará primero que $P(T, \Phi) \geq h_\mu(T) + \Phi_*(\mu)$, si $\Phi_*(\mu) \neq -\infty$.

Sea $\mu \in \mathcal{M}(X, T)$ tal que $\Phi_*(\mu) \neq -\infty$. Sea $\xi = \{A_1, A_2, \dots, A_k\}$ una partición de $(X, \mathcal{B}(X))$. Sea $\alpha > 0$ y tomemos $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon k \log k < \alpha$. Dada la regularidad de μ , para cada j en $\{1, \dots, k\}$ existe $B_j \subset A_j$ compacto con $\mu(A_j \setminus B_j) < \varepsilon$. Sea η la partición $\{B_0, B_1, \dots, B_k\}$, donde $B_0 = X \setminus \bigcup_{j=1}^k B_j$. Sea $\phi: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$\phi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ x \log x & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

Entonces

$$\begin{aligned} H_\mu(\xi/\eta) &= - \sum_{i=0}^k \sum_{j=1}^k \mu(B_i) \phi\left(\frac{\mu(A_j \cap B_i)}{\mu(B_i)}\right) \\ &= -\mu(B_0) \sum_{j=1}^k \phi\left(\frac{\mu(A_j \cap B_0)}{\mu(B_0)}\right) \\ &\leq \mu(B_0) \log k < \varepsilon k \log k < \alpha, \end{aligned}$$

donde la segunda línea es eliminando términos y la última un corolario de la convexidad de la función ϕ .

Sea

$$b := \min_{1 \leq i \neq j \leq k} d(B_i, B_j) > 0$$

y $\delta < b/2$. Sea $n \in \mathbb{N}$. Para cada $C \in \bigvee_{j=0}^{n-1} T^{-j}\eta$ sea $x(C) \in \overline{C}$ tal que

$$e^{\varphi_n(x(C))} = \sup_{y \in C} e^{\varphi_n(y)}.$$

Notemos que para cada $C \in \bigvee_{j=0}^{n-1} T^{-j}\eta$ existen a lo más 2^n conjuntos \tilde{C} 's diferentes en $\bigvee_{j=0}^{n-1} T^{-j}\eta$ tal que

$$d_n(x(C), x(\tilde{C})) < \delta.$$

En efecto, para cada $C \in \bigvee_{j=0}^{n-1} T^{-j}\eta$ se denota $(i_0(C), i_1(C), \dots, i_{n-1}(C)) \in \{0, 1, \dots, k\}^n$ a los índices tales que

$$C = B_{i_0(C)} \cap T^{-1}B_{i_1(C)} \cap \dots \cap T^{-(n-1)}B_{i_{n-1}(C)}.$$

Fijemos $C \in \bigvee_{j=0}^{n-1} T^{-j}\eta$ y denotaremos \mathcal{V} a la colección de todos los $\tilde{C} \in \bigvee_{j=0}^{n-1} T^{-j}\eta$ tal que $d_n(x(C), x(\tilde{C})) < \delta$, entonces se demostrará que

$$\#\{i_\ell(\tilde{C}) : \tilde{C} \in \mathcal{V}\} \leq 2 \quad \forall \ell \in \{0, 1, \dots, n-1\}. \quad (3.8)$$

Supongamos por contradicción que existe ℓ tal que $\#\{i_\ell(\tilde{C}) : \tilde{C} \in \mathcal{V}\} \geq 3$. Entonces existen \tilde{C}_1 y \tilde{C}_2 distintos de C en \mathcal{V} . Luego

$$\begin{aligned} d_n(x(\tilde{C}_1), x(\tilde{C}_2)) &\geq d(T^\ell(x(\tilde{C}_1)), T^\ell(x(\tilde{C}_2))) \\ &\geq d(B_{i_\ell(\tilde{C}_1)}, B_{i_\ell(\tilde{C}_2)}) \\ &\geq b > 2\delta > d_n(x(C), x(\tilde{C}_1)) + d_n(x(C), x(\tilde{C}_2)). \end{aligned}$$

Por lo tanto, (3.8) es satisfecha.

En lo que sigue, se construirá un conjunto (n, δ) -separado de X con respecto a T tal que

$$2^n \sum_{y \in E} e^{\varphi_n(y)} \geq \sum_{C \in \bigvee_{j=0}^{n-1} T^{-j}\eta} e^{\varphi_n(x(C))} \quad (3.9)$$

Sea $C_1 \in \bigvee_{j=0}^{n-1} T^{-j}\eta$ tal que

$$e^{\varphi_n(x(C_1))} = \max_{C \in \bigvee_{j=0}^{n-1} T^{-j}\eta} e^{\varphi_n(x(C))}.$$

Se denotará \mathcal{V}_1 a la colección de todos los $\tilde{C} \in \bigvee_{j=0}^{n-1} T^{-j}\eta$ tal que $d_n(x(C_1), x(\tilde{C})) < \delta$. De (3.8), se tiene que $\#\mathcal{V}_1 \leq 2^n$. Si $\bigvee_{j=0}^{n-1} T^{-j}\eta \setminus \mathcal{V}_1 \neq \emptyset$, sea $\tilde{C}_2 \in \bigvee_{j=0}^{n-1} T^{-j}\eta \setminus \mathcal{V}_1$ tal que

$$e^{\varphi_n(x(C_2))} = \max_{C \in \bigvee_{j=0}^{n-1} T^{-j}\eta \setminus \mathcal{V}_1} e^{\varphi_n(x(C))}.$$

Sea \mathcal{V}_2 la colección de $\tilde{C} \in \bigvee_{j=0}^{n-1} T^{-j}\eta \setminus \mathcal{V}_1$ con $d_n(x(C_2), x(\tilde{C})) < \delta$. Recursivamente para

$m \geq 2$, asumiendo que C_1, \dots, C_{m-1} y $\mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_{m-1}$ están definidos, escogemos

$$C_m \in \bigvee_{j=0}^{n-1} T^{-j}\eta \setminus \bigcup_{j=1}^{m-1} \mathcal{V}_j,$$

tal que

$$e^{\varphi_n(x(C_m))} = \max_{C \in \bigvee_{j=0}^{n-1} T^{-j}\eta \setminus \bigcup_{j=1}^{m-1} \mathcal{V}_j} e^{\varphi_n(x(C))}.$$

Sea \mathcal{V}_m la colección de $\tilde{C} \in \bigvee_{j=0}^{n-1} T^{-j}\eta \setminus \bigcup_{j=1}^{m-1} \mathcal{V}_j$ con $d_n(x(C_m), x(\tilde{C})) < \delta$. Entonces, como la partición $\bigvee_{j=0}^{n-1} T^{-j}\eta$ es finita, el proceso eventualmente se deberá detener en el paso ℓ . Sea

$$E = \{x(C_j) : j = 1, \dots, \ell\}.$$

Dada la construcción, se tiene que E es un conjunto (n, δ) -separado y

$$\begin{aligned} \sum_{y \in E} e^{\varphi_n(y)} &= \sum_{j=1}^{\ell} e^{\varphi_n(x(C_j))} \\ &\geq \sum_{j=1}^{\ell} 2^{-n} \sum_{C \in \mathcal{V}_j} e^{\varphi_n(x(C))} \\ &= 2^{-n} \sum_{C \in \bigvee_{j=0}^{n-1} T^{-j}\eta} e^{\varphi_n(x(C))}. \end{aligned}$$

Lo que termina la construcción del conjunto que satisface la ecuación (3.9).

Recordemos que $\mu \in \mathcal{M}(X, T)$ y $\Phi_*(\mu) \neq -\infty$. Entonces

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} H_\mu \left(\bigvee_{j=0}^{n-1} T^{-j}\eta \right) + \frac{1}{n} \int \varphi_n d\mu &\leq \frac{1}{n} \sum_{C \in \bigvee_{j=0}^{n-1} T^{-j}\eta} \mu(C) (\varphi_n(C) - \log \mu(C)) \\ &\leq \frac{1}{n} \sum_{C \in \bigvee_{j=0}^{n-1} T^{-j}\eta} e^{\varphi_n(x(C))} \\ &\leq \frac{1}{n} \log 2^n \sum_{x \in E} e^{\varphi_n(x(C))} \\ &\leq \log 2 + \frac{1}{n} \log P_n(T, \Phi, \delta), \end{aligned}$$

donde en la segunda desigualdad se usa el Lema 3.9. Tomando $n \rightarrow \infty$ y $\delta \rightarrow 0$, se obtiene

$$h_\mu(T, \eta) + \Phi_*(\mu) \leq \log 2 + P(T, \Phi).$$

Por lo tanto,

$$h_\mu(T, \xi) + \Phi_*(\mu) \leq h_\mu(T, \eta) + H_\mu(\xi|\eta) + \Phi_*(\mu) \leq \log 2 + \alpha + P(T, \Phi).$$

Como ξ y α son arbitrarios, se concluye que

$$h_\mu(T, \Phi) + \Phi_*(\mu) \leq \log 2 + P(T, \Phi).$$

Como esto es cierto para cualquier función continua T y familia subaditiva Φ , en particular es cierto para T^k y $\Phi^{(k)}$ con $k \in \mathbb{N}$. Entonces por el Lema 3.5

$$k(h_\mu(T) + \Phi_*(\mu)) \leq \log 2 + P(T^k, \Phi^{(k)}) = \log 2 + kP(T, \Phi).$$

Como k arbitrario, tendremos que

$$h_\mu(T) + \Phi_*(\mu) \leq P(T, \Phi).$$

Paso 2: Se demostrará ahora que si $P(T, \Phi) \neq \infty$, entonces para todo $\varepsilon > 0$, existe $\mu \in \mathcal{M}(X, T)$ tal que $\Phi_*(\mu) \neq -\infty$ y $h_\mu(T) + \Phi_*(\mu) \geq P(T, \Phi, \varepsilon)$.

Sea $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño tal que $P(T, \Phi, \varepsilon) \neq -\infty$. Para $n \in \mathbb{N}$ sea $E_n \subset X$ un subconjunto (n, ε) -separado con respecto a T tal que

$$\log \sum_{y \in E_n} e^{\varphi_n(y)} \geq \log P_n(T, \Phi, \varepsilon) - 1.$$

Definimos

$$\sigma_n := \frac{\sum_{y \in E_n} e^{\varphi_n(y)} \delta_y}{\sum_{y \in E_n} e^{\varphi_n(y)}} \in \mathcal{M}(X),$$

donde δ_y es la medida de Dirac concentrada en y . Sea

$$\mu_n = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \sigma_n \circ T^i.$$

Sea $\{n_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una subsucesión tal que

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{n_i} \log P_{n_i}(T, \Phi, \varepsilon) = P(T, \Phi, \varepsilon)$$

y $\{\mu_{n_i}\}_{i \in \mathbb{N}}$ converge a $\mu \in \mathcal{M}(X, T)$ en la topología débil* (Lema 3.7). Sea $\xi = \{A_1, A_2, \dots, A_k\}$ una partición de $(X, \mathcal{B}(X))$ tal que $\text{diam}(A_i) < \varepsilon$ y $\mu(\partial A_i) = 0$ para $1 \leq i \leq k$ (para ver existencia ver [Wal82, Lemma 8.5]). Notemos que cada elemento de $\bigvee_{j=0}^{n-1} T^{-j} \xi$ contiene a lo

más un punto de E_n , entonces

$$\begin{aligned} H_{\sigma_n} \left(\bigvee_{j=0}^{n-1} T^{-j}\xi \right) + \int \varphi_n d\sigma_n &= \sum_{y \in E_n} \sigma_n(\{y\}) (\varphi_n(y) - \log \sigma_n(\{y\})) \\ &= \sum_{y \in E_n} \sigma_n(\{y\}) \log \sum_{z \in E_n} e^{\varphi_n(y)} \\ &= \log \sum_{y \in E_n} e^{\varphi_n(y)} \geq \log P_n(T, \Phi, \varepsilon) - 1. \end{aligned}$$

Entonces

$$\frac{1}{n} H_{\sigma_n} \left(\bigvee_{j=0}^{n-1} T^{-j}\xi \right) + \frac{1}{n} \int \varphi_n d\sigma_n \geq \frac{1}{n} \log P_n(T, \Phi, \varepsilon) - \frac{1}{n}. \quad (3.10)$$

Sea $\ell \in \mathbb{N}$ y aplicando el Lema 3.8, con $n_i \geq \ell$

$$\frac{1}{n_i} H_{\sigma_{n_i}} \left(\bigvee_{j=0}^{n-1} T^{-j}\xi \right) \leq \frac{1}{\ell} H_{\mu_{n_i}} \left(\bigvee_{j=0}^{\ell-1} T^{-j}\xi \right) + \frac{2\ell}{n_i} \log k \quad (3.11)$$

Como $\mu(\partial A_i) = 0$ y la sucesión $\{\mu_{n_i}\}_i$ está convergiendo a μ en la topología débil $*$, entonces

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{n_i} H_{\sigma_{n_i}} \left(\bigvee_{j=0}^{n-1} T^{-j}\eta \right) \leq \frac{1}{\ell} H_{\mu_{n_i}} \left(\bigvee_{j=0}^{\ell-1} T^{-j}\xi \right) + \frac{2\ell}{n_i} \log k. \quad (3.12)$$

Por las ecuaciones (3.11) y (3.12) se tiene

$$\limsup_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{n_i} H_{\sigma_{n_i}} \left(\bigvee_{j=0}^{n-1} T^{-j}\eta \right) \leq \frac{1}{\ell} H_{\mu} \left(\bigvee_{j=0}^{\ell-1} T^{-j}\xi \right).$$

Por el Lema 3.7

$$\limsup_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{n_i} \int \varphi_{n_i} d\sigma_{n_i} \leq \Phi_*(\mu).$$

A partir de esta última ecuación con (3.10) es posible concluir que

$$\frac{1}{\ell} H_{\mu} \left(\bigvee_{i=0}^{\ell-1} T^{-i}\xi \right) + \Phi_*(\mu) \geq P(T, \Phi, \varepsilon).$$

Como $H_{\mu} \left(\bigvee_{j=0}^{n-1} T^{-j}\xi \right) \in [0, \infty)$ y $P(T, \Phi, \varepsilon) \neq -\infty$, entonces $\Phi_*(\mu) \neq -\infty$. Así que al tomar $\ell \rightarrow \infty$ se obtiene

$$h_{\mu}(T) + \Phi_*(\mu) \geq \lim_{\ell \rightarrow \infty} \frac{1}{\ell} H_{\mu} \left(\bigvee_{j=0}^{\ell-1} \xi \right) + \Phi_*(\mu) \geq P(T, \Phi, \varepsilon).$$

Paso 3: Para finalizar basta demostrar que $P(T, \Phi) = -\infty$ si y solo si $\Phi_*(\mu) = -\infty$ para todo $\mu \in \mathcal{M}(X, T)$.

Por el Paso 1 sabemos que si existe $\mu \in \mathcal{M}(X, T)$ tal que $\Phi_*(\mu) \neq -\infty$, entonces $P(T, \Phi) \geq \Phi_*(\mu)$. Por otro lado, si $P(T, \Phi) \neq -\infty$, entonces por el Paso 2, existe $\mu \in \mathcal{M}(X, T)$ tal que $\Phi_*(\mu) \neq -\infty$. Esto finaliza la demostración del Teorema. \square

2. Sucesiones casi-aditivas y asintóticamente aditivas

En la sección anterior se demostró que en el caso subaditivo era posible obtener un principio variacional. Sin embargo, no se mencionó nada acerca de los estados de equilibrio del sistema en comparación al caso aditivo. En esta sección introduciremos una familia de funciones no aditivas en el que es posible tener un mejor conocimiento de sus estados de equilibrio dado que es similar al caso aditivo.

Definición 3.11. Una sucesión de funciones $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset C(X)$ se dice

1. *casi aditiva* si existe $C \geq 0$ tal que

$$\|\varphi_{m+n} - \varphi_n - \varphi_m \circ T^n\|_\infty \leq C, \quad n, m \geq 1. \quad (3.13)$$

2. *asintóticamente aditiva* si existe $\varphi \in C(X)$ tal que

$$\inf_{\varphi \in C(X)} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \|\varphi_n - S_n \varphi\|_\infty = 0. \quad (3.14)$$

Proposición 3.12 ([FH10, Proposition A.5 (ii)]). *Sea $\{\varphi_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ una sucesión casi-aditiva, entonces $\{\varphi_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ es asintóticamente aditiva.*

Demostración. Sea C la constante de casi-aditividad. Para cada entero positivo k se escoge m suficientemente grande tal que $2/C < 1/k$. Para cada $n > 2m$ escribimos $n = ms + l$ y tomamos $\psi_n = \varphi_n + C$, entonces por subaditividad de $\{\psi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tenemos que para cada $j < k$

$$\psi_n(x) \leq \psi_j(x) + \psi_m(T^j x) + \dots + \psi_m(T^{(s-2)m} T^j x) + \psi_{m+l-j}(T^{(s-1)m} T^j x).$$

Luego sumando sobre todos los j entre 0 y $m-1$.

$$m\psi_n \leq \sum_{j=0}^{m-1} \psi_j(x) + \sum_{i=0}^{(s-1)m-1} \psi_m(T^i x) + \sum_{j=0}^{m-1} \psi_{m+l-j}(T^{(s-1)m} T^j x).$$

De forma similar, usando super-aditividad de $\xi_n = \varphi_n - C$, tenemos

$$m\xi_n \geq \sum_{j=0}^{m-1} \xi_j + \sum_{i=0}^{(s-1)m-1} \xi_m(T^i x) + \sum_{j=0}^{m-1} \xi_{m+l-j}(T^{(s-1)m} T^j x).$$

Sea $K = \max_{0 \leq j \leq 2m} \max_{x \in X} \{|\psi_j(x)|\}$ y $L = \max_{0 \leq j \leq 2m} \max_{x \in X} \{|\xi_j(x)|\}$, entonces

$$\xi_n \leq 4K + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\psi_m \circ T^i}{m}, \quad \xi_n(x) \geq -4L + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\xi_m \circ T^i}{m}.$$

Por lo tanto,

$$-4L - \frac{nC}{m} + C \leq \varphi_n - S_n\left(\frac{\varphi_m}{m}\right) \leq 4K + \frac{nC}{m} - C, \quad \forall x \in X.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\varphi_n - S_n\left(\frac{\varphi_m}{m}\right)}{n} \right\|_{\infty} &\leq \max \left\{ \left| \frac{-4L + C}{n} + \frac{C}{m} \right|, \left| \frac{4K - C}{n} + \frac{C}{m} \right| \right\} \\ &\leq \max \left\{ \left| \frac{-4L + C}{n} \right|, \left| \frac{4K - C}{n} \right| \right\} + \frac{1}{2m}. \end{aligned}$$

Tomando $n \rightarrow \infty$ y luego $m \rightarrow \infty$ tenemos lo pedido. □

El objetivo de esta sección es demostrar que si $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es casi o asintóticamente aditiva, entonces se podrá expresar como la suma entre una sucesión aditiva para T y algo que será despreciable para hacer formalismo termodinámico. Es decir, propiedades como presión topológica, estados de equilibrio, principio variacional, medidas Gibbs débiles, conjuntos de nivel para el exponente de Lyapunov serán iguales tanto para la sucesión de potenciales $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ como para la sucesión aditiva.

Para demostrar esta descomposición, será necesario recordar el cociente de un espacio Banach.

Definición 3.13. Sean $(V, \|\cdot\|)$ un espacio Banach y U un subespacio cerrado de V . Definimos la relación de equivalencia \sim por $\varphi \sim \psi$ si y solo si $\varphi - \psi \in U$. Definimos $V/U := V/\sim$.

Dado que U es un subespacio, es sabido que V/U es un espacio vectorial. Se denotará $[\varphi]$ a la clase de equivalencia de $\varphi \in V$. Sea $\|\cdot\|_*: V/U \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ la función definida por

$$\|[\varphi]\|_* = \inf_{\psi \in [\varphi]} \|\psi\| = \inf_{u \in U} \|\varphi - u\|. \quad (3.15)$$

Notemos que la función $\|\cdot\|_*$ es una norma sobre V/U . En efecto, por definición podemos ver

que la desigualdad triangular y la homogeneidad absoluta son satisfechas. Para ver la última condición, notemos que $\|[0]\|_* = 0$. Por otro lado, si

$$0 = \|\varphi\|_* = \inf_{u \in U} \|\varphi - u\|,$$

entonces $[\varphi] = 0$, dado que podemos construir $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset U$ tal que $u_n \rightarrow \varphi$, como U es cerrado esto implica que $\varphi \in U$, lo que quiere decir que $[\varphi] = 0$.

Proposición 3.14 ([Bre11, Proposition 11.8]). *El espacio cociente V/U equipado con la norma $\|\cdot\|_*$ es un espacio Banach.*

Demostración. Sea $\{[\varphi_n]\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en V/U . Bastará demostrar que esta sucesión contiene una subsucesión convergente. Para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos asumir, salvo pasar a una subsucesión, que $\|[\varphi_n] - [\varphi_{n+1}]\|_* < 1/2^n$ y sea $u_n \in U$ tal que $\|\varphi_n - \varphi_{n+1} - u_n\| < 1/2^n$. Sea $v_1 := 0$, y para cada $n > 1$, $u_n := v_{n+1} - v_n$. Entonces para $m > n$

$$\|(\varphi_n - v_n) - (\varphi_m - v_m)\| \leq \sum_{j=n}^{m-1} \|(\varphi_j - v_j) - (\varphi_{j+1} - v_{j+1})\| \leq \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Por lo tanto, podemos concluir que la sucesión $\{\varphi_n + v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy, por lo que converge. Sea

$$\varphi = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n + v_n.$$

Por continuidad del mapa de proyección se obtiene que

$$[\varphi] = \lim_{n \rightarrow \infty} [\varphi_n + v_n] = \lim_{n \rightarrow \infty} [\varphi_n].$$

En consecuencia $[\varphi]$ es el límite de $\{[\varphi_n]\}_{n \in \mathbb{N}}$. □

Con este resultado es posible demostrar el resultado más importante de esta sección.

Teorema 3.15 ([Cun20, Theorem 2.1]). *Sea $(V, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado, $W \subset V$ un subespacio tal que $(W, \|\cdot\|)$ es Banach y $K: W \rightarrow W$ una contracción. Para cada $\varphi \in W$ y $n \in \mathbb{N}$, denotaremos*

$$S_n \varphi = \sum_{k=0}^{n-1} K^k \varphi.$$

Si $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset W$ es una sucesión tal que

$$\inf_{\varphi \in W} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \|\varphi_n - S_n \varphi\| = 0. \quad (3.16)$$

Entonces existe $\varphi \in W$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \|\varphi_n - S_n \varphi\| = 0. \quad (3.17)$$

Demostración. Definamos

$$\mathcal{L} := \overline{\{h - Kh : h \in W\}} \subset W,$$

donde la clausura está tomada sobre el espacio Banach W . Consideremos la relación

$$\varphi \sim \psi \iff \varphi - \psi \in \mathcal{L}, \quad f, g \in W. \quad (3.18)$$

Para cada $\varphi \in W$ denotaremos $[\varphi]$ a la clase de equivalencia de este.

Como \mathcal{L} es cerrado, el espacio cociente W/\sim es un espacio Banach con respecto a la norma $\|\cdot\|_*$ definida en (3.15) (Proposición 3.14).

Para probar el resultado será necesario relacionar la norma $\|\cdot\|_*$ con las n -ésimas sumas parciales. Demostraremos que para todo $\varphi \in W$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \|S_n \varphi\| = \|[\varphi]\|_*. \quad (3.19)$$

Notemos que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{n} S_n \varphi \sim \varphi. \quad (3.20)$$

En efecto,

$$\varphi - \frac{1}{n} S_n \varphi = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} S_i \varphi - K \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} S_i \varphi \right).$$

Por (3.20) tenemos $\|S_n \varphi\|/n \geq \|[\varphi]\|_*$ y por ende $\liminf_{n \rightarrow \infty} \|S_n \varphi\|/n \geq \|[\varphi]\|_*$. Para probar la cota en la otra dirección, notemos que para todo $\varepsilon > 0$, existe $\xi_\varepsilon \in W$ tal que $\|\varphi + \psi_\varepsilon - K\psi_\varepsilon\| \leq \|[\varphi]\|_* + \varepsilon$. Se sigue que

$$\begin{aligned} \|S_n \varphi\| &\leq \|S_n(\varphi + \xi_\varepsilon - K\xi_\varepsilon)\| + \|S_n(\xi_\varepsilon - K\xi_\varepsilon)\| \\ &\leq n\|\varphi + \xi_\varepsilon - K\xi_\varepsilon\| + \|\xi_\varepsilon - K^n \xi_\varepsilon\| \\ &\leq n(\|[\varphi]\|_* + \varepsilon) + 2\|\xi_\varepsilon\|. \end{aligned}$$

Dividiendo por n , tomando $n \rightarrow \infty$ y usando que ε era arbitrario, tenemos la desigualdad

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \|S_n \varphi\| \leq \|[\varphi]\|_*,$$

que completa la igualdad que se quería demostrar.

Notemos que para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $\varphi^{(k)} \in W$ tal que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \|\varphi_n - S_n \varphi^{(k)}\| \leq \frac{1}{k}. \quad (3.21)$$

Por (3.19) y (3.21) se tiene $k, \ell \geq 1$,

$$\|[\varphi^{(k)}] - [\varphi^{(\ell)}]\|_* = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \|S_n \varphi^{(k)} - S_n \varphi^{(\ell)}\| \leq \frac{1}{k} + \frac{1}{\ell}. \quad (3.22)$$

Se sigue que $\{[\varphi^{(k)}]\}_{k \in \mathbb{N}}$ es Cauchy en $(W/\sim, \|\cdot\|_*)$ y por lo tanto, existe $\varphi \in W$ tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\varphi^{(k)} - [\varphi]\| = 0.$$

Usando nuevamente (3.19) y (3.21), tenemos que para $k \geq 1$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \|\varphi_n - S_n \varphi\| \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (\|\varphi_n - S_n \varphi^{(k)}\| + \|S_n \varphi^{(k)} - S_n \varphi\|) \leq \frac{1}{k} + \|[\varphi^{(k)}] - [\varphi]\|_*.$$

Tomando límite cuando $k \rightarrow \infty$ se tiene (3.17). \square

Volviendo ahora a la notación establecida al inicio del capítulo, tenemos el siguiente corolario.

Corolario 3.16 ([Cun20, Theorem 1.2]). *Sea $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de potenciales continuos asintóticamente aditivos (o casi aditivos). Entonces, existe $\varphi \in C(X)$ tal que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \|\varphi_n - S_n \varphi\|_\infty = 0. \quad (3.23)$$

Demostración. Tomar $V = W = C(X)$, $\|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty$, K el operador de Koopman para T y usar Teorema 3.15. \square

Del Teorema 3.15 se tiene que existe $\varphi \in C(X)$ y $\{\psi_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset C(X)$ tales que para cada $n \in \mathbb{N}$

$$\varphi_n = S_n \varphi + \psi_n, \quad (3.24)$$

con $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\psi_n\|_\infty / n = 0$.

Podemos hacer las siguientes observaciones del Teorema 3.15:

(I) La sucesión $\{[\varphi_n]/n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a $[f]$ en $C(X)/\sim$. De hecho por (3.20), tenemos

$$\left\| \frac{1}{n} [\varphi_n] - [f] \right\|_* \leq \frac{1}{n} \|\varphi_n - S_n f\|_\infty.$$

(II) Para toda $f \in C(X)$, tenemos $\|[f]\|_* = \sup_{\mu \in \mathcal{M}_T(X)} \left| \int f d\mu \right|$.

(III) Tenemos $\mathcal{L} = \overline{\{h - h \circ T : h \in C(X)\}}$, donde la clausura es tomada en $(C(X), \|\cdot\|_\infty)$. Si $f \sim g$, entonces se dice que f y g son *físicamente equivalentes* o *débilmente cohomólogos*.

3. Formalismo Termodinámico No Aditivo

En esta sección se darán las definiciones necesarias para desarrollar Formalismo Termodinámico para potenciales no aditivos. Esta teoría nace en [Fal88] con el propósito de estudiar Teoría de la Dimensión para sistemas no conformes. Los contenidos de esta sección están basados en [Cun20].

Definición 3.17. Decimos que una sucesión de funciones $\Phi = \{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es asintóticamente subaditiva si para cada $\varepsilon > 0$ existe una sucesión subaditiva $\{\psi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\|\varphi_n - \psi_n\|_\infty}{n} < \varepsilon, \quad (3.25)$$

donde $\|\varphi\|_\infty := \sup_{x \in X} |\varphi(x)|$.

Dada esta definición, podemos ver que casi aditiva implica asintóticamente aditiva y a su vez esta implica asintóticamente subaditiva. También es claro que la condición de subaditividad implica la condición de ser asintóticamente subaditiva. Para sucesiones de potenciales asintóticamente subaditivos, Barreira en [Bar11], a partir de la Definición 3.3, extendió el concepto para familias asintóticamente subaditivas.

Definición 3.18. Sea $\Phi := \{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset C(X)$ asintóticamente subaditiva. Para $n \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon > 0$ definimos

$$P_n(T, \Phi, \varepsilon) = \sup \left\{ \sum_{x \in E} e^{\varphi_n(x)} : E \subset X \text{ y } E \text{ es un conjunto } (n, \varepsilon)\text{-separado} \right\}.$$

Dado que el espacio X es compacto, podemos garantizar que $P_n(T, \Phi, \varepsilon) < \infty$. Definimos ahora

$$P(T, \Phi, \varepsilon) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log P_n(T, \Phi, \varepsilon).$$

Notemos que es posible que $P(T, \Phi, \varepsilon) = \infty$. Sin embargo, dado que la función $P_n(T, \Phi, \varepsilon)$ es decreciente para ε , si $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ y $P(T, \Phi, \varepsilon_2) = \infty$, entonces $P(T, \Phi, \varepsilon_1) = \infty$. Esto nos permite definir la *presión topológica* de Φ como

$$P(T, \Phi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} P(T, \Phi, \varepsilon) \in [-\infty, \infty]. \quad (3.26)$$

Observación 3.2. Al igual que en la Observación 3.1, dado $\delta > 0$, por definición sabemos que existe N suficientemente grande tal que para todo $n \geq N$ se tiene

$$\varphi_n(x) \leq \psi_n(x) + n\delta. \quad (3.27)$$

Si $r(T, \varepsilon) < \infty$, entonces por la desigualdad 3.27 y la subaditividad de $\{\psi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ se tiene que

$$P(T, \Phi, \varepsilon) \leq \log \max_{x \in X} \psi_1(x) + r(X, T, \varepsilon) + \delta < \infty.$$

Barreira en [Bar11, Theorem 7.2.1], basándose en la demostración del Teorema 3.10, desarrolla un Principio Variacional para familias asintóticamente subaditivas que además sean de variación templada.

Definición 3.19. Decimos que la sucesión $\Phi := \{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset C(X)$ satisface el *principio variacional* si

$$P(T, \Phi) = \sup_{\mu \in \mathcal{M}(X, T)} (\Phi_*(\mu) + h_\mu(T)), \quad (3.28)$$

donde $P(T, \Phi)$ está definida en Definición

En la sección anterior se demostró que si Φ era una sucesión de funciones subaditiva, entonces esta debe satisfacer el Principio Variacional. En esta sección, basándose en el Teorema 3.16, se discutirá qué tan bien se conocen los estados de equilibrio cuando Φ es una sucesión asintóticamente aditiva.

Notemos que si Φ es una sucesión de funciones aditivas, tendremos que

$$\varphi_2 = \varphi_1 + \varphi_1 \circ T.$$

Inductivamente, se obtiene

$$\varphi_n = \varphi_{n-1} + \varphi_1 \circ T^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \varphi_1 \circ T^k.$$

De lo que podemos concluir que Φ viene de una suma de Birkhoff, es decir, $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \{S_n \varphi_1\}_{n \in \mathbb{N}}$. Los conceptos recién definidos ya han sido estudiados cuando Φ es una sucesión aditiva (Ver [Wal82, Chapter 9]). El objetivo de esta sección es estudiar el Formalismo Termodinámico para sucesiones de funciones asintóticamente aditivas.

Si Φ es una sucesión de funciones asintóticamente aditivas, de la ecuación (3.24) y del Principio Variacional para funciones asintóticamente subaditivas [Bar11, Theorem 7.2.1], se tiene

que:

$$P(T, \Phi) = P(T, \varphi) \quad \text{y} \quad \Phi_*(\mu) = \int \varphi d\mu.$$

Donde $P(T, \varphi)$ es la presión topológica estándar [Wal82, Chapter 9]. Como consecuencia se tiene que los estados de equilibrio para Φ y φ son las mismas.

En lo que resta de sección, se estudiarán consecuencias del Teorema 3.15 en el Formalismo Termodinámico con este tipo de funciones.

Definición 3.20. Decimos que una medida de probabilidad $\mu \in \mathcal{M}(X, T)$ es una *medida de Gibbs* para Φ si para todo $\varepsilon > 0$ existe $K_\varepsilon \geq 1$ tal que

$$K_\varepsilon^{-1} \leq \frac{\mu(\{y \in X : d_n(x, y) < \varepsilon\})}{\exp(\varphi_n(x) - nP(T, \Phi))} \leq K_\varepsilon, \quad x \in X, n \geq 1.$$

Decimos que $\mu \in \mathcal{M}(X)$ es una *medida de Gibbs débil* para Φ si existe una familia $\{K_{n,\varepsilon}\}_{n \in \mathbb{N}, \varepsilon > 0} \subset [1, \infty)$ tal que $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \log K_{n,\varepsilon}/n = 0$ y

$$K_{n,\varepsilon}^{-1} \leq \frac{\mu(\{y \in X : d_n(x, y) < \varepsilon\})}{\exp(\varphi_n - nP(T, \Phi))} \leq K_{n,\varepsilon}, \quad x \in X, n \in \mathbb{N}.$$

Definición 3.21. Una sucesión de funciones $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset C(X)$ satisface la *condición de variación acotada* si existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{\substack{x, y \in X \\ d_n(x, y) < \varepsilon}} |\varphi_n(x) - \varphi_n(y)| < \infty.$$

La existencia y unicidad de medidas de Gibbs T -invariantes para una sucesión de potenciales casi-aditiva que además satisface la condición de variación acotada, ha sido demostrada en ciertos sistemas dinámicos. En [Bar06] fue demostrado para repulsores de un mapa C^1 , mientras que en [Mum06] está hecho para subshifts de tipo finito. En ambos casos, dichas medidas coinciden con el estado de equilibrio para la sucesión dada.

Si Φ es asintóticamente aditiva, usando el Teorema 3.16, se tiene que esta tiene las mismas medidas de Gibbs débiles que φ . En consecuencia, si $\mu \in \mathcal{M}(X)$ es de Gibbs débil con respecto a una sucesión de potenciales asintóticamente aditivos, entonces μ es medida de Gibbs débil para una sucesión de potenciales aditiva.

Sin embargo, lo anterior no es cierto para medidas de Gibbs. Hasta ahora, es posible decir que una medida de Gibbs con respecto a Φ es Gibbs débil con respecto a φ . Por otro lado, se ha demostrado en [IY17, Corollary 2.1] que si X es un shift topológico de Markov, para toda medida de Gibbs débil para un potencial φ , existe una sucesión asintóticamente aditiva

Φ tal que μ es de Gibbs para Φ .

Veamos ahora qué sucede en un caso más particular. Sea $X = \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ con un conjunto finito \mathcal{A} , y dotemos este espacio con la distancia $d(x, y) = 2^{-n(x, y)}$ si $x \neq y$, donde

$$n(x, y) = \min\{i \geq 1 : x_i \neq y_i\},$$

y $d(x, y) = 0$ si $x = y$. Consideremos T el shift izquierdo. Dada una medida $\mu \in \mathcal{M}(X)$ se usará la notación

$$\mu_n(a_1, \dots, a_n) = \mu\{x \in X : x_i = a_i, 1 \leq i \leq n\}, \quad a_1, \dots, a_n \in \mathcal{A}, n \geq 1.$$

Definición 3.22. Una medida $\mu \in \mathcal{M}(X)$ es *débilmente acoplada* si $\mu_1(a) > 0$ para todo $a \in \mathcal{A}$ y si existe $\{D_n\}_{n \geq 1} \subset [1, \infty)$ que satisface

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log D_n = 0, \quad (3.29)$$

tal que para todo $m, n \geq 1$, $a_1, \dots, a_{m+n} \in \mathcal{A}$,

$$D_n^{-1} \leq \frac{\mu_{n+m}(a_1, \dots, a_{n+m})}{\mu_n(a_1, \dots, a_n) \mu_m(a_{n+1}, \dots, a_{n+m})} \leq D_n. \quad (3.30)$$

Una medida $\mu \in \mathcal{M}(X)$ es *quasi-Bernoulli* si se cumple (3.30) para $D_n = D$, con D independiente de n .

Dada una medida débilmente acoplada μ , para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos definir $\varphi_n: X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\varphi_n(x) = \log \mu_n(x_1, \dots, x_n), \quad x \in X. \quad (3.31)$$

Al igual que antes, consideramos $\Phi = \{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Entonces, para todo par $m, n \in \mathbb{N}$ se tiene

$$\|\varphi_{n+m} - \varphi_n - \varphi_m \circ T^n\|_{\infty} \leq \log D_n, \quad n, m \geq 1.$$

En particular si μ es quasi-Bernoulli, entonces Φ es casi-aditiva, de hecho la condición (3.29) es suficiente para asegurar que Φ es asintóticamente aditiva, esto se puede ver en [CJPS19, Theorem 6.1]. Usando entonces el Teorema 3.16 y el hecho de que la presión de (3.31) es cero, tenemos el siguiente corolario.

Corolario 3.23 ([Cun20, Corollary 4.2]). *Sea μ débilmente acoplada. Entonces μ es débil Gibbs con respecto a un potencial aditivo, es decir, existe $\varphi \in C(X)$ y una sucesión $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset$*

$[1, \infty)$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} K_n/n = 0$ y

$$K_n^{-1} \leq \frac{\mu_n(x_1, \dots, x_n)}{e^{(S_n \varphi)(x)}} \leq K_n, \quad n \geq 1, x \in X. \quad (3.32)$$

Dada una medida quasi-Bernoulli μ , es natural cuestionarse si es posible encontrar un potencial $\varphi \in C(X)$ tal que

$$K_n^{-1} \leq \frac{\mu_n(x_1, \dots, x_n)}{e^{(S_n \varphi)(x)}} \leq K_n, \quad n \geq 1, x \in X.$$

En otras palabras, ¿es posible encontrar un potencial $\varphi \in C(X)$ tal que μ sea una medida de Gibbs con respecto a φ ? Se pueden hacer los siguientes comentarios:

- El recíproco es cierto, es decir, si μ es de Gibbs con respecto a $\varphi \in C(X)$, entonces μ es quasi-Bernoulli.
- El Corolario 3.23 provee una respuesta parcial garantizando que μ es al menos débil Gibbs para algún $\varphi \in C(X)$.
- Un ejemplo de medida quasi-Bernoulli que no es de Gibbs con respecto a ningún potencial Hölder es conocido [BKM20, Example 2.10], pero esta medida puede todavía ser de Gibbs con respecto a un potencial continuo.
- Si μ es débilmente acoplada, entonces μ no necesariamente es Gibbs para alguna función $\varphi \in C(X)$. De hecho, si μ es invariante, la propiedad de Gibbs implica que μ es mixing, mientras que muchas medidas en mecánica estadística son débilmente acopladas sin siquiera ser ergódicas.

Finalmente, recordemos que si Φ es casi aditiva y de variación acotada, existe una función $\varphi \in C(X)$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \|\varphi_n - S_n \varphi\|_\infty = 0.$$

A pesar de que Φ sea de variación acotada, no necesariamente $\{S_n \varphi\}_{n \geq 1}$ lo será. Entonces el argumento de unicidad no se puede reemplazar por el argumento estándar del potencial φ , pues este requiere que dichas sumas sean de variación acotada.

De hecho, si $\varphi \sim \varphi'$ en el sentido de la relación definida en (3.18), entonces μ es Gibbs débil para φ si y solo si lo es para φ' . Sin embargo, puede pasar que exista una medida μ que sea de Gibbs para φ sin serlo para φ' . Incluso, puede ocurrir que φ satisfaga la condición de variación acotada, mientras que φ' no.

Bibliografía

- [Bar96] L. Barreira. A non-additive thermodynamic formalism and applications to dimension theory of hyperbolic dynamical systems. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 16(5):871–927, 1996.
- [Bar06] L. Barreira. Nonadditive thermodynamic formalism: equilibrium and Gibbs measures. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 16(2):279–305, 2006.
- [Bar11] L. Barreira. *Thermodynamic formalism and applications to dimension theory*, volume 294 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel, 2011.
- [BDK⁺73] D. L. Burkholder, D. Daley, H. Kesten, P. Ney, F. Spitzer, J. M. Hammersley, and J. F. C. Kingman. Discussion on Professor Kingman’s paper. *Ann. Probability*, 1:900–909, 1973.
- [BKM20] B. Bárány, A. Käenmäki, and I. Morris. Domination, almost additivity, and thermodynamic formalism for planar matrix cocycles. *Israel J. Math.*, 239(1):173–214, 2020.
- [Bow08] R. Bowen. *Equilibrium states and the ergodic theory of Anosov diffeomorphisms*, volume 470 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, revised edition, 2008. With a preface by David Ruelle.
- [Bre11] H. Brezis. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Universitext. Springer, New York, 2011.
- [CFH08] Y. Cao, D. Feng, and W. Huang. The thermodynamic formalism for sub-additive potentials. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 20(3):639–657, 2008.
- [CJPS19] N. Cuneo, V. Jakšić, C. Pillet, and A. Shirikyan. Large deviations and fluctuation theorem for selectively decoupled measures on shift spaces. *Rev. Math. Phys.*, 31(10):1950036, 54, 2019.

- [Cun20] N. Cuneo. Additive, almost additive and asymptotically additive potential sequences are equivalent. *Comm. Math. Phys.*, 377(3):2579–2595, 2020.
- [Der80] Y. Derriennic. Quelques applications du théorème ergodique sous-additif. In *Conference on Random Walks (Kleebach, 1979) (French)*, volume 74 of *Astérisque*, pages 183–201, 4. Soc. Math. France, Paris, 1980.
- [dJ77] A. del Junco. On the decomposition of a subadditive stochastic process. *Ann. Probability*, 5(2):298–302, 1977.
- [Fal88] K. J. Falconer. A subadditive thermodynamic formalism for mixing repellers. *J. Phys. A*, 21(14):L737–L742, 1988.
- [FH10] D-J. Feng and W. Huang. Lyapunov spectrum of asymptotically sub-additive potentials. *Comm. Math. Phys.*, 297(1):1–43, 2010.
- [FK60] H. Furstenberg and H. Kesten. Products of random matrices. *Ann. Math. Statist.*, 31:457–469, 1960.
- [Fol84] G. B. Folland. *Real analysis*. Pure and Applied Mathematics (New York). John Wiley & Sons, Inc., New York, 1984. Modern techniques and their applications, A Wiley-Interscience Publication.
- [HW65] J. M. Hammersley and D. J. A. Welsh. First-passage percolation, subadditive processes, stochastic networks, and generalized renewal theory. In *Proc. Internat. Res. Semin., Statist. Lab., Univ. California, Berkeley, Calif., 1963*, pages 61–110. Springer, New York, 1965.
- [IY17] G. Iommi and Y. Yayama. Weak Gibbs measures as Gibbs measures for asymptotically additive sequences. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 145(4):1599–1614, 2017.
- [Käe04] A. Käenmäki. On natural invariant measures on generalised iterated function systems. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.*, 29(2):419–458, 2004.
- [Kar17] A. Karlsson. A proof of the subadditive ergodic theorem. In *Groups, graphs and random walks*, volume 436 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 343–354. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2017.
- [Kin68] J. F. C. Kingman. The ergodic theory of subadditive stochastic processes. *J. Roy. Statist. Soc. Ser. B*, 30:499–510, 1968.
- [Kom67] J. Komlós. A generalization of a problem of Steinhaus. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, 18:217–229, 1967.

- [Mis76] M. Misiurewicz. A short proof of the variational principle for a \mathbb{Z}_+^N action on a compact space. In *International Conference on Dynamical Systems in Mathematical Physics (Rennes, 1975)*, volume No. 40 of *Astérisque*, pages 147–157. Soc. Math. France, Paris, 1976.
- [Mum06] A. Mummert. The thermodynamic formalism for almost-additive sequences. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 16(2):435–454, 2006.
- [Roy63] H. L. Royden. *Real analysis*. The Macmillan Company, New York; Collier Macmillan Ltd., London, 1963.
- [Sch86] M. Schwartz. New proofs of a theorem of Komlós. *Acta Math. Hungar.*, 47(1-2):181–185, 1986.
- [Tol20] J. Toland. *The dual of $L_\infty(X, \mathcal{L}, \lambda)$, finitely additive measures and weak convergence—a primer*. SpringerBriefs in Mathematics. Springer, Cham, 2020.
- [Ver10] S. Vermeeren. Sequences and nets in topology. *arXiv preprint arXiv:1006.4472*, 2010.
- [VO16] M. Viana and K. Oliveira. *Foundations of ergodic theory*, volume 151 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2016.
- [Wal82] P. Walters. *An introduction to ergodic theory*, volume 79 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982.
- [YH52] K. Yosida and E. Hewitt. Finitely additive measures. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 72:46–66, 1952.