



Familias de funciones armónicas afín y linealmente invariantes, funciones armónicas generalizadas de Koebe y propiedades geométricas y analíticas de familias de funciones armónicas convexas

por

Álvaro Ferrada Salas

Tesis presentada al Departamento de Matemáticas de la
Pontificia Universidad Católica de Chile para optar al
grado de Doctor en Matemáticas

Octubre, 2015

Director de Tesis: **Dr. Martín Chuaqui Farrú**

FACULTAD DE MATEMÁTICAS
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

INFORME DE APROBACIÓN
TESIS DE DOCTORADO

Se informa a la Escuela de Postgrado de la Facultad de Matemáticas que la Tesis de Doctorado presentada por el candidato

Álvaro Ferrada Salas

ha sido aprobada por la Comisión de Evaluación de la Tesis como requisito para optar al grado de Doctor en Matemáticas, en el examen de Defensa de Tesis rendido el día 19 de Octubre de 2015.

Director de Tesis

Dr. Martin Chuaqui Farrú

Comisión de Evaluación de la Tesis

Dr. Martin Chuaqui Farrú

Dr. Rodrigo Hernández Reyes

Dra. María José Martín Gómez

Dr. Gonzalo Riera Lira

AGRADECIMIENTOS

Primeramente, quisiera agradecer al profesor Alejandro Ramírez por haberme dado la oportunidad de ser parte del programa de doctorado en Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica de Chile, este trabajo no habría sido posible sin su apoyo.

Agradecer a mi tutor, el profesor Martin Chuaqui, por su infinita confianza y apoyo tanto en mi período estudiantil como en mis planes futuros.

Agradezco a la profesora María José Martín por su disposición, amabilidad, confianza, paciencia y consejos que me brindó durante mi estadía en Finlandia.

Al profesor Rodrigo Hernández también quiero agradecer su apoyo y por ayudarme a concretar mis planes a futuro.

No puedo dejar de mencionar a la profesora Pilar Herreros por sus seminarios de Geometría Riemanniana y al profesor Alberto Montero por su gran disponibilidad, amabilidad y paciencia en reiteradas ocasiones.

Quiero agradecer a Isabel, María Eliana, Ernestina, Sole y Oscar por su cariño y alegría durante todo este tiempo. En varias ocasiones la ayuda que me brindó la Sra. Erika Pino fue fundamental, por esta razón quisiera también agradecerle.

Por supuesto, a mis amigos y colegas Danilo Garrido; Gabriel Muñoz; Rodrigo Vargas; Sebastián Herrero; Enrique Guerra; Carlos Piutrin y Cristian Vasquez, y a mis amigos de toda la vida Pablo Montero; Nicolás Martínez; Eduardo Gelves y Cristian Montero. A cada uno de ellos les agradezco su compañía durante este gran proceso vivido. Por otra parte, a mis amigos Kian; Iason; Mar; Antonio; Manuel; Vero y Nuria agradecerles por su grata compañía en Finlandia.

Tampoco dejaré de agradecer a mi Mamá, hermanos y familia. En particular, a mi tío Christian y Abuelo Manuel por brindarme su apoyo cada vez que los necesité.

Por supuesto, no me puedo olvidar de mi amada e incondicional Pola, mi adorada y hermosa hija Emilia y a mi querida Valentina por todo el amor, apoyo y alegrías que me dan día a día, en todo momento.

Finalmente, quisiera agradecer a CONICYT por todo el apoyo económico que me brindó a través de su beca de Doctorado nacional. Sin uds. esto jamás habría sido posible.

Muchas gracias.

Índice

Introducción	1
1. Funciones analíticas	19
1.1. Funciones univalentes. Definiciones y propiedades básicas	19
1.2. Funciones convexas	23
1.3. Familias de funciones analíticas linealmente invariantes	24
1.4. Relaciones de Marty	29
2. Funciones armónicas	31
2.1. Definiciones y propiedades básicas	31
2.2. La construcción por estiramiento	35
2.3. Funciones armónicas convexas	37
2.4. Funciones armónicas completamente convexas	39
2.5. Funciones armónicas establemente convexas	40
2.6. Familias de funciones armónicas afín y linealmente invariantes	42
2.7. Relaciones de Marty armónicas	47
3. Espacios de Hardy	51
3.1. Espacios de Hardy H^p	51
3.2. Espacios de Hardy h^p	54

4. Resultados Principales	56
4.1. Funciones armónicas generalizadas de Koebe y sus propiedades extremales .	56
4.2. Propiedades geométricas y analíticas de partes analíticas y dilataciones de funciones armónicas en familias de funciones convexas	68
4.3. Funciones convexas con dilatación pequeña	90
Referencias	93

Introducción

Sea D un dominio en el plano complejo. Una función armónica en D es una función de valores complejos $f = u + iv$, donde u y v satisfacen la ecuación de Laplace $\Delta u = \Delta v = 0$ en D . Cuando D es un dominio simplemente conexo, cada función armónica tiene la representación $f = h + \bar{g}$, donde h y g son funciones analíticas en D . Esta representación es única salvo una constante aditiva. Para funciones armónicas f en el disco unidad \mathbb{D} , es conveniente escoger tal constante de modo que $g(0) = 0$. En este caso, la representación es única y es llamada representación canónica de f . Como es usual, llamaremos a h y g las partes analítica y co-analítica de f , respectivamente.

H. Lewy en [23] prueba que una función armónica es localmente univalente en un dominio D si y sólo si su Jacobiano J_f no se anula en D . Dada la representación canónica de f , no es difícil ver que el Jacobiano de f está dado por $J_f = |h'|^2 - |g'|^2$. Una función armónica $f = h + \bar{g}$ se dice que preserva la orientación en D si $J_f > 0$. En tal caso, la función $\omega = g'/h'$ está bien definida (dado que h' no se anula) y satisface la propiedad $|\omega| < 1$ en D . La función ω es llamada segunda dilatación compleja (o simplemente dilatación) de f .

La familia \mathcal{S}_H consiste de todas las funciones $f = h + \bar{g}$ armónicas y univalentes que preservan la orientación en \mathbb{D} , normalizadas por las condiciones $h(0) = 1 - h'(0) = 0$ y $g(0) = 0$. Si una función armónica $f = h + \bar{g} \in \mathcal{S}_H$ satisface la condición adicional $g'(0) = 0$, entonces diremos que $f \in \mathcal{S}_H^0$.

Recordemos que la clase \mathcal{S} se define como la familia de funciones f analíticas y uni-

valentes en \mathbb{D} normalizadas por las condiciones $f(0) = 1 - f'(0) = 0$. Con estas normalizaciones se ve que cada función $f \in \mathcal{S}$ tiene la representación

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Bieberbach en [3] muestra que el coeficiente a_2 de toda función $f \in \mathcal{S}$ satisface la desigualdad $|a_2| \leq 2$, con igualdad para la función de Koebe

$$\kappa(z) = \frac{z}{(1-z)^2}, \quad z \in \mathbb{D}, \quad (1)$$

y sus rotaciones. Este resultado dio origen a la *Conjetura de Bieberbach* que aseguró que los coeficientes a_n de toda función $f \in \mathcal{S}$ satisfacen la desigualdad $|a_n| \leq n$ para todo $n \geq 2$, con igualdad para la función de Koebe (1) y sus rotaciones. Esta conjetura fue resuelta por L. de Branges en 1985 en [5] y se conoce como el Teorema de Bieberbach-de Branges.

Como podemos observar, ambas clases de funciones armónicas \mathcal{S}_H y \mathcal{S}_H^0 definidas anteriormente pueden ser vistas como una generalización al caso armónico de la clase \mathcal{S} . Sin embargo, como se muestra en [10, Teo. 2.3], \mathcal{S}_H es una familia normal y la familia \mathcal{S}_H^0 es una familia normal y compacta. Dado que \mathcal{S} es una familia normal y compacta (ver por ejemplo [14, Sec. 1.3]) se tiene que \mathcal{S}_H^0 es una apropiada generalización al caso armónico de la familia \mathcal{S} .

La normalidad y compacidad de la clase \mathcal{S}_H^0 garantizan la existencia de una función extremal en \mathcal{S}_H^0 para el problema de maximizar la parte real del n -ésimo coeficiente a_n (resp. b_n) de las partes analíticas (resp. partes co-analíticas) de funciones $f = h + \bar{g} \in \mathcal{S}_H^0$. En [10, Sec. 7], los autores conjeturan que los coeficientes a_n, b_n de toda función $f = h + \bar{g} \in \mathcal{S}_H^0$, donde

$$h(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \quad \text{y} \quad g(z) = \sum_{n=2}^{\infty} b_n z^n, \quad z \in \mathbb{D},$$

satisfacen las desigualdades

$$|a_n| \leq \frac{1}{6}(n+1)(2n+1) \quad \text{y} \quad |b_n| \leq \frac{1}{6}(n-1)(2n-1)$$

para todo $n \geq 2$, con igualdad para la función armónica de Koebe

$$K(z) = \frac{z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3}{(1-z)^3} + \frac{\overline{\frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3}}{(1-z)^3}, \quad z \in \mathbb{D} \quad (2)$$

y sus rotaciones. La conjetura anterior se conoce como *la Conjetura Armónica de Bieberbach* y aún se encuentra sin resolver.

Marty en [24] muestra que la relación

$$(n+1)a_{n+1} - 2a_2a_n - (n-1)\overline{a_{n-1}} = 0,$$

conocida como *relación de Marty*, se debe cumplir para cada función $f \in \mathcal{S}$ cuyo n -ésimo coeficiente a_n tiene parte real máxima. Adaptando la demostración del resultado de Marty, podemos obtener las correspondientes *relaciones de Marty* para el caso armónico. Es decir, si $f = h + \bar{g} \in \mathcal{S}_H^0$ tiene coeficiente a_n de parte real máxima, entonces tal coeficiente debe satisfacer la ecuación

$$(n+1)a_{n+1} - 2a_2a_n - 2b_2\overline{b_n} - (n-1)\overline{a_{n-1}} = 0. \quad (3)$$

De manera similar, si $f = h + \bar{g} \in \mathcal{S}_H^0$ tiene coeficiente b_n de parte real máxima, entonces este coeficiente debe satisfacer la ecuación

$$(n+1)b_{n+1} - 2a_2b_n - 2b_2\overline{a_n} - (n-1)\overline{b_{n-1}} = 0. \quad (4)$$

Un simple cálculo muestra que los coeficientes a_n, b_n de la función armónica K definida en (2) están dados por

$$a_n = \frac{1}{6}(n+1)(2n+1) \quad \text{y} \quad b_n = \frac{1}{6}(n-1)(2n-1),$$

y satisfacen las ecuaciones (3) y (4) para todo $n \geq 2$. Por lo tanto, la función armónica K califica como una posible función extremal en \mathcal{S}_H^0 para cada coeficiente a_n y b_n .

El método de Marty aplica en el contexto más general de familias afín y linealmente invariantes. Una familia \mathcal{F}_H de funciones $f = h + \bar{g}$ armónicas y localmente univalentes que preservan la orientación en \mathbb{D} , normalizadas por las condiciones $h(0) = 1 - h'(0) = 0$ y $g(0) = 0$ es llamada afín y linealmente invariante si esta es cerrada bajo las transformaciones

$$\mathcal{K}_\varphi(f)(z) = \frac{(f \circ \varphi)(z) - (f \circ \varphi)(0)}{(h \circ \varphi)'(0)}, \quad z \in \mathbb{D}, \quad \varphi \in \text{Aut}(\mathbb{D}),$$

y

$$\mathcal{A}_\varepsilon(f)(z) = \frac{f(z) - \overline{\varepsilon f(z)}}{1 - \overline{\varepsilon} g'(0)}, \quad z \in \mathbb{D}, \quad \varepsilon \in \mathbb{D},$$

donde $\text{Aut}(\mathbb{D})$ denota el conjunto de todas las funciones analíticas en \mathbb{D} de la forma

$$\varphi(z) = \lambda \frac{z + \zeta}{1 + \bar{\zeta}z}, \quad z \in \mathbb{D},$$

donde $|\lambda| = 1$ y $\zeta \in \mathbb{D}$. Si una función armónica $f = h + \bar{g} \in \mathcal{F}_H$ satisface la condición adicional $g'(0) = 0$, entonces diremos que $f \in \mathcal{F}_H^0$. Este concepto generaliza el de familia linealmente invariante introducido por Pommerenke en [25]. Algunas propiedades importantes en una familia afín y linealmente invariante \mathcal{F}_H tales como crecimiento y cubrimiento pueden ser determinadas por su orden definido por

$$\text{Ord}(\mathcal{F}_H) = \sup_{f=h+\bar{g} \in \mathcal{F}_H} |a_2(h)| = \frac{1}{2} \sup_{f=h+\bar{g} \in \mathcal{F}_H} |h''(0)|.$$

TEOREMA A (Teorema de Crecimiento y Cubrimiento). *Sea \mathcal{F}_H una familia de funciones armónicas afín y linealmente invariante con orden $\alpha = \text{Ord}(\mathcal{F}_H) < \infty$. Si $f = h + \bar{g} \in \mathcal{F}_H^0$, entonces para cada $z \in \mathbb{D}$*

$$|f(z)| \leq \frac{1}{2\alpha} \left[\left(\frac{1+|z|}{1-|z|} \right)^\alpha - 1 \right]. \quad (5)$$

Si además $f \in \mathcal{F}_H^0 \cap \mathcal{S}_H^0$, entonces para cada $z \in \mathbb{D}$ se cumple la desigualdad

$$\frac{1}{2\alpha} \left[1 - \left(\frac{1-|z|}{1+|z|} \right)^\alpha \right] \leq |f(z)|. \quad (6)$$

En particular, el rango de toda función armónica $f = h + \bar{g} \in \mathcal{F}_H^0 \cap \mathcal{S}_H^0$ contiene el disco $\{|z| < 1/2\alpha\}$.

Un ejemplo de familia afín y linealmente invariante es la familia \mathcal{S}_H de todas las funciones $f = h + \bar{g}$ armónicas y univalentes que preservan la orientación en \mathbb{D} , normalizadas por las condiciones $h(0) = 1 - h'(0) = 0$ y $g(0) = 0$. Para esta familia se desconoce el valor de $Ord(\mathcal{S}_H)$ pero se cree que es igual a 3. Un ejemplo de familia afín y linealmente invariante que será de importancia en esta tesis es la familia \mathcal{F}_H^M ($M > 0$) de funciones $f = h + \bar{g}$ armónicas localmente univalentes que preservan la orientación en \mathbb{D} , normalizadas por las condiciones $h(0) = 1 - h'(0) = 0$ y $g(0) = 0$ y que satisfacen $\|S[f]\| \leq M$, donde $S[f]$ es la derivada Schwarziana para funciones armónicas localmente univalentes definida en [20] y

$$\|S[f]\| := \sup_{z \in \mathbb{D}} |S[f](z)|(1 - |z|^2)^2.$$

Como fue mostrado en [9], las funciones del tipo $K_{\alpha,R} = h + \bar{g}$, donde h y g resuelven el sistema

$$\begin{cases} h - g = \kappa_\alpha \\ \omega = g'/h' = l_R \end{cases}, \quad h(0) = g(0) = 0, \quad (7)$$

con

$$\kappa_\alpha(z) = \frac{1}{2\alpha} \left[\left(\frac{1+z}{1-z} \right)^\alpha - 1 \right], \quad z \in \mathbb{D},$$

y

$$l_R(z) = \frac{\left(\frac{1+z}{1-z} \right)^R - 1}{\left(\frac{1+z}{1-z} \right)^R + 1}, \quad z \in \mathbb{D},$$

para adecuados valores de $\alpha \in \mathbb{C}$ y $0 \leq R \leq 1$, son extremales para el problema de maximizar la parte real del segundo coeficiente de h para funciones $f = h + \bar{g} \in (\mathcal{F}_H^M)^0$.

Uno de los resultados principales de esta tesis es que las funciones del tipo $K_{\alpha,R}$ en (7), para adecuados valores de $\alpha \in \mathbb{C}$ y $0 \leq R \leq 1$, son las únicas posibles funciones que maximizan las partes reales de todos los coeficientes de Taylor de h y g para funciones

$f = h + \bar{g} \in \mathcal{F}_H^0$, donde \mathcal{F}_H es una familia de funciones armónicas afín y linealmente invariante. Para ser más precisos, mostraremos el siguiente resultado.

TEOREMA 1 (Sección 4.1). *Sea \mathcal{F}_H una familia de funciones armónicas localmente univalentes que preservan la orientación en \mathbb{D} , afín y linealmente invariante. Supongamos que existe $f_0 = h_0 + \bar{g}_0 \in \mathcal{F}_H^0$ tal que*

$$\sup_{f=h+\bar{g} \in \mathcal{F}_H^0} \operatorname{Re}\{a_n(h)\} = \operatorname{Re}\{a_n(h_0)\} \quad \text{y} \quad \sup_{f=h+\bar{g} \in \mathcal{F}_H^0} \operatorname{Re}\{b_n(g)\} = \operatorname{Re}\{b_n(g_0)\} \quad (8)$$

para todo $n \geq 2$. Entonces, $f_0 = K_{\alpha,R}$, donde $K_{\alpha,R}$ es la función armónica generalizada de Koebe (7), con $\alpha = a_2(h_0) - b_2(g_0)$ y $R = 2b_2(g_0)$. Más aún, el orden de \mathcal{F}_H es igual a $\operatorname{Ord}(\mathcal{F}_H) = \alpha + R$.

Una aplicación del teorema anterior muestra que las funciones del tipo $K_{\alpha,R}$, para adecuados valores de $\alpha \in \mathbb{C}$ y $0 \leq R \leq 1$, son las que dan la igualdad en el Teorema A de crecimiento en familias de funciones armónicas afín y linealmente invariantes.

TEOREMA 2 (Sección 4.1). *Sea \mathcal{F}_H una familia de funciones armónicas localmente univalentes que preservan la orientación en \mathbb{D} , afín y linealmente invariante. Supongamos que existe una función $f_0 = h_0 + \bar{g}_0 \in \mathcal{F}_H^0$ tal que h_0 y g_0 satisfacen las ecuaciones (8) para todo $n \geq 2$. Entonces, la igualdad se presenta en alguna de las desigualdades de (5) y (6) (según sea el caso) para la función f_0 .*

Para los siguientes resultados, la univalencia de las funciones $K_{\alpha,R}$, para $\alpha \in \mathbb{R}$ y $0 \leq R \leq 1$, será de gran importancia.

TEOREMA 3 (Sección 4.1). *Sea α un número real y $0 \leq R \leq 1$. Entonces, $K_{\alpha,R}$ es univalente si y sólo si $-2 \leq \alpha \leq 2$.*

Notar que $K = K_{2,1}$, es decir, la función $K = h + \bar{g}$ definida en (2) se obtiene al resolver el sistema

$$\begin{cases} h(z) - g(z) = z/(1-z)^2 \\ \omega(z) = g'(z)/h'(z) = z \end{cases}, \quad h(0) = g(0) = 0, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Como fue mencionado anteriormente, la función armónica de Koebe K definida en (2) califica como una posible función extremal en \mathcal{S}_H^0 para el problema de maximizar las partes reales de cada coeficiente de Taylor de h y g para funciones $f = h + \bar{g} \in \mathcal{S}_H^0$. El siguiente resultado muestra que en la familia \mathcal{S}_H^0 , la función armónica de Koebe es la única posible.

COROLARIO 1 (Sección 4.1). *Supongamos que existe una función $f_0 = h_0 + \bar{g}_0 \in \mathcal{S}_H^0$ que satisface las ecuaciones*

$$\sup_{f=h+\bar{g} \in \mathcal{S}_H^0} \operatorname{Re}\{a_n(h)\} = \operatorname{Re}\{a_n(h_0)\} \quad \text{y} \quad \sup_{f=h+\bar{g} \in \mathcal{S}_H^0} \operatorname{Re}\{b_n(g)\} = \operatorname{Re}\{b_n(g_0)\}$$

para todo $n \geq 2$. Entonces, f_0 es la función armónica de Koebe (2).

Otra importante consecuencia de los Teoremas 1, 2 y 3 es el teorema de crecimiento y cubrimiento para la clase \mathcal{S}_H^0 .

COROLARIO 2 (Sección 4.1). *Supongamos que existe una función $f_0 = h_0 + \bar{g}_0 \in \mathcal{S}_H^0$ que satisface las ecuaciones*

$$\sup_{f=h+\bar{g} \in \mathcal{S}_H^0} \operatorname{Re}\{a_n(h)\} = \operatorname{Re}\{a_n(h_0)\} \quad \text{y} \quad \sup_{f=h+\bar{g} \in \mathcal{S}_H^0} \operatorname{Re}\{b_n(g)\} = \operatorname{Re}\{b_n(g_0)\}$$

para todo $n \geq 2$. Si $f = h + \bar{g} \in \mathcal{S}_H^0$, entonces para cada $z \in \mathbb{D}$

$$\frac{1}{6} \left[1 - \left(\frac{1 - |z|}{1 + |z|} \right)^3 \right] \leq |f(z)| \leq \frac{1}{6} \left[\left(\frac{1 + |z|}{1 - |z|} \right)^3 - 1 \right]. \quad (9)$$

La igualdad se alcanza en alguna de las desigualdades de (9) para la función armónica de Koebe (2). En particular, el rango de toda función armónica $f = h + \bar{g} \in \mathcal{S}_H^0$ contiene el disco $\{|z| < 1/6\}$.

En esta tesis también estamos interesados en estudiar la relación entre la convexidad de f y de h en la descomposición $f = h + \bar{g}$. Veremos que para cierta familia de funciones convexas, tal relación es bien estrecha.

Recordemos que la familia \mathcal{C}_H consiste de todas las funciones armónicas $f = h + \bar{g} \in \mathcal{S}_H$ tal que $f(\mathbb{D})$ es un dominio convexo. Si una función armónica $f = h + \bar{g} \in \mathcal{C}_H$ satisface la condición adicional $g'(0) = 0$, entonces diremos que $f \in \mathcal{C}_H^0$.

Es conocido que las funciones analíticas convexas en \mathbb{D} se pueden caracterizar por la condición

$$Re \left\{ 1 + z \frac{f''(z)}{f'(z)} \right\} > 0, \quad z \in \mathbb{D}. \quad (10)$$

En esta condición esta implícita la propiedad hereditaria para funciones convexas, es decir, si f es una función analítica convexa, entonces $f(\{z : |z| < r\})$ es un dominio convexo para cada $0 < r < 1$. Desafortunadamente, esta propiedad no se generaliza para funciones armónicas convexas dado que la función

$$L(z) = Re \left\{ \frac{1}{1-z} \right\} + iIm \left\{ \frac{z}{(1-z)^2} \right\}, \quad z \in \mathbb{D}, \quad (11)$$

es un ejemplo de una función armónica convexa que transforma el disco $\{z : |z| \leq r\}$ en un dominio no convexo para cada $r \in (\sqrt{2} - 1, 1)$. Los autores en [7] definen la familia de funciones armónicas convexas en \mathbb{D} que tienen la propiedad hereditaria. Tales funciones son llamadas funciones completamente convexas y al conjunto de tales funciones lo denotamos por \mathcal{CC}_H . Los autores en [7] muestran que las funciones completamente convexas se pueden caracterizar por la condición

$$\begin{aligned} & |zh'(z)|^2(1 - |\omega(z)|^2) Re \left\{ 1 + z \frac{h''(z)}{h'(z)} \right\} \\ & \geq |z\omega(z)h'(z)|^2 Re \left\{ z \frac{\omega'(z)}{\omega(z)} \right\} - Re \{ z^3 \omega'(z) h'(z)^2 \}, \quad z \in \mathbb{D}, \end{aligned} \quad (12)$$

que generaliza el criterio de convexidad para funciones analíticas convexas en (10).

Otra importante familia de funciones convexas es la de funciones establemente convexas. Una función $f = h + \bar{g}$ armónica y localmente univalente que preserva la orientación en \mathbb{D} es llamada establemente convexa si, para todo $|\lambda| = 1$, las funciones armónicas

$f_\lambda := h + \lambda\bar{g}$ son convexas en \mathbb{D} . Esta familia de funciones convexas es introducida en [19] y es denotada por \mathcal{SC}_H . Como muestran los autores en [19], toda función establemente convexa puede ser caracterizada por la condición

$$\operatorname{Re} \left\{ 1 + z \frac{h''(z)}{h'(z)} + \frac{\lambda z \omega'(z)}{1 + \lambda \omega(z)} \right\} > 0, \quad z \in \mathbb{D}, \quad |\lambda| = 1, \quad (13)$$

que también generaliza el criterio de convexidad para funciones analíticas convexas en (10).

Una aplicación del principio del máximo muestra que la desigualdad (13) es válida para todo $|\lambda| \leq 1$. Por lo tanto, tomando $\lambda = 0$ concluimos que las partes analíticas de funciones establemente convexas son funciones analíticas convexas.

Se puede observar que este resultado no es válido para la familia de funciones convexas \mathcal{C}_H dado que la función L definida en (11) tiene parte analítica

$$h(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{z}{1-z} + \frac{z}{(1-z)^2} \right), \quad z \in \mathbb{D},$$

que no es convexa. De esta manera, es natural pensar si las partes analíticas de funciones completamente convexas son convexas dado que en la inecuación (12) interviene el término

$$\operatorname{Re} \left\{ 1 + z \frac{h''(z)}{h'(z)} \right\},$$

que está estrechamente relacionado con la convexidad de h . Respecto a esto último, hemos obtenido el siguiente resultado.

TEOREMA 4 (Sección 4.2). *Existe $f = h + \bar{g} \in \mathcal{CC}_H$ tal que su parte analítica h no es convexa.*

Por lo tanto, entre las tres familias de funciones convexas \mathcal{SC}_H , \mathcal{CC}_H y \mathcal{C}_H , la familia \mathcal{SC}_H es la única tal que todas sus funciones tienen partes analíticas convexas.

Las dilataciones de funciones armónicas $f = h + \bar{g}$ pertenecientes a las distintas familias de funciones convexas serán también estudiadas. Como veremos, este estudio determina

(por ejemplo) condiciones analíticas y geométricas que deben satisfacer las funciones establemente convexas.

Para simplificar, denotamos por $\mathcal{A}(\mathbb{D}; \mathbb{D})$ al conjunto de funciones ω analíticas en \mathbb{D} tales que $\omega(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$. Para $0 < \varepsilon < 1$ denotamos por $\mathcal{A}_\varepsilon(\mathbb{D}; \mathbb{D})$ al conjunto de funciones analíticas $\omega \in \mathcal{A}(\mathbb{D}; \mathbb{D})$ que satisfacen la condición $|\omega(z)| < \varepsilon$, $z \in \mathbb{D}$. Sea \mathcal{H} un conjunto de funciones armónicas en \mathbb{D} , diremos que una función $\omega \in \mathcal{A}(\mathbb{D}; \mathbb{D})$ es admisible en \mathcal{H} si existe una función armónica $f = h + \bar{g} \in \mathcal{H}$ tal que $\omega = g'/h'$, es decir, ω es dilatación de alguna función armónica en \mathcal{H} . Al conjunto de dilataciones admisibles en un conjunto de funciones armónicas \mathcal{H} lo denotamos por $\mathcal{D}_{\mathcal{H}}$.

Respecto a las dilataciones de funciones convexas, hemos obtenido el siguiente teorema.

TEOREMA 5 (Sección 4.2). $\mathcal{D}_{\mathcal{C}_H} = \mathcal{A}(\mathbb{D}; \mathbb{D})$.

Para funciones completamente convexas, no hemos conseguido avances en esta línea, pero creemos que el conjunto de dilataciones de funciones completamente convexas deben estar contenidas (propriadamente) en $\mathcal{A}(\mathbb{D}; \mathbb{D})$.

Para el siguiente teorema acerca de las dilataciones de funciones armónicas establemente convexas, es importante tener en consideración la teoría de espacios de Hardy. Recordemos que el espacio de Hardy H^p ($0 < p \leq \infty$) se define como el espacio de funciones f analíticas en \mathbb{D} tales que

$$\sup_{0 < r < 1} M_p(r, f) < \infty,$$

donde

$$M_p(r, f) = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta \right\}^{1/p}, \quad 0 < p < \infty,$$

y

$$M_\infty(r, f) = \max_{0 \leq \theta < 2\pi} |f(re^{i\theta})|, \quad p = \infty.$$

Con la ayuda de esta teoría, hemos sido capaces de mostrar el siguiente teorema.

TEOREMA 6 (Sección 4.2). *Si $\omega \in \mathcal{D}_{SC_H}$, entonces $\omega' \in H^p$ para todo $p < 1$.*

El teorema anterior tiene importantes consecuencias acerca del tipo de convexidad de funciones establemente convexas $f = h + \bar{g}$ y sus partes analíticas h . Acerca de las partes analíticas de funciones establemente convexas, el siguiente teorema fue obtenido.

TEOREMA 7 (Sección 4.2). *Sea h una función analítica k -convexa. Sea $\omega \in \mathcal{A}(\mathbb{D}; \mathbb{D})$ no constante tal que $\omega' \in H^\infty$. Entonces, existe $\alpha \in \mathbb{D}$ tal que la función armónica $f = h + \bar{g}$ con dilatación $\alpha\omega$ es establemente convexa.*

Recordemos que una función k -convexa es una función φ analítica y localmente univalente en \mathbb{D} que satisface la condición

$$\operatorname{Re} \left\{ 1 + z \frac{\varphi''(z)}{\varphi'(z)} \right\} \geq k, \quad z \in \mathbb{D},$$

para algún $k \in (0, 1]$.

No es difícil ver que cualquier función convexa es la parte analítica de una función establemente convexa. Para esto, basta mostrar que si h es convexa, entonces para cada $a \in \mathbb{D}$ la función $f_a = h + a\bar{h}$ es establemente convexa. En palabras simples, toda función convexa es la parte analítica de una función establemente convexa con dilatación constante. El teorema anterior muestra (en particular) que toda función k -convexa es la parte analítica de una función establemente convexa con dilatación no constante. La pregunta es, ¿Es cierto que cualquier función convexa h es la parte analítica de alguna función establemente convexa con dilatación no constante?

A continuación presentaremos un resultado que será de gran utilidad para responder a la pregunta anterior, para esto, necesitamos un concepto adicional. Diremos que una curva de Jordan $C \subset \mathbb{C}$ es de clase $\mathcal{C}^{n,\alpha}$ ($0 < \alpha \leq 1$) si tiene una parametrización $C : w(t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, que es n -veces continuamente diferenciable con $w'(t) \neq 0$ y existe

$M > 0$ tal que

$$|w^{(n)}(t_1) - w^{(n)}(t_2)| \leq M|t_1 - t_2|^\alpha, \quad t_1, t_2 \in [0, 2\pi].$$

TEOREMA 8 (Sección 4.2). *Sea Γ una curva de Jordan convexa en \mathbb{C} . Sean $w_1, \dots, w_n = w_0$ puntos en Γ (en orden cíclico) y sean Γ_k los arcos cerrados entre w_{k-1} y w_k , $k = 1, 2, \dots, n$. Supongamos que los arcos Γ_k son de clase $C^{2,\alpha}$ para algún $\alpha > 0$, no contienen segmentos rectos (o más generalmente, no contienen puntos de curvatura cero) y que la curva Γ forma en w_k un ángulo interior $\pi\alpha_k$, con $0 \leq \alpha_k < 1$. Sea Ω el dominio acotado por la curva Γ . Si h mapea \mathbb{D} conformemente sobre Ω , entonces h es δ -convexa para algún $\delta > 0$.*

En palabras simples, si h es una función convexa tal que $\partial h(\mathbb{D})$ es una curva convexa lo suficientemente suave y lo suficientemente curvada, entonces h es la parte analítica de una función establemente convexa con dilatación no constante. ¿Será que esto es válido para funciones convexas h tal que $\partial h(\mathbb{D})$ contiene (por ejemplo) segmentos en la frontera?

La respuesta a esta pregunta la presentamos a continuación.

TEOREMA 9 (Sección 4.2). *Sea $f = h + \bar{g} \in \mathcal{SC}_H$. Si $\partial h(\mathbb{D})$ contiene segmentos, entonces la dilatación ω de f es constante.*

Dicho de otra manera, si $f = h + \bar{g}$ es una función establemente convexa cuya dilatación ω es no constante, entonces $\partial h(\mathbb{D})$ no contiene segmentos.

Con el resultado anterior, es posible determinar el espacio h^p que contiene a las funciones establemente convexas, donde h^p ($0 < p \leq \infty$) denota el espacio de funciones f armónicas (de valores complejos) en \mathbb{D} tales que

$$\sup_{0 < r < 1} m_p(r, f) < \infty,$$

donde

$$m_p(r, f) = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta \right\}^{1/p}, \quad 0 < p < \infty,$$

y

$$m_\infty(r, f) = \max_{0 \leq \theta < 2\pi} |f(re^{i\theta})|, \quad p = \infty.$$

Como es sabido, cada función en la familia \mathcal{C}_H pertenece al espacio h^p para todo $p < 1/2$. Por lo tanto, lo mismo es válido para funciones establemente convexas dado que $\mathcal{SC}_H \subset \mathcal{C}_H$. El siguiente teorema muestra que para el caso de funciones establemente convexas, lo anterior se puede mejorar de la siguiente manera.

TEOREMA 10 (Sección 4.2). *Sea $f = h + \bar{g}$ una función establemente convexa y ω su dilatación. Si ω es constante, entonces $f \in h^p$ para todo $p < 1$. Si ω es no constante, entonces para todo $\lambda \in \overline{\mathbb{D}}$ las funciones analíticas $F_\lambda = h + \lambda g$ pertenecen al espacio H^1 . En particular, $f \in h^1$.*

El teorema anterior tiene una interesante consecuencia acerca de la geometría del dominio convexo $f(\mathbb{D})$, para $f \in \mathcal{SC}_H$. Por ejemplo, en [1], [11] y [18], los autores dan descripciones analíticas de las funciones armónicas cuya imagen es un semiplano. Concretamente, si $f = h + \bar{g} \in \mathcal{S}_H^0$ mapea el disco unitario sobre el semiplano $H = \{w : \operatorname{Re}\{w\} > -1/2\}$, entonces h, g satisfacen la ecuación

$$h(z) + g(z) = \frac{z}{1-z}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Dado que la función

$$\ell(z) = \frac{z}{1-z}, \quad z \in \mathbb{D},$$

no pertenece al espacio de Hardy H^1 , se obtiene el siguiente resultado.

TEOREMA 11 (Sección 4.2). *Sea $f = h + \bar{g} \in \mathcal{SC}_H^0$. Si f mapea \mathbb{D} sobre el semiplano $H = \{w : \operatorname{Re}\{w\} > -1/2\}$, entonces la dilatación ω de f es constante. Más aún, f es analítica e igual a*

$$f(z) = \frac{z}{1-z}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

En otras palabras, la función $f(z) = z/(1-z)$ es la única función en \mathcal{SC}_H^0 que mapea el disco unitario sobre el semiplano $H = \{w : \operatorname{Re}\{w\} > -1/2\}$.

Por otra parte, los autores mencionados antes también muestran que si una función armónica $f = h + \bar{g} \in \mathcal{S}_H^0$ mapea \mathbb{D} sobre la banda

$$S_\alpha = \left\{ w : \frac{\alpha - \pi}{2 \sin \alpha} < \operatorname{Re}\{w\} < \frac{\alpha}{2 \sin \alpha} \right\}, \quad (14)$$

entonces h, g satisfacen la condición

$$h(z) + g(z) = \frac{1}{2i \sin \alpha} \log \left(\frac{1 + e^{i\alpha} z}{1 + e^{-i\alpha} z} \right), \quad z \in \mathbb{D}.$$

Respecto a esto último, mostraremos que si una función armónica $f = h + \bar{g} \in \mathcal{SC}_H^0$ mapea \mathbb{D} sobre la banda (14), entonces la dilatación ω de f es constante. Es importante notar que este resultado no puede ser obtenido argumentando como en el Teorema 11, dado que la función analítica

$$s_\alpha(z) = \frac{1}{2i \sin \alpha} \log \left(\frac{1 + e^{i\alpha} z}{1 + e^{-i\alpha} z} \right), \quad z \in \mathbb{D},$$

con $\pi/2 \leq \alpha < \pi$, pertenece al espacio de Hardy H^p para todo $0 < p < \infty$ (ver [6]). Sin embargo, este resultado es consecuencia del siguiente teorema.

TEOREMA 12 (Sección 4.2). *Sea φ una función analítica convexa en \mathbb{D} tal que $\varphi(\mathbb{D})$ es un polígono. Fijemos λ , con $|\lambda| = 1$, y supongamos que la función armónica $f = h + \bar{g}$ tal que h, g resuelven el sistema*

$$\begin{cases} h(z) + \lambda g(z) = \varphi(z) \\ g'(z)/h'(z) = \omega(z) \end{cases}, \quad h(0) = g(0) = 0, \quad z \in \mathbb{D},$$

es establemente convexa. Entonces, la dilatación ω de f es constante.

COROLARIO 3 (Sección 4.2). *Sea $f = h + \bar{g} \in \mathcal{SC}_H^0$. Si f mapea \mathbb{D} sobre la banda (14), entonces la dilatación ω de f es constante. Más aún, f es analítica e igual a*

$$f(z) = \frac{1}{2i \sin \alpha} \log \left(\frac{1 + e^{i\alpha} z}{1 + e^{-i\alpha} z} \right), \quad z \in \mathbb{D}.$$

Estos últimos resultados acerca de la geometría del dominio $f(\mathbb{D})$ para $f \in \mathcal{SC}_H^0$, junto con el Teorema 9, motivan lo siguiente:

CONJETURA 1. *Si $f = h + \bar{g}$ es una función establemente convexa tal que $\partial f(\mathbb{D})$ contiene un segmento, entonces la dilatación ω de f es constante.*

Respecto a lo anterior, el siguiente resultado fue obtenido.

TEOREMA 13 (Sección 4.2). *Si $f = h + \bar{g}$ es una función establemente convexa tal que $f(\mathbb{D})$ es un polígono, entonces la dilatación ω de f es constante.*

Gracias a los Teoremas 9 y 13 es posible establecer una estrecha relación entre los dominios $h(\mathbb{D})$ y $f(\mathbb{D})$ para $f = h + \bar{g} \in \mathcal{SC}_H$.

TEOREMA 14 (Sección 4.2). *Sea $f = h + \bar{g}$ una función establemente convexa. Entonces, $\partial f(\mathbb{D})$ es un polígono si y sólo si $\partial h(\mathbb{D})$ es un polígono.*

Como fue señalado antes (Teorema 6), la dilatación ω de toda función $f = h + \bar{g} \in \mathcal{SC}_H$ tiene derivada en el espacio de Hardy H^p para todo $p < 1$. Este teorema resultó ser importante para establecer ciertos resultados analíticos y geométricos de funciones establemente convexas. Como veremos, este teorema también será importante para responder a la siguiente pregunta.

PREGUNTA 1. *Sea h analítica y convexa en \mathbb{D} . ¿Existe $\varepsilon > 0$ tal que cada mapeo armónico de la forma $f = h + \bar{g}$ con dilatación $\omega \in \mathcal{A}_\varepsilon(\mathbb{D}; \mathbb{D})$ es convexa?*

La motivación de esta pregunta se basa en un resultado obtenido por lo autores en [8] y que se presenta a continuación.

TEOREMA B. *Sea h analítica y convexa en \mathbb{D} . Entonces, existe $\varepsilon > 0$ tal que cada mapeo armónico de la forma $f = h + \bar{g}$ con dilatación $\omega \in \mathcal{A}_\varepsilon(\mathbb{D}; \mathbb{D})$ es univalente.*

En relación a la Pregunta 1, el siguiente resultado fue obtenido.

TEOREMA 15 (Sección 4.3). *Sea h una función convexa en \mathbb{D} . Son equivalentes:*

- 1) *Existe $\varepsilon > 0$ tal que toda función armónica $f = h + \bar{g}$ con dilatación $\omega \in \mathcal{A}_\varepsilon(\mathbb{D}; \mathbb{D})$ es establemente convexa.*
- 2) *Existe $\varepsilon > 0$ tal que toda función armónica $f = h + \bar{g}$ con dilatación $\omega \in \mathcal{A}_\varepsilon(\mathbb{D}; \mathbb{D})$ es convexa.*

De esta manera, el teorema anterior muestra que podemos modificar la Pregunta 1 de una manera más sencilla para poder establecer su respuesta. Finalmente, la respuesta de la pregunta en cuestión está dada por el siguiente resultado.

TEOREMA 16 (Sección 4.3). *La respuesta a la Pregunta 1 es NO.*

Para finalizar este capítulo introductorio, mostraremos a continuación la organización de nuestro trabajo de tesis.

1. En el Capítulo 1 daremos las definiciones, ejemplos y resultados más importantes para esta tesis acerca de funciones analíticas univalentes y familias de funciones analíticas linealmente invariantes. Todo lo expuesto en este capítulo es parte de la teoría elemental y se puede encontrar en la literatura, salvo algunos resultados específicos los cuales se dará la referencia respectiva. Entre estos distinguimos [14], [16], [17] y [26].
2. En el Capítulo 2 haremos un resumen de las definiciones y resultados clásicos acerca de funciones armónicas univalentes con principal énfasis en las familias de funciones

armónicas convexas \mathcal{C}_H , \mathcal{CC}_H y \mathcal{SC}_H . Estudiaremos también el concepto de familias afín y linealmente invariantes presentando los teoremas clásicos y ejemplos más importantes que motivaran algunos resultados de nuestra tesis. Todo lo expuesto en este capítulo es parte de una variada selección de libros y artículos entre los cuales algunos de ellos son muy recientes. Distinguimos [15] como un excelente libro de la teoría general de funciones armónicas en el plano.

3. En el Capítulo 3 haremos un breve resumen acerca de los espacios de Hardy H^p y h^p para el caso analítico y armónico, respectivamente. Para el caso analítico haremos una recopilación de los resultados que más se usarán en esta tesis. Todos ellos pueden ser encontrados en [13]. Para el caso armónico destacaremos como único resultado que toda función armónica convexa en la clase \mathcal{C}_H esta en el espacio de Hardy h^p para todo $p < 1/2$. Sugerimos [15, Cap. 8.5] para más detalles.
4. En el Capítulo 4 mostraremos todos los resultados obtenidos en esta tesis y lo organizaremos como sigue:
 - a) En la Sección 4.1, llamada *Funciones armónicas generalizadas de Koebe y sus propiedades extremales*, estudiaremos las funciones que maximizan la parte real de todos los coeficientes de Taylor en familias afín y linealmente invariantes de funciones armónicas normalizadas en \mathbb{D} . Estudiaremos algunas de sus propiedades y mostraremos algunas aplicaciones a la familia de funciones \mathcal{S}_H .
 - b) En la Sección 4.2, llamada *Propiedades geométricas y analíticas de partes analíticas y dilataciones de funciones armónicas en familias de funciones convexas*, estudiaremos las partes analíticas y dilataciones de las distintas familias de funciones armónicas convexas. Acto seguido, analizaremos las consecuencias geométricas y analíticas que tiene el estudio anterior para la familia de funciones armónicas establemente convexas.

- c) En la Sección 4.3, llamada *Funciones convexas con dilatación pequeña*, responderemos a la Pregunta 1. En esta sección, veremos la importancia del Teorema 6 para la respuesta de tal pregunta.

Capítulo 1

Funciones analíticas

1.1. Funciones univalentes. Definiciones y propiedades básicas

Sea Ω un dominio en \mathbb{C} . Una función analítica $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ se dice univalente en Ω si f es inyectiva en Ω . Una función f se dice localmente univalente en $z_0 \in \Omega$ si existe una vecindad U de z_0 tal que la restricción de f a U es univalente. Para funciones analíticas f , la condición $f'(z_0) \neq 0$ es equivalente a la univalencia local en z_0 . Entre tantos teoremas importantes para funciones analíticas, queremos distinguir los de Riemann, Montel y Hurwitz. Por una parte, el teorema de Riemann asegura que todo dominio simplemente conexo distinto de \mathbb{C} es conformemente equivalente al disco unitario \mathbb{D} . Por otra parte, el teorema de Hurwitz establece que el límite uniforme en compactos en un dominio Ω de una sucesión de funciones univalentes es univalente o constante. Finalmente, el teorema de Montel dice que toda familia \mathcal{A} de funciones analíticas localmente uniformemente acotadas es una familia normal. Recordemos que una familia \mathcal{A} de funciones analíticas en un dominio Ω es llamada una familia normal si cada sucesión de funciones $\{f_n\} \subset \mathcal{A}$ tiene una sub-sucesión que converge uniformemente en cada compacto contenido en Ω . Una familia \mathcal{A} de funciones analíticas en un dominio Ω se dice localmente uniformemente acotada, si para cada disco cerrado $B \subset \Omega$, existe una constante $M > 0$ tal que $|f(z)| \leq M$ para todo $z \in B$ y para toda $f \in \mathcal{A}$.

Denotamos por \mathcal{S} a la clase de funciones analíticas univalentes en \mathbb{D} normalizadas por las condiciones $f(0) = 1 - f'(0) = 0$. Con estas normalizaciones, se ve que cada función f en la clase \mathcal{S} tiene la representación en serie

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Un importante ejemplo de función en la clase \mathcal{S} es la llamada función de Koebe

$$\kappa(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = \frac{1}{4} \left\{ \left(\frac{z+1}{z-1} \right)^2 - 1 \right\} = z + \sum_{n=2}^{\infty} n z^n, \quad z \in \mathbb{D}, \quad (1.1)$$

que mapea \mathbb{D} conformemente sobre $\mathbb{C} \setminus (-\infty, -1/4)$.

Sea f una función analítica localmente univalente en \mathbb{D} con las normalizaciones $f(0) = 1 - f'(0) = 0$. Para cada automorfismo del disco φ , denotamos por $K_\varphi(f)$ a la función definida por

$$K_\varphi(f)(z) = \frac{(f \circ \varphi)(z) - (f \circ \varphi)(0)}{(f \circ \varphi)'(0)}, \quad z \in \mathbb{D}. \quad (1.2)$$

Recordemos que el conjunto de automorfismos del disco, el cual denotamos por $Aut(\mathbb{D})$, consiste de aquellas funciones analíticas en \mathbb{D} de la forma

$$\varphi(z) = \lambda \frac{z + \zeta}{1 + \bar{\zeta}z}, \quad z \in \mathbb{D},$$

donde $|\lambda| = 1$ y $\zeta \in \mathbb{D}$. Por lo tanto, es necesario distinguir dos casos. El primero es cuando

$$\varphi(z) = \frac{z + \zeta}{1 + \bar{\zeta}z}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

En tal caso, anotamos

$$K_\zeta(f)(z) := K_\varphi(f)(z) = \frac{f\left(\frac{z + \zeta}{1 + \bar{\zeta}z}\right) - f(\zeta)}{(1 - |\zeta|^2)f'(\zeta)}, \quad z \in \mathbb{D}, \quad (1.3)$$

y la llamamos transformación de Koebe. El segundo caso es cuando

$$\varphi(z) = \lambda z, \quad z \in \mathbb{D}.$$

En este caso anotamos

$$K_\lambda(f)(z) := K_\varphi(f)(z) = \bar{\lambda}f(\lambda z), \quad z \in \mathbb{D},$$

y la llamamos rotación de f . Sin dificultad se puede mostrar que la clase \mathcal{S} es invariante bajo la transformación (1.2), es decir, si $f \in \mathcal{S}$ entonces $K_\varphi(f) \in \mathcal{S}$ para todo $\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{D})$.

Mas generalmente, una familia \mathcal{F} de funciones f analíticas y localmente univalentes en \mathbb{D} con las normalizaciones $f(0) = 1 - f'(0) = 0$ que es invariante bajo la transformación (1.2) se denomina familia linealmente invariante. Estas familias de funciones serán estudiadas en más detalle en la Sección 1.3.

El siguiente teorema fue probado en [3] por Bieberbach en 1916.

TEOREMA 1.1 (L. Bieberbach). *Si $f \in \mathcal{S}$, entonces $|a_2| \leq 2$. La igualdad se tiene si y sólo si f es una rotación de la función de Koebe (1.1).*

Este teorema dio origen a la siguiente conjetura.

CONJETURA 2 (L. Bieberbach). *Si $f \in \mathcal{S}$, entonces $|a_n| \leq n$ para todo $n \geq 2$. La igualdad se tiene si y sólo si f es una rotación de la función de Koebe (1.1).*

A través de los años, muchos matemáticos hicieron muchas contribuciones con el fin de resolver la conjetura anterior. Finalmente, ésta fue resuelta en [5] por L. de Branges en 1985.

TEOREMA 1.2 (Bieberbach-de Branges). *Si $f \in \mathcal{S}$, entonces $|a_n| \leq n$ para todo $n \geq 2$. La igualdad se tiene si y sólo si f es una rotación de la función de Koebe (1.1).*

Usando el Teorema 1.1, se puede obtener más información acerca de la clase \mathcal{S} . En efecto, dado que para cada $f \in \mathcal{S}$ tenemos que $|f''(0)|/2 \leq 2$, entonces podemos traspasar

esta información desde 0 a cualquier otro punto $\zeta \in \mathbb{D}$ mediante la transformación de Koebe (1.3), es decir, si $f \in \mathcal{S}$ y $z \in \mathbb{D}$, entonces

$$K_\zeta(f)(z) = \frac{f\left(\frac{z+\zeta}{1+\bar{\zeta}z}\right) - f(\zeta)}{(1-|\zeta|^2)f'(\zeta)} = z + \frac{1}{2} \left(\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)}(1-|\zeta|^2) - 2\bar{\zeta} \right) z^2 + \dots, \quad \zeta \in \mathbb{D},$$

está en la clase \mathcal{S} y por el Teorema 1.1,

$$\frac{1}{2} \left| \frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)}(1-|\zeta|^2) - 2\bar{\zeta} \right| \leq 2. \quad (1.4)$$

Si multiplicamos (1.4) con $\frac{2|\zeta|}{1-|\zeta|^2}$ obtenemos el siguiente teorema.

TEOREMA 1.3. *Si $f \in \mathcal{S}$, entonces*

$$\left| \frac{zf''(z)}{f'(z)} - \frac{2|z|^2}{1-|z|^2} \right| \leq \frac{4|z|}{1-|z|^2}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

La importancia de este teorema radica en que se pueden obtener estimaciones para el módulo de f' y para el módulo de f . Estos resultados se conocen como los teoremas de distorsión y crecimiento para la clase \mathcal{S} .

TEOREMA 1.4 (Teorema de Distorsión). *Si $f \in \mathcal{S}$, entonces para cada $z \in \mathbb{D}$*

$$\frac{1-|z|}{(1+|z|)^3} \leq |f'(z)| \leq \frac{1+|z|}{(1-|z|)^3}. \quad (1.5)$$

La igualdad se presenta en alguna de las desigualdades de (1.5) si y sólo si f es una rotación de la función de Koebe (1.1).

TEOREMA 1.5 (Teorema de Crecimiento). *Si $f \in \mathcal{S}$, entonces para cada $z \in \mathbb{D}$*

$$\frac{|z|}{(1+|z|)^2} \leq |f(z)| \leq \frac{|z|}{(1-|z|)^2}. \quad (1.6)$$

La igualdad se presenta en alguna de las desigualdades de (1.6) si y sólo si f es una rotación de la función de Koebe (1.1).

El teorema anterior tiene dos importantes consecuencias. La primera de ellas es que cada función $f \in \mathcal{S}$ cubre el disco $\{|z| < 1/4\}$, es decir, $\{|z| < 1/4\} \subset f(\mathbb{D})$ para toda $f \in \mathcal{S}$. Este resultado se conoce como el Teorema 1/4 de Koebe o el teorema de cubrimiento para la clase \mathcal{S} . Por otra parte, la desigualdad (1.6) muestra que las funciones $f \in \mathcal{S}$ son localmente uniformemente acotadas en cada subconjunto compacto de \mathbb{D} . Luego, usando el teorema de Montel obtenemos que la clase \mathcal{S} es una familia normal. El teorema de Hurwitz implica que la clase \mathcal{S} es una familia compacta. Por lo tanto, tenemos el siguiente resultado.

TEOREMA 1.6. *La clase \mathcal{S} es una familia normal y compacta.*

1.2. Funciones convexas

Un dominio $\Omega \subset \mathbb{C}$ se dice convexo si el segmento que une cada par de puntos $z_1, z_2 \in \Omega$ está totalmente contenido en Ω . Diremos que una función f analítica y localmente univalente en \mathbb{D} es convexa si $f(\mathbb{D})$ es un dominio convexo. Denotaremos por \mathcal{C} a la subfamilia de \mathcal{S} de funciones convexas en \mathbb{D} .

Muy relacionada con \mathcal{C} es la familia de funciones φ analíticas con parte real positiva en \mathbb{D} , normalizadas por la condición $\varphi(0) = 1$. Esta familia de funciones la anotamos por \mathcal{P} y se conoce como la familia de Carathéodory.

El siguiente resultado muestra la relación mencionada anteriormente entre las familias \mathcal{C} y \mathcal{P} .

TEOREMA 1.7. *Sea f una función analítica localmente univalente en \mathbb{D} , con las normalizaciones $f(0) = 1 - f'(0) = 0$. Entonces, $f \in \mathcal{C}$ si y sólo si*

$$1 + z \frac{f''(z)}{f'(z)} \in \mathcal{P}. \quad (1.7)$$

En términos algebraicos, la condición (1.7) es equivalente a la desigualdad

$$\operatorname{Re} \left\{ 1 + z \frac{f''(z)}{f'(z)} \right\} > 0, \quad z \in \mathbb{D}. \quad (1.8)$$

Una importante propiedad de las funciones convexas es la propiedad hereditaria que asegura que si $f \in \mathcal{C}$, entonces $f(\{|z| < r\})$ es un dominio convexo para todo $r \in (0, 1)$.

Un ejemplo importante de función en la clase \mathcal{C} , es la función ℓ definida por

$$\ell(z) = \frac{z}{1-z}, \quad z \in \mathbb{D} \quad (1.9)$$

que mapea \mathbb{D} sobre el semi-plano $\{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\{w\} > -1/2\}$.

Como $\mathcal{C} \subset \mathcal{S}$, entonces (por el Teorema 1.2) se tiene que el módulo del coeficiente a_n de toda función $f \in \mathcal{C}$ no excede n . Sin embargo, esta cota puede ser mejorada, como muestra el siguiente teorema.

TEOREMA 1.8. *Si $f \in \mathcal{C}$, entonces $|a_n| \leq 1$ para cada $n \geq 2$. Se tiene la igualdad en la desigualdad anterior si y sólo si f es una rotación de la función ℓ en (1.9).*

1.3. Familias de funciones analíticas linealmente invariantes

Una familia \mathcal{F} de funciones f analíticas y localmente univalentes en \mathbb{D} , con las normalizaciones $f(0) = 1 - f'(0) = 0$ es llamada linealmente invariante (F.L.I.), si esta es invariante bajo la transformación (1.2), es decir, si $f \in \mathcal{F}$ entonces $K_\varphi(f) \in \mathcal{F}$ para todo $\varphi \in \operatorname{Aut}(\mathbb{D})$.

El orden de una F.L.I se define mediante la ecuación

$$\operatorname{ord}(\mathcal{F}) = \sup \left\{ \left| \frac{f''(0)}{2} \right| : f \in \mathcal{F} \right\}. \quad (1.10)$$

Observar que si \mathcal{F} es una familia compacta, entonces $\operatorname{ord}(\mathcal{F}) < \infty$. Muchas propiedades importantes en una F.L.I. tales como crecimiento, distorsión y cubrimiento pueden ser determinadas por el orden definido en (1.10).

TEOREMA 1.9 (Teorema de Distorsión). *Sea \mathcal{F} una F.L.I. con orden $\alpha = \text{ord}(\mathcal{F}) < \infty$.*

Si $f \in \mathcal{F}$, entonces para cada $z \in \mathbb{D}$

$$\frac{(1 - |z|)^{\alpha-1}}{(1 + |z|)^{\alpha+1}} \leq |f'(z)| \leq \frac{(1 + |z|)^{\alpha-1}}{(1 - |z|)^{\alpha+1}}. \quad (1.11)$$

La igualdad se alcanza en (1.11) para la función

$$\kappa_\alpha(z) = \frac{1}{2\alpha} \left[\left(\frac{1+z}{1-z} \right)^\alpha - 1 \right], \quad z \in \mathbb{D},$$

si acaso $\kappa_\alpha \in \mathcal{F}$.

TEOREMA 1.10 (Teorema de Crecimiento). *Sea \mathcal{F} una F.L.I. con orden $\alpha = \text{ord}(\mathcal{F}) < \infty$.*

Si $f \in \mathcal{F}$, entonces para cada $z \in \mathbb{D}$

$$|f(z)| \leq \frac{1}{2\alpha} \left[\left(\frac{1+|z|}{1-|z|} \right)^\alpha - 1 \right]. \quad (1.12)$$

Si \mathcal{F} es un subconjunto de \mathcal{S} , entonces además se cumple la desigualdad

$$\frac{1}{2\alpha} \left[1 - \left(\frac{1-|z|}{1+|z|} \right)^\alpha \right] \leq |f(z)|. \quad (1.13)$$

La igualdad se alcanza en (1.12) o en (1.13) para la función

$$\kappa_\alpha(z) = \frac{1}{2\alpha} \left[\left(\frac{1+z}{1-z} \right)^\alpha - 1 \right], \quad z \in \mathbb{D},$$

si acaso $\kappa_\alpha \in \mathcal{F}$.

TEOREMA 1.11 (Teorema de Cubrimiento). *Sea \mathcal{F} una F.L.I. con orden $\alpha = \text{ord}(\mathcal{F}) < \infty$.*

Si $\mathcal{F} \subset \mathcal{S}$, entonces

$$\{|z| < 1/2\alpha\} \subset f(\mathbb{D})$$

para toda $f \in \mathcal{F}$.

Dos ejemplos importantes de familias linealmente invariantes son la clase \mathcal{S} de funciones f analíticas univalentes en \mathbb{D} , normalizadas por las condiciones $f(0) = 1 - f'(0) = 0$ y

la subclase \mathcal{C} de \mathcal{S} de funciones convexas. Del Teorema 1.1 se ve que $ord(\mathcal{S}) = 2$. Luego, los teoremas de distorsión, crecimiento y cubrimiento para la clase \mathcal{S} se pueden obtener a partir de los Teoremas 1.9, 1.10 y 1.11. Por otra parte, del Teorema 1.8 se ve que $ord(\mathcal{C}) = 1$. Por lo tanto, usando los Teoremas 1.9, 1.10 y 1.11 obtenemos el siguiente resultado para la clase \mathcal{C} .

TEOREMA 1.12 (Teoremas de Distorsión, Crecimiento y Cubrimiento para \mathcal{C}). *Si $f \in \mathcal{C}$, entonces, para cada $z \in \mathbb{D}$ se cumplen las desigualdades*

$$\frac{1}{(1+|z|)^2} \leq |f'(z)| \leq \frac{1}{(1-|z|)^2} \quad (1.14)$$

y

$$\frac{|z|}{(1+|z|)} \leq |f(z)| \leq \frac{|z|}{(1-|z|)}. \quad (1.15)$$

Además, si $f \in \mathcal{C}$, entonces $\{|z| < 1/2\} \subset f(\mathbb{D})$. La igualdad se presenta en alguna de las desigualdades de (1.14) ó (1.15) si y sólo si f es una rotación de la función ℓ en (1.9).

Para dar un último ejemplo de familia linealmente invariante, será necesario introducir el concepto de derivada Schwarziana para funciones analíticas localmente univalentes. Sea f una función analítica y localmente univalente en un dominio Ω . Se define la derivada Schwarziana de f mediante la ecuación

$$S_f = \left(\frac{f''}{f'}\right)' - \frac{1}{2} \left(\frac{f''}{f'}\right)^2. \quad (1.16)$$

Una transformación de Möbius es una función de la forma

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc \neq 0. \quad (1.17)$$

Es conocido que toda transformación de Möbius se puede caracterizar por la condición $S_f \equiv 0$. La derivada Schwarziana tiene importantes propiedades de invariancia bajo composición con transformaciones de Möbius. Es decir, si T es de Möbius, entonces

$$S_{T \circ f} = S_f \quad \text{y} \quad S_{f \circ T} = (S_f \circ T)(T')^2. \quad (1.18)$$

Las fórmulas anteriores son casos particulares de la siguiente fórmula

$$S_{f \circ g} = (S_f \circ g)(g')^2 + S_g, \quad (1.19)$$

para funciones f, g tales que su composición esta bien definida.

Sea f una función analítica y localmente univalente en \mathbb{D} . Se define la norma Schwarziana de f mediante la ecuación

$$\|S_f\| = \sup_{z \in \mathbb{D}} |S_f(z)|(1 - |z|^2)^2. \quad (1.20)$$

Para $M > 0$, se define la familia \mathcal{F}_M de funciones f analíticas localmente univalentes en \mathbb{D} , normalizadas por las condiciones $f(0) = 1 - f'(0) = 0$ que satisfacen la condición $\|S_f\| \leq M$. Usando las propiedades (1.18) para la derivada Schwarziana, se tiene que $\|S_{T \circ f \circ \varphi}\| = \|S_f\|$ para cada transformación de Möbius (1.17) y para cada $\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{D})$. Por lo tanto, \mathcal{F}_M es una familia linealmente invariante. Pommerenke en [25] prueba el siguiente teorema respecto a la familia \mathcal{F}_M .

TEOREMA 1.13. *El orden de la familia \mathcal{F}_M es finito y está dado por*

$$\text{ord}(\mathcal{F}_M) = \sqrt{1 + \frac{M}{2}}.$$

Para $M > 0$, la función

$$\kappa_\alpha(z) = \frac{1}{2\alpha} \left[\left(\frac{1+z}{1-z} \right)^\alpha - 1 \right], \quad z \in \mathbb{D},$$

con $\alpha = \sqrt{1 + \frac{M}{2}}$ pertenece a \mathcal{F}_M y satisface

$$\frac{1}{2} |\kappa_\alpha''(0)| = \sqrt{1 + \frac{M}{2}}.$$

En [22] Krauss muestra que toda función $f \in \mathcal{S}$ satisface la desigualdad

$$|S_f(z)| \leq \frac{6}{(1 - |z|^2)^2}, \quad z \in \mathbb{D},$$

con igualdad para la función de Koebe (1.1). Esto nos dice que la clase \mathcal{S} de funciones univalentes normalizadas en \mathbb{D} está contenida en \mathcal{F}_6 . Si $M = 6$, entonces por el teorema anterior $ord(\mathcal{F}_6) = 2$ y la función extremal en \mathcal{F}_6 es la función κ_2 que coincide con la función de Koebe (1.1).

Para cada $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, se define la función generalizada de Koebe mediante la ecuación

$$\kappa_\alpha(z) = \frac{1}{2\alpha} \left[\left(\frac{1+z}{1-z} \right)^\alpha - 1 \right], \quad z \in \mathbb{D}, \quad (1.21)$$

donde la rama de logaritmo se escoge de modo que $\log 1 = 0$ en

$$\left(\frac{1+z}{1-z} \right)^\alpha = \exp \left(\alpha \log \frac{1+z}{1-z} \right).$$

Dado que

$$\kappa'_\alpha(z) = \left(\frac{1+z}{1-z} \right)^\alpha \cdot \frac{1}{1-z^2}, \quad z \in \mathbb{D},$$

se tiene que las funciones κ_α son localmente univalentes en \mathbb{D} . Más aún, el límite en compactos de \mathbb{D} de la función κ_α , cuando $\alpha \rightarrow 0$, coincide con la función

$$\kappa_0(z) := \frac{1}{2} \log \frac{1+z}{1-z}, \quad z \in \mathbb{D}, \quad (1.22)$$

que es univalente en \mathbb{D} y mapea \mathbb{D} sobre la banda $\{w : |w| < \pi/4\}$. Por otra parte, no es difícil mostrar que κ_1 coincide con la función ℓ en (1.9) y κ_2 coincide con la función de Koebe (1.1), en ambos casos univalentes.

En cuanto a la univalencia de las funciones κ_α , cuando $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, Hille en [21] obtiene el siguiente resultado.

TEOREMA 1.14. *La función κ_α , $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, es univalente si y sólo si α está en la unión de los discos cerrados $\{|z-1| \leq 1\}$ y $\{|z+1| \leq 1\}$.*

1.4. Relaciones de Marty

Como se vio en el Teorema 1.6, la clase \mathcal{S} de funciones univalentes es una familia normal y compacta. Esto nos dice que existe una función $f \in \mathcal{S}$ cuyo n -ésimo coeficiente tiene módulo máximo. Como la clase \mathcal{S} es invariante por rotaciones, se obtiene que el problema de maximizar $|a_n|$ es equivalente a maximizar $Re\{a_n\}$. Una función $f \in \mathcal{S}$ que maximiza $Re\{a_n\}$ se denomina extremal para el n -ésimo coeficiente. Los Teoremas 1.2 y 1.8 muestran que las funciones κ en (1.1) y ℓ en (1.9) son extremales para cada coeficiente en la clase \mathcal{S} y \mathcal{C} , respectivamente. A continuación presentaremos un método introducido en [24] por Marty que nos permite tener información acerca de una función extremal para el n -ésimo coeficiente. Sea $f(z) = z + a_2z^2 + a_3z^3 + \dots$, $z \in \mathbb{D}$, una función en la clase \mathcal{S} que maximiza la parte real del n -ésimo coeficiente. Entonces, para cada $\zeta \in \mathbb{D}$ se tiene la desigualdad

$$Re\{A_n(\zeta)\} \leq Re\{a_n\}, \quad (1.23)$$

donde $A_n(\zeta)$ es el n -ésimo coeficiente de la transformación de Koebe (1.3) de f . Un cálculo muestra que

$$f\left(\frac{z+\zeta}{1+\bar{\zeta}z}\right) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m [z^m + m(\zeta - \bar{\zeta}z^2)z^{m-1}] + O(|\zeta|^2) \quad (1.24)$$

y

$$(1 - |\zeta|^2)f'(\zeta) = 1 + 2a_2\zeta + O(|\zeta|^2). \quad (1.25)$$

De (1.24) y (1.25) se deduce la siguiente fórmula asintótica para el n -ésimo coeficiente de $K_\zeta(f)$

$$A_n(\zeta) = a_n + \zeta[(n+1)a_{n+1} - 2a_2a_n] - \bar{\zeta}(n-1)a_{n-1} + O(|\zeta|^2). \quad (1.26)$$

De (1.23) y (1.26) se deduce que

$$Re\{\zeta[(n+1)a_{n+1} - 2a_2a_n - (n-1)\bar{a}_{n-1}] + O(|\zeta|^2)\} \leq 0. \quad (1.27)$$

Dividiendo por $|\zeta|$ y haciendo tender ζ a cero a lo largo de un rayo en (1.27), obtenemos la fórmula

$$(n+1)a_{n+1} - 2a_2a_n - (n-1)\overline{a_{n-1}} = 0, \quad (1.28)$$

que se conoce como la *relación de Marty* para el n -ésimo coeficiente y se debe satisfacer para cada función de la clase \mathcal{S} cuyo n -ésimo coeficiente tiene parte real máxima.

Un sencillo cálculo muestra que las funciones κ en (1.1) y ℓ en (1.9) satisfacen (1.28) para todo n . Sin embargo, existen muchas funciones (no extremales) que cumplen las relaciones (1.28). Por ejemplo, cada función impar de la clase \mathcal{S} satisface trivialmente las ecuaciones (1.28) para cada entero impar.

Para concluir esta sección, es importante destacar que el método introducido en [24] por Marty aplica en el caso general de familias linealmente invariantes. A diferencia de la clase \mathcal{S} , una familia \mathcal{F} linealmente invariante no necesariamente es compacta. Por lo tanto, una función extremal no necesariamente existe. Para familias \mathcal{F} linealmente invariantes, el método de Marty se puede establecer como se muestra a continuación.

PROPOSICIÓN 1.1. *Sea \mathcal{F} una familia de funciones analíticas linealmente invariante. Supongamos que existe una función $f_0 \in \mathcal{F}$ y $n \in \mathbb{N}$ tal que*

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} \operatorname{Re}\{a_n(f)\} = \operatorname{Re}\{a_n(f_0)\}.$$

Entonces, el n -ésimo coeficiente a_n de f_0 satisface la ecuación

$$(n+1)a_{n+1} - 2a_2a_n - (n-1)\overline{a_{n-1}} = 0. \quad (1.29)$$

Capítulo 2

Funciones armónicas

2.1. Definiciones y propiedades básicas

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Diremos que una función $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^2 es armónica en Ω si u satisface $\Delta u = 0$ en Ω , donde Δ es el operador de Laplace definido por

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \quad (2.1)$$

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$. Diremos que una función $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es armónica en Ω si $Re\{f\}$ e $Im\{f\}$ son funciones armónicas reales en Ω . Si además f es univalente, entonces diremos que f es un mapeo armónico.

Si $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es una función analítica en Ω , entonces de las ecuaciones de Cauchy-Riemann se deduce que $Re\{f\}$, $Im\{f\}$ son funciones armónicas reales. Por lo tanto, toda función analítica es armónica.

El Jacobiano de una función $f = u + iv$ es determinado por

$$J_f = \det \begin{pmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{pmatrix} = u_x v_y - u_y v_x.$$

Si f es analítica en un dominio Ω , entonces el Jacobiano es igual a $J_f(z) = |f'(z)|^2$. De aquí se observa que para funciones f analíticas en un dominio Ω , la univalencia local en Ω es equivalente a la condición $J_f(z) \neq 0$, $z \in \Omega$. En [23], H. Lewy muestra que esto también es válido para funciones armónicas.

TEOREMA 2.1. *Si f es una función armónica de valores complejos localmente univalente en un dominio $\Omega \subset \mathbb{C}$, entonces $J_f(z) \neq 0$ para cada $z \in \Omega$.*

El teorema anterior muestra que el Jacobiano de una función armónica localmente univalente no cambia de signo. Por lo tanto, es siempre positivo o siempre negativo. Diremos que una función f armónica localmente univalente en un dominio Ω preserva la orientación si $J_f(z) > 0$, $z \in \Omega$. En caso contrario, diremos que f invierte la orientación. Un sencillo cálculo muestra que si f es una función armónica localmente univalente en Ω , entonces f preserva la orientación si y sólo si \bar{f} invierte la orientación. Lo anterior nos dice que para el estudio de funciones armónicas localmente univalentes, es suficiente considerar las que tienen Jacobiano positivo (o negativo). Dado que toda función analítica localmente univalente es una función armónica con Jacobiano positivo, entonces para un estudio general sólo es necesario considerar funciones armónicas localmente univalentes con Jacobiano positivo.

Para cada $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$, con $|\alpha| > |\beta|$, la función

$$A_{\alpha, \gamma, \beta}(z) = \alpha z + \gamma + \beta \bar{z}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad (2.2)$$

define un mapeo armónico invertible que preserva la orientación. A tal función la denominaremos función armónica afín. Un simple cálculo muestra que si g es una función armónica localmente univalente que preserva la orientación en un dominio Ω , entonces la función $A_{\alpha, \gamma, \beta} \circ g$ es una función armónica localmente univalente que preserva la orientación en Ω . A diferencia del caso analítico, la composición de funciones armónicas (en caso de estar bien definida) no es necesariamente armónica.

Para facilitar los cálculos, es necesario introducir dos operadores diferenciales. Estos operadores se definen mediante las ecuaciones

$$\frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad \text{y} \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad (2.3)$$

donde $z = x + iy$. Para simplificar, ocuparemos la notación $f_z = \partial f / \partial z$ y $f_{\bar{z}} = \partial f / \partial \bar{z}$.

No es difícil mostrar que la ecuación $f_{\bar{z}} = 0$ no es más que otra manera de escribir las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Por lo tanto, si f es de clase C^1 , entonces f es analítica si y sólo si $f_{\bar{z}} = 0$. La ecuación $f_{\bar{z}} = 0$ es conocida como la versión compleja de las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Si f es analítica, entonces $f_z = f'(z)$, es decir, f_z coincide con la derivada usual de f . Por otra parte, el operador Laplaciano (2.1) lo podemos escribir en términos de los operadores complejos en (2.3) como

$$\Delta = 4 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} = 4 \frac{\partial^2}{\partial \bar{z} \partial z}. \quad (2.4)$$

Si $f = u + iv$ es una función con segundas derivadas parciales continuas, entonces de (2.4) se ve que f es armónica si y sólo si f_z es analítica. Las reglas del producto y el cociente para $\partial / \partial z$ son

$$(fg)_z = fg_z + gf_z, \quad \left(\frac{f}{g}\right)_z = \frac{gf_z - fg_z}{g^2},$$

mientras que para $\partial / \partial \bar{z}$ son

$$(fg)_{\bar{z}} = fg_{\bar{z}} + gf_{\bar{z}}, \quad \left(\frac{f}{g}\right)_{\bar{z}} = \frac{gf_{\bar{z}} - fg_{\bar{z}}}{g^2}.$$

La ecuación $\overline{f_z} = (\overline{f})_{\bar{z}}$ relaciona los operadores complejos en (2.3). Si f, g son funciones tales que su composición está bien definida, entonces

$$h_\zeta = f_z g_\zeta + f_{\bar{z}} \overline{g_\zeta} \quad \text{y} \quad h_{\bar{\zeta}} = f_z g_{\bar{\zeta}} + f_{\bar{z}} \overline{g_{\bar{\zeta}}},$$

donde $w = f(z)$, $z = g(\zeta)$, $w = h(\zeta)$ y $h = f \circ g$.

En términos de los operadores complejos (2.3), el Jacobiano de una función $f = u + iv$ se puede expresar mediante la ecuación

$$J_f = |f_z|^2 - |f_{\bar{z}}|^2.$$

Por lo tanto, una función armónica f es localmente univalente y preserva la orientación en un dominio Ω si y sólo si la desigualdad $|f_z| > |\overline{f_z}|$ es válida en Ω . Para funciones f de valores complejos de clase C^2 , localmente univalentes que preservan la orientación en un dominio Ω , la condición $J_f(z) > 0$ garantiza que $f_z(z) \neq 0$. En este caso, la cantidad $\omega_f = \overline{f_z}/f_z$ está bien definida y satisface $|\omega_f(z)| < 1$ en Ω . La función ω_f se conoce como la segunda dilatación (o simplemente dilatación) compleja de f .

Como veremos a continuación, la dilatación ω de una función f de clase C^2 tiene una propiedad adicional en el caso que f es armónica. Supongamos que f es una función de valores complejos de clase C^2 , localmente univalente que preserva la orientación en un dominio Ω . Derivando la ecuación $\omega f_z = \overline{f_z}$ respecto a \bar{z} se obtiene

$$\overline{f_{z\bar{z}}} = f_{z\bar{z}}\omega + f_z\omega_{\bar{z}}. \quad (2.5)$$

Si f es armónica, entonces de (2.5) se obtiene que $\omega_{\bar{z}} = 0$, es decir, ω es una función analítica. Recíprocamente, si ω es analítica, entonces la ecuación (2.5) se transforma en $\overline{f_{z\bar{z}}} = f_{z\bar{z}}\omega$ lo que implica que $f_{z\bar{z}} = 0$, dado que $|\omega(z)| < 1$ en Ω .

En dominios simplemente conexos $\Omega \subset \mathbb{C}$, cada función armónica compleja tiene la representación $f = h + \bar{g}$, donde h, g son funciones analíticas en Ω . La representación anterior es única salvo una constante aditiva. Para ver esto, como f es armónica en Ω , entonces f_z es analítica en Ω . Luego, dado que Ω es simplemente conexo, existe h analítica en Ω tal que $h' = f_z$. Si $g = \bar{f} - \bar{h}$, entonces

$$g_{\bar{z}} = \overline{f_z} - \overline{h_z} = 0$$

en Ω . Esto muestra que g es analítica en Ω y por lo tanto $f = h + \bar{g}$. En el caso que $0 \in \Omega$ y $g(0) = 0$ la descomposición anterior es única y la llamaremos descomposición canónica de f . Como es usual, llamaremos a h y g la parte analítica y parte co-analítica de f , respectivamente, en la descomposición $f = h + \bar{g}$. Para el estudio de funciones armónicas

en dominios simplemente conexos Ω distintos de \mathbb{C} , es suficiente considerar $\Omega = \mathbb{D}$. En efecto, si f es una función armónica en un dominio simplemente conexo $\Omega \neq \mathbb{C}$, entonces por el teorema del mapeo de Riemann existe g analítica de \mathbb{D} sobre Ω . La función $F = f \circ g$ es armónica en \mathbb{D} y f se obtiene por la ecuación $f = F \circ \psi$, donde $\psi = g^{-1}$.

2.2. La construcción por estiramiento

En lo que sigue trabajaremos siempre con funciones f armónicas localmente univalentes en \mathbb{D} con la representación canónica $f = h + \bar{g}$.

Denotamos por \mathcal{S}_H a la clase de funciones $f = h + \bar{g}$ armónicas univalentes que preservan la orientación en \mathbb{D} , normalizadas por las condiciones $h(0) = 1 - h'(0) = 0$ y $g(0) = 0$. Si una función armónica $f = h + \bar{g} \in \mathcal{S}_H$ tiene la normalización adicional $g'(0) = 0$, entonces diremos que $f \in \mathcal{S}_H^0$. No es difícil mostrar que para cada $a \in \mathbb{D}$, la transformación afín

$$\psi_a(z) = \frac{z - \bar{a}z}{1 - |a|^2}, \quad z \in \mathbb{D}, \quad (2.6)$$

es univalente y preserva la orientación en \mathbb{D} . Si $f = h + \bar{g}$ pertenece a \mathcal{S}_H , entonces $g'(0) \in \mathbb{D}$ y la función armónica $F_{g'(0)} = \psi_{g'(0)} \circ f$ pertenece a \mathcal{S}_H^0 . La función $f \mapsto f_0 = \psi_{g'(0)} \circ f$ de \mathcal{S}_H a \mathcal{S}_H^0 es invertible y tiene inversa $f_0 \mapsto f + \overline{g'(0)f}$.

A continuación presentaremos un método general para construir mapeos armónicos con propiedades específicas. Este método fue introducido en [10] por Clunie y Sheil-Small y se conoce como la construcción por estiramiento.

Diremos que un dominio $\Omega \subset \mathbb{C}$ es convexo en la dirección θ , $\theta \in [0, \pi)$, si para cada $z_0 \in \mathbb{C}$ el conjunto

$$\Omega \cap \{z_0 + te^{i\theta} : t \in \mathbb{R}\}$$

es conexo. Si f es una función analítica (resp. armónica) en \mathbb{D} y $f(\mathbb{D})$ es un dominio convexo en la dirección θ , para algún $\theta \in [0, \pi)$, entonces diremos que f es una función

analítica (resp. armónica) convexa en la dirección θ .

Usaremos la terminología *convexidad en la dirección horizontal* para referirnos a la convexidad en la dirección $\theta = 0$ y *convexidad en la dirección vertical* para referirnos a la convexidad en la dirección $\theta = \pi/2$.

TEOREMA 2.2. *Sea $f = h + \bar{g}$ una función armónica localmente univalente que preserva la orientación en \mathbb{D} . Entonces, f es univalente y convexa en la dirección θ si y sólo si la función analítica $h - e^{2i\theta}g$ es univalente y convexa en la dirección θ .*

El teorema anterior entrega una manera de construir funciones armónicas univalentes con dilatación prescrita y aplica de la siguiente manera. Escogemos una dirección $\theta \in [0, \pi)$ y una función φ analítica, univalente en \mathbb{D} y convexa en la dirección θ . Escogemos una función ω analítica en \mathbb{D} tal que $\omega(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$. Entonces, la función $f = h + \bar{g}$ donde h y g son soluciones del sistema

$$\begin{cases} h(z) - e^{2i\theta}g(z) = \varphi(z) \\ g'(z)/h'(z) = \omega(z) \end{cases}, \quad z \in \mathbb{D}, \quad h(0) = g(0) = 0, \quad (2.7)$$

es univalente y convexa en la dirección θ . Esta función se conoce como *estiramiento de φ en la dirección θ* .

Un ejemplo importante, y que es necesario destacar, es la conocida función armónica generalizada de Koebe. Para cada $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = |\mu| = 1$ y $0 \leq R \leq 1$ definimos la *función armónica generalizada de Koebe* $K_H = K_H(\lambda, \alpha, \mu, R)$ como la función armónica $K_H = h + \bar{g}$ tal que h y g son soluciones del sistema

$$\begin{cases} h - \lambda g = \kappa_\alpha \\ \omega = g'/h' = \mu l_R \end{cases}, \quad h(0) = g(0) = 0, \quad (2.8)$$

donde κ_α es la función generalizada de Koebe (1.21) y l_R es la función analítica definida por la ecuación

$$l_R(z) = \frac{\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^R - 1}{\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^R + 1}, \quad |z| < 1. \quad (2.9)$$

La función en (2.9) es conocida como la función lente y satisface la condición $l_R(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$. Por lo tanto, la solución (h, g) de (2.8) existe para cada valor de λ, α, μ , y R como antes y produce una función armónica localmente univalente que preserva la orientación en \mathbb{D} .

Un caso particular, es la conocida función armónica de Koebe que se obtiene de lo anterior tomando $\lambda = \mu = R = 1$ y $\alpha = 2$. Esta función la anotamos por K y está dada explícitamente por la ecuación

$$K(z) = \frac{z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3}{(1-z)^3} + \frac{\overline{\frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3}}{(1-z)^3}, \quad z \in \mathbb{D}. \quad (2.10)$$

Usando el Teorema 2.2 obtenemos que la función K es univalente y convexa en la dirección horizontal.

2.3. Funciones armónicas convexas

Denotamos por \mathcal{C}_H a la clase de funciones $f = h + \bar{g} \in \mathcal{S}_H$ tales que $f(\mathbb{D})$ es un dominio convexo y $\mathcal{C}_H^0 = \mathcal{C}_H \cap \mathcal{S}_H^0$.

No es difícil mostrar que la transformación afín definida en (2.6) preserva la convexidad, es decir, si f es una función armónica convexa en \mathbb{D} , entonces la función $\psi_a \circ f$ es convexa para cada $a \in \mathbb{D}$. Si $f \in \mathcal{C}_H$ y escogemos $a = g'(0)$ (notar que $g'(0) \in \mathbb{D}$), entonces la función armónica $F_{g'(0)} = \psi_{g'(0)} \circ f$ pertenece a \mathcal{C}_H^0 . Más aún, la función $f \mapsto f_0 = \psi_{g'(0)} \circ f$ de \mathcal{C}_H a \mathcal{C}_H^0 es invertible con inversa $f_0 \mapsto f + \overline{g'(0)f}$. Dado que todo dominio convexo es convexo en cada dirección, del Teorema 2.2 se obtiene el siguiente resultado.

TEOREMA 2.3. *Sea $f = h + \bar{g}$ una función armónica localmente univalente que preserva la orientación en \mathbb{D} . Entonces, f es convexa si y sólo si para cada $\theta \in [0, \pi)$, la función analítica $h - e^{2i\theta}g$ es univalente y convexa en la dirección θ .*

A continuación daremos una descripción analítica para las funciones armónicas convexas. Esta descripción será de utilidad en la Sección 4.2. Para hacer esto, será necesaria

la caracterización de funciones analíticas convexas en la dirección vertical de Royster y Ziegler. Este resultado se puede encontrar en [28].

TEOREMA 2.4. *Sea φ una función analítica no constante en \mathbb{D} con las normalizaciones $\varphi(0) = \varphi'(0) - 1 = 0$. Entonces, φ es univalente y convexa en la dirección vertical si y sólo si existen números reales μ, ν , $0 \leq \mu < 2\pi$ y $0 \leq \nu \leq \pi$, tales que*

$$\operatorname{Re}\{-ie^{i\mu}(1 - 2\cos\nu e^{-i\mu}z + e^{-2i\mu}z^2)\varphi'(z)\} \geq 0, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Como se mencionó anteriormente, un dominio convexo es convexo en cualquier dirección. Por lo tanto, toda función convexa $f = h + \bar{g}$ es convexa en la dirección θ para todo $\theta \in [0, \pi)$. Sin perder generalidad, podemos suponer que f está en la clase \mathcal{C}_H^0 , en caso contrario, componemos a f con la transformación (2.6), con $a = g'(0)$. Usando el Teorema 2.3, se ve que la función $F_\theta = h - e^{2i\theta}g$ es univalente y convexa en la dirección θ . Si $\gamma = \theta - \pi/2$, entonces la función analítica $G_\theta(z) = e^{-i\gamma}(h(e^{i\gamma}z) - e^{2i\theta}g(e^{i\gamma}z))$ es convexa en la dirección vertical y esta normalizada mediante $G_\theta(0) = 1 - G'_\theta(0) = 0$, dado que $f \in \mathcal{C}_H^0$. En términos de las funciones analíticas h y ω ,

$$G'_\theta(z) = h'(e^{i\gamma}z)(1 - e^{2i\theta}\omega(e^{i\gamma}z)).$$

Por lo tanto, usando el Teorema 2.4 obtenemos el siguiente resultado.

TEOREMA 2.5. *Sea $f = h + \bar{g}$ una función armónica localmente univalente que preserva la orientación en \mathbb{D} . Entonces, $f \in \mathcal{C}_H^0$ si y sólo si para todo $\theta \in [0, \pi)$, existen números reales $0 \leq \mu < 2\pi$ y $0 \leq \nu \leq \pi$ tales que*

$$\operatorname{Re}\{-ie^{i\mu}(1 - 2\cos\nu e^{-i\mu}z + e^{-2i\mu}z^2)h'(e^{i\gamma}z)(1 - e^{2i\theta}\omega(e^{i\gamma}z))\} \geq 0, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Un ejemplo importante de función convexa, y que es importante destacar, es la función armónica $L = h + \bar{g}$, donde h y g son soluciones del sistema (2.7) con $\theta = \pi/2$, $\varphi(z) = \ell(z)$,

donde ℓ es la función en (1.9) y $\omega(z) = -z$. Esta función la anotamos por L y está dada por

$$L(z) = \operatorname{Re} \left\{ \frac{z}{1-z} \right\} + i \operatorname{Im} \left\{ \frac{z}{(1-z)^2} \right\}, \quad z \in \mathbb{D}. \quad (2.11)$$

Nótese que la función L es la función armónica generalizada de Koebe $K_H(-1, 1, -1, 1)$.

2.4. Funciones armónicas completamente convexas

Como vimos en el Capítulo 1, las funciones analíticas convexas en \mathbb{D} son caracterizadas por la condición

$$\operatorname{Re} \left\{ 1 + z \frac{f''(z)}{f'(z)} \right\} > 0, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Como fue mencionado en la Sección 1.2, en la caracterización de funciones convexas está implícita la propiedad hereditaria, es decir, si f es una función analítica convexa en \mathbb{D} , entonces f mapea cada subdisco $\{|z| < r\}$ ($0 < r < 1$) sobre un dominio convexo. Esta propiedad no generaliza para mapeos armónicos como veremos a continuación. Es posible mostrar (ver [15]), que la función convexa L en (2.11) transforma cada subdisco $\{|z| < r\}$ sobre un dominio convexo si $0 < r \leq \sqrt{2} - 1$ y en un dominio no convexo para $\sqrt{2} - 1 < r < 1$.

Una función armónica $f = h + \bar{g}$ localmente univalente que preserve la orientación en \mathbb{D} será llamada completamente convexa si f mapea cada circunferencia $|z| = r < 1$ de manera inyectiva sobre una curva convexa. Esta familia de funciones fue introducida en [7] por M. Chuaqui, P. Duren and B. Osgood y la denotaremos por \mathcal{CC}_H . El siguiente teorema da una descripción analítica de las funciones completamente convexas que generaliza el criterio de convexidad (1.8) para funciones analíticas convexas f .

TEOREMA 2.6. *Sea $f = h + \bar{g}$ una función armónica localmente univalente que preserve*

la orientación en \mathbb{D} . Entonces, $f \in \mathcal{CC}_H$ si y sólo si

$$\begin{aligned} & |zh'(z)|^2(1 - |\omega(z)|^2) \operatorname{Re} \left\{ 1 + z \frac{h''(z)}{h'(z)} \right\} \\ & \geq |z\omega(z)h'(z)|^2 \operatorname{Re} \left\{ z \frac{\omega'(z)}{\omega(z)} \right\} - \operatorname{Re} \{ z^3 \omega'(z) h'(z)^2 \} \end{aligned} \quad (2.12)$$

para todo $z \in \mathbb{D}$.

Un ejemplo de función armónica completamente convexa es la función

$$G(z) = L((\sqrt{2} - 1)z), \quad z \in \mathbb{D},$$

donde L es la función definida en (2.11).

2.5. Funciones armónicas establemente convexas

Diremos que una función armónica $f = h + \bar{g}$ localmente univalente que preserva la orientación en \mathbb{D} es establemente convexa si, para todo $|\lambda| = 1$, las funciones armónicas $f_\lambda = h + \lambda\bar{g}$ son convexas en \mathbb{D} . Para esta familia de funciones usaremos la notación \mathcal{SC}_H . Se ve claramente de la definición que toda función establemente convexa es convexa. Esta familia de funciones convexas fue introducida en [19] por R. Hernández y M. J. Martín. Estas funciones se pueden caracterizar de manera más simple a diferencia de las funciones convexas y completamente convexas como veremos inmediatamente.

TEOREMA 2.7. *Sea $f = h + \bar{g}$ una función armónica localmente univalente que preserva la orientación en \mathbb{D} . Entonces, $f = h + \bar{g} \in \mathcal{SC}_H$ si y sólo si para todo $|\lambda| = 1$, las funciones analíticas $F_\lambda = h + \lambda g$ son convexas.*

Un cálculo muestra que

$$\operatorname{Re} \left\{ 1 + z \frac{F_\lambda''(z)}{F_\lambda'(z)} \right\} = \operatorname{Re} \left\{ 1 + z \frac{h''(z)}{h'(z)} + \frac{\lambda z \omega'(z)}{1 + \lambda \omega(z)} \right\}.$$

Por lo tanto, usando el Teorema 2.7 y el Teorema 1.7 (de caracterización de funciones analíticas convexas), concluimos el siguiente resultado.

COROLARIO 2.8. Sea $f = h + \bar{g}$ una función armónica localmente univalente que preserva la orientación en \mathbb{D} . Entonces, $f = h + \bar{g} \in \mathcal{SC}_H$ si y sólo si para todo $|\lambda| = 1$

$$\operatorname{Re} \left\{ 1 + z \frac{h''(z)}{h'(z)} + \frac{\lambda z \omega'(z)}{1 + \lambda \omega(z)} \right\} > 0, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Estas funciones tienen otras importantes propiedades como veremos enseguida. Sea $f = h + \bar{g}$ una función establemente convexa. Para cada $z_0 \in \mathbb{D}$ (fijo), la función

$$\varphi_{z_0}(\lambda) = 1 + z_0 \frac{h''(z_0)}{h'(z_0)} + \frac{\lambda z_0 \omega'(z_0)}{1 + \lambda \omega(z_0)}, \quad \lambda \in \mathbb{D},$$

es analítica y satisface la condición $\operatorname{Re}\{\varphi_{z_0}(\lambda)\} > 0$ para cada $|\lambda| = 1$. Por el principio del máximo vemos que $\operatorname{Re}\{\varphi_{z_0}(\lambda)\} > 0$ para cada $|\lambda| \leq 1$. Por lo tanto, concluimos el siguiente resultado.

COROLARIO 2.9. Si $f = h + \bar{g} \in \mathcal{SC}_H$, entonces

$$\operatorname{Re} \left\{ 1 + z \frac{h''(z)}{h'(z)} + \frac{\lambda z \omega'(z)}{1 + \lambda \omega(z)} \right\} > 0, \quad z \in \mathbb{D},$$

para todo $|\lambda| \leq 1$. En particular, h es convexa.

Sea $f = h + \bar{g}$ una función establemente convexa. Entonces, para cada $|\lambda| = 1$, las funciones analíticas $F_\lambda = h + \lambda g$ son convexas. Como las funciones convexas tienen la propiedad hereditaria, entonces para cada $r \in (0, 1)$, las funciones analíticas $G_{\lambda, r}(z) := F_\lambda(rz)$ son convexas. De aquí, se concluye usando el Teorema 2.7, que para todo $r \in (0, 1)$, las funciones armónicas $f_r(z) := f(rz)$ son convexas y entonces obtenemos el siguiente resultado.

TEOREMA 2.10. Sea $f = h + \bar{g}$ una función armónica localmente univalente que preserva la orientación en \mathbb{D} . Si $f = h + \bar{g}$ es establemente convexa, entonces $f = h + \bar{g}$ es completamente convexa.

De acuerdo al teorema anterior, podemos ver que la siguiente cadena de inclusiones

$$\mathcal{SC}_H \subset \mathcal{CC}_H \subset \mathcal{C}_H$$

es válida para las familias de funciones convexas \mathcal{SC}_H , \mathcal{CC}_H y \mathcal{C}_H .

2.6. Familias de funciones armónicas afín y linealmente invariantes

Diremos que una familia \mathcal{F}_H de funciones $f = h + \bar{g}$ armónicas y localmente univalentes que preservan la orientación en \mathbb{D} , normalizadas por las condiciones $h(0) = 1 - h'(0) = 0$ y $g(0) = 0$, es afín y linealmente invariante (F.A.L.I.), si esta es cerrada por las transformaciones

$$\mathcal{K}_\varphi(f)(z) = \frac{(f \circ \varphi)(z) - (f \circ \varphi)(0)}{(h \circ \varphi)'(0)}, \quad \varphi \in \text{Aut}(\mathbb{D}), \quad (2.13)$$

y

$$\mathcal{A}_\varepsilon(f)(z) = \frac{f(z) - \varepsilon \overline{f(z)}}{1 - \bar{\varepsilon} g'(0)}, \quad |\varepsilon| < 1, \quad (2.14)$$

donde $\text{Aut}(\mathbb{D})$ denota el conjunto de todas las funciones analíticas de la forma

$$\varphi(z) = \lambda \frac{z + \zeta}{1 + \bar{\zeta}z}, \quad z \in \mathbb{D},$$

con $|\lambda| = 1$ y $\zeta \in \mathbb{D}$. Por lo tanto, al igual que en la Sección 1.1 es necesario distinguir dos casos. El primero es cuando

$$\varphi(z) = \frac{z + \zeta}{1 + \bar{\zeta}z}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

En tal caso, anotamos

$$\mathcal{K}_\zeta(f) := \mathcal{K}_\varphi(f)(z) = \frac{f\left(\frac{z + \zeta}{1 + \bar{\zeta}z}\right) - f(\zeta)}{(1 - |\zeta|^2)h'(\zeta)}, \quad z \in \mathbb{D}, \quad (2.15)$$

y la llamamos transformación armónica de Koebe. El segundo caso es

$$\varphi(z) = \lambda z, \quad z \in \mathbb{D}.$$

En este caso, anotamos

$$\mathcal{K}_\lambda(f)(z) := \mathcal{K}_\varphi(f)(z) = \bar{\lambda}f(\lambda z), \quad z \in \mathbb{D},$$

y la llamamos rotación de f . Si \mathcal{F}_H es una F.A.L.I., denotamos por \mathcal{F}_H^0 al subconjunto de funciones $f = h + \bar{g} \in F_H$ que satisfacen la condición $g'(0) = 0$. En general, \mathcal{F}_H^0 no es una F.A.L.I., dado que la condición $g'(0) = 0$ no necesariamente es preservada por las transformaciones \mathcal{K}_φ y \mathcal{A}_ε en (2.13) y (2.14).

Ejemplos de familias de funciones armónicas afín y linealmente invariantes son la familia \mathcal{S}_H de funciones armónicas univalentes que preservan la orientación en \mathbb{D} normalizadas por las condiciones $h(0) = 1 - h'(0) = 0$ y $g(0) = 0$, la familia \mathcal{C}_H de funciones armónicas convexas en \mathbb{D} y la familia \mathcal{SC}_H de funciones armónicas establemente convexas en \mathbb{D} . Entre todos estos ejemplos indicados, probablemente el menos evidente es la clase \mathcal{SC}_H . A continuación presentaremos una demostración.

LEMA 2.1. *La familia \mathcal{SC}_H de funciones establemente convexas en \mathbb{D} es una familia afín y linealmente invariante.*

Demostración. Sea $f = h + \bar{g} \in \mathcal{SC}_H$. Por el Teorema 2.7, las funciones analíticas $F_\lambda = h + \lambda g$ son convexas para todo $|\lambda| = 1$. La descomposición canónica de $\mathcal{K}_\varphi(f)$ está dada por

$$\mathcal{K}_\varphi(f)(z) = \frac{(f \circ \varphi)(z) - (f \circ \varphi)(0)}{(h \circ \varphi)'(0)} = H_\varphi(f)(z) + \overline{G_\varphi(f)(z)},$$

donde

$$H_\varphi(f)(z) = \frac{h(\varphi(z)) - h(\varphi(0))}{h'(\varphi(0))\varphi'(0)} \quad \text{y} \quad G_\varphi(f)(z) = \frac{g(\varphi(z)) - g(\varphi(0))}{h'(\varphi(0))\varphi'(0)}.$$

Un cálculo muestra que para cada $|\lambda| = 1$, la función

$$\begin{aligned} H_\varphi(f)(z) + \lambda G_\varphi(f)(z) &= \\ &= A(h, \varphi, \lambda)[h(\varphi(z)) + B(h, \varphi, \lambda)g(\varphi(z))] + C(h, \varphi, \lambda), \end{aligned} \quad (2.16)$$

donde

$$A(h, \varphi, \lambda) = \frac{1}{h'(\varphi(0))\varphi'(0)}, \quad B(h, \varphi, \lambda) = \lambda \frac{h'(\varphi(0))\varphi'(0)}{h'(\varphi(0))\varphi'(0)}$$

y

$$C(h, \varphi, \lambda) = -\frac{h(\varphi(0))}{h'(\varphi(0))\varphi'(0)} - \lambda \frac{g(\varphi(0))}{h'(\varphi(0))\varphi'(0)}$$

son constantes que no dependen de z . Dado que $B(h, \varphi, \lambda)$ es una constante de módulo 1, se ve que el lado derecho de (2.16) es una función analítica convexa. Por lo tanto, usando el Teorema 2.7 se concluye que $\mathcal{K}_\varphi(f) \in \mathcal{SC}_H$ para todo $\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{D})$.

Por otra parte, la descomposición canónica de $\mathcal{A}_\varepsilon(f)$ está dada por

$$\mathcal{A}_\varepsilon(f)(z) = \frac{f(z) - \varepsilon \overline{f(z)}}{1 - \overline{\varepsilon}g'(0)} = H_\varepsilon(f)(z) + \overline{G_\varepsilon(f)(z)},$$

donde

$$H_\varepsilon(f)(z) = \frac{h(z) - \overline{\varepsilon}g(z)}{C(g, \varepsilon)}, \quad G_\varepsilon(f)(z) = \frac{g(z) - \varepsilon h(z)}{C(g, \varepsilon)}$$

y $C(g, \varepsilon) = 1 - \overline{\varepsilon}g'(0)$.

Un cálculo muestra que para cada $|\lambda| = 1$, la función

$$H_\varepsilon(f)(z) + \lambda G_\varepsilon(f)(z) = A(\varepsilon, g, \lambda)[h(z) + B(\varepsilon, g, \lambda)g(z)], \quad (2.17)$$

donde

$$A(\varepsilon, g, \lambda) = \frac{1}{C(g, \varepsilon)} \left(1 - \lambda \varepsilon \frac{C(g, \varepsilon)}{C(g, \varepsilon)} \right) \quad \text{y} \quad B(\varepsilon, g, \lambda) = \frac{\lambda C(g, \varepsilon) - \overline{\varepsilon} C(g, \varepsilon)}{C(g, \varepsilon) - \lambda \varepsilon C(g, \varepsilon)}$$

son constantes que no dependen de z . Dado que $B(\varepsilon, g, \lambda)$ es una constante de módulo 1, se ve que el lado derecho de (2.17) es una función analítica convexa. Usando el Teorema 2.7, se concluye que $\mathcal{A}_\varepsilon(f) \in \mathcal{SC}_H$ para todo $|\varepsilon| < 1$. Esto termina la demostración. \square

El orden de una F.A.L.I se define mediante la ecuación

$$\text{Ord}(\mathcal{F}_H) = \sup_{f=h+\overline{g} \in \mathcal{F}_H} |a_2(h)| = \frac{1}{2} \sup_{f=h+\overline{g} \in \mathcal{F}_H} |h''(0)|. \quad (2.18)$$

Al igual que en el caso analítico, propiedades importantes en una familia \mathcal{F}_H de funciones armónicas afín y linealmente invariantes, tales como crecimiento y cubrimiento pueden ser determinadas por el orden $Ord(\mathcal{F}_H)$ definido en (2.18).

TEOREMA 2.11 (Teorema de Crecimiento y Cubrimiento). *Sea \mathcal{F}_H una familia de funciones armónicas afín y linealmente invariante con orden $\alpha = Ord(\mathcal{F}_H) < \infty$. Si $f = h + \bar{g} \in \mathcal{F}_H^0$, entonces para cada $z \in \mathbb{D}$*

$$|f(z)| \leq \frac{1}{2\alpha} \left[\left(\frac{1+|z|}{1-|z|} \right)^\alpha - 1 \right]. \quad (2.19)$$

Si \mathcal{F}_H es un subconjunto de \mathcal{S}_H , entonces además se cumple la desigualdad

$$\frac{1}{2\alpha} \left[1 - \left(\frac{1-|z|}{1+|z|} \right)^\alpha \right] \leq |f(z)|. \quad (2.20)$$

En particular, el rango de toda función armónica $f = h + \bar{g} \in \mathcal{F}_H \cap \mathcal{S}_H^0$ contiene el disco $\{|z| < 1/2\alpha\}$.

Se cree que el orden de la familia \mathcal{S}_H es 3, pero esto es aún desconocido. En el caso de las funciones armónicas convexas, se sabe que el orden es igual a 2. Por lo tanto, del teorema anterior se obtiene el siguiente resultado.

TEOREMA 2.12 (Teorema de Crecimiento y Cubrimiento para \mathcal{C}_H). *Si $f = h + \bar{g} \in \mathcal{C}_H^0$, entonces para cada $z \in \mathbb{D}$*

$$\frac{1}{4} \left[1 - \left(\frac{1-|z|}{1+|z|} \right)^2 \right] \leq |f(z)| \leq \frac{1}{4} \left[\left(\frac{1+|z|}{1-|z|} \right)^2 - 1 \right].$$

En particular, el rango de toda función armónica $f = h + \bar{g} \in \mathcal{C}_H^0$ contiene el disco $\{|z| < 1/4\}$.

En [20], R. Hernández y M. J. Martín introducen una definición de derivada Schwarziana $S[f]$ para funciones armónicas localmente univalentes. Si $f = h + \bar{g}$ es una función

armónica localmente univalente que preserva la orientación en \mathbb{D} , entonces la derivada Schwarziana de f se define mediante la ecuación

$$S[f] = S_h + \frac{\bar{\omega}}{1 - |\omega|^2} \left(\frac{h''}{h'} \omega' - \omega'' \right) - \frac{3}{2} \left(\frac{\omega' \bar{\omega}}{1 - |\omega|^2} \right)^2,$$

donde S_h es la derivada Schwarziana (1.16) de la función analítica h en la descomposición $f = h + \bar{g}$ y ω es la dilatación de f . Dejamos claro la distinción de notación entre la derivadas Schwarzianas $S[f]$ y S_f para el caso armónico y para el caso analítico, respectivamente. Al igual como en el caso analítico, se puede mostrar que la derivada Schwarziana armónica $S[\cdot]$ satisface la regla de la cadena, es decir, si f es una función armónica que preserva la orientación en \mathbb{D} y φ es una función analítica para la cual la composición $f \circ \varphi$ está bien definida, entonces $f \circ \varphi$ es una función armónica localmente univalente que preservan la orientación y

$$S[f \circ \varphi] = (S[f] \circ \varphi)(\varphi')^2 + S_\varphi,$$

la cual es una generalización de la fórmula en (1.19) para la derivada Schwarziana en el caso analítico. Adicionalmente, es posible mostrar $S[f] \equiv 0$ si y sólo si f es de la forma $T + a\bar{T}$, donde $a \in \mathbb{D}$ y T es una transformación de Möbius de la forma (1.17). Una función armónica de la forma $T + a\bar{T}$, donde $a \in \mathbb{D}$ y T es una transformación de Möbius de la forma (1.17) es llamada *transformación armónica de Möbius*.

Usando la definición de derivada Schwarziana para funciones armónicas, los autores en [9] prueban que la familia \mathcal{F}_H^M ($M > 0$) de funciones $f = h + \bar{g}$ armónicas localmente univalentes que preservan la orientación en \mathbb{D} , normalizadas por las condiciones $h(0) = 1 - h'(0) = 0$ y $g(0) = 0$ que satisfacen $\|S[f]\| \leq M$, es una familia afín y lineal invariante. En este caso, la norma $\|S[f]\|$ se define de igual manera como en (1.20). Los autores en [9] obtienen el siguiente resultado que es una generalización del resultado del Teorema 1.13 obtenido por Pommerenke en [25].

TEOREMA 2.13. *El orden de la familia \mathcal{F}_H^M es finito y está dado por*

$$\text{Ord}(\mathcal{F}_H^M) = \sqrt{1 + \frac{M}{2} + \frac{1}{2} \sup_{f \in (\mathcal{F}_H^M)^0} |g''(0)|^2} + \frac{1}{2} \sup_{f \in (\mathcal{F}_H^M)^0} |g''(0)|.$$

Más aún,

$$\frac{1}{2} \sup_{f \in (\mathcal{F}_H^M)^0} |h''(0)| = \sqrt{1 + \frac{M}{2} + \frac{1}{2} \sup_{f \in (\mathcal{F}_H^M)^0} |g''(0)|^2}.$$

Para $M > 0$, la función $K_H(1, \alpha, 1, R)$ en (2.8) con

$$\alpha = \sqrt{1 + \frac{M}{2} + \frac{1}{2}R^2} - \frac{1}{2}R \quad y \quad R = \sup_{f=h+\bar{g} \in (\mathcal{F}_H^M)^0} |g''(0)|,$$

pertenece a \mathcal{F}_M y satisface

$$\frac{1}{2}|h_0''(0)| = \sqrt{1 + \frac{M}{2} + \frac{1}{2}R^2} + \frac{R}{2}.$$

2.7. Relaciones de Marty armónicas

Sea \mathcal{F}_H una familia de funciones armónicas localmente univalentes que preservan la orientación en \mathbb{D} , afín y linealmente invariante. El método de Marty presentado en la Sección 1.4 se puede generalizar para una familia de funciones armónicas afín y linealmente invariante. Igual que en el caso analítico, este método permite tener información acerca de las funciones armónicas $f = h + \bar{g} \in \mathcal{F}_H^0$ que maximizan la parte real de los n -ésimos coeficientes de las partes analítica y co-analítica de funciones en familias afín y linealmente invariantes.

Sea $f = h + \bar{g}$ una función en la clase \mathcal{F}_H^0 , donde

$$h(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \quad y \quad g(z) = \sum_{n=2}^{\infty} b_n z^n.$$

Para cada $\zeta \in \mathbb{D}$, la transformación armónica de Koebe (2.15) de f está en \mathcal{F}_H y tiene la descomposición

$$\mathcal{K}_\zeta(f)(z) = H_\zeta(z) + \overline{G_\zeta(z)}, \quad (2.21)$$

donde $H_\zeta(z) = z + A_2(\zeta)z^2 + \dots$ y $G_\zeta(z) = B_1(\zeta)z + B_2(\zeta)z^2 + \dots$.

Un cálculo muestra que

$$h\left(\frac{z+\zeta}{1+\bar{\zeta}z}\right) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m [z^m + m(\zeta - \bar{\zeta}z^2)z^{m-1}] + O(|\zeta|^2), \quad (2.22)$$

$$g\left(\frac{z+\zeta}{1+\bar{\zeta}z}\right) = \sum_{m=2}^{\infty} b_m [z^m + m(\zeta - \bar{\zeta}z^2)z^{m-1}] + O(|\zeta|^2) \quad (2.23)$$

y

$$(1 - |\zeta|^2)h'(\zeta) = 1 + 2a_2\zeta + O(|\zeta|^2). \quad (2.24)$$

De (2.22) y (2.23) y (2.24) se deducen las siguientes fórmulas asintóticas para los coeficientes $A_n(\zeta), B_n(\zeta)$ de $H_\zeta(z), G_\zeta(z)$, respectivamente, en (2.21):

$$A_n(\zeta) = a_n + \zeta[(n+1)a_{n+1} - 2a_2a_n] - \bar{\zeta}(n-1)a_{n-1} + O(|\zeta|^2), \quad n = 2, 3, \dots, \quad a_1 = 1,$$

y

$$B_n(\zeta) = b_n + \zeta(n+1)b_{n+1} - \bar{\zeta}[2\bar{a}_2b_n + (n-1)b_{n-1}] + O(|\zeta|^2), \quad n = 1, 2, \dots, \quad b_0 = b_1 = 0.$$

La transformación afín \mathcal{A}_ε de $\mathcal{K}_\zeta(f)$, con $\varepsilon = B_1(\zeta)$, está en \mathcal{F}_H^0 y tiene la descomposición

$$\mathcal{A}_\varepsilon[\mathcal{K}_\zeta(f)](z) = H_\zeta^*(z) + \overline{G_\zeta^*(z)},$$

donde $H_\zeta^*(z) = z + A_2^*(\zeta)z^2 + \dots$ y $G_\zeta^*(z) = B_2^*(\zeta)z^2 + \dots$.

Algunos cálculos muestran que

$$A_n^*(\zeta) = a_n + \zeta[(n+1)a_{n+1} - 2a_2a_n] - \bar{\zeta}[2\bar{b}_2b_n + (n-1)a_{n-1}] + O(|\zeta|^2) \quad (2.25)$$

y

$$B_n^*(\zeta) = b_n + \zeta[(n+1)b_{n+1} - 2b_2a_n] - \bar{\zeta}[2\bar{a}_2b_n + (n-1)b_{n-1}] + O(|\zeta|^2) \quad (2.26)$$

para $n = 2, 3, \dots$

Fijemos un entero positivo $n \geq 2$ y supongamos que la función $f = h + \bar{g} \in \mathcal{F}_H^0$ es tal que la función h tiene coeficiente a_n de parte real máxima. Por lo tanto, para cada $\zeta \in \mathbb{D}$ se tiene la desigualdad

$$Re\{A_n^*(\zeta)\} \leq Re\{a_n\}. \quad (2.27)$$

De (2.25) se ve que la desigualdad (2.27) se transforma en

$$Re\{\zeta[(n+1)a_{n+1} - 2a_2a_n] - \bar{\zeta}[2\bar{b}_2\bar{b}_n + (n-1)a_{n-1}] + O(|\zeta|^2)\} \leq 0. \quad (2.28)$$

Dividiendo por $|\zeta|$ y haciendo tender ζ a cero a lo largo de un rayo en (2.28), obtenemos

$$(n+1)a_{n+1} - 2a_2a_n - 2\bar{b}_2\bar{b}_n - (n-1)\overline{a_{n-1}} = 0, \quad (2.29)$$

que se cumple para tal n . De manera similar (usando (2.26)), se puede mostrar que si $f = h + \bar{g} \in \mathcal{F}_H^0$ es tal que la función g tiene coeficiente b_n de parte real máxima, entonces b_n debe satisfacer la ecuación

$$(n+1)b_{n+1} - 2b_2a_n - 2a_2\bar{b}_n - (n-1)\overline{b_{n-1}} = 0 \quad (2.30)$$

para tal n .

Las ecuaciones (2.29) y (2.30) se conocen como las relaciones de Marty para el caso armónico. Un sencillo cálculo muestra que la función armónica de Koebe (2.10), cuyos coeficientes son $a_n = \frac{1}{6}(n+1)(2n+1)$ y $b_n = \frac{1}{6}(n-1)(2n-1)$, es un ejemplo de una función en \mathcal{S}_H^0 que satisface todas las relaciones de Marty. En [10, Sec. 7] los autores conjeturan que los coeficientes a_n, b_n de toda función $f = h + \bar{g} \in \mathcal{S}_H^0$, donde

$$h(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \quad \text{y} \quad g(z) = \sum_{n=2}^{\infty} b_n z^n,$$

satisfacen las desigualdades

$$|a_n| \leq \frac{1}{6}(n+1)(2n+1) \quad \text{y} \quad |b_n| \leq \frac{1}{6}(n-1)(2n-1)$$

para todo $n \geq 2$. Esto muestra que la función armónica de Koebe (2.10) es un candidato natural para función extremal en \mathcal{S}_H^0 para cada coeficiente. Ésta se conoce como la conjetura armónica de Bieberbach y corresponde al análogo de la Conjetura 2 vista en la Sección 1.1. A diferencia del caso analítico, tal conjetura aún no está resuelta. Por otra parte, la función L en (2.11), cuyos coeficientes son $a_n = \frac{1}{2}(n+1)$ y $b_n = -\frac{1}{2}(n-1)$, es un ejemplo de una función en \mathcal{C}_H^0 que satisface todas las relaciones de Marty. Esto último era de esperar debido que toda función $f = h + \bar{g} \in \mathcal{C}_H^0$, donde

$$h(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \quad \text{y} \quad g(z) = \sum_{n=2}^{\infty} b_n z^n$$

satisface las desigualdades

$$|a_n| \leq \frac{n+1}{2} \quad \text{y} \quad |b_n| \leq \frac{n-1}{2}$$

para todo $n \geq 2$, con igualdad para la función L en (2.11).

Capítulo 3

Espacios de Hardy

En esta sección daremos las definiciones y resultados necesarios acerca de espacios de Hardy, tanto en el caso analítico como en el caso armónico, que serán fundamentales para el Capítulo 4 de resultados principales.

3.1. Espacios de Hardy H^p

Para funciones analíticas en \mathbb{D} , las medias integrales de orden p son definidas por

$$M_p(r, f) = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta \right\}^{1/p}, \quad 0 < p < \infty,$$

y

$$M_\infty(r, f) = \max_{0 \leq \theta < 2\pi} |f(re^{i\theta})|, \quad p = \infty.$$

El espacio de Hardy H^p ($0 < p \leq \infty$) se define como el espacio de funciones analíticas en \mathbb{D} tales que

$$\sup_{0 < r < 1} M_p(r, f) < \infty.$$

Dado que para cada $a, b \geq 0$ se cumple

$$(a + b)^p \leq \begin{cases} a^p + b^p, & \text{si } 0 < p < 1 \\ 2^{p-1}(a^p + b^p), & \text{si } p \geq 1, \end{cases} \quad (3.1)$$

se tiene que los espacios H^p ($0 < p \leq \infty$) son espacios lineales. Para $p \geq 1$, la cantidad

$$\|f\|_p := \sup_{0 < r < 1} M_p(r, f)$$

define una norma en el espacio H^p , mientras que para $0 < p < 1$, la cantidad

$$d_p(f, g) := \|f - g\|_p^p$$

define una métrica en el espacio H^p . En cualquier caso, H^p es un espacio completo.

Sea $\zeta \in \partial\mathbb{D}$. Para $0 < \alpha < \pi/2$ construimos el sector angular con vértice ζ , de ángulo 2α y simétrico respecto a la recta $L : z = t\zeta$, $t \in \mathbb{R}$. Trazamos dos rectas desde el origen perpendiculares a la frontera de este sector y denotamos por $S_\alpha(\zeta)$ al sector en forma de cometa en el interior del disco \mathbb{D} que muestra la Figura 3.1. A tal región, la denominamos región de Stolz basada en el punto $\zeta \in \partial\mathbb{D}$.

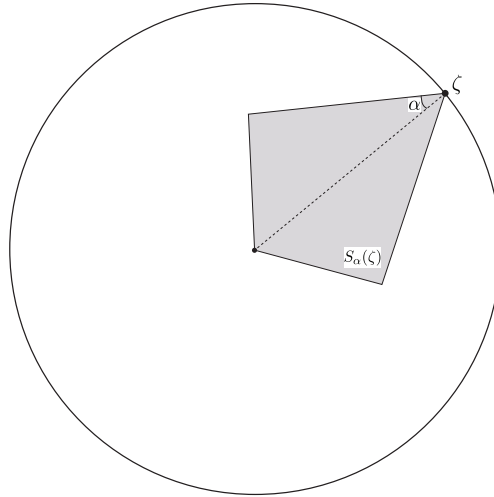


Figura 3.1: Región de Stolz $S_\alpha(\zeta)$.

Diremos que una función f analítica en \mathbb{D} tiene límite no tangencial L en $\zeta \in \partial\mathbb{D}$ si $f(z) \rightarrow L$ cuando $z \rightarrow \zeta$, dentro de cada región de Stolz $S_\alpha(\zeta)$, $0 < \alpha < \pi/2$.

TEOREMA 3.1. *Si $f \in H^p$ ($0 < p \leq \infty$), entonces el límite no tangencial $f(\zeta)$ existe en casi todo punto $\zeta \in \partial\mathbb{D}$.*

Como consecuencia del teorema anterior tenemos que si $f \in H^p$ ($0 < p \leq \infty$), entonces el límite radial $\lim_{r \rightarrow 1} f(r\zeta)$ existe en casi todo punto $\zeta \in \partial\mathbb{D}$.

En esta sección, sólo destacaremos lo resultados que serán necesarios para esta tesis. Estos resultados los presentamos a continuación.

TEOREMA 3.2. *Si $f \in H^p$ ($p > 0$) y $f(\zeta) = 0$ en un conjunto $B \subset \partial\mathbb{D}$ de medida de Lebesgue positiva, entonces $f \equiv 0$.*

TEOREMA 3.3. *Toda función f analítica con parte real positiva en \mathbb{D} pertenece al espacio H^p para todo $p < 1$.*

TEOREMA 3.4. *Toda función f analítica y convexa en \mathbb{D} pertenece al espacio H^p para todo $p < 1$. El resultado es óptimo dado que la función ℓ en (1.9) no pertenece a H^1 .*

TEOREMA 3.5. *Toda función f analítica y univalente en \mathbb{D} está en el espacio H^p para todo $p < 1/2$. El resultado es óptimo dado que la función de Koebe κ en (1.1) no pertenece a $H^{1/2}$.*

Sea φ una función de valores complejos en $\partial\mathbb{D}$. Diremos que $\varphi \in L^p(\partial\mathbb{D})$ si

$$\int_0^{2\pi} |\varphi(e^{i\theta})|^p d\theta < \infty.$$

Sea φ una función de valores complejos en $\partial\mathbb{D}$. La integral de Poisson de φ es la función f definida por

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - |z|^2}{|e^{i\theta} - z|^2} \varphi(e^{i\theta}) d\theta, \quad z \in \mathbb{D}.$$

El siguiente resultado muestra una relación que existe entre la función φ y su integral de Poisson.

TEOREMA 3.6. *Una función f analítica en \mathbb{D} es la integral de Poisson de una función $\varphi \in L^p(\partial\mathbb{D})$ ($1 \leq p \leq \infty$) si y sólo si $f \in H^p$.*

3.2. Espacios de Hardy h^p

Para funciones armónicas f de valores complejos, las medias integrales de orden p son definidas por

$$m_p(r, f) = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta \right\}^{1/p}, \quad 0 < p < \infty,$$

y

$$m_\infty(r, f) = \max_{0 \leq \theta < 2\pi} |f(re^{i\theta})|, \quad p = \infty.$$

El espacio de Hardy armónico h^p ($0 < p \leq \infty$) se define como el espacio de funciones armónicas en \mathbb{D} tales que

$$\sup_{0 < r < 1} m_p(r, f) < \infty.$$

Al igual que en el caso analítico, la desigualdad (3.1) muestra que los espacios h^p ($0 < p \leq \infty$) son espacios lineales. Sea $f = h + \bar{g}$ una función armónica localmente univalente que preserva la orientación en \mathbb{D} . Es fácil concluir que si $h, g \in H^p$ para algún $p > 0$, entonces $f \in h^p$ para tal p . Como vimos anteriormente, toda función analítica convexa pertenece al espacio de Hardy H^p para todo $p < 1$. El resultado correspondiente al caso armónico lo presentamos a continuación.

TEOREMA 3.7. *Si $f = h + \bar{g} \in \mathcal{C}_H$, entonces $f \in h^p$ para todo $p < 1/2$.*

Demostración. Sea $f = h + \bar{g} \in \mathcal{C}_H$. Es fácil mostrar que para cada $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tales que $|\alpha| > |\beta|$, $f \in h^p$ (algún p) si y sólo si la función $A_{\alpha,0,\beta} \circ f$, donde $A_{\alpha,0,\beta}$ es la función armónica afín en (2.2) pertenece a h^p para tal p . Por lo tanto, podemos suponer sin perder generalidad que $f \in \mathcal{C}_H^0$ escogiendo $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ adecuados. Usando el Teorema 2.3 tenemos que, para cada $\theta \in [0, \pi)$, las funciones analíticas $\Phi_\theta = h - e^{2i\theta}g$ son univalentes, convexas en la dirección θ y normalizadas por las condiciones $F_\theta(0) = F'_\theta(0) - 1 = 0$. Del Teorema 3.5 obtenemos que para cada $\theta \in [0, \pi)$, $F_\theta \in H^p$ para todo $p < 1/2$. En particular, $h - g$ y $h + g$ pertenecen al espacio de Hardy H^p para todo $p < 1/2$. Por linealidad de los

espacios de Hardy concluimos que $h, g \in H^p$ para todo $p < 1/2$. El resultado se sigue por la desigualdad triangular. □

Capítulo 4

Resultados Principales

4.1. Funciones armónicas generalizadas de Koebe y sus propiedades extremales

En esta sección determinaremos las funciones armónicas que maximizan la parte real de todos los coeficientes de Taylor de h y g para funciones $f = h + \bar{g}$ armónicas localmente univalentes que preservan la orientación en \mathbb{D} pertenecientes a familias afín y linealmente invariantes. También estudiaremos algunas de sus propiedades y veremos algunas aplicaciones a la familia de funciones \mathcal{S}_H definida en la Sección 2.2.

Comenzamos recordando que las funciones κ_α definidas por

$$\kappa_\alpha(z) = \frac{1}{2\alpha} \left[\left(\frac{1+z}{1-z} \right)^\alpha - 1 \right], \quad z \in \mathbb{D},$$

para α adecuado, tienen un rol extremal en familias de funciones linealmente invariantes (Ver Teoremas 1.9, 1.10 y 1.13). El siguiente resultado muestra una propiedad adicional que tienen estas funciones en familias linealmente invariantes. Para ser más precisos, mostraremos que las únicas posibles funciones que maximizan simultáneamente la parte real de cada coeficiente de Taylor en familias linealmente invariantes son las funciones κ_α .

TEOREMA 4.1. *Sea \mathcal{F} una familia linealmente invariante de funciones analíticas en \mathbb{D} .*

Supongamos que existe una función $f_0 \in \mathcal{F}$ tal que para todo entero positivo n , $n \geq 2$

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} \operatorname{Re}\{a_n(f)\} = \operatorname{Re}\{a_n(f_0)\}.$$

Entonces, $f_0 = \kappa_\alpha$, donde α es el orden de la familia \mathcal{F} .

Demostración.

Para simplificar la notación, usaremos $A_n = a_n(f_0)$. Dado que la familia \mathcal{F} es invariante por rotaciones, se concluye que cada coeficiente A_n es real y positivo. En particular, el coeficiente A_2 es mayor que cero dado que este coincide con el orden de la familia \mathcal{F} y el orden de una familia linealmente invariante es mayor que 1 (ver [25]). Luego, usando el hecho que f_0 maximiza la parte real de cada coeficiente de Taylor se concluye que las relaciones de Marty (1.29) se cumplen para todo $n \geq 1$. Luego, para todo $n \geq 1$

$$(n+1)A_{n+1} = 2A_2A_n + (n-1)A_{n-1}.$$

Usando lo anterior obtenemos

$$\begin{aligned} f_0'(z) &= 1 + \sum_{n=2}^{\infty} nA_n z^{n-1} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)A_{n+1} z^n \\ &= 1 + 2A_2 \sum_{n=1}^{\infty} A_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)A_{n-1} z^n \\ &= 1 + 2A_2 f_0(z) + z^2 f_0'(z). \end{aligned}$$

Por lo tanto, f_0 es solución de la ecuación diferencial

$$(1-z^2)f_0'(z) = 1 + 2A_2 f_0(z), \quad z \in \mathbb{D}, \quad (4.1)$$

cuya solución con dato inicial $f_0(0) = 0$ es $f_0 = \kappa_\alpha$, con $\alpha = A_2 = a_2(f_0)$. \square

Como veremos, el Teorema 4.1 tiene un análogo armónico. Este resultado es uno de los principales de esta sección y tendrá algunas importantes aplicaciones para la clase \mathcal{S}_H .

Para establecer este resultado es necesario tener un análogo armónico de la función κ_α en (1.21).

La motivación es la siguiente. Como fue probado en [9] la función $K_H(1, \alpha, 1, R)$ en (2.8) con

$$\alpha = \sqrt{1 + \frac{M}{2} + \frac{1}{2}R^2} - \frac{1}{2}R \quad \text{y} \quad R = \sup_{f=h+\bar{g} \in (\mathcal{F}_H^M)^0} |g''(0)|,$$

es extremal para el problema de maximizar la parte real del segundo coeficiente de Taylor de h para funciones $f = h + \bar{g} \in (\mathcal{F}_H^M)^0$. Recordemos que \mathcal{F}_H^M ($M > 0$) denota la familia de funciones armónicas localmente univalentes que preservan la orientación en \mathbb{D} normalizadas por las condiciones $h(0) = 1 - h'(0) = 0$ y $g(0) = 0$, con norma Schwarziana acotada por M . Este resultado generaliza el Teorema 1.13 de Pommerenke que establece que la función

$$\kappa_\alpha(z) = \frac{1}{2\alpha} \left[\left(\frac{1+z}{1-z} \right)^\alpha - 1 \right], \quad z \in \mathbb{D},$$

con $\alpha = \sqrt{1 + \frac{M}{2}}$ es extremal en \mathcal{F}_M para el segundo coeficiente, donde \mathcal{F}_M es la familia de funciones f analíticas localmente univalentes en \mathbb{D} , normalizadas por las condiciones $f(0) = 1 - f'(0) = 0$ que satisfacen la condición $\|S_f\| \leq M$, y propone una definición adecuada de *función armónica generalizada de Koebe*.

Para cada $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = |\mu| = 1$ y $0 \leq R \leq 1$ la *función armónica generalizada de Koebe* $K_H = K_H(\lambda, \alpha, \mu, R)$ se define como la función armónica $K_H = h + \bar{g}$ tal que h y g son soluciones del sistema (2.8). Aquí, nos centraremos en analizar algunas propiedades de las funciones armónicas generalizadas de Koebe en aquellos casos cuando los parámetros λ , μ y α son números reales. En estos casos, diferentes simetrías se pueden obtener como muestra el siguiente lema.

LEMA 4.1. *Para cada α, λ, μ y R números reales tales que $|\lambda| = |\mu| = 1$ y $0 \leq R \leq 1$, la función $K_H = K_H(\lambda, \alpha, \mu, R)$ satisface las siguientes propiedades:*

(i) $K_H(1, \alpha, 1, R) = K_H(-1, \alpha + R, 1, R)$.

$$(ii) K_H(-1, \alpha, -1, R) = K_H(1, \alpha + R, -1, R).$$

$$(iii) K_H(\lambda, -\alpha, \mu, R)(z) = -K_H(\lambda, \alpha, -\mu, R)(-z).$$

Demostración.

- (i) Sean $K_H(1, \alpha, 1, R) = h + \bar{g}$, $K_H(-1, \alpha + R, 1, R) = H + \bar{G}$. Entonces, se cumple que $h - g = \kappa_\alpha$, $H + G = \kappa_{\alpha+R}$ y $g'/h' = G'/H' = l_R$. Un sencillo cálculo muestra que

$$h' = H' = \frac{1}{2(1-z)^2} \left(\frac{1+z}{1-z} \right)^{\alpha-1} \left(\left(\frac{1+z}{1-z} \right)^R + 1 \right)$$

y

$$g' = G' = \frac{1}{2(1-z)} \left(\frac{1+z}{1-z} \right)^{\alpha-1} \left(\left(\frac{1+z}{1-z} \right)^R - 1 \right).$$

Como $h(0) = H(0) = 0$ y $g(0) = G(0) = 0$ se concluye que $h = H$ y $g = G$. Por lo tanto, $K_H(1, \alpha, 1, R) = K_H(-1, \alpha + R, 1, R)$.

- (ii) Es directo de (i).

- (iii) Notar en primer lugar que para cada número real α y para cada $0 \leq R \leq 1$ las ecuaciones

$$\kappa_{-\alpha}(z) = -\kappa_\alpha(-z) \quad y \quad l_R(z) = -l_R(-z) \quad (4.2)$$

son válidas para las funciones analíticas κ_α y l_R definidas en (1.21) y (2.9).

Sean $K_H(\lambda, -\alpha, \mu, R) = h + \bar{g}$ y $K_H(\lambda, \alpha, -\mu, R) = H + \bar{G}$, entonces se cumplen

$$\begin{cases} h - \lambda g = \kappa_{-\alpha} \\ \omega = g'/h' = \mu l_R \end{cases}, \quad h(0) = g(0) = 0 \quad (4.3)$$

y

$$\begin{cases} H - \lambda G = \kappa_\alpha \\ \omega = G'/H' = -\mu l_R \end{cases}, \quad H(0) = G(0) = 0. \quad (4.4)$$

Sea $-K_H(\lambda, \alpha, -\mu, R)(-z) = H_0(z) + \overline{G_0(z)}$. De (4.2) y (4.4) es fácil ver que H_0 y G_0 satisfacen las ecuaciones

$$\begin{cases} H_0(z) - \lambda G_0(z) = \kappa_{-\alpha}(z) \\ \omega = G'_0/H'_0 = \mu l_R \end{cases}, \quad H_0(0) = G_0(0) = 0.$$

Por lo tanto, de (4.3) se obtiene la igualdad pedida.

□

El lema anterior muestra que es suficiente restringir nuestro análisis a funciones armónicas generalizadas de Koebe de la forma $K(1, \alpha, 1, R)$, la cual denotaremos por

$$K_{\alpha, R} := K_H(1, \alpha, 1, R). \quad (4.5)$$

Antes de presentar el resultado principal de esta sección, necesitamos algunas observaciones importantes. La primera de ellas es relacionada con el segundo coeficiente de Taylor b_2 de g de cada función armónica $f = h + \bar{g}$ localmente univalente que preserva la orientación en \mathbb{D} y está normalizada por las condiciones $h(0) = 1 - h'(0) = 0$ y $g(0) = 0$. En tal caso, la dilatación $\omega = g'/h'$ de f es una función analítica de \mathbb{D} en \mathbb{D} que fija el origen. Por lo tanto, el lema de Schwarz implica que $|\omega'(0)| \leq 1$. Dado que $g' = \omega h'$, se tiene la siguiente estimación para el segundo coeficiente de g

$$|b_2| = \frac{1}{2}|g''(0)| = \frac{1}{2}|\omega'(0)h'(0) + \omega(0)h''(0)| = \frac{1}{2}|\omega'(0)| \leq \frac{1}{2}.$$

Esto muestra, en particular, que la parte real del coeficiente b_2 de g de tal función $f = h + \bar{g}$ es siempre menor o igual a $1/2$.

La segunda observación es relacionada con el coeficiente a_2 de la parte analítica h de una función $f = h + \bar{g}$ que maximiza la parte real de los coeficientes a_2 y b_2 en la familia \mathcal{F}_H^0 . Este resultado lo presentamos a continuación.

LEMA 4.2. *Sea \mathcal{F}_H una familia de funciones armónicas localmente univalentes que preservan la orientación en \mathbb{D} , afín y linealmente invariante. Supongamos que existe $f_0 = h_0 + \bar{g}_0 \in \mathcal{F}_H^0$ tal que*

$$\sup_{f=h+\bar{g} \in \mathcal{F}_H^0} \operatorname{Re}\{a_2(h)\} = \operatorname{Re}\{a_2(h_0)\} \quad \text{y} \quad \sup_{f=h+\bar{g} \in \mathcal{F}_H^0} \operatorname{Re}\{b_2(g)\} = \operatorname{Re}\{b_2(g_0)\}.$$

Entonces $a_2(h_0) > 1/2$.

Demostración. Supongamos que $a_2(h_0) < 1/2$. Dado que $a_2(h_0)$ maximiza $Re\{a_2(h)\}$ en \mathcal{F}_H^0 , necesariamente $a_2(h_0)$ es un número real positivo. Por lo tanto, para cada función $f = h + \bar{g} \in \mathcal{F}_H^0$ la desigualdad $Re\{a_2(h)\} < 1/2$ es válida.

Sea $\Phi = \Psi + \bar{\Gamma}$ una función en \mathcal{F}_H , entonces existe una función $f \in \mathcal{F}_H^0$ y $\beta \in \mathbb{D}$ tal que $\Phi = f + \bar{\beta f}$. Unos simples cálculos muestran que la parte analítica de Φ es igual a $\Psi = h + \bar{\beta g}$. Luego

$$\begin{aligned} \sup_{\Phi = \Psi + \bar{\Gamma} \in \mathcal{F}_H} Re\{a_2(\Psi)\} &= \sup_{f = h + \bar{g} \in \mathcal{F}_H^0, \beta \in \mathbb{D}} \frac{Re\{h''(0) + \bar{\beta}g''(0)\}}{2} \\ &\leq \sup_{f = h + \bar{g} \in \mathcal{F}_H^0, \beta \in \mathbb{D}} \frac{Re\{h_0''(0)\} + |\beta g''(0)|}{2} \\ &\leq a_2(h_0) + \sup_{f = h + \bar{g} \in \mathcal{F}_H^0} |b_2(g)| < 1. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Denotemos por \mathcal{H} la familia de partes analíticas de funciones en \mathcal{F}_H . Dado que \mathcal{F}_H es afín y linealmente invariante, entonces se ve que \mathcal{H} es una familia de funciones analíticas linealmente invariante. Pommerenke en [25], muestra que el supremo de $Re\{a_2(\Psi)\}$ sobre funciones Ψ en una familia linealmente invariante de funciones analíticas es siempre mayor o igual que 1. Esto contradice (4.6) y prueba que $a_2(h_0) \geq 1/2$.

Para finalizar la demostración, mostraremos que $a_2(h_0) = 1/2$ no es posible. A modo de tener una contradicción, supongamos que $a_2(h_0) = 1/2$. Tenemos dos diferentes casos a considerar. El primer caso es que

$$\sup_{f = h + \bar{g} \in \mathcal{F}_H^0} |b_2(g)| = b_2(g_0) < \frac{1}{2}.$$

Argumentando como antes vemos que el orden de la familia linealmente invariante \mathcal{H} es estrictamente menor que 1, es decir, una contradicción. El segundo caso a analizar es

$$b_2(g_0) = \frac{1}{2}.$$

De nuevo, denotemos por \mathcal{H} la familia linealmente invariante de funciones analíticas que son partes analíticas de funciones en \mathcal{F}_H . Es posible mostrar que el orden de esta familia

coincide con el orden de la clausura (respecto a la topología de la convergencia localmente uniforme) $\overline{\mathcal{H}}$ de \mathcal{H} . Nuestra hipótesis muestra que el orden $ord(\overline{\mathcal{H}})$ de $\overline{\mathcal{H}}$ es igual a 1. Por definición $Ord(\mathcal{F}_H) = ord(\mathcal{H})$ y entonces $Ord(\mathcal{F}_H) = 1$.

Por otra parte, dado que $b_2(g_0) = 1/2$, la dilatación $\omega = g'_0/h'_0$ de f_0 satisface $\omega'(0) = 2b_2(g_0) = 1$. Por el lema de Schwarz concluimos que ω_0 es la identidad. Hemos mostrado entonces que existe una función armónica $f_0 = h_0 + \overline{g}_0 \in \mathcal{F}_H^0$ con dilatación igual a la identidad. El mismo argumento usado en la demostración del Teorema 3 en [9] muestra que $Ord(\mathcal{F}_H) \geq 2$. Esta contradicción finaliza la demostración. \square

Como consecuencia del lema anterior y de la observación hecha justo antes, tenemos que si una función $f = h + \overline{g}$ maximiza simultáneamente el segundo coeficiente de Taylor de h y g en la familia \mathcal{F}_H^0 , entonces $a_2(h) - b_2(g) > 0$.

Ahora estamos en condiciones de presentar nuestro resultado principal de esta sección.

TEOREMA 4.2. *Sea \mathcal{F}_H una familia de funciones armónicas localmente univalentes que preservan la orientación en \mathbb{D} , afín y linealmente invariante. Supongamos que existe $f_0 = h_0 + \overline{g}_0 \in \mathcal{F}_H^0$ tal que*

$$\sup_{f=h+\overline{g} \in \mathcal{F}_H^0} Re\{a_n(h)\} = Re\{a_n(h_0)\} \quad \text{y} \quad \sup_{f=h+\overline{g} \in \mathcal{F}_H^0} Re\{b_n(g)\} = Re\{b_n(g_0)\} \quad (4.7)$$

para todo $n \geq 2$. Entonces, $f_0 = K_{\alpha,R}$, donde $K_{\alpha,R}$ es la función armónica generalizada de Koebe (4.5), con $\alpha = a_2(h_0) - b_2(g_0)$ y $R = 2b_2(g_0)$. Más aún, el orden de \mathcal{F}_H es igual a $Ord(\mathcal{F}_H) = \alpha + R$.

Demostración. Para simplificar, usaremos la notación $A_n = a_n(h_0)$ y $B_n = b_n(g_0)$. Sea $f_0 = h_0 + \overline{g}_0 \in \mathcal{F}_H^0$ la función armónica que satisface las igualdades de (4.7). De la hipótesis es fácil ver que todos coeficientes de Taylor A_n y B_n son reales y positivos para todo $n \geq 1$. Usando las normalizaciones de funciones en \mathcal{F}_H^0 tenemos que $A_0 = B_0 = B_1 = 0$ y $A_1 = 1$

y escribimos

$$f_0(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} A_n z^n + \overline{\sum_{n=2}^{\infty} B_n z^n}.$$

Las hipótesis (4.7) implican que las relaciones de Marty (2.29) y (2.30) se cumplen para todo $n \geq 1$. Por lo tanto,

$$(n+1)A_{n+1} = 2A_2A_n + 2B_2B_n + (n-1)A_{n-1} \quad (4.8)$$

y

$$(n+1)B_{n+1} = 2A_2B_n + 2B_2A_n + (n-1)B_{n-1} \quad (4.9)$$

son válidas para todo $n \geq 1$, pues todos los coeficientes A_n, B_n de h_0, g_0 , respectivamente, son reales.

Restando (4.8) y (4.9) obtenemos que

$$(n+1)(A_{n+1} - B_{n+1}) = 2(A_2 - B_2)(A_n - B_n) + (n-1)(A_{n-1} - B_{n-1})$$

para todo $n \geq 1$. Entonces,

$$\begin{aligned} (h'_0 - g'_0)(z) &= 1 + \sum_{n=2}^{\infty} n(A_n - B_n)z^{n-1} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)(A_{n+1} - B_{n+1})z^n \\ &= 1 + 2(A_2 - B_2) \sum_{n=1}^{\infty} (A_n - B_n)z^n \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)(A_{n-1} - B_{n-1})z^n \\ &= 1 + 2(A_2 - B_2)(h_0 - g_0)(z) + z^2(h'_0 - g'_0)(z). \end{aligned}$$

Hemos mostrado que la función $h_0 - g_0$ satisface (4.1) con $\alpha = 2(A_2 - B_2)$ (que es positivo por el Lema 4.2). De esta manera, $h_0 - g_0$ es igual a la función generalizada de Koebe $\kappa_{A_2 - B_2}$.

Sumando (4.8) con (4.9), y de manera totalmente análoga a lo señalado anteriormente, podemos obtener que $h_0 + g_0$ es igual a la función generalizada de Koebe $\kappa_{A_2 + B_2}$.

Para calcular la dilatación ω de f_0 notar que como $h_0 + g_0 = \kappa_{A_2+B_2}$ y $h_0 - g_0 = \kappa_{A_2-B_2}$ tenemos que

$$h'_0(1 + \omega) = \kappa'_{A_2+B_2} \quad y \quad h'_0(1 - \omega) = \kappa'_{A_2-B_2},$$

y entonces

$$\frac{1 + \omega(z)}{1 - \omega(z)} = \frac{\kappa'_{A_2+B_2}(z)}{\kappa'_{A_2-B_2}(z)} = \left(\frac{1+z}{1-z} \right)^{2B_2}.$$

Despejando ω de la ecuación anterior obtenemos que ω esta dada por

$$\omega(z) = \frac{\left(\frac{1+z}{1-z} \right)^{2B_2} - 1}{\left(\frac{1+z}{1-z} \right)^{2B_2} + 1}.$$

Es decir, ω es la función lente (2.9) con $R = 2B_2$. Por lo tanto, $f_0 = K_{\alpha,R}$ con $\alpha = A_2 - B_2$ y $R = 2B_2$.

Para probar la segunda parte del teorema acerca del orden \mathcal{F}_H primero notar que $\alpha + R = A_2 + B_2$, donde

$$A_2 = \max_{f=h+\bar{g} \in \mathcal{F}_H^0} \operatorname{Re}\{a_n(h)\} = \max_{f=h+\bar{g} \in \mathcal{F}_H^0} |a_n(h)|$$

y

$$B_2 = \max_{f=h+\bar{g} \in \mathcal{F}_H^0} \operatorname{Re}\{b_n(g)\} = \max_{f=h+\bar{g} \in \mathcal{F}_H^0} |b_n(g)|.$$

Como fue mencionado en la prueba del Lema 4.2, cada función $\Phi = \Psi + \bar{\Gamma} \in \mathcal{F}_H$ puede ser escrita como

$$\Phi = f + \bar{\beta}f,$$

para algún $f = h + \bar{g} \in \mathcal{F}_H^0$ y $\beta \in \mathbb{D}$. Dado que $\Psi = h + \bar{\beta}g$, tenemos que el segundo coeficiente de Taylor de cada función Ψ satisface

$$|a_2(\Psi)| = |a_2(h + \bar{\beta}g)| \leq A_2 + B_2,$$

el cual prueba que $\operatorname{Ord}(\mathcal{F}_H) \leq A_2 + B_2$. Como la función $h_0 + g_0$ pertenece a la clausura $\overline{\mathcal{H}}$ de la familia de partes analíticas de funciones en \mathcal{F}_H y dado que $\operatorname{ord}(\mathcal{H}) = \operatorname{ord}(\overline{\mathcal{H}})$ se concluye que $\operatorname{Ord}(\mathcal{F}_H) = \operatorname{ord}(\mathcal{H}) = A_2 + B_2 = \alpha + R$. Esto concluye la demostración. \square

A continuación, algunos corolarios del teorema anterior.

COROLARIO 4.3. *Sea \mathcal{F}_H una familia de funciones armónicas localmente univalentes que preservan la orientación en \mathbb{D} , afín y linealmente invariante. Supongamos que existe $f_0 = h_0 + \overline{g_0} \in \mathcal{F}_H^0$ que satisface las ecuaciones en (4.7) para todo $n \geq 2$. Entonces, la igualdad se presenta en alguna de las desigualdades de (2.19) y (2.20) (según sea el caso) para la función f_0 .*

En palabras simples, las funciones extremales del Teorema 4.2 son ejemplos de funciones que producen la igualdad en las desigualdades del teorema de crecimiento en familias de funciones armónicas afines y linealmente invariantes (Teorema 2.11).

Demostración. [Demostración Corolario 4.3] Por el Teorema 4.2, $f_0 = K_{\alpha,R}$, donde $K_{\alpha,R}$ es la función armónica generalizada de Koebe (4.5), con $\alpha = a_2(h_0) - b_2(g_0)$ y $R = 2b_2(g_0)$. Además, el orden de la familia \mathcal{F}_H es igual a $Ord(\mathcal{F}_H) = \alpha + R$. Como se mostró en el Lema 4.1, la función $f_0 = K_{\alpha,R} = K_H(1, \alpha, 1, R) = K_H(-1, \alpha + R, 1, R)$. En otras palabras, si h_0, g_0 son las partes analítica y co-analítica, respectivamente, de la función f_0 entonces $h_0 + g_0 = \kappa_{\alpha+R}$. Como las funciones h_0, g_0 tienen coeficientes reales se tiene la igualdad

$$h_0(z) + \overline{g_0(z)} = h_0(z) + g_0(z) = \kappa_{\alpha+R}(z),$$

para cada $z \in \mathbb{D} \cap \mathbb{R}$.

Por lo tanto, si $z \in \mathbb{D} \cap \mathbb{R}$ entonces

$$|h_0(z) + \overline{g_0(z)}| = |\kappa_{\alpha+R}(z)| = \begin{cases} \frac{1}{2(\alpha+R)} \left[\left(\frac{1+z}{1-z} \right)^{\alpha+R} - 1 \right] & , \quad \text{si } 0 \leq z < 1, \\ \frac{1}{2(\alpha+R)} \left[1 - \left(\frac{1+z}{1-z} \right)^{\alpha+R} \right] & , \quad \text{si } -1 < z \leq 0, \end{cases}$$

lo cual muestra la igualdad en las desigualdades del Teorema 2.11 (según sea el caso), dado que $Ord(\mathcal{F}_H) = \alpha + R$. □

Antes de presentar un último corolario, necesitaremos el siguiente resultado acerca de la univalencia de las funciones armónicas $K_{\alpha,R}$ para los distintos valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ y $0 \leq R \leq 1$.

TEOREMA 4.4. *Sea α un número real y $0 \leq R \leq 1$. Entonces, $K_{\alpha,R}$ es univalente si y sólo si $-2 \leq \alpha \leq 2$.*

Demostración. Consideremos primero el caso en que $\alpha = 0$. En este caso, $K_{0,R} = h + \bar{g}$, donde h y g resuelven el sistema

$$\begin{cases} h - g = \kappa_0 \\ \omega = g'/h' = l_R \end{cases}, \quad h(0) = g(0) = 0.$$

La función κ_0 en el sistema anterior es la función convexa en (1.22). Por el Teorema 2.2, se concluye que $K_{0,R}$ es univalente para cada $0 \leq R \leq 1$.

Supongamos ahora que $0 < \alpha \leq 2$. Por el Teorema 1.14, la función κ_α es univalente. Dado que κ_α es convexa en la dirección horizontal, entonces por el Teorema 2.2 se concluye que la función $K_{\alpha,R}$ es univalente si $0 < \alpha \leq 2$ y $0 \leq R \leq 1$.

Probaremos ahora que si $\alpha > 2$, entonces $K_{\alpha,R}$ no es univalente. Dado que α y R son números reales, las funciones κ_α y l_R tienen coeficientes reales. De la ecuación $h' = \kappa'_\alpha/(1-l_R)$ se observa que los coeficientes de Taylor de h son reales. Finalmente, la ecuación $g = h - \kappa_\alpha$ muestra que los coeficientes de g también son reales.

Sea $\alpha = 2 + \varepsilon$, con $\varepsilon > 0$ adecuado. La función $\eta(z) = (1+z)/(1-z)$ mapea el disco sobre el semiplano derecho $Re\{w\} > 0$. Luego, existe $z_1 \in \mathbb{D}$ tal que

$$\frac{1+z_1}{1-z_1} = e^{i\frac{\pi}{2+\varepsilon}},$$

y entonces $\kappa_\alpha(z_1)$ es un número real negativo (Notar que z_1 no puede ser real). Sea $z_2 = \bar{z}_1$. Dado que κ_α tiene coeficientes reales, la identidad $\kappa_\alpha(\bar{z}) = \overline{\kappa_\alpha(z)}$ se tiene para todo $z \in \mathbb{D}$. En particular, dado que $\kappa_\alpha(z_1)$ es un número real tenemos que $\kappa_\alpha(z_2) = \kappa_\alpha(z_1)$. En otras

palabras, hemos encontrado dos puntos distintos $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ tales que

$$\kappa_\alpha(z_1) = h(z_1) - g(z_1) = h(z_2) - g(z_2) = \kappa_\alpha(z_2),$$

el cual nos da la identidad $h(z_1) + g(z_2) = h(z_2) + g(z_1)$. Usando que g tiene coeficientes reales obtenemos la igualdad

$$\begin{aligned} f(z_1) &= h(z_1) + \overline{g(z_1)} = h(z_1) + \overline{g(\overline{z_2})} = h(z_1) + g(z_2) \\ &= h(z_2) + g(z_1) = h(z_2) + g(\overline{z_2}) = h(z_2) + \overline{g(z_2)} = f(z_2). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $K_{\alpha,R}$ no es univalente si $\alpha > 2$. De esta manera, si $\alpha > 0$ entonces $K_{\alpha,R}$ es univalente si y sólo si $0 < \alpha \leq 2$.

Por otra parte, el mismo argumento usado anteriormente muestra que la función $F = H + \overline{G}$, donde H y G resuelven el sistema

$$\begin{cases} H - G = \kappa_\alpha \\ \omega = G'/H' = -l_R \end{cases}, \quad H(0) = G(0) = 0,$$

no es univalente si $\alpha > 2$. Notar que F es univalente si y sólo si la función f definida por la ecuación $f(z) = -F(-z)$ es univalente. Por definición, la función F es igual a $F = K_H(1, \alpha, -1, R)$. Usando la propiedad (iii) del Lema 4.1 tenemos que f es igual a $K_H(1, -\alpha, 1, R) = K_{-\alpha,R}$. Finalmente, se concluye que $K_{-\alpha,R}$ es univalente si y sólo si $0 < -\alpha \leq 2$. Esto termina la demostración. \square

COROLARIO 4.5. *Supongamos que existe una función $f_0 \in \mathcal{S}_H^0$ que satisface las ecuaciones*

$$\sup_{f=h+\bar{g} \in \mathcal{S}_H^0} \operatorname{Re}\{a_n(h)\} = \operatorname{Re}\{a_n(h_0)\} \quad \text{y} \quad \sup_{f=h+\bar{g} \in \mathcal{S}_H^0} \operatorname{Re}\{b_n(g)\} = \operatorname{Re}\{b_n(g_0)\},$$

para todo $n \geq 2$. Entonces, f_0 es la función armónica de Koebe (2.10).

Demostración. Por el Teorema 4.2, $f_0 = K_{\alpha,R}$, donde $K_{\alpha,R}$ es la función armónica generalizada de Koebe (4.5), con $\alpha = a_2(h_0) - b_2(g_0)$ y $R = 2b_2(g_0)$. Un cálculo muestra que

el segundo coeficiente de la parte analítica de $K_{\alpha,R}$ es igual a $\alpha + R/2$. Dado que f_0 es univalente, entonces por el Teorema 4.4 se tiene que el mayor valor que toma $\alpha + R/2$ es $5/2$, es decir, cuando $\alpha = 2$ y $R = 1$. Por lo tanto, f_0 es la función armónica de Koebe (2.10). \square

El siguiente resultado es inmediato de los Corolarios 4.3 y 4.5.

COROLARIO 4.6. *Supongamos que existe una función $f_0 = h_0 + \bar{g}_0 \in \mathcal{S}_H^0$ que satisface las ecuaciones*

$$\sup_{f=h+\bar{g} \in \mathcal{S}_H^0} \operatorname{Re}\{a_n(h)\} = \operatorname{Re}\{a_n(h_0)\} \quad \text{y} \quad \sup_{f=h+\bar{g} \in \mathcal{S}_H^0} \operatorname{Re}\{b_n(g)\} = \operatorname{Re}\{b_n(g_0)\}$$

para todo $n \geq 2$. Si $f = h + \bar{g} \in \mathcal{S}_H^0$, entonces para cada $z \in \mathbb{D}$

$$\frac{1}{6} \left[1 - \left(\frac{1-|z|}{1+|z|} \right)^3 \right] \leq |f(z)| \leq \frac{1}{6} \left[\left(\frac{1+|z|}{1-|z|} \right)^3 - 1 \right]. \quad (4.10)$$

La igualdad se alcanza en alguna de las desigualdades de (4.10) para la función armónica de Koebe (2.10). En particular, el rango de toda función armónica $f = h + \bar{g} \in \mathcal{S}_H^0$ contiene el disco $\{|z| < 1/6\}$.

4.2. Propiedades geométricas y analíticas de partes analíticas y dilataciones de funciones armónicas en familias de funciones convexas

En esta sección estudiaremos las partes analíticas h y dilataciones $\omega = g'/h'$ de funciones armónicas $f = h + \bar{g}$ en las familias de funciones convexas \mathcal{C}_H , completamente convexas \mathcal{CC}_H y establemente convexas \mathcal{SC}_H . Como se mostró en la Sección 2.5 (Corolario 2.9), la parte analítica de toda función establemente convexa es convexa. Es razonable pensar si esto es también válido para las familias de funciones convexas \mathcal{C}_H y completamente convexas \mathcal{CC}_H , sobre todo para funciones $f = h + \bar{g} \in \mathcal{CC}_H$, dado que en la inecuación (2.12) interviene el término

$$\operatorname{Re} \left\{ 1 + z \frac{h''(z)}{h'(z)} \right\},$$

que esta estrechamente relacionado con la convexidad de h .

Respecto a la clase \mathcal{C}_H , no es difícil ver que la función L definida en (2.11) tiene parte analítica

$$h(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{z}{1-z} + \frac{z}{(1-z)^2} \right),$$

que no es convexa. Por lo tanto, las partes analíticas de funciones armónicas convexas no necesariamente son convexas. Por otra parte, respecto a la clase \mathcal{CC}_H hemos obtenido el siguiente resultado.

TEOREMA 4.7. *Existe $f = h + \bar{g} \in \mathcal{CC}_H$ tal que su parte analítica h no es convexa.*

Para la demostración de este resultado, es necesario hacer una importante observación. Como fue mencionado en la Sección 2.5, la siguiente cadena de inclusiones

$$\mathcal{SC}_H \subset \mathcal{CC}_H \subset \mathcal{C}_H, \quad (4.11)$$

es válida para las tres familias de funciones convexas antes mencionadas. Como se mostró en la Sección 2.4, la función $L = h + \bar{g}$ definida en (2.11), es convexa pero no completamente convexa. Dado que $L(\{|z| < r\})$ es un dominio convexo para cada $0 < r < \sqrt{2} - 1$, tenemos que la función $f(z) := L((\sqrt{2} - 1)z)$ es completamente convexa. Un sencillo cálculo muestra que si H y G son las partes analítica y co-analítica de f , respectivamente, entonces $H(z) - G(z) = \kappa((\sqrt{2} - 1)z)$, donde $\kappa(z) = z/(1-z)^2$ es la función de Koebe (1.1). Dado que el radio de convexidad de la función de Koebe es $2 - \sqrt{3}$ y $2 - \sqrt{3} < \sqrt{2} - 1$, concluimos que $H - G$ no es convexa. Por lo tanto, $f(z) := L((\sqrt{2} - 1)z)$ no es establemente convexa. Este ejemplo muestra que la cadena de inclusiones (4.11) es estricta, es decir,

$$\mathcal{SC}_H \subsetneq \mathcal{CC}_H \subsetneq \mathcal{C}_H. \quad (4.12)$$

Con la observación anterior, procedemos a mostrar el Teorema 4.7.

Demostración. [Demostración del Teorema 4.7.] Supongamos, a modo de tener una contradicción, que la parte analítica de toda función armónica $f = h + \bar{g} \in \mathcal{CC}_H$ es convexa. Dado que para cada $a \in \mathbb{D}$, la función armónica $\psi_a(z) = z + a\bar{z}$ preserva la convexidad, se tiene que $f \in \mathcal{CC}_H$ si y sólo si $f_a := \psi_a \circ f = f + \overline{af} \in \mathcal{CC}_H$. Un simple cálculo muestra que la parte analítica de f_a es $h + \bar{a}g$. Bajo la suposición de que la parte analítica de cada función armónica completamente convexa es convexa, concluimos que $h + \bar{a}g$ es convexa para cada $a \in \mathbb{D}$. Usando el teorema de Hurwitz y el hecho de que f preserva la orientación, obtenemos que $h + \bar{a}g$ es convexa para todo $|a| \leq 1$. Finalmente, del Teorema 2.7 concluimos que $f = h + \bar{g}$ es establemente convexa. Esto contradice (4.12) y termina la demostración. \square

En virtud de lo anterior, se ve que entre las tres familias \mathcal{SC}_H , \mathcal{CC}_H y \mathcal{C}_H , la familia \mathcal{SC}_H es la única familia de funciones armónicas convexas tal que todas sus funciones tienen partes analíticas convexas. Gran parte de esta sección estará dedicada, entre otras cosas, a saber qué tipo de funciones convexas pueden ser partes analíticas de funciones establemente convexas. Para hacer esto es necesario estudiar sus dilataciones.

Denotaremos por $\mathcal{A}(\mathbb{D}; \mathbb{D})$ al conjunto de funciones ω analíticas en \mathbb{D} tales que $\omega(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$. Sea \mathcal{H} un conjunto de funciones armónicas en \mathbb{D} , diremos que una función $\omega \in \mathcal{A}(\mathbb{D}; \mathbb{D})$ es admisible en \mathcal{H} , si existe una función armónica $f = h + \bar{g} \in \mathcal{H}$ tal que $\omega = g'/h'$, es decir, ω es dilatación de alguna función armónica en \mathcal{H} . Al conjunto de dilataciones admisibles en un conjunto de funciones armónicas \mathcal{H} lo denotamos por $\mathcal{D}_{\mathcal{H}}$.

En [4] los autores muestran que si una función armónica $f = h + \bar{g} \in \mathcal{S}_H^0$ satisface la condición

$$h(z) + g(z) = \frac{z}{1-z}, \quad z \in \mathbb{D},$$

entonces $f \in \mathcal{C}_H^0$.

El resultado a continuación muestra que lo anterior también es válido para funciones armónicas $f = h + \bar{g} \in \mathcal{S}_H^0$ que satisfacen la condición

$$h(z) - g(z) = \frac{1}{2} \log \left(\frac{1+z}{1-z} \right), \quad z \in \mathbb{D}.$$

LEMA 4.3. *Sea $f = h + \bar{g}$ una función armónica localmente univalente que preserva la orientación en \mathbb{D} , con las normalizaciones $h(0) = 1 - h'(0) = 0$ y $g(0) = g'(0) = 0$ y que satisface la condición*

$$h(z) - g(z) = \frac{1}{2} \log \left(\frac{1+z}{1-z} \right), \quad z \in \mathbb{D}.$$

Entonces $f = h + \bar{g} \in \mathcal{C}_H^0$.

Demostración. Mostraremos que independiente de la dilatación, la función $f = h + \bar{g}$, donde h, g resuelven el sistema

$$\begin{cases} h(z) - g(z) = \frac{1}{2} \log \left(\frac{1+z}{1-z} \right) \\ g'(z)/h'(z) = \omega(z) \end{cases} \quad (z \in \mathbb{D}), \quad h(0) = g(0) = 0,$$

pertenece a \mathcal{C}_H^0 . Para esto, notar que para cualquier $\theta \in [0, \pi[$, la elección de $\nu = \pi/2$ y $\mu = -\theta + \pi$ produce la desigualdad

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\{-ie^{i\mu}(1 - 2 \cos \nu e^{-i\mu} z + e^{-2i\mu} z^2)(h'(-ie^{i\theta} z) - e^{2i\theta} g'(-ie^{i\theta} z))\} = \\ \sin \theta \operatorname{Re} \left\{ \frac{1 + \omega(-ie^{i\theta} z)}{1 - \omega(-ie^{i\theta} z)} \right\} \geq 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, usando el Teorema 2.5 concluimos que f es convexa. \square

Con la ayuda del Lema 4.3 podemos mostrar el siguiente resultado acerca de las dilataciones de funciones armónicas convexas.

TEOREMA 4.8. $\mathcal{D}_{\mathcal{C}_H} = \mathcal{A}(\mathbb{D}; \mathbb{D})$.

Demostración. Sea $\omega \in \mathcal{A}(\mathbb{D}; \mathbb{D})$. Tenemos dos diferentes casos a considerar. El primer caso es $\omega(0) = 0$. Usando el Lema 4.3, obtenemos que la función armónica $f = h + \bar{g}$,

donde h, g resuelven el sistema

$$\begin{cases} h(z) - g(z) = \frac{1}{2} \log \left(\frac{1+z}{1-z} \right) \\ g'(z)/h'(z) = \omega(z) \end{cases} \quad (z \in \mathbb{D}), \quad h(0) = g(0) = 0,$$

es convexa. Por lo tanto, $\omega \in \mathcal{D}_{\mathcal{C}_H}$. El segundo caso a analizar es $\omega(0) \neq 0$. Dado que $b = \omega(0) \in \mathbb{D}$, entonces la función ω^* definida por

$$\omega^*(z) = \frac{\omega(z) - b}{1 - \bar{b}\omega(z)}$$

es una función de \mathbb{D} en \mathbb{D} que fija al origen. Luego, usando el Lema 4.3 obtenemos que la función armónica $F = H + \bar{G}$, donde H, G resuelven el sistema

$$\begin{cases} H(z) - G(z) = \frac{1}{2} \log \left(\frac{1+z}{1-z} \right) \\ G'(z)/H'(z) = \omega^*(z) \end{cases} \quad (z \in \mathbb{D}), \quad H(0) = G(0) = 0,$$

es convexa. Usando, de nuevo, que $b = \omega(0) \in \mathbb{D}$, se tiene que la función armónica $f = F + \bar{bF}$ es convexa y tiene dilatación

$$\omega_F = \frac{\omega^* + b}{1 + \bar{b}\omega^*} = \omega.$$

Por lo tanto, $\omega \in \mathcal{D}_{\mathcal{C}_H}$. Esto termina la demostración. \square

Desafortunadamente, no hemos obtenido avances en relación con las dilataciones de funciones armónicas completamente convexas. Creemos que en este caso, las dilataciones de funciones armónicas completamente convexas deben satisfacer la inclusión estricta $\mathcal{D}_{\mathcal{C}_H} \subsetneq \mathcal{A}(\mathbb{D}; \mathbb{D})$. Para el caso de dilataciones de funciones establemente convexas tenemos el siguiente teorema.

TEOREMA 4.9. *Si $\omega \in \mathcal{D}_{\mathcal{S}\mathcal{C}_H}$, entonces $\omega' \in H^p$ para todo $p < 1$.*

En la Teoría de Espacios de Hardy, la conjetura de Bloch-Nevalinna aseguraba que si $f \in N$, entonces $f' \in N$, donde N es la clase de Nevalinna. Recordemos que una función f analítica en \mathbb{D} esta en la clase N si las integrales

$$\int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})| d\theta$$

son acotadas para $r < 1$, donde \log^+ es la función definida mediante la ecuación

$$\log^+ x = \begin{cases} \log x, & x \geq 1 \\ 0, & 0 \leq x < 1. \end{cases}$$

Es conocido que todos los espacios H^p ($0 < p \leq \infty$) están contenidos en la clase de Nevanlinna N . Diremos que una función analítica φ en el disco \mathbb{D} satisface la condición de Bloch Nevanlinna (B-N) si

$$\varphi \in N \Rightarrow \varphi' \in N.$$

Se sabe que existen funciones analíticas que no satisfacen la condición de Bloch-Nevanlinna. Mas precisamente, existen funciones $\varphi \in H^\infty$ continuas en el disco cerrado $\bar{\mathbb{D}}$ tales que la derivada $\varphi'(z)$ tiene límite radial en casi ningún punto. Para mas detalles, por ejemplo, ver [12].

Sin embargo, el Teorema 4.9 muestra que las dilataciones de funciones armónicas es-tablemente convexas sí satisfacen la condición B-N.

Demostración. [Demostración del Teorema 4.9] Sea $\omega \in \mathcal{D}_{SC_H}$, entonces existe $f = h + \bar{g} \in SC_H$ tal que $g'/h' = \omega$. Por el Teorema 2.8,

$$Re \left\{ 1 + z \frac{h''(z)}{h'(z)} \right\} + Re \left\{ \frac{\lambda z \omega'(z)}{1 + \lambda \omega(z)} \right\} > 0, \quad (4.13)$$

para todo $z \in \mathbb{D}$ y para todo $|\lambda| \leq 1$. Definamos las funciones

$$\varphi(z) = 1 + z \frac{h''(z)}{h'(z)}$$

y

$$\psi_\lambda(z) = \varphi(z) + \frac{\lambda z \omega'(z)}{1 + \lambda \omega(z)}. \quad (4.14)$$

De la convexidad de h y de (4.13) tenemos que $\varphi, \psi_\lambda \in \mathcal{P}$. Usando el Teorema 3.3 tenemos que $\varphi, \psi_\lambda \in H^p$ para todo $p < 1$. De (4.14) y por linealidad del espacio de Hardy, tenemos que para cada $|\lambda| = 1$ la función analítica

$$\eta_\lambda(z) = \frac{\lambda z \omega'(z)}{1 + \lambda \omega(z)}$$

está en H^p para todo $p < 1$. De la igualdad $(1 + \lambda\omega(z))\eta_\lambda(z) = \lambda z\omega'(z)$ y dado que $1 + \lambda\omega(z)$ esta acotada, concluimos que $z\omega'(z)$ está en H^p para todo $p < 1$. Por lo tanto, lo mismo es válido para la función analítica ω' . \square

Como se mencionó anteriormente, estamos interesados en saber qué tipo de funciones convexas pueden ser partes analíticas de funciones establemente convexas. Para esto es necesario introducir una subfamilia propia de funciones convexas.

Sea $k \in (0, 1]$. Diremos que una función φ analítica y localmente univalente en \mathbb{D} es k -convexa si la condición

$$\operatorname{Re} \left\{ 1 + z \frac{\varphi''(z)}{\varphi'(z)} \right\} \geq k$$

se cumple para todo $z \in \mathbb{D}$. El conjunto de funciones k -convexas φ con las normalizaciones $\varphi(0) = 1 - \varphi'(0) = 0$ es denotado por $\mathcal{C}[k]$. Es importante notar que $\mathcal{C}[k] \subset \mathcal{C}$ para todo $k \in (0, 1]$, donde \mathcal{C} es el conjunto de funciones analíticas y convexas normalizadas en \mathbb{D} .

El siguiente teorema muestra que las funciones k -convexas son un ejemplo de funciones convexas que son partes analíticas de funciones establemente convexas. El resultado lo enunciamos como sigue.

TEOREMA 4.10. *Sea h una función analítica k -convexa. Sea $\omega \in \mathcal{A}(\mathbb{D}; \mathbb{D})$ no constante tal que $\omega' \in H^\infty$. Entonces, existe $\alpha \in \mathbb{D}$ tal que la función armónica $f = h + \bar{g}$ con dilatación $\alpha\omega$ es establemente convexa.*

Antes de empezar con la demostración, es importante destacar que la condición en la dilatación en este teorema es consistente con el Teorema 4.9.

Demostración. [Demostración del Teorema 4.10] Sea h una función k -convexa, $\omega \in \mathcal{A}(\mathbb{D}; \mathbb{D})$ no constante tal que $\omega' \in H^\infty$ y sea

$$f(z) = h(z) + \overline{\int_0^z \alpha\omega(\zeta)h'(\zeta)d\zeta} \quad (4.15)$$

la función armónica con parte analítica h y dilatación $\alpha\omega$. Para mostrar que existe $\alpha \in \mathbb{D}$ tal que la función armónica en (4.15) es establemente convexa, es suficiente mostrar, por el Teorema 2.7, que existe $\alpha \in \mathbb{D}$ tal que las funciones analíticas

$$F_\lambda := h + \lambda \int_0^z \alpha\omega(\zeta)h'(\zeta)d\zeta$$

son convexas en \mathbb{D} para todo $|\lambda| = 1$. Dado que $\omega' \in H^\infty$, tenemos que $|\omega'| \leq M$ en el disco unidad para algún $M > 0$. Un cálculo muestra que

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left\{ 1 + z \frac{F_\lambda''(z)}{F_\lambda'(z)} \right\} &= \operatorname{Re} \left\{ 1 + z \frac{h''(z)}{h'(z)} \right\} + \operatorname{Re} \left\{ \frac{\lambda z \omega_f'(z)}{1 + \lambda \omega_f(z)} \right\} \\ &\geq k - \frac{|\lambda z \omega_f'(z)|}{|1 + \lambda \omega_f(z)|} \\ &> k - \frac{|\alpha| M}{1 - |\alpha|} > 0 \end{aligned}$$

si $|\alpha| \leq k/(M + k)$. Por lo tanto, si escogemos α tal que $|\alpha| \leq k/(M + k)$, entonces la función armónica en (4.15) es establemente convexa. Esto termina la demostración. \square

El teorema anterior nos entrega un método para construir funciones establemente convexas. A continuación veremos un ejemplo para ilustrar.

EJEMPLO 4.1. *Sea*

$$h(z) = \log \left(\frac{1}{1-z} \right).$$

Un sencillo cálculo muestra que $h \in \mathcal{C}[1/2]$, es decir, h satisface la desigualdad

$$\operatorname{Re} \left\{ 1 + z \frac{h''(z)}{h'(z)} \right\} \geq \frac{1}{2}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Del teorema anterior, tenemos que la función $f = h + \bar{g}$ con dilatación $\omega(z) = \alpha z$ es establemente convexa, si $|\alpha| \leq 1/3$. Si escogemos (por ejemplo) $\alpha = i/8$, entonces obtenemos la función armónica establemente convexa

$$f(z) = \log \left(\frac{1}{1-z} \right) - \frac{i}{8} \overline{\log \left(\frac{1}{1-z} \right)} + \frac{i}{8} \bar{z}. \quad (4.16)$$

La imagen del disco bajo el mapeo anterior fue realizado con el programa Mathematica y se muestra en la Figura 4.1 a continuación.

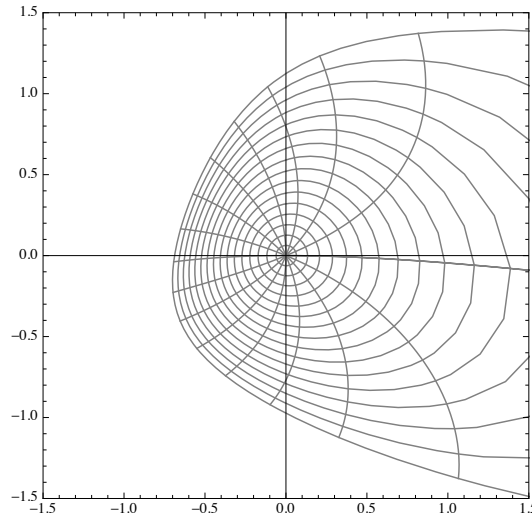


Figura 4.1: Imagen del disco \mathbb{D} bajo la función f en (4.16).

Es útil encontrar una condición geométrica que garantice la k -convexidad. Es decir, si Ω es un dominio convexo y h es una función analítica de \mathbb{D} sobre Ω , entonces, ¿qué condiciones debe satisfacer el dominio Ω para que h sea una función k -convexa?

El siguiente teorema propone condiciones necesarias para la k -convexidad, las cuales serán útiles para los siguientes resultados. Para esto es necesario recordar el concepto de curvas de clase $\mathcal{C}^{n,\alpha}$ ($0 < \alpha \leq 1$).

Una curva de Jordan $C \subset \mathbb{C}$ es de clase $\mathcal{C}^{n,\alpha}$ ($0 < \alpha \leq 1$) si tiene una parametrización $C : w(t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, que es n -veces continuamente diferenciable, con $w'(t) \neq 0$, y existe una constante $M > 0$ tal que

$$|w^{(n)}(t_1) - w^{(n)}(t_2)| \leq M|t_1 - t_2|^\alpha, \quad t_1, t_2 \in [0, 2\pi].$$

TEOREMA 4.11. Sea Γ una curva de Jordan convexa en \mathbb{C} . Sean $w_1, \dots, w_n = w_0$ puntos en Γ (en orden cíclico), y sean Γ_k los arcos cerrados entre w_{k-1} y w_k , $k = 1, 2, \dots, n$.

Supongamos que los arcos Γ_k son de clase $C^{2,\alpha}$ para algún $\alpha > 0$, no contienen segmentos rectos (o más generalmente, no contienen puntos de curvatura cero) y que la curva Γ forma en w_k un ángulo interior $\pi\alpha_k$, con $0 \leq \alpha_k < 1$. Sea Ω el dominio acotado por la curva Γ . Si h mapea \mathbb{D} conformemente sobre Ω , entonces h es δ -convexa, para algún $\delta > 0$.

En palabras simples, si h es una función convexa tal que $\partial h(\mathbb{D})$ es una curva convexa que es la unión de arcos lo suficientemente suaves y lo suficientemente curvados, entonces h es δ -convexa, para algún $\delta > 0$.

Para la demostración del Teorema 4.11 es necesario tener en consideración algunos hechos importantes.

Sea f una función analítica localmente univalente en \mathbb{D} . Sea C_r la imagen de la circunferencia $|z| = r < 1$ bajo la función f . Entonces, la curvatura de C_r en el punto $w = f(z)$ está dada por la fórmula

$$\kappa_z = \frac{1}{r|f'(z)|} \operatorname{Re} \left\{ 1 + z \frac{f''(z)}{f'(z)} \right\}. \quad (4.17)$$

Diremos que una función β es regulada en el intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ si los límites laterales

$$\beta(t^+) = \lim_{\tau \rightarrow t^+} \beta(\tau) \quad \text{y} \quad \beta(t^-) = \lim_{\tau \rightarrow t^-} \beta(\tau)$$

existen para cada $t \in [a, b]$.

Sea G un dominio simplemente conexo en \mathbb{C} y sea f un mapeo de Riemann de \mathbb{D} sobre G . Por el Teorema de Carathéodory (ver por ejemplo [27, Teo. 2.1]), podemos parametrizar ∂G como

$$\partial G : w(t) = f(e^{it}), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Diremos que G es un dominio regulado si para cada punto $\zeta \in \partial G$ el conjunto $f^{-1}(\zeta)$ es finito y

$$\beta(t) = \begin{cases} \lim_{\tau \rightarrow t^+} \arg[w(\tau) - w(t)] & , \text{ si } w(t) \neq \infty, \\ \lim_{\tau \rightarrow t^+} \arg w(\tau) + \pi & , \text{ si } w(t) = \infty \end{cases}$$

existe para todo t y define una función regulada. Adicionalmente, si β tiene variación acotada, entonces diremos que G es un dominio de frontera de rotación acotada. Recordemos que β es de variación acotada si satisface

$$\int_0^{2\pi} |d\beta(t)| = \sup_{\{t_v\}} \sum_{v=1}^n |\beta(t_v) - \beta(t_{v-1})|,$$

donde el supremo es tomado sobre todas las particiones de $[0, 2\pi]$. Existe un teorema de representación para funciones f analíticas y univalentes de \mathbb{D} sobre G , donde $G \subset \mathbb{C}$ es un dominio de frontera de rotación acotada (ver por ejemplo [27, Cor. 3.16]). Este resultado lo presentamos a continuación.

TEOREMA C. *Sea f una función analítica y univalente de \mathbb{D} sobre un dominio G de frontera de rotación acotada. Entonces*

$$\log f'(z) = \log f'(0) - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \log(1 - e^{-it}z) d\beta(t), \quad z \in \mathbb{D},$$

donde la rama de logaritmo se escoge de manera que $|\arg(1 - e^{-it}z)| < \pi/2$ para $z \in \mathbb{D}$.

Como es sabido, cada función de variación acotada β puede ser expresada como $\beta = \beta_{salto} + \beta_{sing} + \beta_{abs}$, donde β_{salto} es constante excepto para una cantidad contable de puntos, β_{sing} es continua con $\beta'_{sing} = 0$ para casi todo punto y β_{abs} es absolutamente continua. Si β tiene una cantidad finita de saltos entonces el siguiente resultado es válido (ver por ejemplo [27, Cor. 3.17]).

TEOREMA D. *Si β es de variación acotada excepto en una cantidad finita de saltos en t_k ($k = 1, 2, \dots, n$), entonces*

$$f'(z) = f'(0) \prod_{k=1}^n (1 - e^{it_k}z)^{-\sigma_k} \exp \left\{ -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \log(1 - e^{it}z) d\beta(t) \right\}, \quad z \in \mathbb{D}. \quad (4.18)$$

Como es sabido cada dominio convexo es un dominio de frontera de rotación acotada y en este caso la función β es una función creciente con $\beta(2\pi) - \beta(0) = 2\pi$.

Con todo lo expuesto anteriormente, estamos en condiciones de mostrar el Teorema 4.11.

Demostración. [Demostración del Teorema 4.11.] Por las hipótesis, la curvatura κ_Γ de Γ existe en cada arco abierto y tiene límites laterales en cada vértice w_k , $k = 1, 2, \dots, n$. Sea h el mapeo conforme de \mathbb{D} sobre Ω (el dominio interior acotado por la curva Γ), y sean $\zeta_k = h^{-1}(w_k)$. Se sigue de [27, Teo. 3.6] que $h''(z)$ es continua y $h'(z) \neq 0$, para $z \in \overline{\mathbb{D}} \setminus \{\zeta_1, \dots, \zeta_n\}$. Usando la representación (4.18) para h' , la desigualdad $\log |1 - e^{-it}z| \leq \log 2$ y la condición $\beta(2\pi) - \beta(0) = 2\pi$, obtenemos que

$$|h'(z)| \geq \frac{|h'(0)|}{4} \prod_{k=1}^n |1 - \zeta_k z|^{-\sigma_k},$$

de la cual se concluye que $h'(\zeta_k) = \infty$ para cada $k = 1, 2, \dots, n$. Por lo tanto, existe $\delta_0 > 0$ tal que $|h'(\zeta)| \geq \delta_0$ para todo $\zeta \in \partial\mathbb{D}$. En cada arco (cerrado) Γ_k , existe $\delta_k > 0$ tal que $\kappa_{\Gamma_k} \geq \delta_k > 0$. Sea $\delta = \min\{\delta_1, \dots, \delta_n\} > 0$, entonces por (4.17) tenemos que

$$\operatorname{Re} \left\{ 1 + \zeta \frac{h''(\zeta)}{h'(\zeta)} \right\} = |h'(\zeta)| \kappa_\Gamma \geq \delta_0 \delta > 0,$$

para todo $\zeta \in \partial\mathbb{D}$. Una aplicación del principio del máximo muestra que h es $\delta_0\delta$ -convexa. \square

No es difícil ver que cualquier función convexa es la parte analítica de una función establemente convexa. Para esto, basta observar que si h es convexa, entonces para cada $a \in \mathbb{D}$ la función $f_a = h + a\bar{h}$ es establemente convexa. En palabras simples, toda función convexa es la parte analítica de una función establemente convexa con dilatación constante. El teorema anterior junto con el Teorema 4.10 muestran (en particular) que toda función convexa h tal que $\partial h(\mathbb{D})$ es una curva convexa con cierta regularidad es la parte analítica de una función establemente convexa con dilatación no constante. La pregunta es, ¿qué sucede con las funciones analíticas convexas tales que (por ejemplo) $\partial h(\mathbb{D})$ contiene un segmento?, es decir, dada h convexa tal que $\partial h(\mathbb{D})$ contiene un segmento, ¿existe $\omega \in \mathcal{A}(\mathbb{D}; \mathbb{D})$ no constante tal que la función armónica $f = h + \bar{g}$ con dilatación ω es establemente convexa?

La respuesta a esta pregunta esta dada por el siguiente resultado.

TEOREMA 4.12. *Sea $f = h + \bar{g} \in \mathcal{SC}_H$. Si $\partial h(\mathbb{D})$ contiene segmentos, entonces la dilatación ω de f es constante.*

Para la demostración del Teorema 4.12, es útil tener en consideración la relación entre funciones analíticas convexas y funciones analíticas estrelladas.

Un dominio $\Omega \subset \mathbb{C}$ se dice estrellado respecto a un punto $z_0 \in \Omega$ si el segmento que une z_0 con cada punto $z_1 \in \Omega$ está totalmente contenido en Ω . Diremos que una función f analítica y localmente univalente en \mathbb{D} es estrellada si $f(\mathbb{D})$ es un dominio estrellado respecto al origen. Denotaremos por \mathcal{S}^* a la subfamilia de \mathcal{S} de funciones estrelladas en \mathbb{D} . Como consecuencia del Teorema 3.5 tenemos que $\mathcal{S}^* \subset H^p$ para todo $p < 1/2$. Por lo tanto, el límite radial de toda función estrellada existe en casi todo punto $\zeta \in \partial\mathbb{D}$.

El siguiente teorema muestra la estrecha relación que existe entre funciones analíticas convexas y estrelladas. Este resultado es debido a Alexander [2].

TEOREMA E. *Sea f una función analítica en \mathbb{D} , con $f(0) = 1 - f'(0) = 0$. Entonces, f es convexa si y sólo si $zf'(z)$ es estrellada.*

Demostración. [Demostración del Teorema 4.12] Sea $f = h + \bar{g} \in \mathcal{SC}_H$. Como h tiene extensión continua a la frontera (ver por ejemplo [27, Cap. 2]) y $\partial h(\mathbb{D})$ contiene un segmento de recta $[a, b]$, entonces podemos escoger un intervalo $I = (\alpha, \beta) \subset [0, 2\pi]$ tal que $h(e^{it}) \in [a, b]$, $t \in (\alpha, \beta)$. Como h es convexa, entonces por el Teorema E vemos que la función $zh'(z)$ es estrellada. Dado que toda función estrellada pertenece al espacio de Hardy H^p para todo $p < 1/2$, se concluye (por el Teorema 3.5) que los límites radiales $\zeta h'(\zeta)$ existen en casi todo punto $\zeta \in \partial\mathbb{D}$. En particular, los límites radiales $h'(\zeta)$ existen en casi todo punto $\zeta \in \partial\mathbb{D}$. Mostraremos ahora que los límites radiales $h'(\zeta)$ son distintos de cero en casi todo punto $\zeta \in \partial\mathbb{D}$. A modo de tener una contradicción, supongamos que h' tiene límite radial igual a cero en un conjunto de medida positiva en $\partial\mathbb{D}$. Luego, la

función $zh'(z)$ tiene límite radial igual a cero en un subconjunto de medida positiva de $\partial\mathbb{D}$. Usando el Teorema 3.2 obtenemos que h' es idénticamente cero. Esto contradice que el hecho que f preserva la orientación y entonces se concluye que $h'(\zeta) \neq 0$ en casi todo punto de $\partial\mathbb{D}$.

Con la notación $\zeta := e^{it}$ y usando el Corolario 2.9 obtenemos que

$$Re \left\{ 1 + \zeta \frac{h''(\zeta)}{h'(\zeta)} \right\} + Re \left\{ \frac{\lambda \zeta \omega'(\zeta)}{1 + \lambda \omega(\zeta)} \right\} \geq 0 \quad (4.19)$$

para casi todo $t \in I$ y para todo $|\lambda| \leq 1$. Usando que $h'(\zeta) \neq 0$ en casi todo punto de $\partial\mathbb{D}$, la fórmula (4.17) y el hecho que $h(I)$ es un segmento obtenemos que

$$Re \left\{ 1 + \zeta \frac{h''(\zeta)}{h'(\zeta)} \right\} = 0$$

para casi todo $t \in I$. Por lo tanto, de (4.19) concluimos que

$$Re \left\{ \frac{\lambda \zeta \omega'(\zeta)}{1 + \lambda \omega(\zeta)} \right\} \geq 0, \quad (4.20)$$

para casi todo $t \in I$ y para todo $|\lambda| \leq 1$.

Sea $J \subset I$ el conjunto de todos los puntos $t \in I$ tales que existen los límites radiales $1 + \zeta h''(\zeta)/h'(\zeta)$, $\omega(\zeta)$, $\omega'(\zeta)$ y $h'(\zeta)$ con $h'(\zeta) \neq 0$. Nótese que la medida de Lebesgue de J es mayor que cero. Para cada $t \in J$ fijo, definimos la función φ mediante la ecuación

$$\varphi(\lambda) = \frac{\lambda \zeta \omega'(\zeta)}{1 + \lambda \omega(\zeta)}, \quad \lambda \in \mathbb{D}.$$

Notar que φ es analítica en \mathbb{D} , satisface $Re\{\varphi\} \geq 0$ (por (4.20)) y $\varphi(0) = 0$. Por el teorema del mapeo abierto se concluye que $\varphi \equiv 0$ y entonces $\omega'(\zeta) = 0$ para todo $t \in J$. Como J tiene medida de Lebesgue positiva, entonces podemos aplicar el Teorema 3.2 para obtener que $\omega' \equiv 0$. Por lo tanto, ω es constante. \square

Un simple corolario del Teorema 4.12 es el siguiente.

COROLARIO 4.13. Sea $f = h + \bar{g} \in \mathcal{SC}_H^0$. Si $\partial h(\mathbb{D})$ contiene segmentos. Entonces, f es analítica.

A continuación mostramos una versión generalizada del Teorema 4.12.

TEOREMA 4.14. Sea $f = h + \bar{g} \in \mathcal{SC}_H$. Supongamos que existe $a \in \mathbb{D}$ tal que la función convexa $h + ag$ satisface que $\partial(h + ag)(\mathbb{D})$ contiene segmentos. Entonces, la dilatación ω de f es constante.

Demostración. Como fue probado en el Lema 2.1, la clase de funciones establemente convexas es una familia afín y linealmente invariante. Entonces, para cada $a \in \mathbb{D}$ la función armónica $f_a = f + a\bar{f}$ es establemente convexa y tiene parte analítica $h + ag$. Si $\partial(h + ag)(\mathbb{D})$ contiene un segmento, entonces por el Teorema 4.12 la dilatación ω_a de f_a es constante. Un cálculo muestra que $\omega_a = \sigma_a \circ \omega$, donde

$$\sigma_a(z) = \frac{z + a}{1 + \bar{a}z}$$

es un automorfismo de \mathbb{D} . Por lo tanto, si ω_a es constante, entonces ω es constante. \square

El Teorema 4.12 tiene una consecuencia acerca del espacio h^p en donde vive cada función establemente convexa. Como apreciamos en la Sección 3.2, toda función $f = h + \bar{g} \in \mathcal{C}_H$ pertenece al espacio de Hardy armónico h^p para todo $p < 1/2$. Para funciones establemente convexas, este resultado es mejor aún y lo presentamos a continuación.

TEOREMA 4.15. Sea $f = h + \bar{g}$ una función establemente convexa y ω su dilatación. Si ω es constante, entonces $f \in h^p$ para todo $p < 1$. Si ω es no constante, entonces para todo $\lambda \in \overline{\mathbb{D}}$ las funciones analíticas $F_\lambda = h + \lambda g$ pertenecen al espacio de Hardy H^1 . En particular, $f \in h^1$.

Demostración. Sea $f = h + \bar{g} \in \mathcal{SC}_H$. Supongamos que la dilatación ω de f es constante. En este caso $f = h + a\bar{h}$, para algún $a \in \mathbb{D}$. Usando el Teorema 3.4, tenemos que $h \in H^p$

para todo $p < 1$. Usando la desigualdad triangular obtenemos que $f \in h^p$ para todo $p < 1$. Supongamos ahora que la dilatación ω de f es no constante. Luego, por el Teorema 4.12, $\partial h(\mathbb{D})$ no puede contener segmentos. En particular, $h(\mathbb{D})$ no puede ser un semiplano ni una banda y entonces $h \in H^1$ (ver [1, Teorema 2.4]). En [10, Cor. 5.8], los autores prueban que la parte analítica h y la parte co-analítica g de una función convexa $f = h + \bar{g}$ satisfacen la condición $|g(z)| < |h(z)|$ para $0 < |z| < 1$. Esto último, junto con el hecho que $h \in H^1$ implican que $g \in H^1$. Usando la desigualdad triangular obtenemos que $F_\lambda = h + \lambda g \in H^1$ para todo $\lambda \in \overline{\mathbb{D}}$. De esto último se sigue inmediatamente que $f \in h^1$. \square

Sea $f = h + \bar{g}$ una función establemente convexa con dilatación no constante. Por el Teorema anterior, h y g pertenecen al espacio de Hardy H^1 . Usando el Teorema 3.6 se obtiene que h y g son las integrales de Poisson de φ y ψ , respectivamente, donde φ y ψ son funciones en $L^1(\partial\mathbb{D})$. De esta manera, f es la integral de Poisson de $\varphi + \bar{\psi} \in L^1(\partial\mathbb{D})$.

COROLARIO 4.16. *Sea $f = h + \bar{g}$ una función establemente convexa con dilatación no constante. Entonces, f es la integral de Poisson de una función $\varphi \in L^1(\partial\mathbb{D})$.*

El teorema anterior tiene una interesante consecuencia acerca de la geometría del dominio convexo $f(\mathbb{D})$, para $f \in \mathcal{SC}_H$. En [1], [11] y [18], los autores dan descripciones para funciones armónicas cuya imagen es un semiplano o una banda. Por una parte, si $f = h + \bar{g} \in \mathcal{S}_H^0$ mapea el disco unitario sobre el semiplano $H = \{w : \operatorname{Re}\{w\} > -1/2\}$, entonces h, g satisfacen la ecuación

$$h(z) + g(z) = \frac{z}{1-z}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Como sabemos (Teorema 3.4) la función

$$\ell(z) = \frac{z}{1-z}, \quad z \in \mathbb{D},$$

no pertenece al espacio de Hardy H^1 . Por lo tanto, usando el Teorema 4.15 obtenemos el siguiente resultado.

PROPOSICIÓN 4.1. *Sea $f = h + \bar{g} \in \mathcal{SC}_H^0$. Si f mapea \mathbb{D} sobre el semiplano $H = \{w : \operatorname{Re}\{w\} > -1/2\}$, entonces la dilatación ω de f es constante. Más aún, f es analítica e igual a $f(z) = z/(1-z)$.*

Por otra parte, si $f = h + \bar{g} \in \mathcal{S}_H^0$ mapea \mathbb{D} sobre la banda

$$S_\alpha = \left\{ w : \frac{\alpha - \pi}{2 \sin \alpha} < \operatorname{Re}\{w\} < \frac{\alpha}{2 \sin \alpha} \right\}, \quad (4.21)$$

donde $\pi/2 \leq \alpha < \pi$, entonces h, g satisfacen la ecuación

$$h(z) + g(z) = \frac{1}{2i \sin \alpha} \log \left(\frac{1 + e^{i\alpha} z}{1 + e^{-i\alpha} z} \right), \quad z \in \mathbb{D}.$$

Como veremos, si una función armónica $f = h + \bar{g} \in \mathcal{SC}_H^0$ mapea \mathbb{D} sobre la banda (4.21), entonces la dilatación ω de f es constante. Es importante observar que este resultado no puede ser obtenido argumentando como en la Proposición 4.1, dado que la función analítica

$$s_\alpha(z) = \frac{1}{2i \sin \alpha} \log \left(\frac{1 + e^{i\alpha} z}{1 + e^{-i\alpha} z} \right), \quad z \in \mathbb{D},$$

con $\pi/2 \leq \alpha < \pi$, pertenece al espacio de Hardy H^p para todo $0 < p < \infty$ (ver por ejemplo [6]). Por lo tanto, para mostrar el resultado mencionado anteriormente, mostraremos el siguiente resultado.

TEOREMA 4.17. *Sea φ una función analítica convexa en \mathbb{D} tal que $\varphi(\mathbb{D})$ es un polígono. Fijemos λ , con $|\lambda| = 1$, y supongamos que la función armónica $f = h + \bar{g}$ tal que h, g resuelven el sistema*

$$\begin{cases} h(z) + \lambda g(z) = \varphi(z) \\ g'(z)/h'(z) = \omega(z) \end{cases} \quad (z \in \mathbb{D}), \quad h(0) = g(0) = 0 \quad (4.22)$$

es establemente convexa. Entonces, la dilatación ω de f es constante.

Demostración. De la primera ecuación en (4.22) obtenemos que

$$\operatorname{Re} \left\{ 1 + z \frac{h''(z)}{h'(z)} \right\} = \operatorname{Re} \left\{ 1 + z \frac{\varphi''(z)}{\varphi'(z)} \right\} - \operatorname{Re} \left\{ \frac{\lambda z \omega'(z)}{1 + \lambda \omega(z)} \right\}, \quad z \in \mathbb{D}. \quad (4.23)$$

Usando el Teorema 4.9 y el hecho de que las funciones analíticas $1 + zh''(z)/h'(z)$ y $1 + z\varphi''(z)/\varphi'(z)$ pertenecen al espacio de Hardy H^p para todo $p < 1$, de (4.23) concluimos que la ecuación

$$Re \left\{ 1 + \zeta \frac{h''(\zeta)}{h'(\zeta)} \right\} = Re \left\{ 1 + \zeta \frac{\varphi''(\zeta)}{\varphi'(\zeta)} \right\} - Re \left\{ \frac{\lambda\zeta\omega'(\zeta)}{1 + \lambda\omega(\zeta)} \right\} \quad (4.24)$$

es válida para casi todo punto $\zeta \in \partial\mathbb{D}$. Como $\varphi(\mathbb{D})$ es un polígono, entonces argumentando como en el Teorema 4.12 obtenemos que

$$Re \left\{ 1 + \zeta \frac{\varphi''(\zeta)}{\varphi'(\zeta)} \right\} = 0 \quad (4.25)$$

para casi todo punto $\zeta \in \partial\mathbb{D}$. Por otra parte, como h es convexa, entonces

$$Re \left\{ 1 + \zeta \frac{h''(\zeta)}{h'(\zeta)} \right\} \geq 0 \quad (4.26)$$

para casi todo punto $\zeta \in \partial\mathbb{D}$. Por lo tanto, de (4.24), (4.25) y (4.26), resulta

$$Re \left\{ \frac{\lambda\zeta\omega'(\zeta)}{1 + \lambda\omega(\zeta)} \right\} \leq 0 \quad (4.27)$$

para casi todo punto $\zeta \in \partial\mathbb{D}$. Sea $I \subset \mathbb{T}$ el conjunto de todos los puntos $\zeta \in \partial\mathbb{D}$ tales que los límites radiales $1 + \zeta h''(\zeta)/h'(\zeta)$, $1 + \zeta \varphi''(\zeta)/\varphi'(\zeta)$, $\omega(\zeta)$, $\omega'(\zeta)$ existen y $\omega(\zeta) \neq -\bar{\lambda}$. Nótese que I es igual a $\partial\mathbb{D}$ salvo un conjunto de medida de Lebesgue nula. Sea F la función definida por

$$F(z) = exp \left\{ \frac{\lambda z \omega'(z)}{1 + \lambda \omega(z)} \right\}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Entonces, F es analítica en \mathbb{D} y satisface (por (4.27)) que $|F(\zeta)| \leq 1$ en I . Luego, como

$$\|F\|_\infty = \sup_{|z|<1} |F(z)| = \text{ess sup}_{0 \leq \theta < 2\pi} |F(e^{i\theta})| \leq 1,$$

se concluye que $|F(z)| \leq 1$ en \mathbb{D} . Esto muestra que

$$Re \left\{ \frac{\lambda z \omega'(z)}{1 + \lambda \omega(z)} \right\} \leq 0$$

para cada $z \in \mathbb{D}$. Dado que $C(z) = \lambda z \omega'(z)(1 + \lambda \omega(z))^{-1}$ se anula en $z = 0$, por el teorema del mapeo abierto tenemos que $\omega' \equiv 0$. Por lo tanto, ω es constante. \square

COROLARIO 4.18. Sea $f = h + \bar{g} \in \mathcal{SC}_H^0$. Si f mapea \mathbb{D} sobre la banda (4.21), entonces la dilatación ω de f es constante. Más aún, f es analítica e igual a

$$f(z) = \frac{1}{2i \sin \alpha} \log \left(\frac{1 + e^{i\alpha} z}{1 + e^{-i\alpha} z} \right), \quad z \in \mathbb{D}.$$

En la Sección 4.1 (Teorema 4.2) se mostró que la función $K_{\alpha,R}$ es la única posible función que maximiza la parte real de todos los coeficientes a_n y b_n de las partes analítica y co-analítica, respectivamente, de funciones armónicas $f = h + \bar{g}$ en familias afín y linealmente invariante. Como vimos en la Sección 2.6 (Lema 2.1) la familia \mathcal{SC}_H es una familia afín y linealmente invariante. Una aplicación del Teorema 4.17 permite obtener el siguiente resultado.

TEOREMA 4.19. Supongamos que existe una función $f_0 = h_0 + \bar{g}_0 \in \mathcal{SC}_H^0$ tal que

$$\sup_{f=h+\bar{g} \in \mathcal{SC}_H^0} \operatorname{Re}\{a_n(h)\} = \operatorname{Re}\{a_n(h_0)\} \quad \text{y} \quad \sup_{f=h+\bar{g} \in \mathcal{SC}_H^0} \operatorname{Re}\{b_n(g)\} = \operatorname{Re}\{b_n(g_0)\}$$

para todo $n \geq 2$. Entonces, f_0 es analítica e igual a

$$f_0(z) = \frac{z}{1-z}.$$

En palabras simples, la función $\ell(z) = z/(1-z)$ es la única posible función que maximiza la parte real de todos los coeficientes a_n y b_n de las partes analítica y co-analítica, respectivamente, de funciones armónicas $f = h + \bar{g}$ establemente convexas.

Demostración. Dado que \mathcal{SC}_H es una familia afín y linealmente invariante, entonces por el Teorema 4.2 se concluye que f_0 es de la forma $K_{\alpha,R}$, es decir, h_0 y g_0 satisfacen el sistema

$$\begin{cases} h_0 - g_0 = \kappa_\alpha \\ \omega = g'/h' = l_R \end{cases}, \quad h(0) = g(0) = 0,$$

para ciertos $\alpha \geq 0$ y $0 \leq R \leq 1$. Como f_0 es establemente convexa, entonces necesariamente $0 \leq \alpha \leq 1$. Para $0 \leq \alpha \leq 1$, la función κ_α mapea \mathbb{D} sobre un sector angular. Por lo

tanto, por el Teorema 4.17 se concluye que l_R es idénticamente cero, dado que l_R fija al origen. De esta manera, f_0 es analítica e igual a la función κ_α . Un cálculo muestra que el segundo coeficiente de κ_α es igual a α , el cual se maximiza cuando $\alpha = 1$. Por lo tanto, $f_0(z) = \kappa_1(z) = z/(1 - z)$. \square

Como vimos anteriormente (Proposición 4.1, Corolario 4.18), si una función armónica $f = h + \bar{g} \in \mathcal{SC}_H^0$ mapea \mathbb{D} sobre el semiplano $H = \{w : \operatorname{Re}\{w\} > -1/2\}$ (respectivamente sobre la banda (4.21)) entonces la dilatación ω de f es constante. Estos resultados junto con el Teorema 4.12 nos conduce a la siguiente conjetura.

CONJETURA 3. *Si $f = h + \bar{g}$ es una función establemente convexa tal que $\partial f(\mathbb{D})$ contiene un segmento, entonces la dilatación ω de f es constante.*

Respecto a esto último, el siguiente resultado fue obtenido.

TEOREMA 4.20. *Si $f = h + \bar{g}$ es una función establemente convexa tal que $f(\mathbb{D})$ es un polígono, entonces la dilatación ω de f es constante.*

La siguiente fórmula es importante para la prueba del Teorema 4.20. Sea $f = h + \bar{g}$ una función armónica localmente univalente que preserva la orientación en \mathbb{D} y sea $\Gamma_r(\theta) := f(re^{i\theta})$ la imagen de la circunferencia $\{|z| = r\}$ ($0 < r < 1$) bajo la función armónica f . En [7] los autores calculan la curvatura de Γ_r en un punto θ , la cual generaliza la fórmula (4.17) para funciones analíticas. Esta fórmula viene dada por la ecuación

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial f}{\partial \theta} \right|^3 \kappa_{\Gamma_r}(\theta) &= |zh'(z)|^2(1 - |\omega(z)|^2) \operatorname{Re} \left\{ 1 + z \frac{h''(z)}{h'(z)} \right\} \\ &\quad - |z\omega(z)h'(z)|^2 \operatorname{Re} \left\{ z \frac{\omega'(z)}{\omega(z)} \right\} + \operatorname{Re} \{ z^3 \omega'(z) h'(z)^2 \}, \end{aligned} \quad (4.28)$$

$$z = re^{i\theta}.$$

Demostración. [Demostración de Teorema 4.20] Sea $f = h + \bar{g}$ una función establemente convexa. Por el Teorema 2.7 tenemos que $h + \lambda g$ es convexa para todo $|\lambda| = 1$. Como se

mostró en el Teorema 4.12, los límites radiales $h'(\zeta)$ existen y son distintos de cero en casi todo punto de $\partial\mathbb{D}$. El mismo argumento aplicado a las funciones $h + \lambda g$, $|\lambda| = 1$, muestra que los límites radiales $h'(\zeta) + \lambda g'(\zeta)$ existen y son distintos de cero en casi todo punto de $\partial\mathbb{D}$, para cada $|\lambda| = 1$. De la identidad $\lambda g'(z) = (h'(z) + \lambda g'(z)) - h'(z)$ concluimos que los límites radiales $g'(\zeta)$ existen en casi todo punto de $\partial\mathbb{D}$.

Por lo tanto, usando la notación $\zeta := \zeta(\theta) = e^{i\theta}$, obtenemos que los límites radiales $h'(\zeta), g'(\zeta)$ existen en casi todo punto $\theta \in [0, 2\pi]$, y $h'(\zeta) \neq 0$ para casi todo punto $\theta \in [0, 2\pi]$.

Por la fórmula de curvatura para funciones armónicas (4.28) y del hecho que $\partial f(\mathbb{D})$ es un polígono tenemos que

$$\begin{aligned} & |\zeta h'(\zeta)|^2 (1 - |\omega(\zeta)|^2) \operatorname{Re} \left\{ 1 + \zeta \frac{h''(\zeta)}{h'(\zeta)} \right\} \\ & - |\zeta \omega(\zeta) h'(\zeta)|^2 \operatorname{Re} \left\{ \zeta \frac{\omega'(\zeta)}{\omega(\zeta)} \right\} + \operatorname{Re} \{ \zeta^3 \omega'(\zeta) h'(\zeta)^2 \} = 0 \end{aligned} \quad (4.29)$$

en casi todo punto $\theta \in [0, 2\pi]$. Para cada $|\lambda| = 1$, las funciones $f_\lambda = h + \overline{\lambda}g$ son establemente convexas y tienen dilatación $\lambda\omega$. Usando la fórmula (4.28) para las funciones f_λ tenemos que

$$\begin{aligned} & |\zeta h'(\zeta)|^2 (1 - |\omega(\zeta)|^2) \operatorname{Re} \left\{ 1 + \zeta \frac{h''(\zeta)}{h'(\zeta)} \right\} \\ & - |\zeta \omega(\zeta) h'(\zeta)|^2 \operatorname{Re} \left\{ \zeta \frac{\omega'(\zeta)}{\omega(\zeta)} \right\} + \operatorname{Re} \{ \lambda \zeta^3 \omega'(\zeta) h'(\zeta)^2 \} \geq 0, \end{aligned} \quad (4.30)$$

para cada $|\lambda| = 1$, en casi todo punto $\theta \in [0, 2\pi]$. De (4.29) y (4.30) concluimos que la desigualdad

$$\operatorname{Re} \{ \lambda \zeta^3 \omega'(\zeta) h'(\zeta)^2 \} \geq \operatorname{Re} \{ \zeta^3 \omega'(\zeta) h'(\zeta)^2 \}$$

se cumple para cada $|\lambda| = 1$ y para casi todo punto $\zeta \in \partial\mathbb{D}$. En particular, si tomamos $\lambda = -1$ tenemos que

$$\operatorname{Re} \{ \zeta^3 \omega'(\zeta) h'(\zeta)^2 \} \leq 0, \quad (4.31)$$

para casi todo $\zeta \in \partial\mathbb{D}$. Sea F la función definida por

$$F(z) = \exp \{ z^3 \omega'(z) h'(z)^2 \}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Entonces, F es analítica en \mathbb{D} y satisface (por (4.31)) que $|F(\zeta)| \leq 1$ en casi todo $\theta \in [0, 2\pi]$.

Luego, como

$$\|F\|_\infty = \sup_{|z|<1} |F(z)| = \operatorname{ess\,sup}_{0 \leq \theta < 2\pi} |F(e^{i\theta})| \leq 1$$

se concluye que $|F(z)| \leq 1$ en \mathbb{D} , lo cual muestra que

$$\operatorname{Re} \{ z^3 \omega'(z) h'(z)^2 \} \leq 0,$$

para cada $z \in \mathbb{D}$. Dado que $G(z) = z^3 \omega'(z) h'(z)^2$ se anula en $z = 0$, entonces por el teorema del mapeo abierto tenemos que $\omega' \equiv 0$. Por lo tanto, ω es constante. \square

Para finalizar esta sección, mostraremos la estrecha relación entre la convexidad de los dominios $f(\mathbb{D})$ y $h(\mathbb{D})$ para $f = h + \bar{g} \in \mathcal{SC}_H$.

COROLARIO 4.21. *Sea $f = h + \bar{g}$ una función establemente convexa. Entonces, $\partial f(\mathbb{D})$ es un polígono si y sólo si $\partial h(\mathbb{D})$ es un polígono.*

Demostración. Primero que todo, observa que si $a \in \mathbb{D}$, entonces la función armónica $\varphi_a(z) = z + a\bar{z}$ es invertible y tiene inversa

$$\varphi_a^{-1}(z) = \frac{a}{|a|^2 - 1} \bar{z} - \frac{1}{|a|^2 - 1} z.$$

Es fácil mostrar que las funciones φ_a y φ_a^{-1} preservan la convexidad y transforman rectas en rectas.

Supongamos primero que $\partial f(\mathbb{D})$ es un polígono. Por el Teorema 4.20 la dilatación ω de f es constante, es decir, existe $a \in \mathbb{D}$ tal que $f = h + a\bar{h} = \varphi_a \circ h$ y entonces $h = \varphi_a^{-1} \circ f$. Por lo tanto, si $f(\mathbb{D})$ es un polígono, entonces $h(\mathbb{D})$ es un polígono.

Supongamos ahora que $\partial h(\mathbb{D})$ es un polígono. Por el Teorema 4.12, la dilatación ω de f es constante, es decir, existe $a \in \mathbb{D}$ tal que $f = h + a\bar{h}$. Por lo tanto, si $h(\mathbb{D})$ es un polígono, entonces $f(\mathbb{D})$ es un polígono.

□

4.3. Funciones convexas con dilatación pequeña

Diremos que un dominio $\Omega \subset \mathbb{C}$ es linealmente conexo si existe una constante M ($0 < M < \infty$) tal que para cada par de puntos $w_1, w_2 \in \Omega$ existe una curva $\gamma \subset \Omega$ que une w_1, w_2 de largo $\ell(\gamma) \leq M|w_1 - w_2|$.

Para simplificar, denotamos por $\mathcal{A}_\varepsilon(\mathbb{D}; \mathbb{D})$ ($0 < \varepsilon < 1$) al conjunto de funciones analíticas $\omega \in \mathcal{A}(\mathbb{D}; \mathbb{D})$ que satisfacen la condición $|\omega(z)| < \varepsilon$, $z \in \mathbb{D}$.

En [8] los autores muestran el siguiente resultado.

TEOREMA F. *Sea $h : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ una función analítica univalente. Entonces, existe $\varepsilon > 0$ tal que cada mapeo armónico $f = h + \bar{g}$ con dilatación $\omega \in \mathcal{A}_\varepsilon(\mathbb{D}; \mathbb{D})$ es univalente si y sólo si $h(\mathbb{D})$ es linealmente conexo.*

Los dominios convexos son un caso particular de dominios linealmente conexos con constante $M = 1$. De esta manera, el siguiente corolario es inmediato.

COROLARIO G. *Sea h analítica y convexa en \mathbb{D} . Entonces, existe $\varepsilon > 0$ tal que cada mapeo armónico de la forma $f = h + \bar{g}$ con dilatación $\omega \in \mathcal{A}_\varepsilon(\mathbb{D}; \mathbb{D})$ es univalente.*

El corolario anterior motiva la siguiente pregunta:

PREGUNTA 2. *Sea h analítica y convexa en \mathbb{D} . ¿Existe $\varepsilon > 0$ tal que toda función armónica $f = h + \bar{g}$ con dilatación $\omega \in \mathcal{A}_\varepsilon(\mathbb{D}; \mathbb{D})$ es convexa?*

El propósito de esta sección es estudiar la respuesta de la pregunta anterior. El siguiente teorema muestra que podemos modificar tal pregunta de una manera más sencilla para poder establecer su respuesta.

TEOREMA 4.22. *Sea h una función convexa en \mathbb{D} . Son equivalentes:*

- 1) *Existe $\varepsilon > 0$ tal que toda función armónica $f = h + \bar{g}$ con dilatación $\omega \in \mathcal{A}_\varepsilon(\mathbb{D}; \mathbb{D})$ es establemente convexa.*
- 2) *Existe $\varepsilon > 0$ tal que toda función armónica $f = h + \bar{g}$ con dilatación $\omega \in \mathcal{A}_\varepsilon(\mathbb{D}; \mathbb{D})$ es convexa.*

Demostración. Es claro que 1) implica 2). Por lo tanto, el teorema quedará demostrado si mostramos que 2) implica 1). Sea h una función convexa en \mathbb{D} . Supongamos a modo de tener una contradicción que 1) no se cumple y que 2) sí. Entonces, dado $\varepsilon > 0$ existe $\omega \in \mathcal{A}_\varepsilon(\mathbb{D}; \mathbb{D})$ tal que la función armónica $f = h + \bar{g}$ con dilatación ω no es establemente convexa. Usando el Teorema 2.7 garantizamos la existencia de $|\lambda_0| = 1$ tal que la función analítica $F_{\lambda_0} = h + \lambda_0 g$ no es convexa. Luego, existe $\alpha \in [0, \pi)$ tal que la función F_{λ_0} no es convexa en la dirección α . Sea $G := -\lambda_0 e^{-2i\alpha} g$ y consideremos la función $F_\theta := h - e^{2i\theta} G$. Usando el Teorema 2.3 se concluye que la función armónica $f^* = h + \bar{G}$ no es convexa y tiene dilatación $\omega^* = -\lambda_0 e^{-2i\alpha} \omega$, con $|\omega^*| < \varepsilon$. Esto contradice 2) y termina la demostración. \square

Para $0 < p \leq \infty$ denotamos por $\mathcal{A}_\varepsilon^{[p]}(\mathbb{D}; \mathbb{D})$ al conjunto de funciones $\omega \in \mathcal{A}_\varepsilon(\mathbb{D}; \mathbb{D})$ tales que $\omega' \in H^p$, donde H^p es el espacio de Hardy de orden p . Es importante notar que el conjunto $\mathcal{A}_\varepsilon^{[p]}(\mathbb{D}; \mathbb{D})$ está estrictamente contenido en $\mathcal{A}_\varepsilon(\mathbb{D}; \mathbb{D})$ (ver [12]).

Con todo lo expuesto anteriormente, estamos en condiciones de establecer el resultado principal de esta sección.

TEOREMA 4.23. *La respuesta a la Pregunta 2 es NO.*

Demostración. Sea h convexa. Supongamos (a modo de tener una contradicción) que la respuesta a la Pregunta 2 es Sí. Entonces, por el Teorema 4.22, existe $\varepsilon > 0$ tal que toda función armónica $f = h + \bar{g}$ con dilatación $\omega \in \mathcal{A}_\varepsilon(\mathbb{D}; \mathbb{D})$ es establemente convexa. Por el Teorema 4.9 (Sección 4.2) se deduce que $\mathcal{A}_\varepsilon(\mathbb{D}; \mathbb{D}) \subset \mathcal{A}_\varepsilon^{[p]}(\mathbb{D}; \mathbb{D})$ para todo $p < 1$. Esta contradicción termina la demostración. \square

Referencias

- [1] Y. Abu-Muhanna and G. Schober. Harmonic mappings onto convex domains. *Can. J. Math.*, 39(6):1489–1530, 1987.
- [2] J. W. Alexander. Functions which map the interior of the unit circle upon simple regions. *Ann. of Math. (2)*, 17(12–22), 1915.
- [3] L. Bieberbach. Über die koeffizienten derjenigen potenzreihen, welche eine schlichte abbildung des einheitskreises vermitteln. *S.-B Preuss. Akad. Wiss.*, pages 940–955, 1916.
- [4] Z. Boyd, M. Dorff, M. Nowak, M. Romney, and M. Woloszkiwicz. Univalence of convolutions of harmonic mappings. *Applied Mathematics and Computation*, 234:326–332, 2014.
- [5] L. de Branges. A proof of the Bieberbach conjecture. *Acta Math.*, 154:137–152, 1985.
- [6] G. T. Cargo. Some geometric aspects of functions of Hardy class H^p . *J. Math. Anal. Appl.*, 7:471–474, 1963.
- [7] M. Chuaqui, P. L. Duren, and B. Osgood. Curvature properties of planar harmonic mappings. *Comput. Methods Funct. Theory*, 4(1):127–142, 2004.
- [8] M. Chuaqui and R. Hernández. Univalent harmonic mappings and linearly connected domains. *J. Math. Anal. Appl.*, 332(2):1189–1194, 2007.

- [9] M. Chuaqui, R. Hernández, and M. J. Martín. Affine and linear invariant families of harmonic mappings. *arXiv:1405.5106 [math.CV]*, 2014.
- [10] J. Clunie and T. Sheil-Small. Harmonic univalent functions. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A*, 9:3–25, 1984.
- [11] M. Dorff. Harmonic mappings onto asymmetric vertical strips, in computational methods and function theory. *N. Papamichael, St. Ruscheweyh, and E.B. Saff, eds., World Scientific Publishing, River Edge, NJ*, pages 171–175, 1997.
- [12] P. L. Duren. On the Bloch-Nevanlinna conjecture. *Colloq. Math.*, 20:295–297, 1969.
- [13] P. L. Duren. *Theory of H^p Spaces*. Academic Press, New York/London, 1970.
- [14] P. L. Duren. *Univalent Functions*. Springer-Verlag, New York, 1983.
- [15] P. L. Duren. *Harmonic Mappings in the Plane*. Cambridge University Press, Cambridge, 2004.
- [16] A. W. Goodman. *Univalent Functions. Vol. II*. Mariner Publishing Co., Inc., Tampa, FL, 1983.
- [17] I. Graham and G. Kohr. *Geometric Function Theory in One and Higher Dimensions*. Marcel Dekker, Inc., New York, 2003.
- [18] W. Hengartner and G. Schober. Univalent harmonic functions. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 299:1–31, 1987.
- [19] R. Hernández and M. J. Martín. Stable geometric properties of analytic and harmonic functions. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 155:343–359, 2013.
- [20] R. Hernández and M. J. Martín. Pre-Schwarzian and Schwarzian derivatives of harmonic mappings. *J. Geom. Anal.*, 25:64–91, 2015.

- [21] E. Hille. Remarks on a paper by Zeev Nehari. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 55:552–553, 1949.
- [22] W. Krauss. Über den Zusammenhang einiger Charakteristiken eines einfach zusammenhängenden Bereiches mit der Kreisabbildung. *Mitt. Math. Sem. Giessen*, 21:1–28, 1932.
- [23] H. Lewy. On the non-vanishing of the Jacobian in certain one-to-one mappings. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 42:689–692, 1936.
- [24] F. Marty. Sur le module des coefficients de Maclaurin d'une fonction univalente. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 198:1569–1571, 1934.
- [25] Ch. Pommerenke. Linear-invariante familien analytischer funktionen I. *Math. Ann.*, 155:108–154, 1964.
- [26] Ch. Pommerenke. *Univalent Functions*. Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1975.
- [27] Ch. Pommerenke. *Boundary Behavior of Conformal Maps*. Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [28] W. C. Royster and M. Ziegler. Univalent functions convex in one direction. *Publ. Math. Debrecen*, 23:339–345, 1976.