

UNIVERSITÉ DE PROVENCE  
P.U.C. DE CHILE

THÈSE

présentée pour obtenir les grades de  
DOCTEUR AIX-MARSEILLE UNIVERSITÉ  
délivré par l'Université de Provence  
DOCTOR DE LA P.U.C. DE CHILE

*Spécialité : Mathématiques*

par

Jean-Christophe Mourrat

sous la direction de Pierre MATHIEU et Alejandro RAMÍREZ

*Titre :*

Marches aléatoires réversibles  
en milieu aléatoire

soutenue publiquement le 13 mai 2010

JURY

Gérard BEN AROUS	New York University	Rapporteur
Fabienne CASTELL	Université de Provence	Examinatrice
Pierre MATHIEU	Université de Provence	Directeur
Thomas MOUNTFORD	E.P.F. de Lausanne	Examinateur
Stefano OLLA	Université Paris Dauphine	Rapporteur
Alejandro RAMÍREZ	P.U.C. de Chile	Directeur

## Remerciements

Je souhaite en premier lieu remercier mes directeurs de thèse, Pierre Mathieu et Alejandro Ramírez. Ils ont su me guider durant ces années, tout en me laissant une grande liberté. Travailler avec eux a été un grand plaisir, j'espère qu'il ne s'arrêtera pas là !

Mes remerciements vont également à Gérard Ben Arous et Stefano Olla, qui ont accepté d'être les rapporteurs de ma thèse, ainsi qu'à Fabienne Castell et Thomas Mountford, qui ont bien voulu être membres du jury. Merci d'avoir consacré une partie de votre temps à ce travail.

Cette thèse n'existerait probablement pas sans l'aide et le soutien de nombreuses autres personnes. Merci aux amis et collègues qui se reconnaîtront, pour tous les moments partagés, interrogations mathématiques, soirées, sorties grimpe ou rando, ateliers zététiques, journées bucoliques et autres « groupes de travail » . . . Merci aussi à mes parents. Et à toi Rosanne !

Enfin, merci à vous qui avez ouvert cette thèse, et bonne lecture.

## Table des matières

Remerciements	3
Chapitre I. Introduction	7
1. Présentation des modèles	7
2. Etat de l'art et organisation de la thèse	10
3. Une motivation physique : les systèmes vitreux	13
Chapitre II. Homogénéisation pour la marche aléatoire en conductances aléatoires	21
1. Homogénéisation de milieux périodiques	21
2. Homogénéisation de milieux aléatoires	22
3. L'environnement vu par la particule	23
4. Principe d'invariance en moyenne	26
5. Principe d'invariance presque sûr	28
6. Résultats quantitatifs	29
7. Vitesse de convergence à l'équilibre de l'environnement vu par la particule	31
8. Idées de preuve	32
9. Vitesse de convergence du déplacement quadratique moyen	39
10. Questions ouvertes	40
11. Estimées des probabilités de transition	41
Chapitre III. Marche aléatoire en pièges aléatoires sur des graphes finis	43
1. Dynamique symétrique sur le graphe complet	43
2. Limite d'échelle de la dynamique symétrique sur le graphe complet	44
3. Dynamique symétrique sur d'autres graphes finis	46
4. Valeur propre principale pour la dynamique générale	46
5. Idées de preuve	48
6. Résultats plus récents, questions ouvertes	53
Chapitre IV. Marche aléatoire en pièges aléatoires sur $\mathbb{Z}^d$	55
1. La marche aléatoire en pièges aléatoires est un changement de temps d'une marche aléatoire en conductances aléatoires	55
2. Principe d'invariance presque sûr	56
3. Au-delà du principe d'invariance	57
4. Cas unidimensionnel	57
5. Dynamique symétrique	59
6. Décomposition mésoscopique pour $a = 0$	61
7. Dynamique générale	65
8. Idées de preuve	65
9. Questions ouvertes	69
Chapter V. Variance decay for functionals of the environment viewed by the particle	71
1. Introduction	71

2. Statement of the main results	74
3. From spectral gap to Nash inequality	78
4. Variance decay for the simple random walk	80
5. Resolvents comparison	81
6. A martingale method	83
7. Theorem 2.3 and extensions	89
8. Central limit theorems	91
9. Addendum	97
Chapter VI. Principal eigenvalue for the random walk among random traps	103
1. Introduction	103
2. Asymptotic behaviour of sums and maxima	107
3. The variational formula	108
4. Exit time upper bounds when $a = 0$	109
5. Upper bounds on $\lambda_n$	114
6. The distinguished path method	117
Chapter VII. Scaling limit for the random walk among random traps	119
1. Introduction	119
2. The environment viewed by the particle	126
3. Asymptotically independent increments	127
4. The exploration process	128
5. Asymptotic behaviour of the range	129
6. Unmatched jumps	133
7. The environment around a trap	136
8. Identification of the limit	146
9. Joint convergence	149
10. From annealed to quenched	150
11. Conclusion	155
12. Appendix	155
Appendix A. Explosion in finite time	159
1. Introduction	159
2. Sufficient conditions for non-explosion	160
3. Construction of a walk that explodes	161
Bibliographie	169

## CHAPITRE I

# Introduction

### 1. Présentation des modèles

Comme son nom l'indique, une marche aléatoire en milieu aléatoire possède deux niveaux d'aléa. D'une part, étant donné un environnement, la marche est un processus aléatoire, dont la loi est fonction de l'environnement. D'autre part, l'environnement lui-même est initialement choisi au hasard. Pour les modèles qui nous intéressent, l'environnement reste statique tout au long de l'évolution de la marche aléatoire.

Les marches aléatoires que nous considérons sont des chaînes de Markov à temps continu, et qui évoluent dans le réseau  $d$ -dimensionnel  $\mathbb{Z}^d$ . Le réseau  $\mathbb{Z}^d$  est muni d'une structure de graphe naturelle, celle du plus proche voisin. On note  $x \sim y$  si  $x$  et  $y$  sont des sites voisins, et  $\mathbb{B}$  l'ensemble des arêtes (non orientées) de  $\mathbb{Z}^d$ . Nous supposons que la marche aléatoire, depuis un site donné, ne peut atteindre en un saut que l'un des sites voisins (figure 1.1).

Une propriété fondamentale des marches que nous souhaitons considérer est la réversibilité. Notons  $\omega_{x \rightarrow y}$  le taux de saut d'un point  $x$  à son voisin  $y$ . La marche est dite *réversible* pour la mesure  $\pi$  si, pour tous  $x, y$  dans  $\mathbb{Z}^d$ , on a la relation

$$(1.1) \quad \pi(x) \omega_{x \rightarrow y} = \pi(y) \omega_{y \rightarrow x}.$$

Cette condition de réversibilité implique en particulier que la mesure  $\pi$  est invariante.

**1.1. Marche aléatoire en conductances aléatoires.** Pour le premier modèle que nous considérons, l'environnement est la donnée d'une famille de réels positifs, indexée par les arêtes de  $\mathbb{Z}^d$ , et que nous notons  $\omega = (\omega_e)_{e \in \mathbb{B}}$ . On note  $\Omega$  l'ensemble des environnements. On définit la marche  $(Z_t)_{t \geq 0}$  dont le taux de saut d'un site  $x$  à un voisin  $y$  est donné par

$$(1.2) \quad \omega_{x \rightarrow y} = \omega_e, \quad \text{où } e \text{ est l'arête } (x, y).$$

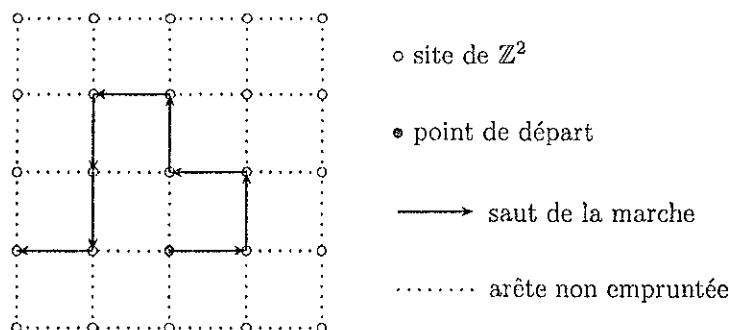


FIG. 1.1. Une trajectoire au plus proche voisin sur le réseau  $\mathbb{Z}^2$ .

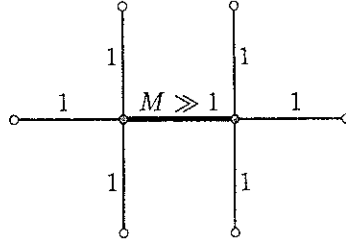


FIG. 1.2. Une arête de conductance élevée, entourée d'arêtes dont les conductances sont de l'ordre de 1. La marche n'est pas piégée par cette configuration.

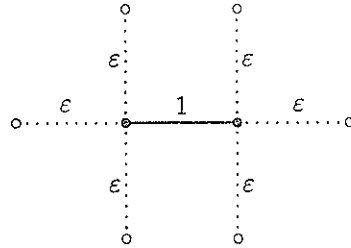


FIG. 1.3. Une arête entourée d'arêtes dont les conductances sont de l'ordre de  $\epsilon \ll 1$ . Le temps de sortie est de l'ordre de  $1/\epsilon$ , mais la probabilité d'entrer dans ce piège est petite, de l'ordre de  $\epsilon$ .

Pour simplifier, nous écrirons  $\omega_{x,y}$  au lieu de  $\omega_{(x,y)}$ . La loi de ce processus partant de  $x$  est notée  $\mathbf{P}_x^\omega$ , et l'espérance associée  $\mathbf{E}_x^\omega$ . Par construction, le taux de saut pour ce modèle est symétrique :  $\omega_{x \rightarrow y} = \omega_{y \rightarrow x}$ , et donc réversible pour la mesure de comptage.

L'environnement  $\omega$  est lui-même une variable aléatoire, dont nous noterons la loi  $\mathbb{P}$  (d'espérance associée  $\mathbb{E}$ ). Nous supposons que la loi  $\mathbb{P}$  est invariante par translation et ergodique. Un cas particulier important est celui où les conductances  $(\omega_e)_{e \in \mathbb{E}}$  sont des variables aléatoires indépendantes et de même loi.

Il est fréquent d'appeler  $\omega_e$  la *conductance* de l'arête  $e$ , et par suite, d'appeler  $(Z_t)_{t \geq 0}$  la *marche aléatoire en conductances aléatoires*.

Examinons le comportement de cette marche aléatoire dans quelques environnements simples.

On considère d'abord le cas de la figure 1.2, où une arête de conductance  $M \gg 1$  est entourée d'arêtes dont les conductances sont de l'ordre de 1. La marche fait de l'ordre de  $M$  allers et retours entre les extrémités de l'arête de conductance élevée, mais chaque saut a lieu après un temps de l'ordre de  $1/M$ . La marche quitte donc les extrémités de l'arête de conductance élevée en un temps de l'ordre de 1 : elle n'est pas piégée par cette configuration.

Considérons maintenant le cas où une zone est entourée d'arêtes de conductances  $\epsilon \ll 1$ , comme sur la figure 1.3. Dans ce cas, le temps pour la marche de sortir d'une telle configuration est de l'ordre de  $1/\epsilon$ , et la marche est donc « capturée » par cette configuration.

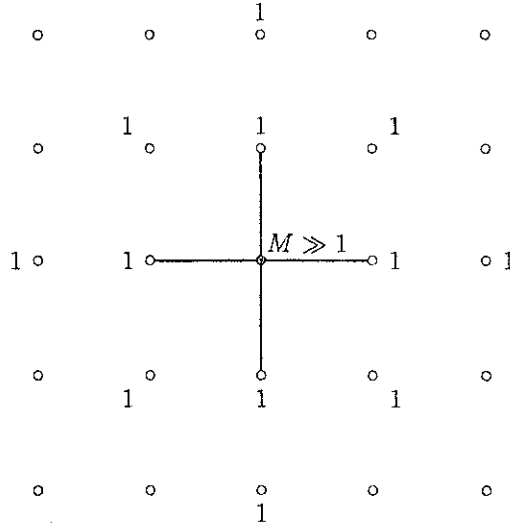


FIG. 1.4. Un piège profond de  $\mathbb{Z}^2$ , entouré de sites peu profonds. Les nombres indiquent les profondeurs des sites. Quelle que soit la valeur de  $a$ , la marche quitte le voisinage du piège profond après un temps de l'ordre de  $M$ .

**1.2. Marche aléatoire en pièges aléatoires.** Le second modèle qui nous intéresse est défini comme suit. A chaque site  $x$  de  $\mathbb{Z}^d$  est associé un réel positif  $\tau_x$ . L'environnement, noté  $\tau$ , est la donnée de la famille  $(\tau_x)_{x \in \mathbb{Z}^d}$ . On peut voir  $\tau$  comme une mesure sur  $\mathbb{Z}^d$ , et on souhaite considérer une classe de marches aléatoires qui sont réversibles pour cette mesure, c'est-à-dire telles qu'on ait

$$(1.3) \quad \tau_x \omega_{x \rightarrow y} = \tau_y \omega_{y \rightarrow x}.$$

Etant donné un paramètre  $a \in [0, 1]$  fixé, on définit  $(X_t)_{t \geq 0}$  la marche aléatoire dont le taux de saut d'un point  $x$  à son voisin  $y$  est donné par

$$(1.4) \quad \omega_{x \rightarrow y} = \frac{(\tau_y)^a}{(\tau_x)^{1-a}}.$$

Il est clair qu'avec cette définition, la condition (1.3) est satisfaite. On note  $\mathbf{P}_x^\tau$  la loi de la marche partant du point  $x \in \mathbb{Z}^d$ , et  $\mathbf{E}_x^\tau$  l'espérance associée. On qualifiera le cas  $a = 0$  de *symétrique*.

Comme pour le modèle précédent, nous noterons  $\Omega$  l'ensemble des environnements, et  $\mathbb{P}$  la loi de l'environnement  $\tau$ , supposée invariante par translation et ergodique. L'exemple qui nous intéressera le plus souvent est celui où les  $(\tau_x)_{x \in \mathbb{Z}^d}$  sont des variables aléatoires indépendantes et de même loi.

Pour ce modèle, nous dirons qu'un site  $x$  de  $\mathbb{Z}^d$  est un *piège*, et que  $\tau_x$  est sa *profondeur*. Par analogie avec le modèle précédent, nous appellerons la marche  $(X_t)_{t \geq 0}$  la *marche aléatoire en pièges aléatoires*.

Observons le comportement de cette marche dans un environnement simple. On considère un piège de profondeur  $M \gg 1$ , entouré par des sites dont la profondeur est de l'ordre de 1 (figure 1.4), et on suppose que la marche est sur ce piège profond.

Pour  $a = 0$ , la marche attend un temps exponentiel d'espérance  $M$  sur ce piège, puis saute sur un des sites voisins. La marche peut ensuite revenir quelques fois sur le piège profond, puis quitte le voisinage du piège. Le temps passé sur le piège est de l'ordre de  $M$ .

Si  $a \neq 0$ , la situation est un peu moins simple. En effet, la marche attend un temps de l'ordre de  $M^{1-a}$  avant de quitter le piège profond. Depuis un des voisins, le taux de saut vers le piège profond est de l'ordre de  $M^a$ . La marche passe donc un temps très court sur ce site, et revient sur le piège profond avec une probabilité proche de 1, de l'ordre de  $1 - M^{-a}$ . La marche fait de l'ordre de  $M^a$  allers-retours entre le piège profond et ses voisins, avant de quitter le voisinage du piège. Le temps total passé par la marche sur le piège avant de quitter le voisinage du piège est donc encore de l'ordre de  $M$ , indépendamment de la valeur de  $a$ . Ainsi, le piège profond ralentit considérablement la marche (et justifie son nom).

Beaucoup de quantités intéressantes dépendent du paramètre  $a$  : par exemple, le temps passé sur le piège profond de la figure 1.4 est de l'ordre de  $M^{1-a}$ . Nous venons de voir en revanche que certaines propriétés, comme l'ordre de grandeur du temps passé dans le voisinage de ce piège, ne dépendent pas de  $a$ . Nous en verrons d'autres par la suite.

**1.3. Comparaison des deux modèles.** Il peut sembler à première vue que ces modèles sont très similaires, la seule différence étant que l'aléa est lié aux arêtes du graphe pour le premier, alors qu'il est lié aux sites pour le second.

Il y a cependant une différence importante entre les pièges des figures 1.3 et 1.4. Pour la marche aléatoire en conductances aléatoires (figure 1.3), la probabilité d'entrer dans le piège est très petite, de l'ordre de  $\varepsilon$  si les arêtes avoisinantes ont une conductance de l'ordre de 1. Au contraire, il n'y a aucune obstruction pour la marche aléatoire en pièges aléatoires à atteindre le piège de la figure 1.4.

Cette observation simple implique que les deux modèles que l'on considère ont des comportements très différents (un fait déjà remarqué dans [A181]). En effet, nous avons vu que la marche aléatoire en conductances aléatoires n'est pas ralentie par la présence d'arêtes de conductance élevée (figure 1.2). Elle a également tendance à ne pas visiter les pièges du type de la figure 1.3, pièges qu'elle peut effectivement contourner si la dimension est au moins égale à 2. Ce n'est pas le cas de la marche aléatoire en pièges aléatoires, comme on l'a vu sur l'exemple de la figure 1.4. On peut donc s'attendre à ce que, en dimension au moins égale à 2, le comportement global de la marche aléatoire en conductances aléatoires ne dépende pas trop de la présence d'arêtes dont les conductances prennent des valeurs très proches de 0 ou de l'infini. Au contraire, la présence de pièges profonds devrait ralentir significativement la marche aléatoire en pièges aléatoires.

## 2. Etat de l'art et organisation de la thèse

**2.1. Motivations générales.** De manière générale, il est souhaitable de pouvoir modéliser des diffusions ayant lieu dans des environnements localement inhomogènes, mais possédant une certaine régularité de grande échelle. Une des façons de représenter l'hétérogénéité d'un milieu est de le considérer comme le résultat d'un tirage aléatoire. L'invariance par translation de la loi de l'environnement est la traduction d'une certaine régularité statistique dans l'espace. Pour un aperçu de l'intérêt de ces modèles d'un point de vue physique, mentionnons simplement, outre [A181] déjà cité, l'article de survol [BG90].

Une question centrale est de savoir à quel point l'environnement influence effectivement le comportement asymptotique de la marche aléatoire. Ce comportement ressemble-t-il à celui qu'aurait la marche aléatoire dans un milieu homogène ? Si oui, peut-on décrire cet environnement homogénéisé ? Quel est le temps caractéristique à partir duquel l'approximation par un milieu homogène devient pertinente ?

A l'inverse, que se passe-t-il lorsque l'environnement a une influence déterminante sur le comportement global de la marche ? La marche est-elle diffusive, sous-diffusive, sur-diffusive ? A-t-elle une limite d'échelle ? Si oui, quel est le processus limite ?

**2.2. Homogénéisation pour la marche aléatoire en conductances aléatoires.** Les diffusions associées à des opérateurs sous forme divergence peuvent être vues comme l'analogue continu des marches aléatoires en conductances aléatoires. Ce sont, à notre connaissance, ces modèles continus qui ont d'abord été étudiés, du point de vue analytique de l'homogénéisation des opérateurs différentiels [Ko78, Yu80, PV81], puis d'un point de vue plus probabiliste [Os83], sous des hypothèses d'ellipticité uniforme. Revenant à la marche aléatoire en conductances aléatoires, la question centrale est de savoir si la marche satisfait un principe d'invariance, autrement dit si  $\sqrt{\varepsilon}Z_{\varepsilon^{-1}t}$  converge vers un mouvement brownien quand  $\varepsilon$  tend vers 0.

Pour la loi moyennée sur les environnements, [KV86, DFGW89] ont montré que la marche satisfait un principe d'invariance dès que les conductances sont intégrables (en supposant seulement que la loi de l'environnement est invariante par translation est ergodique).

Un résultat plus précis consiste à montrer que la marche aléatoire satisfait un principe d'invariance pour presque tout environnement. Ce résultat a d'abord été obtenu sous des conditions d'ellipticité uniforme et pour  $d = 2$  par [Bo93] (pour une loi invariante par translation et ergodique). Pour les résultats suivants, nous supposons de plus que les conductances sont indépendantes et de même loi. Dans ce cas, [SS04] généralisent le résultat de [Bo93] à toute dimension, et montrent également que si  $d \geq 4$ , alors la marche aléatoire sur un amas de percolation satisfait un principe d'invariance pour presque tout environnement (conditionnellement à ce que le point de départ appartienne à l'amas de percolation). Ce dernier résultat est à son tour étendu à toute dimension  $d \geq 2$  par [BB07, MP07]. [BP07, Ma08] montrent que la marche aléatoire satisfait également un principe d'invariance pour presque tout environnement dès que les conductances sont bornées supérieurement. [BD09] obtiennent enfin un résultat identique en supposant que les conductances sont bornées inférieurement.

Ces principes d'invariance donnent, par définition, un résultat asymptotique. La question que nous souhaitons aborder dans un premier temps est de donner une estimée quantitative de cette convergence. Peu de résultats sont connus concernant cette question (voir cependant [Yu86, BP04]). Un des éléments importants des preuves de principe d'invariance est l'ergodicité d'un processus auxiliaire, l'environnement vu par la particule. Pour des conductances indépendantes et uniformément minorées, nous montrons que ce processus converge vers l'équilibre à une vitesse polynomiale, au sens de la variance. Ce résultat nous permet, sous certaines conditions, d'estimer la vitesse de convergence du déplacement quadratique moyen vers sa limite.

Nous reviendrons plus en détail sur les références précédemment citées, et donneront une idée des preuves de nos résultats au chapitre II. Les preuves complètes sont données au chapitre V.

**2.3. La marche aléatoire en pièges aléatoires en régime diffusif.** Nous supposons que les variables aléatoires  $(\tau_x)_{x \in \mathbb{Z}^d}$  sont indépendantes et de même loi. Il est possible de donner une idée heuristique du comportement asymptotique de la dynamique symétrique ( $a = 0$ ) sur  $\mathbb{Z}^d$ . En effet, dans ce cas, la suite des points visités par la marche est la suite des points visités par une marche aléatoire simple. Le temps d'attente avant un saut est une variable aléatoire de même loi que  $\tau_0$

(multiplié par une variable aléatoire exponentielle indépendante de paramètre  $2d$ ). De plus, en dimension assez grande, la marche revient rarement sur ses pas. Les instants de saut successifs  $S_n$  se comportent donc approximativement comme les sommes partielles de variables aléatoires indépendantes et de même loi que  $\tau_0$ .

Si la profondeur des pièges est intégrable, alors la marche devrait effectuer son  $n^{\text{ème}}$  saut au temps  $S_n \simeq Cn$ , et donc se comporter comme un mouvement brownien. Les résultats de [KV86, DFGW89] assurent en effet que la marche aléatoire satisfait un principe d'invariance pour la loi moyennée.

**2.4. Hypothèses sur la loi des pièges.** Pour étudier l'effet de la présence de pièges profonds, nous ferons les hypothèses suivantes sur la loi des pièges.

- (1) Les variables aléatoires  $(\tau_x)_{x \in \mathbb{Z}^d}$  sont indépendantes et de même loi.
- (2) On a  $\tau_0 \geq 1$ .
- (3) Il existe  $\alpha \in (0, +\infty)$  tel que

$$(2.1) \quad \mathbb{P}[\tau_0 \geq y] \sim \frac{1}{y^\alpha} \quad (y \rightarrow +\infty).$$

L'hypothèse (2), assurant que la profondeur des pièges est uniformément minorée, permet d'éviter certains problèmes techniques que nous verrons par la suite.

Si  $a = 0$  et  $\alpha < 1$ , en reprenant l'heuristique du paragraphe précédent, la marche aléatoire devrait faire son  $n^{\text{ème}}$  saut à l'instant  $S_n \simeq Cn^{1/\alpha}$ , ce qui suggère que la marche a un comportement sous-diffusif dans ce cas.

**2.5. Comportement asymptotique anormal.** Pour  $a = 0$ ,  $\alpha < 1$  et en dimension 1, [FIN02] montrent que le processus est en effet sous-diffusif, et identifient la limite d'échelle. Ce résultat a ensuite été étendu à la dynamique générale ( $a \in [0, 1]$ ) par [BČ05]. En dimension  $d \geq 2$ , pour la dynamique symétrique ( $a = 0$ ) et  $\alpha < 1$ , [BČM06, BČ07] montrent que le processus est également sous-diffusif, mais avec une limite d'échelle différente. Très récemment, ce résultat a été étendu à la dynamique générale pour  $d \geq 3$  par [BČ09].

Dans le cas symétrique, cette marche aléatoire a également été étudiée sur d'autres graphes que  $\mathbb{Z}^d$ , notamment le graphe complet [BD95, FM08], l'hypercube [BBG03a, BBG03b], ou des graphes plus généraux [BČ08] (voir aussi l'article de survol [BČ06]). Les auteurs montrent des propriétés de vieillissement de la marche aléatoire (nous renvoyons au paragraphe 3.4 pour une définition du vieillissement).

Pour la dynamique générale, nous nous intéressons dans un premier temps au comportement asymptotique de la valeur propre principale du générateur de la marche aléatoire restreinte à des boîtes  $B_n = \{-n, \dots, n\}^d$ , quand  $n$  tend vers l'infini. Celle-ci se comporte comme  $n^{-2+o(1)}$  si  $\alpha$  est suffisamment grand. Nous montrons que l'exposant devient plus grand que 2 dès que  $\alpha$  est inférieur à une valeur critique. Cette valeur critique est égale à 1 si  $d \leq 2$ , et à  $d/2$  sinon. Le comportement asymptotique de la valeur propre principale pour la marche aléatoire en conductances aléatoires a été donné par [FM06]. De manière intéressante, la méthode des chemins utilisée dans ce cas ne permet pas de conclure concernant la marche aléatoire en pièges aléatoires. Nous contournerons cette difficulté en estimant les temps de sortie de la marche aléatoire, par une méthode de moments. Le chapitre III présente plus en détail le contexte et donne les grandes lignes de la preuve de nos résultats, celle-ci étant reportée au chapitre VI.

Enfin, nous obtenons la limite d'échelle (sous-diffusive) de la marche aléatoire en pièges aléatoires, pour  $\alpha < 1$  et  $d \geq 5$ . Nous retrouvons le résultat obtenu par [BČ09] (qui est valable pour tout  $d \geq 3$ ). Notre approche est très différente de celle de [BD09], adaptée du cas symétrique traité par [BČM06, BČ07]. La marche aléatoire en pièges aléatoires peut être vue comme un changement de temps d'une

marche aléatoire en conductances aléatoires. Nous verrons que, pour obtenir le résultat, il suffit de montrer que ce changement de temps, convenablement normalisé, converge vers un subordonateur  $\alpha$ -stable sous la loi moyennée. En utilisant les résultats de convergence à l'équilibre de l'environnement vu par la particule mentionnés au paragraphe 2.2, nous pouvons montrer a priori que toute limite d'échelle du changement de temps est à accroissements indépendants et stationnaires. Il est de plus possible de ne considérer que les contributions des pièges les plus profonds rencontrés par la marche aléatoire. Le changement de temps ressemble donc asymptotiquement à une somme de variables aléatoires indépendantes et de même loi. Pour obtenir la convergence, nous montrons en fait que la contribution (normalisée) du premier piège profond rencontré converge en loi. Nous reviendrons plus en détail, pour le cas symétrique, sur la méthode développée par [BČM06, BČ07, BD09], ainsi que sur les grandes lignes de notre preuve pour la dynamique générale, au chapitre IV. La preuve complète est donnée au chapitre VII.

En annexe, nous abordons un problème relativement différent. Sortant du cadre des hypothèses du paragraphe 2.4, nous supposons simplement que la loi des pièges est invariante par translation et ergodique. Est-il possible que la marche « explose », c'est-à-dire qu'elle parcoure l'ensemble de sa trajectoire en temps fini ? Après avoir donné des critères de non-explosion, nous verrons un exemple de loi de l'environnement pour lequel la marche aléatoire explose. De manière étonnante, nous verrons qu'il est également possible que la probabilité d'explosion soit strictement comprise entre 0 et 1.

**2.6. Autres motivations.** Certaines marches aléatoires piégées, et notamment la marche aléatoire biaisée sur un amas de percolation, restent encore mal comprises (voir cependant [BGP03, Sz03, Fr08]). L'étude de modèles de pièges plus simples, comme ceux qui nous intéressent dans cette thèse (ou aussi [BFGH08]), pourrait également aider à découvrir de nouvelles approches pour aborder ces problèmes délicats.

Nous présentons dans la section suivante une autre motivation des travaux récents concernant le comportement de la marche aléatoire en pièges aléatoires. Cette marche a en effet été proposée comme un modèle simplifié de la dynamique des systèmes vitreux, dont la caractéristique centrale est le phénomène de vieillissement.

### 3. Une motivation physique : les systèmes vitreux

**3.1. Phénoménologie.** Les verres, qui sont des exemples de système vitreux, font partie de notre quotidien. Nous avons une bonne compréhension pratique de ces matériaux, et il est facile de fabriquer des verres possédant telle ou telle propriété. L'organisation microscopique des verres est pourtant encore mal comprise. L'état vitreux a une certaine ressemblance, en termes de rigidité, avec un solide cristallisé. Cependant, au niveau microscopique, la structure observée est désordonnée, et ressemble à celle d'un liquide ordinaire. Le fait qu'un verre ait la rigidité d'un solide, alors qu'il est déstructuré (ou *amorphe*) à l'échelle atomique, est un constat très surprenant et mal expliqué. En 1995, P.W. Anderson écrit [An95] :

The deepest and most interesting unsolved problem in solid state theory is probably the nature of glass and the glass transition.

Le plus souvent, un système vitreux est obtenu par refroidissement d'un liquide. Le refroidissement doit être assez rapide pour assurer que le liquide ne cristallise pas. La viscosité du liquide augmente de plusieurs ordres de grandeurs (typiquement, d'un facteur  $10^{14}$ ) quand la température diminue, et on définit en général la température critique  $T_g$  comme étant la température pour laquelle la viscosité atteint une certaine (très grande) valeur (typiquement,  $10^{12}$  Pa.s. Pour comparaison,

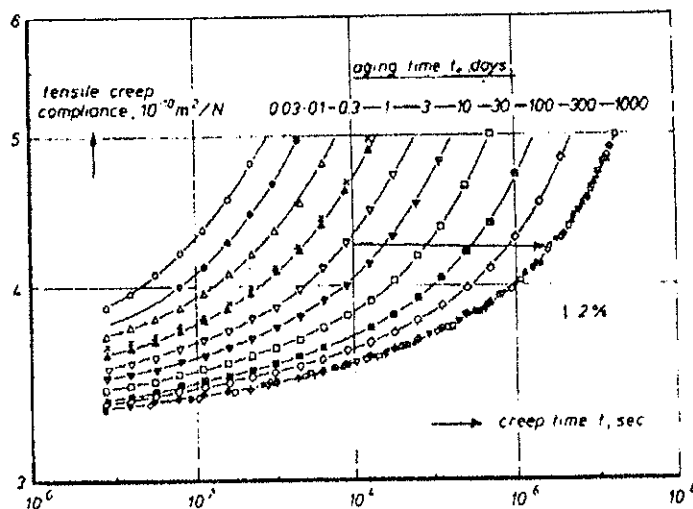


FIG. 3.1. La relaxation rampante d'un tube de PVC, refroidi de  $90^{\circ}\text{C}$  (soit environ  $10^{\circ}\text{C}$  au-dessus de la température critique) à  $40^{\circ}\text{C}$ , et maintenu à cette température pendant la durée de l'expérience [St77]. Les courbes successives correspondent, de gauche à droite, à des systèmes dont les âges varient de 0,03 à 1000 jours. Sur la courbe de droite ont été translattées toutes les autres courbes, qui se superposent.

l'eau a une viscosité de  $10^{-3}$  Pa.s) [Bi09]. Soulignons le caractère arbitraire de la définition de la température critique de la transition liquide/verre.

Partant d'un état initial liquide très désordonné, le système est donc soumis brutalement à une dynamique de basse température. Il n'est pas dans son état d'équilibre thermodynamique (qui serait la forme cristallisée), et continue d'évoluer après le refroidissement. Cette évolution est observable au niveau macroscopique, et a lieu sur toute échelle de temps accessible à l'expérience. Finalement, tout se passe comme si l'équilibre n'était jamais atteint.

Ainsi, certaines propriétés macroscopiques du système dépendent du temps d'attente  $t_w$  entre l'instant où le système est refroidi, et l'instant de l'expérience. Il est donc possible de retrouver l'« âge »  $t_w$  du système au moyen d'une expérience. On dit que le système *vieillit*.

Dans les années 1970, L.C.E. Struik a mené une série d'expériences célèbres concernant le vieillissement de plastiques, qui sont également des systèmes vitreux [St77]. L'expérience consiste à comprimer une barre de plastique, et à observer la réponse du matériau. La contraction se décompose en deux étapes : d'abord une contraction très rapide, puis un mouvement appelé « creep relaxation » en anglais, et que l'on pourrait traduire par « relaxation rampante », plus lent. On s'intéresse au temps caractéristique de la relaxation rampante. L'expérience montre que ce temps de relaxation dépend de l'âge  $t_w$  du matériau, et ce sur des échelles de temps variant de quelques minutes à plusieurs années (figure 3.1). Nous citons un extrait de [St77] :

It has been known for many years that amorphous materials are not in thermodynamic equilibrium at temperatures below their glass transition. [...] There is a slow and gradual approach to equilibrium, and this process, called *physical aging*, changes many properties of material. In fact, the aging is a gradual continuation of the

vitrication around  $T_g$ . Therefore, it will affect all those properties which in their dependence on temperature, undergo drastic changes at  $T_g$ . During aging the material becomes more and more glass-like and less rubber-(liquid)-like. It becomes stiffer and more brittle, its damping decreases, and so do its creep- and stress-relaxation rates, dielectric constant, loss, etc. [...] In the aging range, all polymers age in the same way [...]. Their behaviour is primarily determined by their being glassy amorphous substances. [...] The same mechanical and aging behavior as shown by plastics has been found in organic glasses such as bitumen, shellac, amorphous sugar, and compression molded dry cheese powder. In addition, several polycrystalline metals such as lead, tin and Wood's metal turned out to behave in the same way, which prompted us to suggest that physical aging is a basic feature of the solid state in general.

Une propriété remarquable supplémentaire est que, si l'on trace les courbes de relaxation en fonction de  $t/t_w$ , alors les courbes se superposent.

**3.2. Les verres de spins.** Dans la catégorie des systèmes vitreux, les verres de spins ont une place à part. Un verre de spin est un matériau magnétique, qui possède des propriétés similaires à celles que l'on vient de voir pour les plastiques et autres matériaux. Une expérience classique [LSNB83] consiste à préparer un mélange liquide de cuivre et de manganèse, puis à le refroidir brutalement au-dessous d'une certaine température. L'expérimentateur attend ensuite un temps  $t_w$ , avant de tester la réponse du système à un champ magnétique (de la même façon que [St77] testait la réponse d'une barre de plastique à une contrainte mécanique). Plus précisément, l'expérience consiste à appliquer un petit champ magnétique oscillant avec une certaine période  $T$ , et à mesurer la susceptibilité magnétique du matériau sous cette condition. Les résultats obtenus sont similaires à ceux de la figure 3.1 : la susceptibilité magnétique au temps  $t_w$  et pour la période  $T$  dépend seulement du rapport  $T/t_w$ .

La phénoménologie des verres de spins est donc similaire à celle des autres systèmes vitreux. L'intérêt particulier de ces systèmes est que des modèles mathématiques ont été proposés pour les représenter. L'un des modèles les plus connus est probablement celui de Sherrington-Kirkpatrick [SK75], que nous allons décrire brièvement.

Le matériau est vu comme une assemblée de spins, qui peuvent prendre les valeurs  $\pm 1$ . Le système est donc décrit par un élément  $\sigma = (\sigma_i)_{1 \leq i \leq n}$  de l'ensemble  $\{-1, 1\}^n$ . Après avoir tiré au sort une famille  $J = (J_{i,j})$  de gaussiennes centrées indépendantes, on associe à chaque configuration  $\sigma$  l'énergie d'interaction :

$$(3.1) \quad H_J^{(n)}(\sigma) = -\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{1 \leq i, j \leq n} J_{i,j} \sigma_i \sigma_j.$$

Il serait certainement plus naturel de considérer le modèle d'Edwards-Anderson [EA75], où les spins sont placés sur un réseau cubique tridimensionnel, et interagissent seulement entre plus proches voisins (c'est d'ailleurs dans [EA75] que la notion de verre de spins semble être présentée pour la première fois). Mais le modèle simplifié de Sherrington-Kirkpatrick, où tous les spins interagissent deux à deux, est déjà extrêmement riche et complexe.

On peut dégager deux caractéristiques centrales du modèle. D'une part, les interactions sont désordonnées, conformément à l'intuition relative aux verres en général, puisqu'elles sont tirées au sort au départ. D'autre part, le système est « frustré ». En effet, comme les coefficients d'interaction  $J_{i,j}$  peuvent prendre des valeurs positives ou négatives, il n'est pas possible en général de faire en sorte que

chacun des termes de la somme (3.1) soit positif, et l'état d'énergie minimale est le résultat d'un compromis.

En présence d'un champ magnétique extérieur  $h \in \mathbb{R}$ , l'énergie devient

$$H_{J,h}^{(n)}(\sigma) = H_J^{(n)}(\sigma) - h \sum_{i=1}^n \sigma_i.$$

On définit la mesure de Gibbs à la température  $\alpha$  comme étant la mesure de probabilité sur  $\{-1, 1\}^n$  qui attribue à la configuration  $\sigma$  le poids

$$\frac{1}{Z_{J,h,\alpha}^{(n)}} \exp(-H_{J,h}^{(n)}(\sigma)/\alpha),$$

où la constante de normalisation  $Z_{J,h,\alpha}^{(n)}$ , appelée fonction de partition, est telle que

$$Z_{J,h,\alpha}^{(n)} = \sum_{\sigma \in \{-1,1\}^n} \exp(-H_{J,h}^{(n)}(\sigma)/\alpha).$$

Une des questions centrales du modèle de Sherrington-Kirkpatrick est d'étudier la limite thermodynamique de l'énergie libre, c'est-à-dire

$$f(h, \alpha) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln \left( Z_{J,h,\alpha}^{(n)} \right)$$

(cette limite, si elle existe, est indépendante de  $J$ ). Par la méthode (non rigoureuse) des répliques, G. Parisi [Pa80] a proposé une formule générale donnant l'énergie libre, qui prévoit notamment une transition de phase pour  $\alpha = 1$ . Une preuve de cette formule a été apportée récemment par [Gu03] et [Ta06]. Nous renvoyons le lecteur à [Bo05] pour une présentation de ces résultats.

La preuve de la formule de G. Parisi est probablement l'un des résultats les plus impressionnants concernant les modèles de verres de spins. D'autres résultats concernant la limite thermodynamique des verres de spins sont décrits dans les livres [MPV], pour un point de vue physique, et [Ta], pour un point de vue mathématique.

La plupart des études des verres de spins ont d'abord concerné l'équilibre thermodynamique, et ont révélé des phénomènes inattendus et complexes. Pourtant, si l'on veut modéliser les expériences décrites précédemment, il s'agit plutôt de considérer la *dynamique* de ces verres hors de l'équilibre. Il est naturel de considérer pour la dynamique un processus de Markov qui soit réversible pour la mesure de Gibbs. Choisir une condition initiale uniformément au hasard sur l'ensemble des configurations peut être considéré comme un refroidissement à partir d'une température infinie.

**3.3. Le modèle de pièges.** Pour mieux appréhender cette dynamique, les physiciens en ont cherché des modèles simplifiés. Un point de vue classique est de considérer l'évolution du système dans l'espace des énergies. On peut se représenter schématiquement des vallées, qui sont des zones de basse énergie regroupant des configurations proches. Ces vallées sont séparées les unes des autres par des barrières d'énergie (figure 3.2). Le système passe un temps très long dans une vallée, puis réussit à en sortir pour être à nouveau piégé dans une vallée voisine.

Il a d'abord semblé naturel de considérer des paysages d'énergie organisés de façon hiérarchique : l'espace est divisé en grandes vallées, puis chacune de ces vallées est elle-même composée de sous-vallées, etc. [PSAA84, SH89]. Nous nous intéressons à un modèle plus simple (qui pourrait être considéré comme l'étude de l'un des niveaux de cette hiérarchie [VHOB97, section 5]), où chaque vallée du paysage d'énergie est identifiée à un site d'un graphe, comme sur la figure 3.2. Deux sites du graphe sont reliés s'ils représentent des vallées pour lesquelles le système peut

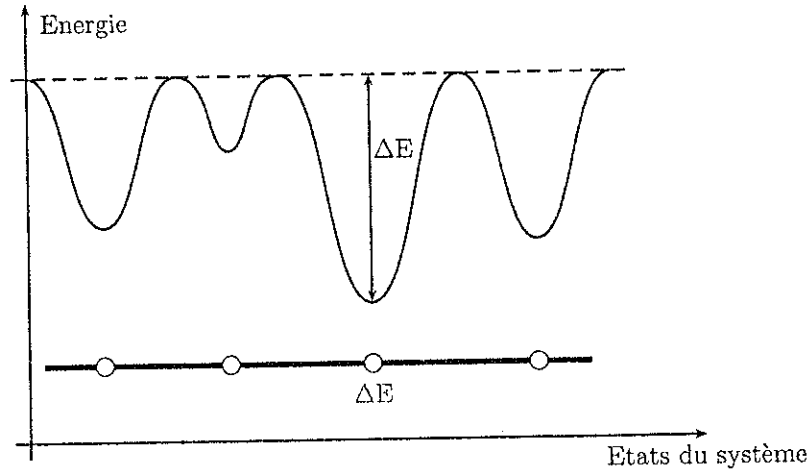


FIG. 3.2. Un paysage d'énergie schématique, identifié à un graphe.

passer directement de l'une à l'autre. Le modèle ne retient pas le détail particulier de chaque vallée, mais seulement sa profondeur et la disposition relative des vallées.

Nous considérons donc un graphe  $G$  (identifié à l'ensemble de ses sommets), ainsi qu'une famille d'énergies  $(E_x)_{x \in G}$ .

Au vu du caractère désordonné des interactions, le paysage d'énergies est certainement très complexe et irrégulier [DS01]. L'hypothèse fondamentale est que les énergies  $(E_x)_{x \in G}$  sont des variables aléatoires indépendantes (voir [MPV85] pour une justification de cette hypothèse au niveau physique). On supposera que les  $(-E_x)_{x \in G}$  suivent une loi exponentielle de paramètre 1. Cette hypothèse peut se justifier par le fait que les variables exponentielles sont un des types généraux donnés par la théorie des extrêmes (et ici les sites représentent des minimums d'énergie), et également par des considérations physiques [MPV85].

Considérons la mesure de Gibbs (non-normalisée) à la température  $\alpha$ . Elle attribue pour chaque  $x \in G$  un poids  $\tau_x$  donné par

$$\tau_x = \exp(-E_x/\alpha).$$

Nous souhaitons considérer des processus de Markov réversibles par rapport à cette mesure, ce qui revient à la problématique du paragraphe 1.2. La marche aléatoire en pièges aléatoires, notée  $(X_t)_{t \geq 0}$  et dont les taux de saut sont donnés en (1.4), est un des choix naturels. Ici, le taux de saut d'un site  $x$  vers un de ses voisins  $y$  peut se réécrire :

$$\frac{(\tau_y)^a}{(\tau_x)^{1-a}} = \exp\left(\frac{(1-a)E_x - aE_y}{\alpha}\right).$$

Ce modèle a été considéré avec  $a = 1$  par [DOL85], avec  $a = 0$  par [Bo92], puis pour  $a$  quelconque dans  $[0, 1]$  par [RMB00, RMB01], et a été l'objet de nombreux travaux en physique (voir notamment les revues [VHOBC97] et [BCKM97]). Le cas où  $a = 1/2$ , souvent appelé dynamique de Glauber, est intéressant pour la simulation numérique des mesures de Gibbs. En effet, dans ce cas, les taux de transitions ne dépendent que des différences d'énergies, et ces différences peuvent souvent être calculées rapidement.

Mentionnons deux autres dynamiques réversibles fréquemment employées, celles de Metropolis et du thermostat (« heat bath » en anglais). Ces dynamiques sont

définies, respectivement, par les taux de saut

$$(3.2) \quad 1 \wedge \frac{\tau_y}{\tau_x} \quad \text{et} \quad \left(1 + \frac{\tau_x}{\tau_y}\right)^{-1}.$$

Ces taux de saut ont, comme pour le cas où  $a = 1/2$  vu précédemment, l'avantage algorithmique de ne dépendre que des différences d'énergie. Ils sont de plus à valeurs dans  $[0, 1]$ , et sont donc faciles à traduire en termes d'un modèle discret.

Ces deux dynamiques n'appartiennent pas à proprement parler à la classe des marches aléatoires en pièges aléatoires telle que nous l'avons définie. Leur comportement est cependant similaire, et il est possible d'adapter les résultats que nous verrons par la suite à ces cas.

L'une des propriétés importantes du modèle que nous venons d'introduire est que la loi d'un piège est à queue polynomiale. En effet, en utilisant le fait que  $(-E_x)$  suit une loi exponentielle de paramètre 1, il vient, pour tout  $y \geq 1$  :

$$\mathbb{P}[\tau_x \geq y] = \mathbb{P}[\exp(-E_x/\alpha) \geq y] = \frac{1}{y^\alpha}.$$

Remarquons que l'espérance de la profondeur d'un piège est finie si  $\alpha > 1$ , et infinie sinon.

Jusqu'à maintenant, nous n'avons pas précisé comment est choisi le graphe  $G$ . Le choix le plus simple est probablement celui du graphe complet [DOL85, Bo92, BD95, MB97]. Dans cette thèse, nous nous concentrons sur le cas où  $G$  est le graphe  $\mathbb{Z}^d$  (ou une grande boîte de  $\mathbb{Z}^d$ ). Ce choix a notamment été considéré dans les travaux de physique [MB96, RMB00, RMB01, BB03]. D'autres graphes ont été envisagés, notamment l'hypercube [BBG02].

**3.4. Vieillessement de la marche aléatoire.** Voyons comment le vieillissement observé expérimentalement peut être traduit en termes de ce modèle simplifié. Il s'agit d'observer la dynamique sur une fenêtre  $[t_w, t_w + t]$ , où  $t_w$  et  $t$  tendent vers l'infini simultanément. On peut par exemple regarder la probabilité que la marche se trouve sur le même site aux instants  $t_w$  et  $t_w + t$  :

$$(3.3) \quad R(t_w, t_w + t) = \mathbb{P}_x^r[X_{t_w} = X_{t_w+t}].$$

Nous dirons qu'il y a *vieillessement* pour la fonctionnelle  $R$  s'il existe deux fonctions  $f_1$  et  $f_2$  qui tendent vers l'infini, et telles que

$$\lim_{t_w \rightarrow +\infty} R(t_w, t_w + f_1(t_w)) = 1, \quad \text{et} \quad \lim_{t_w \rightarrow +\infty} R(t_w, t_w + f_2(t_w)) = 0.$$

Cela correspond à l'idée que le temps de relaxation du système au temps  $t_w$  est compris entre  $f_1(t_w)$  et  $f_2(t_w)$ . Bien souvent, on montre en fait que, pour un exposant  $\gamma > 0$ , la limite

$$\lim_{t_w \rightarrow +\infty} R(t_w, t_w + \theta(t_w)^\gamma) = l(\theta)$$

existe, pour tout  $\theta \in \mathbb{R}_+$ , et de plus,

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} l(\theta) = 1, \quad \text{et} \quad \lim_{\theta \rightarrow +\infty} l(\theta) = 0.$$

Naturellement, il est possible de remplacer la fonction  $R$  par d'autres fonctions qui dépendent de deux instants, comme par exemple la probabilité pour la marche de rester immobile sur tout l'intervalle  $[t_w, t_w + t]$ .

Dans le cas où l'on considère un graphe fini, le système atteint l'équilibre en temps fini, et le vieillissement ainsi défini ne peut pas se produire. Il est alors nécessaire de considérer une famille de graphes finis  $G_n$ , dont la taille tend vers l'infini, et d'observer la marche aléatoire sur  $G_n$  sur une échelle de temps bien choisie, qui diverge avec  $n$ .

**3.5. Résultats connus pour la dynamique des verres de spins.** Le modèle de pièges introduit une simplification qui rend son analyse plus abordable. Certains résultats ont néanmoins pu être établis sans le recours à ce modèle simplifié. [BDG06] étudient la dynamique de la limite  $N \rightarrow +\infty$  du modèle de verre de spins dit sphérique, où les spins peuvent varier continûment. Pour des spins à valeurs dans  $\{-1, 1\}$ , les seuls résultats disponibles concernent la dynamique symétrique ( $a = 0$ ). Dans ce cas, [BĀC08] montrent des propriétés de vieillissement pour le modèle dit  $p$ -spins, avec  $p \geq 3$ , sur des échelles de temps exponentielles, retrouvant les résultats précédemment obtenus dans [BBG03a, BBG03b] pour le modèle de verre de spins à énergies indépendantes de B. Derrida [De80, De81]. Des résultats de vieillissement différents ont également été obtenus sur des échelles de temps plus courtes que l'échelle exponentielle, y compris pour le modèle de Sherrington-Kirkpatrick [Gü09].

## CHAPITRE II

# Homogénéisation pour la marche aléatoire en conductances aléatoires

### 1. Homogénéisation de milieux périodiques

Lorsqu'on considère un milieu hétérogène ayant une certaine régularité spatiale, il semble raisonnable de penser que, concernant des propriétés de grande échelle, il est possible de remplacer le milieu par un milieu « moyenné », qui serait décrit par un petit nombre de paramètres effectifs. Cette opération, consistant à remplacer un milieu hétérogène par un milieu moyenné, est appelée *l'homogénéisation*.

La loi des grands nombres pourrait être considérée comme le premier résultat d'homogénéisation. De manière plus intéressante, on peut considérer le problème suivant : peut-on évaluer la conductivité effective d'un matériau homogène, mais présentant de petites inclusions de nature différente ? Cette question a été abordée dès le XIX<sup>e</sup> siècle, notamment par J.C. Maxwell [Ma] et J.W. Rayleigh [Ra92]. Le cas considéré par Rayleigh est celui où les inclusions sont de petites sphères disposées sur un réseau rectangulaire, en dimensions 2 et 3 (les inclusions sphériques en dimension 2 étant vues comme des inclusions cylindriques en dimension 3). Rayleigh calcule le développement limité de la conductivité effective, quand le rayon des sphères tend vers 0. Il justifie ainsi une formule découverte par L. Lorenz et H. Lorentz (qui en est l'approximation du premier ordre) concernant le lien entre l'indice de réfraction optique d'un milieu et sa densité, et discute de son domaine de validité.

L'étude rigoureuse de ce type de problèmes a commencé dans les années 1970 (voir [BLP] ou [JKO, chapitre 1] pour des références historiques). Notons  $\text{Sym}_d^+(\mathbb{R})$  l'espace des matrices symétriques définies positives de taille  $d$ . On se donne une fonction

$$\begin{cases} \mathbb{R}^d & \rightarrow \text{Sym}_d^+(\mathbb{R}) \\ x & \mapsto A(x). \end{cases}$$

A la fonction  $(A(x))_{x \in \mathbb{R}^d}$  est associé l'opérateur différentiel

$$(1.1) \quad u \mapsto \text{div}(A \nabla u).$$

Si  $A(x)$  représente la conductivité au point  $x$ , alors le potentiel électrique  $V$  en régime stationnaire satisfait

$$\text{div}(A \nabla V) = 0$$

(au signe près,  $\nabla V$  est le champ électrique, et  $A \nabla V$  la densité de courant). Le cas des inclusions de Rayleigh revient à considérer

$$(1.2) \quad A(x) = c(x)I, \text{ avec } c(x) \in (0, +\infty) \text{ et } c(x) = \begin{cases} c_0 & \text{si } \|x - [x]\|_2 \geq t, \\ c_1 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où les coordonnées du vecteur  $[x]$  sont les parties entières des coordonnées du vecteur  $x$ , et  $I$  est la matrice identité. Pour tout  $\varepsilon > 0$ , on définit la fonction associée à  $A$  correspondant à la longueur caractéristique  $\varepsilon$ , à savoir  $A^{(\varepsilon)}(x) = A(x/\varepsilon)$ . Pour un domaine borné  $D$  de  $\mathbb{R}^d$ , on considère l'équation de Poisson

$$(1.3) \quad \text{div}(A^{(\varepsilon)} \nabla u^{(\varepsilon)}) = f, \quad u^{(\varepsilon)}|_{\partial D} = g,$$

où  $f$  et  $g$  sont deux fonctions données (nous ne nous préoccupons pas ici de savoir quelles conditions de régularité doivent satisfaire les différentes fonctions ou le domaine  $D$ ).

On dit que la matrice  $A^\circ$  est la matrice homogénéisée pour  $(A(x))_{x \in \mathbb{R}^d}$  si la solution  $u_\varepsilon$  de l'équation (1.3) converge vers la fonction  $u^\circ$  telle que

$$(1.4) \quad \operatorname{div}(A^\circ \nabla u^\circ) = f, \quad u^\circ|_{\partial D} = g.$$

Le point important est que la matrice homogénéisée  $A^\circ$  ne dépend pas de  $x$ .

Pour le cas particulier où  $(A(x))$  est donné par (1.2), on peut voir que la matrice homogénéisée doit être un multiple de l'identité, disons  $a_t I$ . Il est clair que  $a_0 = c_0$ . Le problème considéré par Rayleigh est de trouver le développement limité de  $a_t$  quand  $t$  tend vers 0.

Les premiers travaux mathématiques ont concerné le cas où la fonction  $x \mapsto A(x)$  est périodique. Dans ce cas, il existe une matrice homogénéisée sous des conditions assez générales [JKO, théorème 1.6]. Il suffit en effet que les coefficients de la matrice  $A(x)$  soient des fonctions mesurables bornées (l'équation (1.3) étant entendue au sens faible), et qu'il existe des constantes  $c, C > 0$  telles que, pour tout  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_d)$  :

$$(1.5) \quad c \|\xi\|_2^2 \leq \sum_{i,j=1}^d A_{i,j}(x) \xi_i \xi_j \leq C \|\xi\|_2^2.$$

Par la suite, nous dirons dans ce cas que  $(A(x))$  satisfait une condition d'ellipticité uniforme.

Remarquons qu'hormis dans le cas unidimensionnel, la matrice homogénéisée n'est pas explicite. Par exemple, on ne connaît pas de formule générale donnant la valeur  $a_t$  qui intéressait Rayleigh.

## 2. Homogénéisation de milieux aléatoires

Après le cas périodique, le problème où  $(A(x))$  est aléatoire a été considéré, sous l'hypothèse où la loi est invariante par translation et ergodique. Les premiers travaux sont dus à [Ko78, Yu80, PV81], où est démontré le fait que, dès que  $(A(x))$  est uniformément elliptique, il existe une matrice homogénéisée associée. Naturellement, dans ce cadre plus général, il n'existe pas non plus de formule explicite donnant la matrice homogénéisée en fonction de la loi de  $(A(x))$ .

A l'opérateur différentiel (1.1) est associée une diffusion  $(X(t))_{t \geq 0}$ . L'équivalent probabiliste d'un résultat d'homogénéisation est de montrer que le processus  $t \mapsto \sqrt{\varepsilon} X(t/\varepsilon)$  converge en loi, quand  $\varepsilon$  tend vers 0, vers un mouvement brownien dont la matrice de covariance est  $A^\circ$ .

A notre connaissance, le premier papier donnant un résultat de ce type est [PV82]. Dans ce travail, les auteurs considèrent, au lieu de (1.1), des opérateurs de la forme

$$(2.1) \quad L_A = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d A_{i,j}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Nous notons encore  $(X(t))$  la diffusion définie par l'opérateur  $L_A$ , et  $\mathbf{P}_x^A$  sa loi partant de  $x$  pour une fonction  $A$  donnée (et  $\mathbf{E}_x^A$  l'espérance associée). Notons également  $\mathbb{P}$  la loi de  $A$ , supposée invariante par translation et ergodique. Pour  $x, y \in \mathbb{R}^d$ , nous écrivons leur produit scalaire  $x \cdot y$ . Pour tout  $\xi \in \mathbb{R}^d$ , le processus suivant est une martingale sous  $\mathbf{P}_x^A$  [SV, théorème 4.2.1] :

$$M_t = \exp \left( i \xi \cdot X(t) + \frac{1}{2} \int_0^t \xi \cdot A(X(s)) \xi \, ds \right).$$

Ainsi, pour tout  $A$  et pour tout  $t \geq 0$ , on a  $\mathbf{E}_0^A [M_t] = 1$ . En changeant  $\xi$  en  $\xi/\sqrt{t}$ , on obtient :

$$(2.2) \quad \mathbf{E}_0^A \left[ \exp \left( i\xi \cdot \frac{X(t)}{\sqrt{t}} + \frac{1}{2t} \int_0^t \xi \cdot A(X(s)) \xi \, ds \right) \right] = 1.$$

Si l'on admet qu'il existe une matrice  $A^\circ$  telle que, pour  $\mathbb{P}$ -presque tout  $A$  :

$$(2.3) \quad \frac{1}{t} \int_0^t A(X(s)) \, ds \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}_0^A \text{-p.s.}} A^\circ,$$

alors on déduit de l'égalité (2.2) que pour  $\mathbb{P}$ -presque tout  $A$ ,

$$\mathbf{E}_0^A \left[ \exp \left( i\xi \cdot \frac{X(t)}{\sqrt{t}} \right) \right] \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} \exp \left( -\frac{1}{2} \xi \cdot A^\circ \xi \right).$$

Autrement dit,  $X(t)/\sqrt{t}$  converge en loi vers une gaussienne de matrice de covariance  $A^\circ$ , ce qui est le résultat d'homogénéisation espéré (à ceci près qu'il ne s'agit pas de la convergence du processus, mais seulement de la marginale au temps  $t$ ).

Il reste donc à voir comment montrer (2.3). L'idée est d'utiliser le théorème ergodique. Il s'agit de voir  $A(X(t))$  comme une fonction d'un processus ergodique.

On considère, pour tout  $t \geq 0$ , l'environnement  $A_t$  défini par

$$A_t(x) = A(X(t) + x).$$

En d'autres termes, la fonction  $A_t$  est l'environnement vu depuis le point  $X(t)$ . On peut vérifier que ce processus hérite de la propriété de Markov de  $X$ . Il est à valeurs dans l'ensemble des environnements (un ensemble particulièrement grand), et au fil du temps, le processus ne visite que les différentes translations de l'environnement initial. Remarquons qu'il a donc de nombreuses mesures invariantes, notamment celles qui sont concentrées sur un unique environnement constant.

La quantité  $A(X(t))$  est une fonction de  $A_t$  : c'est simplement  $A_t(0)$ . Pour montrer (2.3), les auteurs de [PV82] se sont ainsi ramenés à montrer qu'il existe une mesure ergodique  $\mu$  pour ce processus, telle que la loi  $\mathbb{P}$  soit absolument continue par rapport à  $\mu$ . Cette dernière condition est nécessaire, car le théorème ergodique assure que (2.3) est vrai pour  $\mu$ -presque tout  $A$ , là où nous souhaitons un résultat pour  $\mathbb{P}$ -presque tout  $A$ .

En fait, l'étude de ce processus auxiliaire  $A_t$  présente un intérêt pour une très large classe de modèles. En utilisant également les techniques venant de l'homogénéisation des opérateurs différentiels, il est ainsi possible de montrer un théorème central limite pour les diffusions associées aux opérateurs sous forme divergence (1.1) [Os83].

Dans la section suivante, nous étudions plus en détail ce processus dans le cas de la marche aléatoire en conductances aléatoires.

### 3. L'environnement vu par la particule

Nous revenons à partir de maintenant à la marche aléatoire en conductances aléatoires introduite au paragraphe I.1.1. Dans ce cas, rappelons que nous notons  $(Z_t)_{t \geq 0}$  la marche aléatoire, évoluant dans l'environnement  $\omega = (\omega_e)_{e \in \mathbb{B}}$ . La loi de la marche partant de  $x$  dans l'environnement  $\omega$  est notée  $\mathbf{P}_x^\omega$ , et on note  $\mathbb{P}$  la loi de l'environnement  $\omega$ ,  $\Omega$  l'ensemble des environnements.

Nous considérons  $(\theta_x)_{x \in \mathbb{Z}^d}$  le groupe des translations agissant sur  $\Omega$ . Ces translations sont telles que, pour toute arête  $e$  :

$$(3.1) \quad (\theta_z \omega)_e = \omega_{z+e},$$

où  $z+e$  désigne l'arête obtenue en translatant l'arête  $e$  par le vecteur  $z$  (autrement dit,  $z+e = (z+x, z+y)$  si  $e = (x, y)$ ). L'environnement vu par la particule est le

processus, que nous noterons  $(\omega(t))_{t \geq 0}$ , défini par

$$\omega(t) = \theta_{Z_t} \omega.$$

Il est clair que  $(\omega(t))_{t \geq 0}$  est un processus de Markov (sous la mesure  $\mathbb{P}_0^\omega$ , pour tout  $\omega \in \Omega$ ), décrit par le générateur infinitésimal :

$$(3.2) \quad \mathcal{L}f(\omega) = \sum_{|z|=1} \omega_{0,z} (f(\theta_z \omega) - f(\omega)).$$

Rappelons que nous supposons toujours que  $\mathbb{P}$ , la loi de l'environnement  $\omega$ , est invariante par translation et ergodique. Nous supposons de plus ici pour simplifier que toutes les conductances sont strictement positives.

Il se pourrait que la marche aléatoire parcoure l'ensemble de sa trajectoire en un temps fini. Nous dirons qu'il y a *explosion* dans ce cas, et que la marche aléatoire *n'explose pas* si pour presque tout environnement, il n'y a pas explosion. La propriété fondamentale de l'environnement vu par la particule est la suivante.

**PROPOSITION 3.1.** *Si la marche aléatoire n'explose pas, alors la mesure  $\mathbb{P}$  est réversible et ergodique pour l'environnement vu par la particule.*

**DÉMONSTRATION.** Comme les taux de saut de la marche aléatoire en conductances aléatoires sont symétriques, la marche aléatoire est réversible pour la mesure de comptage. On a donc, pour tout  $x, y \in \mathbb{Z}^d$ , et tout  $t \geq 0$  :

$$(3.3) \quad \mathbb{P}_x^\omega[Z_t = y] = \mathbb{P}_y^\omega[Z_t = x].$$

Pour montrer que la mesure  $\mathbb{P}$  est réversible, il s'agit de voir que le semi-groupe associé à  $(\omega(t))_{t \geq 0}$  est auto-adjoint pour la mesure  $\mathbb{P}$ . Notons ce semi-groupe  $(P_t)_{t \geq 0}$ . Soient  $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions continues bornées. Nous allons montrer :

$$(3.4) \quad \mathbb{E}[P_t f(\omega) g(\omega)] = \mathbb{E}[f(\omega) P_t g(\omega)].$$

Pour montrer (3.4), observons que

$$(3.5) \quad P_t f(\omega) g(\omega) = \mathbb{E}_0^\omega[f(\omega(t))] g(\omega) = \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \mathbb{P}_0^\omega[Z_t = x] f(\theta_x \omega) g(\omega)$$

D'après (3.3), on a l'égalité

$$\mathbb{P}_0^\omega[Z_t = x] = \mathbb{P}_x^\omega[Z_t = 0].$$

D'autre part, la loi de  $(Z_t - x)_{t \geq 0}$  sous  $\mathbb{P}_x^\omega$  est la même que celle de  $(Z_t)_{t \geq 0}$  sous  $\mathbb{P}_0^{\theta_x \omega}$ . Pour le vérifier, il suffit de voir que les taux de transition de ces deux processus coïncident, ainsi que leur valeur à l'instant initial. On a donc :

$$P_t f(\omega) g(\omega) = \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \mathbb{P}_0^{\theta_x \omega}[Z_t = -x] f(\theta_x \omega) g(\omega).$$

Du fait de l'invariance par translation de la mesure  $\mathbb{P}$ , il vient

$$\sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \mathbb{E} \left[ \mathbb{P}_0^{\theta_x \omega}[Z_t = -x] f(\theta_x \omega) g(\omega) \right] = \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \mathbb{E} [\mathbb{P}_0^\omega[Z_t = -x] f(\omega) g(\theta_{-x} \omega)].$$

Ce dernier terme étant égal à  $\mathbb{E}[f(\omega) P_t g(\omega)]$ , on obtient l'égalité (3.4), ce qui termine la preuve de la réversibilité.

Comme la marche aléatoire est bien définie pour tout temps, la réversibilité implique que la mesure  $\mathbb{P}$  est invariante pour le processus  $(\omega(t))_{t \geq 0}$ .

Montrons maintenant que la mesure  $\mathbb{P}$  est ergodique. Nous reprenons la méthode de preuve de [BS, chapitre 1]. Notons  $(\Theta_t)_{t \geq 0}$  les translations temporelles (sur l'ensemble des fonctions de  $\mathbb{R}_+$  dans  $\Omega$ ), définies par  $\Theta_t(\omega)(s) = \omega(t + s)$ . Soit  $A$  un événement invariant, c'est-à-dire tel que pour tout  $t \geq 0$ , on a  $\Theta_t^{-1}(A) = A$ . Il s'agit de montrer que  $\mathbb{E} \mathbb{E}_0^\omega[A] \in \{0, 1\}$ . Soit  $\phi(\omega) = \mathbb{P}_0^\omega[A]$ . Remarquons que  $(\phi(\omega(t)))_{t \geq 0}$

est une martingale sous  $\mathbb{P}\mathbb{P}_0^\omega$ . En effet, comme  $A$  est un événement invariant, la propriété de Markov assure que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\mathbb{E}_0^\omega[\mathbf{1}_A|\omega(s), s \leq t] &= \mathbb{E}\mathbb{E}_0^\omega[\mathbf{1}_A \circ \Theta_t|\omega(s), s \leq t] \\ &= \mathbb{E}_0^{\omega(t)}[\mathbf{1}_A] = \phi(\omega(t)). \end{aligned}$$

La martingale est donc fermée, et il vient :

$$(3.6) \quad \phi(\omega(t)) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}\mathbb{P}_0^\omega\text{-p.s.}} \mathbf{1}_A.$$

Montrons maintenant qu'il existe un ensemble  $B \subseteq \Omega$  tel que  $\phi = \mathbf{1}_B$ ,  $\mathbb{P}$ -presque sûrement. Soit  $[a, b] \subseteq \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ . Comme la mesure  $\mathbb{P}$  est invariante pour le processus  $(\omega(t))$ , on a

$$\mathbb{E}\mathbb{E}_0^\omega[\mathbf{1}_{\{\phi(\omega(t)) \in [a, b]\}}] = \mathbb{P}[\phi(\omega) \in [a, b]].$$

D'autre part, la convergence (3.6) implique que le membre de gauche de l'égalité précédente tend vers 0 quand  $t$  tend vers l'infini. En conséquence,

$$\mathbb{P}[\phi(\omega) \in [a, b]] = 0,$$

et il s'en suit que  $\mathbb{P}$ -presque sûrement,  $\phi$  est une fonction à valeurs dans  $\{0, 1\}$ , et qui peut donc s'écrire  $\phi = \mathbf{1}_B$ . Nous avons vu que  $(\mathbf{1}_B(\omega(t)))_{t \geq 0}$  est une martingale, donc l'image de  $\mathbf{1}_B$  par le générateur du processus  $(\omega(t))$  vaut 0 :

$$\sum_{|z|=1} \omega_{0,z}(\mathbf{1}_B(\theta_z \omega) - \mathbf{1}_B(\omega)) = 0 \quad (\text{d}\mathbb{P}(\omega)\text{-p.s.}).$$

Pour que l'égalité précédente soit vraie dans le cas où  $\mathbf{1}_B(\omega) = 1$ , il est nécessaire d'avoir  $\mathbf{1}_B(\theta_z \omega) = 1$  pour tout  $z$  tel que  $|z| = 1$ . On en déduit que pour tout tel  $z$ , on a

$$\mathbf{1}_B \leq \mathbf{1}_B \circ \theta_z \quad (\mathbb{P}\text{-p.s.}).$$

L'invariance par translation de la mesure  $\mathbb{P}$  implique alors qu'en fait,  $\mathbf{1}_B = \mathbf{1}_B \circ \theta_x$ , et ce pour tout  $x \in \mathbb{Z}^d$ . Enfin, l'ergodicité de la mesure  $\mathbb{P}$  entraîne que  $\mathbb{P}(B) \in \{0, 1\}$ , et il vient que

$$\mathbb{P}\mathbb{P}_0^\omega[A] = \mathbb{E}[\phi(\omega)] = \mathbb{P}[B] \in \{0, 1\},$$

ce qu'il fallait démontrer.  $\square$

*Remarque 3.2.* Dans l'annexe A, nous étudions quelques conditions de non-explosion de la marche (et donnons également un exemple de marche qui explose). En particulier, nous verrons par un argument de percolation simple que si les conductances sont indépendantes (ou si elles ont une dépendance de portée finie), alors la marche aléatoire n'explose pas.

*Remarque 3.3.* Notons  $T(\omega) = \sum_{|z|=1} \omega_{0,z}$ . La mesure

$$\frac{1}{\mathbb{E}[T]} T(\omega) \text{d}\mathbb{P}(\omega)$$

est réversible et ergodique pour l'environnement vu par la marche en temps discret associée à  $Z$ , pourvu que  $T$  soit intégrable. En étudiant le changement de temps permettant de passer de la marche en temps discret à  $Z$ , on peut en déduire que, si les conductances sont intégrables, alors la marche aléatoire  $Z$  n'explose pas.

#### 4. Principe d'invariance en moyenne

Commençons par rappeler un principe d'invariance général pour les martingales à temps continu. Si  $(X_t)_{t \geq 0}$  est une martingale, on note  $([X, X]_t)$  sa variation quadratique (définie par exemple dans [JS, paragraphe I-4e]). [JS, théorème VIII-3.11] contient le résultat suivant.

**THÉORÈME 4.1.** *Soit  $(X_t)_{t \geq 0}$  une martingale à valeurs réelles. Pour que le processus  $(\sqrt{\varepsilon} X_{\varepsilon^{-1}t})_{t \geq 0}$  converge en loi, pour la topologie de Skorokhod et quand  $\varepsilon$  tend vers 0, vers un mouvement brownien de variance  $\sigma^2$ , il faut et il suffit que*

$$\frac{1}{t} [X, X]_t \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \sigma^2.$$

Dans l'exemple que nous avons vu à la section 2, la diffusion associée à l'opérateur (2.1) a la propriété remarquable d'être une martingale. En fait, montrer (2.3) revient à vérifier la condition du théorème 4.1.

En revanche, la marche aléatoire en conductances aléatoires n'est pas une martingale (pas plus que les diffusions associées aux opérateurs sous forme divergence (1.1)). On peut chercher malgré cela à utiliser le théorème 4.1, mais il faut alors trouver des « coordonnées harmoniques » pour la marche aléatoire. Pour illustrer l'idée générale, nous pouvons traiter le cas simple de la dimension 1. On peut vérifier que la fonction  $\chi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$(4.1) \quad \chi(n) = \begin{cases} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\omega_{k,k+1}} & \text{si } n \geq 1, \\ 0 & \text{si } n = 0, \\ \sum_{k=n}^{-1} \frac{1}{\omega_{k,k+1}} & \text{si } n \leq -1 \end{cases}$$

est harmonique. Le processus  $(\chi(Z_t))_{t \geq 0}$  est donc une martingale, et on peut montrer en utilisant l'ergodicité de l'environnement vu par la particule et le théorème 4.1 que ce processus satisfait un principe d'invariance sous  $\mathbf{P}_0^\omega$ , pour presque tout environnement. Enfin, en supposant que  $\mathbb{E}[1/\omega_e]$  est finie, on a, pour presque tout environnement :

$$(4.2) \quad \lim_{n \rightarrow \pm\infty} \frac{\chi(n)}{n} = \mathbb{E} \left[ \frac{1}{\omega_e} \right].$$

Si l'on écrit

$$Z_t = \frac{Z_t}{\chi(Z_t)} \chi(Z_t),$$

le premier terme du produit tend vers  $\mathbb{E}[1/\omega_e]^{-1}$  d'après (4.2), tandis que le second satisfait un principe d'invariance. On a ainsi montré que la marche  $Z$  satisfait un principe d'invariance sous  $\mathbf{P}_0^\omega$  pour presque tout  $\omega$ .

Dans la discussion précédente, la propriété essentielle est que l'on peut contrôler la fonction harmonique par (4.2) pour presque tout environnement.

En dimension supérieure, [Ko85] construit des fonctions harmoniques analogues à  $\chi$ . Celles-ci ne peuvent cependant pas être aussi explicites que dans le cas unidimensionnel, et il n'est pas possible de vérifier directement un résultat similaire à (4.2). En utilisant cette technique, [Ko85] montre cependant que, si les conductances sont à valeurs dans un intervalle suffisamment petit autour de 1, alors un principe d'invariance est vérifié pour presque tout environnement.

Partant de cette idée, [KV86] ont proposé une approche du problème basée sur la théorie spectrale. On considère la martingale

$$(4.3) \quad N_t = Z_t - \int_0^t \mathfrak{d}(\omega(s)) \, ds,$$

où  $\mathfrak{d}(\omega)$  est la dérive locale à l'origine, à savoir

$$\mathfrak{d}(\omega) = \sum_{|z|=1} \omega_{0,z} z.$$

Pour toute fonction  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  (ou  $\mathbb{R}^d$ ), on note  $I_f(t)$  l'intégrale définie par

$$(4.4) \quad I_f(t) = \int_0^t f(\omega(s)) ds.$$

Le problème général est de décomposer  $I_f(t)$  en la somme d'une martingale et d'un terme asymptotiquement négligeable (en particulier pour  $f = \mathfrak{d}$ ).

Nous notons  $\bar{\mathbb{P}} = \mathbb{P}\mathbb{P}_0^\omega$  la mesure moyennée, et  $\bar{\mathbb{E}}$  l'espérance associée. Rappelons que, d'après la proposition 3.1, le processus  $(\omega(t))$  est stationnaire sous la mesure  $\bar{\mathbb{P}}$ . Comme  $\mathbb{P}$  est une mesure réversible, le générateur  $\mathcal{L}$  admet une décomposition spectrale dans  $L^2(\mathbb{P})$ . Pour  $f \in L^2(\mathbb{P})$ , on note  $e_f$  la mesure spectrale de  $-\mathcal{L}$  projetée sur la fonction  $f$ . La mesure  $e_f$  est telle que, pour toute fonction continue bornée  $\Psi : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  :

$$(4.5) \quad \mathbb{E}[\Psi(-\mathcal{L})(f)(\omega)f(\omega)] = \int \Psi(\lambda) de_f(\lambda).$$

[KV86] démontrent le résultat suivant.

THÉORÈME 4.2. *Soit  $f \in L^2(\mathbb{P})$ . Si la fonction  $f$  est telle que*

$$(4.6) \quad \int \frac{1}{\lambda} de_f(\lambda) < +\infty,$$

*alors il existe  $(M_t)_{t \geq 0}$ ,  $(\xi_t)_{t \geq 0}$  tels que  $I_f(t) = M_t + \xi_t$ , où  $(M_t)$  est une martingale à accroissements stationnaires sous  $\bar{\mathbb{P}}$ , et  $(\xi_t)$  satisfait les deux propriétés suivantes :*

$$(4.7) \quad \frac{1}{\sqrt{t}} \sup_{0 \leq s \leq t} |\xi_s| \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{\bar{\mathbb{P}}\text{-prob.}} 0,$$

$$(4.8) \quad \frac{1}{t} \bar{\mathbb{E}}[(\xi_t)^2] = 2 \int \frac{1 - e^{-\lambda t}}{\lambda^2 t} de_f(\lambda) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0.$$

*De plus,  $(\sqrt{\varepsilon} I_f(\varepsilon^{-1}t))_{t \geq 0}$  converge en loi sous  $\bar{\mathbb{P}}$ , pour la topologie de Skorokhod et quand  $\varepsilon$  tend vers 0, vers un mouvement brownien de variance :*

$$(4.9) \quad \sigma^2 = \bar{\mathbb{E}}[(M_1)^2] = 2 \int \frac{1}{\lambda} de_f(\lambda).$$

De manière intéressante, l'égalité (4.8) relie  $\bar{\mathbb{E}}[(\xi_t)^2]$  et la mesure spectrale associée à  $f$ . Nous verrons comment tirer parti de cette information à la section 9.

La deuxième partie du théorème, concernant la convergence vers un mouvement brownien, est obtenue à l'aide d'un résultat général du type du théorème 4.1, et de l'ergodicité de l'environnement vu par la particule (proposition 3.1).

Dès que les conductances sont de carré intégrable, on a bien  $\mathfrak{d} \in L^2(\mathbb{P})$ . On peut montrer de plus [KV86, section 4] que la condition (4.6) est toujours vérifiée pour  $f = \mathfrak{d}$ . Le théorème 4.2 nous donne donc dans ce cas une décomposition de  $I_{\mathfrak{d}}(t)$  en  $M_t + \xi_t$ , qui se traduit en une décomposition de  $Z_t$  en

$$Z_t = N_t + M_t + \xi_t.$$

Sous la mesure  $\bar{\mathbb{P}}$ , il est facile de voir que  $(N_t + M_t)$  est une martingale à accroissements stationnaires. Le terme restant,  $\xi_t$ , est négligeable d'après (4.7)-(4.8). On admet ici que  $\bar{\mathbb{E}}[(N_1 + M_1)^2]$  est fini. On obtient alors :

THÉORÈME 4.3. *Dès que les conductances sont de carré intégrable, la marche aléatoire normalisée  $(\sqrt{\varepsilon} Z_{\varepsilon^{-1}t})_{t \geq 0}$  converge en loi sous  $\bar{\mathbb{P}}$ , quand  $\varepsilon$  tend vers 0, vers un mouvement brownien de variance  $\bar{\mathbb{E}}[(N_1 + M_1)^2]$ .*

*Remarque 4.4.* La méthode de [KV86] permet en réalité de montrer un résultat plus fort que le principe d'invariance en moyenne, à savoir que la loi de  $(\sqrt{\varepsilon}Z_{\varepsilon^{-1}t})_{t \geq 0}$  sous  $\mathbb{P}_0^\omega$  converge vers la loi d'un mouvement brownien, en  $\mathbb{P}$ -probabilité (voir [KV86, remarque 1.7] et [DFGW89, p. 798]).

Ce théorème a été renforcé par [DFGW89], qui montre qu'il suffit en réalité que les conductances soient intégrables pour que le résultat soit vrai (et la remarque 4.4 reste valable). Soulignons que, sous cette hypothèse, le résultat est obtenu pour toute mesure  $\mathbb{P}$  ergodique et invariante par translation.

Il y a cependant une différence qualitative importante entre le théorème 4.3 et le principe d'invariance vu à la section 2 (ou celui obtenu au début de cette section pour la marche en dimension 1). En effet, le théorème 4.3 établit une convergence en loi sous la mesure moyennée  $\bar{\mathbb{P}}$  (ou, suivant la remarque 4.4, une convergence en  $\mathbb{P}$ -probabilité). L'équivalent pour  $Z$  du résultat de la section 2 serait d'obtenir :

**CONJECTURE 4.5.** *Pour  $\mathbb{P}$ -presque tout environnement, la marche aléatoire normalisée  $(\sqrt{\varepsilon}Z_{\varepsilon^{-1}t})_{t \geq 0}$  converge en loi sous  $\mathbb{P}_0^\omega$ , quand  $\varepsilon$  tend vers 0, vers un mouvement brownien.*

Nous dirons que la marche aléatoire satisfait un principe d'invariance presque sûr dans ce cas ; un principe d'invariance en moyenne dans le cas d'un résultat du type du théorème 4.3.

Telle qu'elle est écrite, il est clair que la conjecture 4.5 est fautive sans hypothèses supplémentaires sur la loi de  $\mathbb{P}$ . En effet, nous verrons dans l'annexe A que l'on peut construire une loi  $\mathbb{P}$  invariante par translation et ergodique, telle que la marche aléatoire  $Z$  explose en temps fini. On est donc loin du résultat espéré !

Une première hypothèse naturelle serait de se placer dans le cas où l'on sait déjà que la marche aléatoire satisfait un principe d'invariance en moyenne, c'est-à-dire quand les conductances sont intégrables. En fait, même en supposant que les conductances sont uniformément bornées, il se pourrait que la conjecture soit fautive. Un argument allant dans ce sens est donné par [BP89], où les auteurs construisent un sous-graphe (déterministe) de  $\mathbb{Z}^2$  pour lequel la famille de processus  $(\sqrt{\varepsilon}Z_{\varepsilon^{-1}t})_{t \geq 0}$  n'est pas tendue. Il n'est cependant pas du tout clair de savoir s'il est possible de construire une mesure  $\mathbb{P}$  invariante par translation, et dont les réalisations typiques ressembleraient à ce sous-graphe déterministe. La question est donc toujours ouverte.

De la même façon, pour une fonction  $f \in L^2(\mathbb{P})$  satisfaisant la condition (4.6) (et en remplaçant éventuellement  $(\omega(s))$  par un processus réversible ergodique général), on peut se demander si le processus  $I_f$  satisfait ou non un principe d'invariance presque sûr. On peut voir qu'il suffirait de remplacer, dans la limite (4.7), la convergence en probabilité par une convergence presque sûre. Mais il n'est pas du tout clair que ce remplacement soit possible ! S'il l'était dans le cas où  $f = \mathfrak{d}$ , il donnerait un principe d'invariance presque sûr pour la marche aléatoire.

## 5. Principe d'invariance presque sûr

Dans cette section, nous présentons les différents résultats connus concernant le principe d'invariance presque sûr pour la marche aléatoire en conductances aléatoires.

Pour le problème analogue de la diffusion associée à un opérateur différentiel sous forme divergence (1.1), [Os83] montre que la condition d'ellipticité uniforme (1.5) est suffisante pour assurer un principe d'invariance presque sûr.

Nous supposons dans cette section que les conductances  $(\omega_e)_{e \in \mathbb{B}}$  sont des variables aléatoires indépendantes. Pour le cas où les conductances sont bornées inférieurement et supérieurement, [SS04] montre qu'un principe d'invariance est

vérifié, en utilisant une méthode proche de celle de [Ko85] ([Bo93] avait également obtenu ce résultat dans le cas de la dimension 2, en supposant seulement que la loi de l'environnement est invariante par translation et ergodique). [SS04] aborde également, par une méthode différente, le cas où l'environnement est un amas de percolation. Dans ce cas, les conductances  $\omega_e$  sont à valeurs dans  $\{0, 1\}$ . Si l'on note  $p = \mathbb{P}[\omega_e = 1]$ , il existe une valeur critique  $p_c$  telle que pour tout  $p > p_c$ , le sous-graphe ainsi défini contient une (unique) composante connexe infinie. Pour un tel  $p$ , on considère la marche partant de l'origine, dans l'environnement conditionné à ce que l'origine appartienne à la composante connexe infinie.

[SS04] montre que la marche sur cet amas de percolation satisfait un principe d'invariance dès que la dimension est au moins égale à 4. Nous allons dire quelques mots sur la méthode employée pour montrer ce résultat, car elle nous sera utile par la suite. Cette méthode a en fait été introduite par [BS02], dans le cadre de marches aléatoires en milieu aléatoire générales. Notons

$$Z^{(\varepsilon)}(t) = \sqrt{\varepsilon} Z_{\varepsilon^{-1}t}.$$

La méthode proposée utilise comme point de départ le fait que la marche satisfait un principe d'invariance en moyenne, c'est-à-dire sous la mesure  $\mathbb{P}\mathbb{P}_0^\omega$  (dans notre cas, ce résultat est donné par le théorème 4.3). Pour en déduire un principe d'invariance sous la mesure  $\mathbb{P}_0^\omega$  pour presque tout  $\omega$ , [BS02] proposent un argument de type concentration : il s'agit de voir que la loi de  $Z^{(\varepsilon)}$  sous  $\mathbb{P}_0^\omega$  se concentre autour de la loi de  $Z^{(\varepsilon)}$  sous  $\mathbb{P}\mathbb{P}_0^\omega$ , quand  $\varepsilon$  tend vers 0. Pour une fonction  $f \in L^2(\mathbb{P})$ , notons  $\text{Var}(f)$  la variance de  $f$  par rapport à la mesure  $\mathbb{P}$ , et notons  $D([0, t], \mathbb{R}^d)$  l'espace des fonctions cadlag de  $[0, t]$  dans  $\mathbb{R}^d$ . Le lemme suivant est tiré de [BS02, lemme 4.1].

**LEMME 5.1.** *Supposons que la marche aléatoire  $Z$  satisfait un principe d'invariance en moyenne. Si, pour tout  $t > 0$ , pour toute fonction lipschitzienne bornée  $F$  définie sur  $D([0, t], \mathbb{R}^d)$ , et pour tout  $\mu > 1$ , on a*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \text{Var} \left( \mathbf{E}_0^\omega \left[ F(Z^{(\mu^n)}) \right] \right) < +\infty,$$

*alors la marche aléatoire satisfait un principe d'invariance presque sûr.*

Le principe d'invariance presque sûr pour la marche aléatoire sur un amas de percolation a ensuite été généralisé à toute dimension  $d \geq 2$  par [BB07, MP07]. [BP07, Ma08] ont ensuite montré que la marche aléatoire en conductances aléatoires satisfait un principe d'invariance presque sûr dès que les conductances sont uniformément majorées (toujours sous l'hypothèse où les conductances sont indépendantes, et conditionnellement à ce que la marche appartienne à une composante connexe infinie du graphe). [BD09] montrent également un principe d'invariance presque sûr dans le cas où les conductances sont uniformément minorées.

## 6. Résultats quantitatifs

Tous les résultats que nous avons présentés sont seulement asymptotiques : la marche aléatoire normalisée  $Z^{(\varepsilon)}$  converge vers un mouvement brownien quand  $\varepsilon$  tend vers 0, mais nous n'avons pas d'information quantitative concernant cette convergence.

Il y a une raison simple à cela : les résultats précédents utilisent l'ergodicité de l'environnement vu par la particule, vue à la proposition 3.1. Naturellement, le théorème ergodique ne donne pas d'information sur la vitesse de la convergence à la limite.

Tant d'un point de vue pratique que théorique, il serait pourtant intéressant d'avoir une idée plus précise de cette vitesse de convergence. La même question se pose concernant les résultats d'homogénéisation des opérateurs différentiels décrits dans la section 1.

Pour un opérateur sous forme divergence (1.1) dont les coefficients sont périodiques, des estimées de vitesse de convergence sont connus (voir par exemple [JKO, section 2.6]). Il est possible d'en déduire par exemple un analogue du théorème de Berry-Esseen pour la diffusion associée [JKO, corollaire 2.9]. On peut en fait se ramener à étudier l'opérateur sur un domaine compact, avec conditions aux bords périodiques, et le temps d'atteinte de l'équilibre est déterminé par la première valeur propre non nulle de cet opérateur [Mo91, p. 151-152].

La situation est beaucoup moins claire pour les milieux aléatoires. Pour s'en convaincre, considérons des conductances indépendantes à valeurs dans  $\{0, 1\}$ , avec  $\mathbb{P}[\omega_\varepsilon = 1] = p$ . Lorsque  $p$  est inférieur à la probabilité critique  $p_c$ , les composantes connexes sont de taille finie. Cette taille caractéristique du milieu diverge lorsque  $p$  se rapproche de  $p_c$ . Même en prenant des conductances indépendantes, il est donc possible qu'apparaissent des structures de très grande échelle, ce qui pose un problème important pour obtenir des résultats d'homogénéisation quantitatifs (voir [Mo91, p.199-205] pour une discussion plus détaillée).

Considérant les différents exemples d'environnements donnés à la section I.1.1, il semble cependant que la présence d'arêtes de conductance élevée ne soit pas un obstacle à une homogénéisation rapide (contrairement aux arêtes de conductance très petite).

Il existe peu de résultats disponibles dans la littérature concernant ce problème, à l'exception notable de [Yu86]. Dans ce travail, l'auteur considère le problème de l'homogénéisation d'opérateurs différentiels sous forme divergence, sous une condition d'ellipticité uniforme (voir section 1). Il montre notamment que, dès que la dimension est au moins égale à 3, la différence entre  $u^{(\varepsilon)}$  solution de (1.3) et la solution  $u^\circ$  du problème homogénéisé (1.4) est telle que

$$\mathbb{E} \left[ \|u^{(\varepsilon)} - u^\circ\|_\infty \right] \leq C\varepsilon^\beta.$$

L'exposant  $\beta > 0$  n'est pas explicite, et dépend de la dimension, des constantes d'ellipticité de (1.5) (au travers d'une inégalité de Harnack), ainsi que d'une condition de mélange sur les coefficients aléatoires.

Un problème voisin est celui de trouver des méthodes numériques permettant d'estimer la matrice homogénéisée  $A^\circ$  d'un milieu aléatoire. Une méthode classique est de remplacer le milieu aléatoire  $\omega$  par un milieu périodique. Pour une période de taille  $\varepsilon^{-1}$ , on peut calculer efficacement la matrice homogénéisée associée au problème périodique, que l'on note  $A_\varepsilon(\omega)$ . La question est de savoir comment choisir  $\varepsilon$  pour assurer que  $A_\varepsilon(\omega)$  soit une bonne approximation de  $A^\circ$ .

Pour les opérateurs sous forme divergence satisfaisant une condition d'ellipticité uniforme, [BP04] utilise certains résultats de [Yu86] pour montrer que, si  $d \geq 3$ , alors il existe  $\beta > 0$  tel que

$$\mathbb{E} [\|A_\varepsilon(\omega) - A^\circ\|^2] \leq C\varepsilon^\beta,$$

où  $\beta$  n'est pas explicite, et dépend de la dimension, des constantes d'ellipticité, et d'une condition de mélange de l'environnement.

Concernant la marche aléatoire en conductances aléatoires, [CI03] et [Bo09] ont montré que, pour des conductances bornées inférieurement et supérieurement,  $A_\varepsilon(\omega)$  converge vers  $A^\circ$  presque sûrement quand  $\varepsilon$  tend vers 0, et donnent également des estimées de la variance de  $A_\varepsilon(\omega)$  pour  $\varepsilon$  fixé.

### 7. Vitesse de convergence à l'équilibre de l'environnement vu par la particule

Nous présentons ici les résultats démontrés au chapitre V. Pour une fonction  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , et pour  $t \geq 0$ , considérons :

$$f_t(\omega) = \mathbf{E}_0^\omega[f(\omega(t))].$$

La fonction  $f_t$  est l'image de  $f$  par le semi-groupe associé au processus de l'environnement vu par la particule. Pour un environnement  $\omega$  fixé,  $f_t(\omega)$  est une moyenne sur les différentes positions possibles au temps  $t$  de la marche aléatoire partant de l'origine.

Comme la mesure  $\mathbb{P}$  est invariante pour l'environnement vu par la particule, on a pour tout  $t > 0$  :

$$\mathbb{E}[f_t] = \mathbb{E}[f].$$

Nous souhaitons donner un résultat quantitatif de concentration pour  $f_t(\omega)$ , du type

$$f_t(\omega) \simeq \mathbb{E}[f] \quad (t \rightarrow +\infty).$$

En d'autres termes, nous souhaitons dire que, si  $t$  est grand, la loi de  $\omega(t)$  sous  $\mathbf{P}_0^\omega$  devient proche de la loi invariante  $\mathbb{P}$ .

Nous dirons que  $f$  est *centrée* si  $\mathbb{E}[f] = 0$ . Nous souhaitons trouver une fonctionnelle  $V$  et un exposant  $\beta$  tels que, pour toute fonction  $f$  centrée :

$$(7.1) \quad \mathbb{E}[(f_t)^2] \leq C \frac{V(f)}{t^\beta}.$$

Typiquement, il est souhaitable que la fonctionnelle  $V(f)$  soit finie pour des fonctions suffisamment régulières, par exemple pour des fonctions bornées et qui dépendent d'un nombre fini de conductances.

Nous avons vu au paragraphe I.1.1 l'effet de ralentissement que pouvaient avoir les arêtes de petite conductance. Pour cette raison, nous supposons que les conductances sont uniformément minorées :

$$(7.2) \quad \omega_e \geq 1.$$

Nous commençons par énoncer les résultats obtenus. Pour ce faire, notons  $B_n = \{-n, \dots, n\}^d$  la boîte de taille  $n$ . On définit, pour toute fonction  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$(7.3) \quad S_n(f) = \sum_{x \in B_n} f(\theta_x \omega),$$

et

$$(7.4) \quad \mathcal{N}(f) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{|B_n|} \mathbb{E} \left[ (S_n(f))^2 \right].$$

**THÉORÈME 7.1.** *Il existe une constante  $C > 0$  telle que, pour toute fonction  $f$  centrée, l'inégalité (7.1) est vérifiée avec  $V = \mathcal{N}$  et  $\beta = \min(d/2, 1)$  (et une correction logarithmique si  $d = 2$ ).*

Dans le cas où les conductances sont indépendantes,  $\mathcal{N}(f)$  est finie dès que  $f$  est de carré intégrable et dépend d'un nombre fini de conductances.

Il semble raisonnable de penser que l'exposant correct de (7.1) devrait être  $\beta = d/2$ . On peut montrer qu'il s'agit en effet du bon exposant dans le cas où l'on considère l'environnement vu par la marche aléatoire simple. L'exposant donné par le résultat précédent est donc peu satisfaisant quand la dimension devient grande.

Pour toute arête  $e \in \mathbb{B}$ , on définit

$$(7.5) \quad |\nabla f|(e) = \sup |f(\omega) - f(\omega')|,$$

où le supremum est pris sur l'ensemble des  $\omega, \omega'$  dans le support de  $\mathbb{P}$  et tels que  $\omega = \omega'$ , sauf sur l'arête  $e$ . On pose

$$(7.6) \quad \mathbb{||}f\mathbb{||} = \sum_{e \in \mathbb{B}^d} |\nabla f|(e),$$

et  $N(f) = \mathbb{||}f\mathbb{||}^2 + \|f\|_\infty^2$ .

**THÉOREME 7.2.** *Si les conductances sont indépendantes, alors il existe une constante  $C > 0$  telle que, pour toute fonction  $f$  centrée, l'inégalité (7.1) est vérifiée avec  $V = N$  et  $\beta = d/2 - 2$ .*

La fonctionnelle  $N(f)$  est finie dès que  $f$  est bornée et dépend d'un nombre fini de conductances.

## 8. Idées de preuve

**8.1. Inégalités de Nash.** A notre connaissance, les premiers résultats de convergence à l'équilibre à vitesse polynomiale d'un processus de Markov ont été obtenus pour des systèmes de particules en interaction [Li91, De94].

Il semble assez naturel de chercher à s'inspirer de techniques développées pour les systèmes de particules. En effet, le mouvement d'une particule marquée d'un système de particules peut être vu comme une marche aléatoire en milieu aléatoire. Reste une différence importante : l'environnement vu par cette particule marquée a une dynamique propre l'amenant vers l'équilibre. A l'inverse, l'environnement vu par la marche aléatoire en conductances aléatoires est statique, n'évoluant que par translation. On peut donc s'attendre à ce que la convergence vers l'équilibre soit plus difficile dans ce cas.

Nous nous basons sur la méthode générale présentée dans [Li91, théorème 2.2], qui consiste à établir une inégalité de Nash. Définissons la forme de Dirichlet associée au processus  $(\omega(t))_{t \geq 0}$  :

$$(8.1) \quad \mathcal{E}(f, f) = -\mathbb{E}[\mathcal{L}f(\omega)f(\omega)] = \frac{1}{2} \sum_{|z|=1} \mathbb{E}[\omega_{0,z}(f(\theta_z \omega) - f(\omega))^2].$$

**THÉOREME 8.1** ([Li91]). *Si, pour toute fonction  $f$  centrée, les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

$$(8.2) \quad \mathbb{E}[f^2]^{1+1/\beta} \leq C \mathcal{E}(f, f) V(f)^{1/\beta},$$

$$(8.3) \quad \text{la fonction } t \mapsto V(f_t) \text{ est décroissante,}$$

*alors il existe  $C > 0$  tel que pour toute fonction  $f$  centrée, l'inégalité (7.1) est vérifiée. Réciproquement, si l'inégalité (7.1) est vérifiée pour toute fonction  $f$  centrée, alors l'inégalité (8.2) l'est aussi.*

L'inégalité (8.2) est une *inégalité de Nash*. Cette famille d'inégalités a en effet été introduite par J. Nash [Na58]. Dans ce travail, l'auteur considère les équations différentielles paraboliques associées aux opérateurs elliptiques sous forme divergence (1.1). Pour obtenir une régularité de Hölder a priori sur les solutions, l'auteur étudie les solutions fondamentales de cette équation. Il obtient des bornes supérieures de type polynomial pour celles-ci, en utilisant une inégalité de la forme (8.2).

*Remarque 8.2.* Il est possible d'adapter cette technique au cas de la marche aléatoire en conductances aléatoires, et obtenir ainsi des bornes gaussiennes supérieures sur les probabilités de transition (voir section 11).

DÉMONSTRATION. Nous montrons seulement comment les conditions (8.2) et (8.3) impliquent la décroissance polynomiale (7.1). Pour une fonction  $f$  centrée, notons

$$u(t) = E[(f_t)^2].$$

On peut vérifier que

$$u'(t) = -2\mathcal{E}(f_t, f_t).$$

L'inégalité fonctionnelle (8.2) peut ainsi être vue comme une inégalité différentielle pour la fonction  $u$ . Cette inégalité différentielle traduit précisément la décroissance polynomiale d'exposant  $\beta$ . On a en effet, d'après (8.2) :

$$u(t)^{1+1/\beta} \leq -Cu'(t)V(f_t)^{1/\beta}.$$

En utilisant (8.3) et en réordonnant les termes, il vient

$$-\frac{u'(t)}{u(t)^{1+1/\beta}} \geq CV(f)^{-1/\beta}.$$

Après intégration (et en utilisant le fait que  $u(0) \geq 0$ ), on obtient

$$u(t)^{-1/\beta} \geq CV(f)^{-1/\beta} t,$$

ce qui est une réécriture de l'inégalité (7.1).  $\square$

Pour utiliser cette méthode, il reste donc à trouver une inégalité de Nash de la forme (8.2).

Si l'on considère la marche aléatoire restreinte à la boîte de taille  $n$ , alors la vitesse de convergence à l'équilibre est exponentiellement rapide, et le temps caractéristique d'atteinte de l'équilibre est donné par le trou spectral du générateur restreint à la boîte. Si l'on connaît bien l'asymptotique de ce trou spectral quand  $n$  tend vers l'infini, alors [BZ99] donne (à nouveau dans le contexte des systèmes de particules) une méthode générale permettant d'en déduire une inégalité de Nash.

Commençons par donner une estimée de trou spectral pour la marche aléatoire restreinte à  $B_n$ .

PROPOSITION 8.3. *Il existe une constante  $C > 0$  telle que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et pour toute fonction  $g : B_n \rightarrow \mathbb{R}$  :*

$$\sum_{x \in B_n} (g(x) - m_n(g))^2 \leq \frac{C}{4} n^2 \sum_{\substack{x, y \in B_n \\ x \sim y}} \omega_{x,y} (g(y) - g(x))^2,$$

où  $m_n(g)$  est donné par

$$m_n(g) = \frac{1}{|B_n|} \sum_{x \in B_n} g(x).$$

DÉMONSTRATION. Du fait de l'inégalité (7.2), il suffit en fait de montrer que l'inégalité est vraie en remplaçant les  $\omega_{x,y}$  par 1. On est ainsi ramenés à montrer une inégalité de trou spectral pour la marche aléatoire simple, qui est un résultat bien connu [SC97].  $\square$

*Remarque 8.4.* Par cette méthode analytique, nous avons montré dans un certain sens que, si deux environnements  $\omega, \omega'$  sont tels que  $\omega \leq \omega'$ , alors la marche aléatoire dans l'environnement  $\omega'$  converge vers l'équilibre plus rapidement que dans l'environnement  $\omega$ .

La méthode générale de [BZ99] permet de déduire de la proposition 8.3 le résultat suivant.

PROPOSITION 8.5. *Il existe  $C > 0$  tel que, pour toute fonction  $f$  centrée, l'inégalité de Nash suivante est vérifiée :*

$$(8.4) \quad \mathbb{E}[f^2]^{1+2/d} \leq C \mathcal{E}(f, f) \mathcal{N}(f)^{2/d}.$$

En d'autres termes, l'inégalité (8.2) est vérifiée avec  $V = \mathcal{N}$  et  $\beta = d/2$ . La seule obstruction restante pour en déduire l'inégalité (7.1) est la condition (8.3), à savoir une condition de contractivité de  $\mathcal{N}$  le long du semi-groupe.

Dans le cas de systèmes de particules, cette propriété est en général obtenue en utilisant une propriété de monotonie du modèle, qui n'a pas son équivalent dans le cas qui nous intéresse ici. En fait, il est possible de trouver une fonction  $f$  telle que  $t \mapsto \mathcal{N}(f_t)$  n'est pas décroissante.

Pour contourner ce problème, nous proposons deux méthodes différentes, que nous présentons dans les deux paragraphes suivants. Elles mènent, respectivement, aux théorèmes 7.1 et 7.2.

**8.2. Comparaison avec la marche aléatoire simple.** La première méthode consiste à utiliser une technique de comparaison analytique similaire à celle discutée à la remarque 8.4. Notons  $(Z_t^\circ)_{t \geq 0}$  la marche aléatoire simple. On définit l'environnement vu par cette marche :

$$\omega^\circ(t) = \theta_{Z_t^\circ} \omega,$$

et pour toute fonction  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , l'image de  $f$  par le semi-groupe associé à ce processus :

$$f_t^\circ(\omega) = \mathbf{E}_0^\omega[f(\omega^\circ(t))].$$

La forme de Dirichlet correspondante est donnée par

$$\mathcal{E}^\circ(f, f) = \frac{1}{2} \sum_{|z|=1} \mathbb{E}[(f(\theta_z \omega) - f(\omega))^2].$$

Remarquons que cette forme de Dirichlet peut être comparée à celle de l'environnement vu par la marche  $Z$  définie en (8.1) : du fait de l'hypothèse  $\omega_e \geq 1$ , il vient

$$(8.5) \quad \mathcal{E}^\circ(f, f) \leq \mathcal{E}(f, f).$$

Vue la démonstration des propositions 8.3 et 8.5, il est clair que l'inégalité de Nash (8.4) est encore vérifiée si l'on remplace  $\mathcal{E}$  par  $\mathcal{E}^\circ$ . La propriété cruciale de l'environnement vu par la marche simple est la suivante.

PROPOSITION 8.6. *Pour l'environnement vu par la marche simple, la condition de contractivité (8.3) est vérifiée, autrement dit la fonction*

$$t \mapsto \mathcal{N}(f_t^\circ)$$

*est décroissante.*

DÉMONSTRATION. Considérant la définition de  $\mathcal{N}$  (7.4), il suffit de montrer que, pour tout  $n$ , la fonction

$$(8.6) \quad t \mapsto \mathbb{E}[S_n(f_t^\circ)^2]$$

est décroissante. Admettons temporairement la relation suivante :

$$(8.7) \quad S_n(f_t^\circ) = (S_n(f))_t^\circ.$$

En utilisant cette propriété, il vient alors directement que la dérivée de la fonction apparaissant en (8.6) est égale à

$$-2 \mathcal{E}^\circ(S_n(f)_t^\circ, S_n(f)_t^\circ) \leq 0.$$

Il reste à voir que l'égalité (8.7) est vraie. Cette propriété vient du fait que, pour la marche simple, l'évolution temporelle et les translations spatiales commutent. En effet, en utilisant la définition de  $S_n(f)$  donnée en (7.3), il vient :

$$(S_n(f))_t^\circ = \sum_{x \in B_n} \mathbf{E}_0^\omega [f(\theta_{x+Z_t^\circ} \omega)],$$

tandis qu'un rapide calcul montre que

$$(8.8) \quad S_n(f_t^\circ) = \sum_{x \in B_n} \mathbf{E}_x^\omega [f(\theta_{Z_t^\circ} \omega)].$$

Ces deux quantités sont bien égales (et ne le seraient pas si la marche aléatoire simple était remplacée par  $Z_t$ ).  $\square$

En utilisant le théorème 8.1, l'inégalité de Nash et la proposition 8.6 entraînent immédiatement qu'il existe  $C > 0$  tel que pour toute fonction  $f$  centrée :

$$(8.9) \quad \mathbb{E}[(f_t^\circ)^2] \leq C \frac{\mathcal{N}(f)}{t^{d/2}}.$$

Il reste à voir comment obtenir de ce résultat une inégalité concernant  $f_t$  au lieu de  $f_t^\circ$ . Nous utilisons pour cela les résolvantes associées aux processus. Rappelons que nous notons  $\mathcal{L}$  le générateur de  $(\omega(t))_{t \geq 0}$ , défini en (3.2). Nous notons  $\mathcal{L}^\circ$  le générateur associé  $(\omega^\circ(t))_{t \geq 0}$ .

Pour un paramètre  $\mu > 0$ , nous définissons la résolvante par :

$$R_\mu f = (-\mathcal{L} + \mu)^{-1} f,$$

et de même,  $R_\mu^\circ$  pour la résolvante associée à  $\mathcal{L}^\circ$ . Les résolvantes ont deux propriétés intéressantes pour notre problème.

PROPOSITION 8.7. *On a l'égalité*

$$(8.10) \quad (R_\mu f, f) = \int_0^{+\infty} e^{-\mu t} \mathbb{E}[(f_{t/2})^2] dt.$$

L'égalité reste vraie si l'on remplace  $R_\mu$  par  $R_\mu^\circ$  et  $f_{t/2}$  par  $f_{t/2}^\circ$ . On a de plus :

$$(8.11) \quad (R_\mu f, f) \leq (R_\mu^\circ f, f).$$

PREUVE RAPIDE. Rappelons que l'on note  $e_f$  la mesure spectrale de l'opérateur  $-\mathcal{L}$  projeté sur la fonction  $f$ , voir (4.5). Par la propriété de semi-groupe, on a l'égalité

$$(8.12) \quad \mathbb{E}[(f_{t/2})^2] = \int e^{-\lambda t} de_f(\lambda).$$

On obtient l'égalité (8.10) en utilisant le théorème de Fubini. La comparaison des résolvantes (8.11) est une conséquence classique de la comparaison des formes de Dirichlet donnée par (8.5).  $\square$

Cette proposition nous permet donc d'assurer que, pour tout  $\mu > 0$  :

$$\int_0^{+\infty} e^{-\mu t} \mathbb{E}[(f_{t/2})^2] dt \leq \int_0^{+\infty} e^{-\mu t} \mathbb{E}[(f_{t/2}^\circ)^2] dt,$$

et, en utilisant (8.9), nous obtenons le théorème 7.1. Remarquons que, dès que  $\mathbb{E}[(f_{t/2}^\circ)^2]$  est intégrable (c'est-à-dire dès que  $d \geq 3$ ), nous apprenons que

$$(8.13) \quad \int_0^{+\infty} \mathbb{E}[(f_{t/2})^2] dt < +\infty,$$

mais, du fait même de la méthode utilisée, il n'est pas possible d'obtenir davantage.

*Remarque 8.8.* Pour  $\mu > 0$ , notons

$$f_\mu(\lambda) = \frac{1}{\lambda + \mu}.$$

La méthode que nous avons utilisée est basée sur le fait suivant : si deux opérateurs auto-adjoints positifs  $L_1$  et  $L_2$  sont tels que

$$L_1 \leq L_2$$

(au sens où  $L_2 - L_1$  est un opérateur positif), alors

$$f_\mu(L_1) \geq f_\mu(L_2).$$

Les fonctions qui satisfont cette propriété sont appelées *fonctions matricielles monotones* (décroissantes). Cette notion a été introduite dans [Lö34], où il est montré qu'il n'y a essentiellement pas d'autre fonction matricielle monotone que les  $(f_\mu)$  (voir également [Do, chapitre IX]).

**8.3. Décomposition en martingale.** La seconde méthode que nous proposons pour résoudre le problème de l'absence de contractivité, et pour améliorer le résultat vu au paragraphe précédent en grande dimension, consiste à chercher une majoration de  $\mathcal{N}(f_t)$ .

Vue la preuve de la proposition 8.1, si la majoration obtenue est du type  $\mathcal{N}(f_t) \leq t^\gamma$ , nous obtiendrions la décroissance polynomiale de la variance (7.1) pour l'exposant  $\beta = d/2 - \gamma$ . Rappelons que la définition de  $\|f\|$  a été donnée en (7.6).

**PROPOSITION 8.9.** *Si les conductances sont indépendantes, alors il existe  $c \geq 0$  tel que pour toute fonction  $f$  centrée et bornée et pour tout  $t \geq 0$  :*

$$\mathcal{N}(f_t) \leq c\|f\|_\infty^2(1+t)^2 + 2\|f\|^2.$$

**IDÉE DE PREUVE.** Vue la définition de  $\mathcal{N}$ , il suffit de montrer que, pour tout entier  $n$  :

$$(8.14) \quad \mathbb{E}[S_n(f_t)^2] \leq c\|f\|_\infty^2(1+t)^2|B_n| + 2\|f\|^2|B_n|.$$

L'idée est de décomposer  $S_n(f_t)$  en la somme d'incrémentes d'une martingale. Pour une énumération arbitraire des arêtes  $\mathbb{B}^d = (e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ , définissons  $\mathcal{F}_k$  la tribu engendrée par  $(\omega_{e_0}, \dots, \omega_{e_k})$ . Pour tout  $t \geq 0$ , on considère la martingale  $M_k(t) = \mathbb{E}[S_n(f_t) | \mathcal{F}_k]$ , ainsi que ces incréments  $\Delta_k(t) = M_k(t) - M_{k-1}(t)$ . Il est clair que  $S_n(f_t)$  est la limite de la martingale  $M_k(t)$  quand  $k$  tend vers l'infini, ce que nous pouvons réécrire sous la forme

$$S_n(f_t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \Delta_k(t).$$

Du fait de l'orthogonalité des accroissements de la martingale, il vient :

$$\mathbb{E}[S_n(f_t)^2] = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{E}[\Delta_k(t)^2].$$

Le problème revient donc à évaluer la contribution des termes de cette somme. En utilisant la relation (8.8) (où les « ° » sont enlevés), on peut réécrire  $\Delta_k(t)$  comme

$$\Delta_k(t) = \sum_{x \in B_n} \mathbb{E}[\mathbb{E}_x^\omega[f(\theta_{Z_t} \omega)] | \mathcal{F}_k] - \mathbb{E}[\mathbb{E}_x^\omega[f(\theta_{Z_t} \omega)] | \mathcal{F}_{k-1}].$$

De manière un peu grossière, il s'agit donc de comparer  $\mathbb{E}_x^\omega[f(\theta_{Z_t} \omega)]$ , calculé pour deux environnements  $\omega$  et  $\omega'$  qui diffèrent seulement au niveau de l'arête  $e_k$ . Cette différence peut avoir deux causes :

- (1) la marche visite l'arête  $e_k$ . Nous majorons la différence obtenue dans ce cas par

$$(8.15) \quad 2\|f\|_\infty \sum_{x \in B_n} \mathbf{P}_x^\omega[\{Z_s, s \leq t\} \cap \mathcal{V}(e_k) \neq \emptyset],$$

où l'ensemble  $\mathcal{V}(e_k)$  désigne les extrémités de l'arête  $e_k$ .

- (2) la marche ne visite pas l'arête  $e_k$ , mais il apparaît une différence au moment du calcul entre  $f(\theta_{Z_t}, \omega)$  et  $f(\theta_{Z_t}, \omega')$ .

Cette décomposition se retrouve dans la forme de la majoration (8.14) comme somme de deux termes. Nous admettons que le deuxième point donne une contribution finale en  $2\|f\|^2$ , et nous concentrons sur (8.15) et le premier terme de la majoration (8.14).

Nous avons à estimer la probabilité que la marche visite une extrémité de l'arête  $e_k$ . Il est plus commode de remplacer cette probabilité par le temps total passé sur l'ensemble  $\mathcal{V}(e_k)$ , ce qui permet de remplacer (8.15) par (aux constantes près)

$$(8.16) \quad \Delta'_k(t) = \sum_{x \in B_n} \int_0^{t+1} \mathbf{P}_x^\omega[Z_s \in \mathcal{V}(e_k)] ds.$$

Le passage de (8.15) à (8.16) n'est pas entièrement rigoureux, mais voyons d'abord comment terminer la preuve à partir de (8.16).

En utilisant la réversibilité de la marche aléatoire, il vient :

$$\Delta'_k(t) \leq \sum_{y \in \mathcal{V}(e_k)} \int_0^{t+1} \mathbf{P}_x^\omega[Z_s \in B_n] ds \leq 2(t+1).$$

On en déduit, en majorant une fois par  $2(t+1)$ , et en réutilisant (8.16) :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{E}[\Delta'_k(t)^2] \leq 2(t+1) \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{x \in B_n} \int_0^{t+1} \mathbb{E} \mathbf{P}_x^\omega[Z_s \in \mathcal{V}(e_k)] ds.$$

Chaque site est l'extrémité de  $2d$  arêtes, et donc, quel que soit  $z \in \mathbb{Z}^d$  :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{1}_{\{z \in \mathcal{V}(e_k)\}} = 2d.$$

On obtient finalement :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{E}[\Delta'_k(t)^2] \leq 4d(t+1)^2 |B_n|,$$

ce qui donne le premier terme de la majoration (8.14).

Il reste à discuter du passage de (8.15) à (8.16). Ce passage peut être justifié si les conductances sont bornées supérieurement, mais nous ne faisons pas cette hypothèse ici. Le problème est que, si les conductances sont grandes, il se pourrait que la marche aléatoire visite effectivement une des extrémités de l'arête  $e_k$ , mais s'en échappe très rapidement. Le temps passé sur l'ensemble  $\mathcal{V}(e_k)$  serait alors trop petit pour être comparé à la probabilité de toucher cet ensemble.

Nous construisons donc un ensemble un peu plus grand que  $\mathcal{V}(e_k)$ , que nous notons  $\bar{\mathcal{V}}_\omega(e_k)$ . Cet ensemble est construit de telle manière que la marche ne le quitte pas trop rapidement. Plus précisément, pour un paramètre  $\eta > 0$  assez grand, l'ensemble  $\bar{\mathcal{V}}_\omega(e_k)$  est tel que, pour tous les points du bord intérieur de l'ensemble, le taux de saut total est majoré par  $\eta$ . Cela permet, à constante près,

de majorer (8.15) par

$$\sum_{x \in B_n} \int_0^{t+1} \mathbf{P}_x^\omega [Z_s \in \bar{V}_\omega(e_k)] ds$$

(au lieu de (8.16)). De plus si  $\eta$  est choisi suffisamment grand, les ensembles  $\bar{V}_\omega(e_k)$  sont suffisamment petits, et le raisonnement précédent reste valide, ce qui démontre la proposition.  $\square$

En utilisant cette proposition et en reprenant la preuve de la proposition 8.1, nous obtenons le théorème 7.2.

Le théorème 7.2 présente l'intérêt d'améliorer l'exposant de décroissance par rapport au théorème 7.1. Cependant, une condition nécessaire pour utiliser le résultat est d'assurer que  $\|f\|$  est finie, une condition qui peut être parfois trop restrictive. Nous proposons donc un résultat supplémentaire, pour une classe particulière de fonctions de l'environnement.

Considérons la preuve de la proposition 8.9, et plus précisément la dichotomie entre (8.15) et la partie majorée par  $2\|f\|^2$ . Nous souhaitons considérer une classe de fonctions pour lesquelles cette deuxième contribution disparaît.

Pour un  $s \geq 0$ , nous disons qu'une fonction  $g(Z, \omega)$  ne dépend que de la trajectoire jusqu'au temps  $s$  s'il est possible de l'écrire comme une fonction des sites visités jusqu'au temps  $s$ , ainsi que des conductances adjacentes à ces sites, ou plus précisément s'il est possible d'écrire  $g(Z, \omega)$  comme

$$g((Z_u)_{u \leq s}, (\omega_{Z_u+e})_{u \leq s}),$$

où  $e$  est entendu comme variant dans l'ensemble des arêtes adjacentes à l'origine. Nous disons que  $g$  est *invariante par translation* si de plus, pour tout  $x \in \mathbb{Z}^d$  :

$$g((x + Z_u)_{u \leq s}, (\omega_{Z_u+e})_{u \leq s}) = g((Z_u)_{u \leq s}, (\omega_{Z_u+e})_{u \leq s}).$$

Pour une telle fonction, on note

$$g(t) = g((Z_u)_{t \leq u \leq t+s}, (\omega_{Z_u+e})_{t \leq u \leq t+s}).$$

Les fonctions que nous souhaitons considérer sont de la forme

$$f(\omega) = \mathbf{E}_0^\omega [g(Z, \omega)],$$

où  $g$  est une fonction qui ne dépend que de la trajectoire jusqu'au temps  $s$ , et invariante par translation. On peut vérifier la relation suivante :

$$(8.17) \quad f_t(\omega) = \mathbf{E}_0^\omega [g(t)].$$

Si nous reprenons la preuve de la proposition 8.9 avec une telle fonction, alors nous pouvons faire la nouvelle dichotomie suivante :

- (1) soit la marche aléatoire touche l'arête  $e_k$  avant l'instant  $t+s$ , ce qui donne une majoration finale en  $(t+s)^2$ ,
- (2) soit la marche ne touche pas l'arête  $e_k$  avant l'instant  $t+s$ . Dans ce cas, comme la fonction  $g(t)$  ne dépend que de la trajectoire jusqu'au temps  $t+s$ , la contribution est nulle.

Au prix d'un changement de  $t$  en  $t+s$  pour la première partie, la contribution du second terme disparaît donc complètement. Nous obtenons ainsi le résultat suivant (rappelons que nous écrivons  $\text{Var}(f)$  pour la variance de la fonction  $f$  par rapport à la mesure  $\mathbb{P}$ ).

**PROPOSITION 8.10.** *Si les conductances sont indépendantes et si  $d \geq 5$ , alors il existe une constante  $C > 0$  telle que, pour toute fonction  $g$  qui ne dépend que de*

la trajectoire jusqu'au temps  $s$  et est invariante par translation, pour  $f(\omega) = \mathbb{E}_0^\omega\{g\}$ , on a :

$$\text{Var}(f_t) \leq C \|g\|_\infty^2 \frac{(s+t)^2}{t^{d/2}}.$$

### 9. Vitesse de convergence du déplacement quadratique moyen

Nous présentons maintenant quelques conséquences des résultats obtenus. Nous aurons besoin à plusieurs reprises de la proposition 8.10 au chapitre IV, pour établir la limite d'échelle presque sûre de la marche aléatoire en pièges aléatoires.

Dans cette section, en utilisant le théorème 7.2 et sous l'hypothèse additionnelle que les conductances sont majorées, nous donnons une estimée de la vitesse de convergence du déplacement quadratique moyen de la marche aléatoire.

Il est possible de voir les résultats de décroissance de la variance donnés par les théorèmes 7.1 et 7.2 comme des résultats de décorrélation de l'environnement vu par la particule. Observons en effet que

$$\mathbb{E}[(f_t)^2] = \mathbb{E}[f(\omega)f_{2t}(\omega)] = \overline{\mathbb{E}}[f(\omega(0))f(\omega(2t))].$$

Ce contrôle des corrélations permet d'obtenir un principe d'invariance pour  $I_f$  introduit en (4.4), et dont nous rappelons la définition ici :

$$I_f(t) = \int_0^t f(\omega(s)) ds.$$

Pour le voir, nous allons utiliser le théorème 4.2. Commençons par rappeler la relation vue en (8.12), reliant la variance de  $f_t$  et la mesure spectrale  $e_f$  :

$$(9.1) \quad \mathbb{E}[(f_t)^2] = \int e^{-2\lambda t} de_f(\lambda).$$

Pour une fonction  $f$  centrée, dès que  $\mathcal{N}(f)$  est finie et  $d \geq 3$ , nous avons vu en (8.13) que

$$(9.2) \quad \int_0^{+\infty} \mathbb{E}[(f_{t/2})^2] dt < +\infty.$$

En utilisant (9.1) et le théorème de Fubini, nous obtenons :

$$(9.3) \quad \int \frac{1}{\lambda} de_f(\lambda) < +\infty.$$

Il s'agit justement de la condition (4.6) du théorème 4.2. Nous obtenons donc le résultat suivant.

**PROPOSITION 9.1.** *Pour une fonction  $f$  centrée, si  $d \geq 3$  et  $\mathcal{N}(f)$  est finie, alors  $I_f$  satisfait un principe d'invariance en moyenne.*

Nous avons en fait, dans certains cas, une information plus subtile que (9.2), donnée par le théorème 7.2. Nous devrions donc pouvoir en déduire des informations supplémentaires sur le comportement de la mesure spectrale près de 0.

**PROPOSITION 9.2.** *Soit  $\beta > 1$  et  $f \in L^2(\mathbb{P})$ . Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(1) *Il existe  $C > 0$  tel que pour tout  $t > 0$ ,*

$$\mathbb{E}[(f_t)^2] \leq \frac{C}{t^\beta}.$$

(2) *Il existe  $C > 0$  tel que, pour tout  $\delta > 0$ ,*

$$(9.4) \quad \int_{[0,\delta]} \frac{1}{\lambda} de_f(\lambda) \leq C\delta^{\beta-1}.$$

Dans le théorème 4.2,  $I_f(t)$  est décomposé en la somme d'une martingale  $M_t$  et d'un terme correctif  $\xi_t$ , qui satisfait :

$$(9.5) \quad \frac{1}{t} \overline{\mathbb{E}}[(\xi_t)^2] = 2 \int \frac{1 - e^{-\lambda t}}{\lambda^2 t} de_f(\lambda).$$

Cette quantité tend vers 0 dès que (9.3) est vérifiée. Dans le cas où nous avons l'information plus précise (9.4), il est possible de donner une estimée quantitative de cette convergence. Pour tout  $\beta > 1$ , soit  $\psi_\beta : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  tel que

$$\psi_\beta(t) = \begin{cases} t^{\beta-1} & \text{si } \beta < 2 \\ t/(\ln_+(t)) & \text{si } \beta = 2 \\ t & \text{si } \beta > 2. \end{cases}$$

En montrant que le terme (9.5) est majoré par  $C/\psi_\beta(t)$  quand la condition (9.4) est vérifiée, nous obtenons le résultat suivant.

**PROPOSITION 9.3.** *Sous l'une des conditions équivalentes donnés à la proposition 9.2, il existe une constante  $C > 0$  telle que*

$$0 \leq \sigma^2 - \frac{1}{t} \overline{\mathbb{E}} [I_f(t)^2] \leq \frac{C}{\psi_\beta(t)},$$

où  $\sigma$  est défini par (4.9), à savoir :

$$\sigma^2 = 2 \int \frac{1}{\lambda} de_f(\lambda).$$

Par ailleurs, le théorème 7.2 nous donne une condition suffisante pour que ce résultat s'applique effectivement : il suffit d'avoir  $N(f)$  finie, et  $d \geq 7$ .

Pour obtenir un résultat similaire concernant le déplacement quadratique moyen de la marche, on peut utiliser la décomposition en martingale vu en (4.3). Cette décomposition fait intervenir  $I_\partial$ , où  $\partial$  est la dérive locale :

$$\partial(\omega) = \sum_{|z|=1} \omega_{0,z} z.$$

Pour pouvoir utiliser le résultat précédent, il est nécessaire d'avoir  $N(\partial)$  finie. Cette condition n'est vérifiée que si les conductances sont uniformément majorées (il faut en effet que la fonction  $\partial$  soit bornée). Rappelons que sous cette hypothèse, la marche aléatoire  $Z$  satisfait un principe d'invariance presque sûr. Notons  $\bar{\sigma}^2$  la variance du mouvement brownien obtenu à la limite. On a alors le résultat suivant.

**PROPOSITION 9.4.** *Si les conductances sont indépendantes et majorées, et si  $d \geq 7$ , alors il existe  $C > 0$  tel que*

$$0 \leq \frac{1}{t} \overline{\mathbb{E}} [\|X_t\|_2^2] - d\bar{\sigma}^2 \leq \frac{C}{\psi_\beta(t)}, \quad \text{avec } \beta = \frac{d}{2} - 2.$$

*Remarque 9.5.* Ce résultat peut être amélioré quand  $d \leq 8$  en utilisant les résultats récents de [GO10]. Nous renvoyons le lecteur à la section V.9, et en particulier au corollaire V.9.3, pour plus de détails.

## 10. Questions ouvertes

Les estimées données par les théorèmes 7.1 et 7.2 ne sont vraisemblablement pas optimales, et un premier problème important est d'améliorer ces résultats. Aussi, alors que ces résultats sont obtenus dès que les conductances sont minorées, nous avons eu besoin de supposer que les conductances étaient de plus majorées pour obtenir la proposition 9.4, une hypothèse probablement superflue.

Nous avons présenté à la section 6 le problème de l'estimation de la matrice homogénéisée. Est-il possible d'utiliser les résultats que nous venons de voir pour

donner une procédure d'estimation de cette matrice, avec un contrôle explicite de l'erreur commise ? Ou de majorer la différence entre celle-ci et la matrice de diffusion du problème périodisé par une fonction polynomiale, avec un exposant explicite ?

### 11. Estimées des probabilités de transition

Pour terminer ce chapitre, nous présentons quelques résultats connus donnant des bornes inférieures ou supérieures sur les probabilités de transition de la marche aléatoire  $Z$ . La question que nous souhaitons mentionner est de savoir si les probabilités de transition sont « de type gaussien », c'est-à-dire si, de manière vague,

$$(11.1) \quad \mathbf{P}_x^\omega[Z_t = y] \simeq \frac{C_1}{t^{d/2}} \exp\left(-\frac{\|y - x\|^2}{C_2 t}\right).$$

Il n'est en fait pas très difficile d'obtenir des bornes supérieures de type gaussien dans le cas où les conductances sont uniformément minorées. En effet, la forme de Dirichlet associée à  $Z$  est minorée par celle de la marche aléatoire simple. Une inégalité de Nash est connue pour la marche aléatoire simple, ce qui donne donc directement une inégalité de Nash pour la marche aléatoire en conductances aléatoires (avec, cette fois, une norme contractive). L'inégalité de Nash implique [CKS87, théorème 2.1]

$$(11.2) \quad \sup_{x,y} \mathbf{P}_x^\omega[Z_t = y] \leq \frac{C}{t^{d/2}}.$$

Un argument classique dû à [Da87] permet d'obtenir, presque « automatiquement », le terme exponentiel manquant, comme il est possible de le voir en suivant l'argument donné par [CKS87, section 3]. Considérant des marches aléatoires à temps discret, et en supposant que les taux de saut vérifient une condition d'ellipticité, [HS93] utilisent cette procédure pour montrer une borne supérieure de type gaussien sur les probabilités de transition (voir également [Wo, théorème 14.12]), et obtiennent également la borne inférieure correspondante.

Dans [BD09], les auteurs obtiennent effectivement des bornes supérieures de type gaussien pour  $Z$  (c'est-à-dire pour une marche aléatoire en temps continu dont les taux de saut sont supposés être minorés, mais pas nécessairement majorés). De manière remarquable, ils obtiennent également des bornes inférieures comparables. De ces estimées, ils en déduisent une inégalité de Harnack, qui implique à son tour un théorème central limite local presque sûr, et également un contrôle asymptotique précis de la fonction de Green de la marche aléatoire. Si  $G^\omega(x, y)$  est la fonction de Green de la marche aléatoire, ils montrent notamment que, pour  $d \geq 3$ , il existe une constante  $C > 0$  telle que, pour presque tout  $\omega$ ,

$$(11.3) \quad \|x\|^{d-2} G^\omega(0, x) \xrightarrow{\|x\| \rightarrow +\infty} C.$$

Le problème est assez différent si l'on suppose que les conductances sont bornées supérieurement, mais pas inférieurement. Pour la marche aléatoire sur un amas de percolation, [MR04] ont montré un résultat du type (11.2), en étudiant le profil isopérimétrique des amas. [Ba04] donne des estimées inférieures et supérieures de type gaussien pour la marche aléatoire, en utilisant notamment, comme dans [MR04], une famille d'inégalités de Poincaré. Soulignons que les preuves de principe d'invariance presque sûr que nous avons mentionnés à la section 5 utilisent ces résultats.

La marche aléatoire sur un amas de percolation peut être vue comme une marche aléatoire pour laquelle les conductances sont uniformément minorées, mais où le graphe est aléatoire. Lorsque les conductances peuvent prendre des valeurs arbitrairement proches de 0, le comportement change radicalement. [FM06] considèrent des conductances dont la loi près de 0 est de type polynomial. Pour certains

exposants, ils montrent que le comportement asymptotique du trou spectral de la dynamique restreinte à une boîte de taille  $n$  a un comportement anormal (voir le théorème III.4.3), ce qui rend impossible l'approche utilisée dans [MR04, Ba04], et suggère l'absence de bornes gaussiennes supérieures. En dimension au moins égale à 5, [BBHK08] montrent en effet que (11.2) n'est plus vérifié si la loi des conductances est suffisamment lourde près de 0. Ce résultat est étendu à des lois de type polynomial par [Bo09].

## Marche aléatoire en pièges aléatoires sur des graphes finis

### 1. Dynamique symétrique sur le graphe complet

Nous passons maintenant à l'étude de la marche aléatoire en pièges aléatoires, définie au paragraphe I.1.2. Pour commencer la présentation de quelques résultats mathématiques importants, nous nous intéressons au cas simple, mais déjà intéressant, de la dynamique symétrique sur le graphe complet (c'est-à-dire que l'on suppose  $\alpha = 0$  dans la définition des taux de saut donnée en (I.1.4)).

Soit  $\mathcal{X}_n = \{1, \dots, n\}$ , que l'on munit de la structure du graphe complet en posant que tout couple  $(x, y) \in (\mathcal{X}_n)^2$  est une arête. On se donne également une famille  $\tau = (\tau_x)_{x \in \mathbb{N}^*}$ , qui définit un environnement sur tous les graphes  $\mathcal{X}_n$  par restriction. Cette famille  $\tau$  est une variable aléatoire, dont la loi  $\mathbb{P}$  vérifie les hypothèses du paragraphe I.2.4. Nous supposons de plus que le paramètre  $\alpha$  est dans  $(0, 1)$ . Au vu de la définition de la dynamique symétrique, le taux de saut total depuis un point  $x$  est  $(\tau_x)^{-1}$  multiplié par le nombre de voisins du site  $x$ , c'est-à-dire  $n$ . Nous préférons ici (et seulement pour la dynamique sur le graphe complet) redéfinir le taux de saut total comme étant égal à  $(\tau_x)^{-1}$ . On note  $(X_t^{(n)})_{t \geq 0}$  la marche aléatoire sur  $\mathcal{X}_n$  ainsi définie, dont on note  $\mathbf{P}_x^r$  la loi partant de  $x$ .

La marche à temps discret associée à  $(X_t^{(n)})_{t \geq 0}$ , que l'on note  $(Y_k^{(n)})_{k \in \mathbb{N}^*}$ , a une structure particulièrement simple. En effet, les  $(Y_k^{(n)})_{k \in \mathbb{N}^*}$  sont des variables aléatoires indépendantes, et de loi uniforme sur  $\mathcal{X}_n$ . Notons  $S_k^{(n)}$  l'instant du  $k^{\text{ème}}$  saut de la marche  $(X_t^{(n)})_{t \geq 0}$ . Le  $i^{\text{ème}}$  site visité par la marche est  $Y_i^{(n)}$ , sur lequel la marche reste un temps exponentiel d'espérance  $\tau_{Y_i^{(n)}}$ . On peut donc écrire  $S_k^{(n)}$  comme

$$S_k^{(n)} = \sum_{i=1}^k e_i \tau_{Y_i^{(n)}},$$

où les  $(e_i)_{i \geq 1}$  sont des variables exponentielles indépendantes de paramètre 1. Plutôt qu'à la fonction de vieillissement définie en (I.3.3), on s'intéresse à l'événement « la marche ne fait aucun saut pendant l'intervalle de temps  $[t_w, t_w + t]$  », autrement dit

$$\forall s \in [t_w, t_w + t], \quad X_s^{(n)} = X_{t_w}^{(n)}.$$

Cet événement peut être reformulé comme étant le fait qu'aucun des  $(S_k^{(n)})_{k \geq 1}$  n'intersecte l'intervalle  $[t_w, t_w + t]$ . L'égalité de ces deux événements n'est en réalité pas tout à fait exacte, car il se pourrait que la marche fasse un « saut » qui consiste à retourner au même site, chaque sommet étant muni d'une arête pointant vers lui-même. Cet événement est cependant très peu probable quand  $n$  devient grand, et nous allons donc considérer

$$(1.1) \quad \Pi_n(t_w, t_w + t) = \mathbf{P}_x^r \left[ \{S_k^{(n)}, k \in \mathbb{N}^*\} \cap [t_w, t_w + t] = \emptyset \right].$$

Pour  $\alpha \in (0, 1)$ , on définit la loi de l'arcsinus de paramètre  $\alpha$  :

$$(1.2) \quad \text{As}_\alpha(u) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi} \int_0^u u^{\alpha-1}(1-u)^{-\alpha} du \quad (u \in [0, 1]).$$

Remarquons que  $\text{As}_\alpha(0) = 0$ , et  $\text{As}_\alpha(1) = 1$ . Enfin, pour  $\kappa > 0$ , on note  $\mathcal{S}_{\kappa,n}(s) = n^{-\kappa/\alpha} S_{\lfloor sn^\kappa \rfloor}^{(n)}$ .

**THÉORÈME 1.1.** *On suppose  $\alpha \in (0, 1)$ . Alors, pour tout  $\kappa \in (0, 1/\alpha)$ , et pour presque tout environnement, on a :*

$$(1.3) \quad \Pi_n(n^\kappa, (1+\theta)n^\kappa) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \text{As}_\alpha\left(\frac{1}{1+\theta}\right),$$

$$(1.4) \quad \mathcal{S}_{\kappa,n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{(loi)} H,$$

où  $H$  est un subordonateur  $\alpha$ -stable, et la convergence a lieu au sens de la topologie de Skorokhod usuelle [Bi, chapitre 3].

Ce théorème reprend [BČ06, théorème 5.1], qui en propose une preuve s'appliquant également à des graphes plus généraux. Il est également possible de montrer (1.3) en utilisant un argument de renouvellement [BD95]. La limite (1.3) est un résultat de vieillissement, au sens donné au paragraphe 1.3.4.

Remarquons que, pour  $\alpha < 1$ , la somme et le maximum des  $(\tau_x)_{x \in \mathcal{X}_n}$  sont du même ordre de grandeur, à savoir  $n^{1/\alpha}$ . Le temps d'atteinte de l'équilibre est donc également de cet ordre de grandeur. Nous appellerons cette échelle de temps l'échelle *ergodique*. Pour les échelles de temps en  $n^\kappa$ , avec  $\kappa < 1/\alpha$ , la marche ne visite donc qu'une petite partie du graphe. On comprend ainsi que les résultats du théorème 1.1 sont les mêmes que ceux que l'on obtiendrait dans le cas où, à chaque visite sur un site, un nouveau temps d'attente serait tiré au sort (selon la loi de  $\tau_0$ ).

En fait, la limite (1.3) est une conséquence de (1.4). On a en effet

$$\Pi_n(n^\kappa, (1+\theta)n^\kappa) = \mathbf{P}_x^r \left[ \{ \mathcal{S}_{\kappa,n}(t), t \in \mathbb{R}_+ \} \cap [1, 1+\theta] = \emptyset \right].$$

En utilisant (1.4) et le théorème de l'application continue [Bi, théorème 2.7], on en déduit que la limite (1.3) est égale à la probabilité de l'événement

$$\{ H(t), t \in \mathbb{R}_+ \} \cap [1, 1+\theta] = \emptyset,$$

où  $H$  est un subordonateur  $\alpha$ -stable. On sait par ailleurs que cette probabilité est égale à  $\text{As}_\alpha(1/(1+\theta))$  [BČ06, corollaire A.5].

Sur l'échelle de temps ergodique, il est possible de donner un résultat de vieillissement similaire à (1.3), à condition de ne considérer que les temps les plus courts de cette échelle. En suivant l'argument de [BČ06, théorème 5.1], on peut montrer que, pour tout  $\varepsilon > 0$  :

$$(1.5) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left[ \left| \Pi_n(tn^{1/\alpha}, (1+\theta)tn^{1/\alpha}) - \text{As}_\alpha\left(\frac{1}{1+\theta}\right) \right| > \varepsilon \right] \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0.$$

Le point important à retenir de la discussion précédente est qu'en général, le vieillissement peut être identifié à la présence d'une « horloge » qui, convenablement normalisée, converge vers un subordonateur  $\alpha$ -stable.

## 2. Limite d'échelle de la dynamique symétrique sur le graphe complet

Nous mentionnons dans cette section les résultats de [FM08], où la limite d'échelle de la marche symétrique est identifiée, sur l'échelle de temps ergodique (toujours pour  $\alpha \in (0, 1)$ ).

Commençons par décrire l'objet limite. Soit  $(w_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$  une famille de réels strictement positifs vérifiant  $\sum w_i < +\infty$ . Il existe un processus  $(\mathcal{K}(t))_{t \geq 0}$  à valeurs dans  $\mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$  et tel que :

- (1)  $\mathcal{K}$  est cadlag et vérifie la propriété de Markov forte,
- (2) Partant d'un point  $i \in \mathbb{N}^*$ , le processus attend un temps exponentiel d'espérance  $w_i$  avant de sauter,
- (3) Partant du point  $\infty$ , pour tout sous-ensemble fini  $A \subseteq \mathbb{N}^*$ , le temps d'atteinte  $\mathcal{T}_A$  de l'ensemble  $A$  est fini, et  $\mathcal{K}(\mathcal{T}_A)$  est distribué uniformément sur l'ensemble  $A$ .
- (4) Quel que soit le point de départ, le temps total passé en  $\infty$  est nul :

$$\int_0^{+\infty} \mathbf{1}_{\{\mathcal{K}(t)=\infty\}} dt = 0.$$

Ces propriétés caractérisent le processus [FM08, théorème 4.1], que nous appellerons le *K-processus* (associé aux poids  $(w_i)$ ). Pour comprendre ce processus, il peut être utile de considérer sa trace sur l'ensemble  $\{1, \dots, M\}$ , que nous notons  $(\mathcal{K}_M(t))_{t \geq 0}$ . Cette trace est définie comme étant le processus obtenu à partir de  $(\mathcal{K}(t))_{t \geq 0}$ , en supprimant les intervalles de temps pendant lesquels  $\mathcal{K}(t)$  n'appartient pas à  $\{1, \dots, M\}$ . Le processus  $(\mathcal{K}_M(t))_{t \geq 0}$  est markovien, et tel que :

- (1) partant du point  $i \in \{1, \dots, M\}$ , le premier saut a lieu après un temps exponentiel de moyenne  $w_i$ ,
- (2) chaque nouveau site visité est choisi uniformément dans  $\{1, \dots, M\}$ .

On peut montrer que  $\mathcal{K}_M$  converge en loi vers  $\mathcal{K}$  quand  $M$  tend vers l'infini [FM08, lemme 3.11].

Pour montrer la convergence de la marche vers le *K-processus*, il faut réaliser un couplage des environnements successifs tel qu'il apparaisse un environnement limite (c'est cet environnement limite qui déterminera les poids du *K-processus*). Soit  $(w_i, x_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$  un processus ponctuel de Poisson sur  $\mathbb{R}_+ \times [0, 1]$  d'intensité

$$\frac{\alpha}{w^{\alpha+1}} dw dx.$$

On note  $\mathbb{P}$  la loi de ce processus ponctuel. Soit  $\rho$  la mesure définie par

$$d\rho = \sum_{i=1}^{+\infty} w_i \delta_{x_i}.$$

On pose

$$(2.1) \quad \tau_i^{(n)} = n^{1/\alpha} \rho \left( \left[ \frac{i-1}{n}, \frac{i}{n} \right] \right).$$

On peut vérifier que la loi de  $\tau_i^{(n)}$  ne dépend pas de  $n$ , et vérifie la condition I-(2.1). En fait, on pourrait faire en sorte que  $\tau_i^{(n)}$  ait la même loi que les  $\tau_i$  considérés initialement (voir [FIN02, proposition 3.1]), mais nous ne le faisons pas ici pour simplifier.

Finalement, on réordonne les  $\tau_i^{(n)}$  en une suite décroissante  $\bar{\tau}_1^{(n)} \geq \dots \geq \bar{\tau}_n^{(n)}$ . On réordonne également les poids  $(w_i)$  en une suite décroissante  $\bar{w}_1 \geq \bar{w}_2 \geq \dots$ .

Ce couplage des différentes échelles a l'avantage d'assurer la convergence des poids normalisés : pour tout  $i \in \mathbb{N}^*$ , on a presque sûrement :

$$n^{-1/\alpha} \bar{\tau}_i^{(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \bar{w}_i.$$

On a alors le résultat suivant [FM08, théorème 5.2].

THÉORÈME 2.1. Soit  $\tilde{X}_n(t) = X_{n^{1/\alpha}}^{(n)}$  la marche normalisée sur le graphe complet d'environnement  $(\bar{\tau}_i^{(n)})_{1 \leq i \leq n}$ . Alors  $\mathbb{P}$ -presque sûrement, la marche  $\tilde{X}_n$  converge en loi, pour la topologie de Skorokhod et quand  $n$  tend vers l'infini, vers le  $K$ -processus de poids  $(\bar{w}_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ .

Mentionnons qu'à partir de ce théorème, [FM08] obtiennent des résultats de vieillissement presque sûrs, sur l'échelle de temps ergodique.

Un des points remarquables du théorème 2.1 est que, pour l'échelle ergodique, l'environnement aléatoire persiste *intégralement* à la limite (et il est donc indispensable d'effectuer un couplage des différentes échelles si l'on veut obtenir un résultat presque sûr).

### 3. Dynamique symétrique sur d'autres graphes finis

La preuve du théorème 1.1 donnée par [BČ06, théorème 5.1] permet en fait de traiter des graphes plus généraux que le graphe complet [BČ06, sections 5.2-5.3]. Notons  $B_n = \{-n, \dots, n\}^d$  la boîte de taille  $n$  de  $\mathbb{Z}^d$ . Des résultats similaires au théorème 1.1 sont également obtenus si le graphe complet est remplacé par le graphe  $B_n$ , avec conditions aux bords périodiques, ou par l'hypercube [BČ08]. De manière remarquable, le type de vieillissement du théorème 1.1 est donc en fait très robuste.

Lorsque le graphe est l'hypercube [FL08] ou le graphe complet [JLT09], il est possible de montrer, dans un certain sens, que la marche aléatoire vue sur l'échelle de temps ergodique converge vers le  $K$ -processus, en utilisant comme à la section précédente un couplage des différents environnements.

Soulignons que ces résultats ne concernent que la dynamique symétrique.

### 4. Valeur propre principale pour la dynamique générale

Nous exposons ici les résultats démontrés dans le chapitre VI. Nous considérons la marche aléatoire en pièges aléatoires générale (c'est-à-dire qu'on ne suppose plus  $a = 0$ ), et souhaitons étudier son comportement sur de grandes boîtes de  $\mathbb{Z}^d$ .

Soit  $\mathcal{L}_X$  le générateur infinitésimal de la marche aléatoire, donné par

$$\mathcal{L}_X f(x) = \sum_{y \sim x} \frac{(\tau_y)^a}{(\tau_x)^{1-a}} (f(y) - f(x)).$$

On souhaite s'intéresser aux propriétés spectrales de ce générateur restreint à  $B_n$  avec conditions aux bords de Dirichlet, sous les hypothèses du paragraphe I.2.4.

Pour une fonction  $f : \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{R}$  qui s'annule hors de  $B_n$ , on pose  $\mathcal{L}_n f = \mathbf{1}_{B_n} \mathcal{L}_X f$ , et  $\lambda_n$  la valeur propre principale de  $-\mathcal{L}_n$  (c'est à dire sa plus petite valeur propre, qui est strictement positive).

Notre but est de décrire le comportement asymptotique de  $\lambda_n$ , quand  $n$  tend vers l'infini. On pourrait reformuler le problème en disant que l'on recherche l'ordre de grandeur de l'échelle de temps ergodique (bien qu'une bonne définition du temps ergodique devrait plutôt faire référence au trou spectral d'une dynamique conservative). Nous montrons, pour tout  $a \in [0, 1]$ , le résultat suivant.

THÉORÈME 4.1. Pour presque tout environnement :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\lambda_n)}{\ln(n)} = \begin{cases} 2 \vee \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) & \text{si } d = 1, \\ 2 \vee \frac{d}{\alpha} & \text{si } d \geq 2. \end{cases}$$

Pour certaines valeurs des paramètres  $d$  et  $\alpha$ , il est possible de donner une description plus précise de  $\lambda_n$ , et on a notamment :

THÉORÈME 4.2. *Si  $d \geq 2$  et  $\alpha > d/2$ , ou si  $d = 1$  et  $\alpha > 1$ , alors il existe  $k_1, k_2 > 0$  tels que, pour presque tout environnement, et pour tout  $n$  assez grand :*

$$\frac{k_1}{n^2} \leq \lambda_n \leq \frac{k_2}{n^2}.$$

Rappelons que, pour la marche aléatoire simple, la valeur propre principale est asymptotiquement équivalente à  $C/n^2$ .

Le point le plus remarquable de ce résultat est la transition de phase qui apparaît pour  $\alpha = 1$  en dimensions 1 et 2, et pour  $\alpha = d/2$  si  $d \geq 3$ . Par un argument intuitif, nous avons pourtant défendu au paragraphe I.2.4 l'idée que le passage du comportement diffusif au comportement sous-diffusif de la marche sur  $\mathbb{Z}^d$  devait avoir lieu pour  $\alpha = 1$ , indépendamment de la dimension (et nous verrons au chapitre IV que cet argument peut être rendu rigoureux). Il peut donc paraître surprenant d'obtenir un exposant critique différent ici, pour  $d \geq 3$ .

Pour comprendre cette différence dans le cas où  $a = 0$ , notons que, comme la trajectoire suivie est celle de la marche simple, le nombre de sites visités avant de quitter la boîte est de l'ordre de  $n^2$ , et ces sites sont choisis indépendamment de leur profondeur. Ainsi, le plus grand site rencontré est de l'ordre de  $n^{2/\alpha}$ . Le piège le plus profond de la boîte est cependant bien plus grand, de l'ordre de  $n^{d/\alpha}$ , et joue un rôle dans le comportement de la valeur propre principale. La différence est donc due au fait que la majeure partie de la boîte, et en particulier les sites les plus profonds, ne sont pas visités avant l'instant de sortie. (Il est possible de faire un raisonnement similaire dans le cas de la dynamique générale, en utilisant le processus d'exploration défini au paragraphe IV.8.1).

Une question importante est l'étude du lien entre le vieillissement d'un processus, et les propriétés spectrales de son générateur infinitésimal. Cette question a été abordée dans la littérature physique [MB97], puis mathématique [BF05, BF08]. Dans [BF05], les auteurs décrivent l'ensemble du spectre de la marche aléatoire symétrique sur le graphe complet (corrigé certains résultats non-rigoureux de [MB97]), et en dérivent des résultats de vieillissement. Pour la marche de Sinai, [BF08] donnent une description précise des petites valeurs propres  $\lambda_n^{(1)}, \lambda_n^{(2)}, \dots$  en termes du potentiel, et en déduisent des résultats de localisation de la marche. Remarquons que dans ce cas, il y a « séparation des échelles », c'est-à-dire que  $\lambda_n^{(i+1)}/\lambda_n^{(i)}$  tend vers l'infini quand  $n$  tend vers l'infini. Cette propriété n'est pas vérifiée pour la marche qui nous intéresse ici.

Le comportement asymptotique de la valeur propre principale, donné par le théorème 4.1, peut être comparé à celui du trou spectral pour la marche aléatoire en conductances aléatoires (avec conditions au bord périodiques). Comme on l'a vu à la figure I.1.3, ce sont les arêtes de petite conductance qui forment des pièges pour la marche. [FM06] considèrent les conductances définies de la manière suivante. On se donne une famille  $(\omega(x))_{x \in \mathbb{Z}^d}$  de variables aléatoires indépendantes et de même loi, uniformément majorées, et vérifiant

$$\mathbb{P}[\omega(x) \leq y] \sim y^\gamma \quad (y \rightarrow 0).$$

La conductance de l'arête  $e = (x, y)$  est définie par

$$(4.1) \quad \omega_{x,y} = \omega(x) \wedge \omega(y).$$

On note  $\mu_n$  le trou spectral de la marche aléatoire restreinte à  $B_n$  et avec conditions aux bords périodiques, dans l'environnement  $\omega$ . [FM06] démontrent le résultat suivant.

THÉORÈME 4.3. *Si  $d \geq 2$ , alors  $\mathbb{P}$ -presque sûrement, on a*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{\ln(\mu_n)}{\ln(n)} = 2 \vee \frac{d}{\gamma}.$$

*Remarque 4.4.* Le fait de définir les conductances par la formule 4.1 implique que, dès que la valeur  $\omega(x)$  est petite, toutes les conductances autour de  $x$  sont petites également, et la marche partant de  $x$  est piégée pendant un temps très long. On peut se demander quel serait le résultat pour des variables aléatoires  $(\omega_e)_{e \in \mathbb{E}}$  sont indépendantes et de même loi, uniformément majorées, et telles que

$$\mathbb{P}[\omega_e \leq y] \sim y^{\gamma'} \quad (y \rightarrow 0).$$

Dans ce cas, la présence d'une arête de petite conductance ne suffit pas à créer un piège. La probabilité qu'un site soit entouré d'arêtes dont les conductances sont toutes plus petites que  $y$  est asymptotiquement équivalente à  $y^{2d\gamma'}$  (quand  $y$  tend vers 0). On peut donc s'attendre à ce que, dans ce cas :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{\ln(\mu_n)}{\ln(n)} = 2 \vee \frac{1}{2\gamma'}.$$

En ce qui concerne la dimension 1, [Fa09] montre que le trou spectral est de l'ordre de  $n^{1+1/\gamma'}$ .

## 5. Idées de preuve

**5.1. Formulation variationnelle.** Notons  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  le produit scalaire défini par

$$\langle f, g \rangle = \sum f(x)g(x)\tau_x.$$

On note  $L^2(B_n)$  l'espace des fonctions  $f : \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{R}$  qui s'annulent hors de  $B_n$ , et muni du produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . L'opérateur  $\mathcal{L}_n$  est auto-adjoint sur  $L^2(B_n)$ .

La forme de Dirichlet associée à  $\mathcal{L}_X$ , que l'on note  $\mathcal{E}_X(\cdot, \cdot)$ , est définie par :

$$\mathcal{E}_X(f, f) = \langle -\mathcal{L}_X f, f \rangle = \frac{1}{2} \sum_{\substack{x, y \in \mathbb{Z}^d \\ x \sim y}} \tau_x^a \tau_y^a (f(y) - f(x))^2.$$

Nous notons  $\mathcal{E}_X^\circ$  et  $\lambda_n^\circ$ , respectivement, la forme de Dirichlet et la valeur propre obtenues dans le cas où  $a = 0$ .

La valeur propre  $\lambda_n$  est caractérisée par la formule variationnelle :

$$(5.1) \quad \lambda_n = \inf_{\substack{f \in L^2(B_n) \\ f \neq 0}} \frac{\mathcal{E}_X(f, f)}{\langle f, f \rangle}.$$

Cette formule donne une technique claire pour trouver des bornes supérieures sur la valeur propre : il suffit d'évaluer le quotient  $\mathcal{E}_X(f, f)/\langle f, f \rangle$  pour des fonctions  $f$  bien choisies. Dans cette présentation, nous passons sous silence l'essentiel de cette partie.

Au vu de l'hypothèse (2) du paragraphe I.2.4, on a  $\mathcal{E}_X(f, f) \geq \mathcal{E}_X^\circ(f, f)$ , et donc

$$(5.2) \quad \lambda_n \geq \lambda_n^\circ.$$

En ce qui concerne les bornes inférieures sur  $\lambda_n$ , il suffit donc de considérer la valeur propre du cas où  $a = 0$ .

Posons :

$$(5.3) \quad C_n = \inf \{ \mathcal{E}_X^\circ(f, f) \mid f \in L^2(B_n), f(0) = 1 \}.$$

Les comportements asymptotiques de  $C_n$  et de  $\lambda_n^\circ$  sont reliés de la manière suivante.

**PROPOSITION 5.1.** *Pour tout entier  $n$  et pour tout environnement, on a :*

$$(5.4) \quad \lambda_n^\circ \geq \frac{C_{2n}}{\sum_{x \in B_n} \tau_x}.$$

$$(5.5) \quad \lambda_{2n+1}^{\circ} \leq \lambda_{2n}^{\circ} \leq \frac{C_n}{\max_{B_n} \tau}.$$

DÉMONSTRATION. Dans la formule variationnelle (5.1), l'homogénéité du quotient assure que l'on peut restreindre l'infimum aux fonctions  $f$  telles que  $\|f\|_{\infty} = 1$ . La valeur propre  $\lambda_n^{\circ}$  est obtenue en remplaçant  $\mathcal{E}_X$  par  $\mathcal{E}_X^{\circ}$  dans (5.1).

Soit  $f$  une fonction de  $L^2(B_n)$  et telle que  $\|f\|_{\infty} = 1$ . Il existe  $x_0 \in B_n$  tel que  $|f(x_0)| = 1$ . Quitte à changer  $f$  en  $-f$ , on peut supposer  $f(x_0) = 1$ . Remarquons que la fonction  $g = f(\cdot + x_0)$  est dans  $L^2(B_{2n})$  et satisfait  $g(0) = 1$ , et donc :

$$\mathcal{E}_X^{\circ}(f, f) = \mathcal{E}_X^{\circ}(g, g) \geq C_{2n}.$$

D'autre part, comme  $\|f\|_{\infty} = 1$ , on a :

$$\langle f, f \rangle \leq \sum_{x \in B_n} \tau_x,$$

d'où l'on déduit le résultat.

Le fait que  $\lambda_{2n+1}^{\circ} \leq \lambda_{2n}^{\circ}$  découle directement de la formule variationnelle.

Par compacité, il existe une fonction  $F_n \in L^2(B_n)$  qui réalise l'infimum dans la définition de  $C_n$  (5.3). Soit  $x_1 \in B_n$  tel que  $\max_{B_n} \tau = \tau_{x_1}$ . On considère la fonction  $h = F_n(\cdot - x_1) \in L^2(B_{2n})$ . Il vient :

$$\mathcal{E}_X^{\circ}(h, h) = \mathcal{E}_X^{\circ}(F_n, F_n) = C_n.$$

Comme  $h(x_1) = 1$ , on a également :

$$\langle h, h \rangle \geq \tau_{x_1} = \max_{B_n} \tau,$$

et on obtient l'inégalité (5.5).  $\square$

Considérons maintenant le comportement asymptotique de  $C_n$ . Nous notons  $\partial B_n$  le bord (extérieur) de la boîte  $B_n$ , c'est-à-dire l'ensemble  $B_{n+1} \setminus B_n$ . Le nombre  $C_n$  est en fait la conductance effective entre 0 et  $\partial B_n$ . Son asymptotique est donc bien connue [LP, chapitre 2].

PROPOSITION 5.2. *Si  $d = 1$ , alors :*

$$C_n = \frac{2}{n+1}.$$

*Si  $d = 2$ , alors il existe  $k_1, k_2$  tels que pour tout  $n$  :*

$$\frac{k_1}{\ln(n)} \leq C_n \leq \frac{k_2}{\ln(n)}.$$

*Si  $d \geq 3$ , alors  $C_n$  converge vers un réel strictement positif.*

De ces constatations simples, on peut en déduire des informations sur l'exposant asymptotique de la valeur propre :

$$(5.6) \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} -\frac{\ln(\lambda_n)}{\ln(n)} \leq \begin{cases} 2 \vee \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) & \text{si } d = 1, \\ d \vee \frac{d}{\alpha} & \text{si } d \geq 2. \end{cases}$$

Ces bornes sont effectivement celles du théorème 4.1, sauf dans le cas où  $d \geq 3$  et  $\alpha > 1$ . Nous allons étudier ce cas en détail.

**5.2. La méthode des chemins.** Une des méthodes classiques permettant d'obtenir des bornes inférieures sur la valeur propre principale est la méthode des chemins [SC97, théorème 3.2.3]. C'est cette méthode qui est utilisée dans [FM06] pour montrer le théorème 4.3 mentionné précédemment. On sait de plus que cette méthode est toujours optimale pour les problèmes unidimensionnels [Ch, section 3.7].

De manière surprenante, cette méthode n'est pas adaptée pour le problème que nous considérons ici. Nous allons montrer que, pour  $d \geq 2$ , l'exposant obtenu par cette méthode diffère de 1 de l'exposant correct.

Pour tout  $x \in B_n$ , on se donne un chemin  $\gamma_x$  joignant  $x$  à un point de  $\partial B_n$ . Pour un chemin  $\gamma = (x_0, \dots, x_l)$ , on note  $e \in \gamma$  si  $e = (x_i, x_{i+1})$  pour un certain  $i$ . Dans ce cas, on pose  $df(e) = f(x_{i+1}) - f(x_i)$ .

Pour une fonction  $f \in L^2(B_n)$ , on a

$$f(x) = \sum_{e \in \gamma_x} df(e).$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il vient :

$$f(x)^2 \leq |\gamma_x| \sum_{e \in \gamma_x} df(e)^2,$$

où  $|\gamma_x|$  est la longueur du chemin  $\gamma_x$ . La quantité  $df(e)^2$  ne dépendant pas de l'orientation de  $e$ , on peut dorénavant considérer que les arêtes sont non-orientées. En multipliant cette inégalité par  $\tau_x$ , puis en sommant sur tout  $x \in B_n$ , nous obtenons :

$$\sum_{x \in B_n} f(x)^2 \tau_x \leq \sum_{x \in B_n} |\gamma_x| \tau_x \sum_{e \in \gamma_x} df(e)^2.$$

Notons  $E_n$  l'ensemble des arêtes reliant un point de  $B_n$  à un point de  $B_n \cup \partial B_n$ . On a

$$\sum_{x \in B_n} f(x)^2 \tau_x \leq \sum_{e \in E_n} df(e)^2 \sum_{x: e \in \gamma_x} |\gamma_x| \tau_x.$$

Remarquons ici que, comme  $f \in L^2(B_n)$ ,

$$\mathcal{E}_X^\circ(f, f) = \sum_{e \in E_n} df(e)^2.$$

En posant

$$\mathcal{M}_n = \max_{e \in E_n} \sum_{x: e \in \gamma_x} |\gamma_x| \tau_x,$$

on obtient

$$(f, f) \leq \mathcal{M}_n \mathcal{E}_X^\circ(f, f),$$

c'est-à-dire que  $\lambda_n^\circ \geq (\mathcal{M}_n)^{-1}$ .

Montrons maintenant que, quelle que soit la façon dont sont choisis les  $(\gamma_x)$ , l'estimée obtenue n'est pas celle qui correspond au théorème 4.1. Soit  $z \in B_{n/2}$  tel que  $\tau_z$  est maximal. Le site  $z$  est tel que  $\tau_z \simeq n^{d/\alpha}$  et  $|\gamma_z| \geq n/2$ . Pour une arête  $e$  appartenant au chemin  $\gamma_z$ , on a donc

$$(5.7) \quad \sum_{x: e \in \gamma_x} |\gamma_x| \tau_x \geq |\gamma_z| \tau_z \gtrsim n^{1+d/\alpha}.$$

Il est possible de généraliser la méthode des chemins en attribuant des poids arbitraires aux différentes arêtes [SC97, théorème 3.2.3], mais cette généralisation n'améliore pas le constat précédent.

La méthode des chemins ne permet donc pas d'obtenir les bornes inférieures manquantes du théorème 4.1. Mentionnons cependant qu'il est possible de montrer

que si  $\gamma_x$  est le plus court chemin qui relie  $x$  à  $\partial B_n$ , alors  $\mathcal{M}_n$  est effectivement de l'ordre de  $n^{2\nu(1+d/\alpha)}$ . On obtiendrait donc ainsi l'exposant correct pour  $\alpha > d$ .

**5.3. Evaluation des temps de sortie.** Nous souhaitons améliorer l'estimée obtenue en (5.6), dans le cas où  $d \geq 3$  et  $\alpha > 1$  (en particulier, les  $\tau_x$  sont d'espérance finie). Etant donnée l'inégalité (5.2), il suffit d'étudier le cas où  $a = 0$ .

La méthode que nous proposons est basée sur l'étude des temps de sortie de  $B_n$ . On pose

$$T_n = \inf\{t \geq 0 : X_t \notin B_n\}.$$

Nous rappelons un résultat général reliant la valeur propre principale au temps de sortie.

PROPOSITION 5.3. *Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , tout  $t \geq 0$  et tout environnement, on a :*

$$e^{-t\lambda_n} \leq \sup_{x \in B_n} \mathbf{P}_x^\tau[T_n > t] \leq \frac{1}{t} \sup_{x \in B_n} \mathbf{E}_x^\tau[T_n].$$

Pour obtenir les bornes inférieures manquantes concernant la valeur propre principale, il nous suffit donc de montrer que, pour presque tout environnement :

$$\sup_{x \in B_n} \mathbf{E}_x^\tau[T_n] \leq n^{(2\nu d/\alpha) + o(1)} \quad (n \rightarrow +\infty).$$

Nous nous concentrons sur l'étude de  $\mathbf{E}_0^\tau[T_n]$ . Comme nous nous intéressons au cas de la dynamique symétrique, la trajectoire de la marche aléatoire est celle de la marche simple. Notons  $G_n(0, x)$  le nombre moyen de visites en  $x$  effectuées par la marche simple partant de 0 avant de sortir de  $B_n$ . C'est donc aussi, pour tout environnement, le nombre moyen de visites du site  $x$  effectuées par la marche  $X$  avant de quitter  $B_n$ . De plus, lors de chaque visite au site  $x \in B_n$ , la marche  $X$  attend un temps exponentiel de moyenne  $\tau_x$ . On a donc :

$$\mathbf{E}_0^\tau[T_n] = \sum_{x \in B_n} G_n(0, x)\tau_x.$$

La somme  $\sum_{x \in B_n} G_n(0, x)$  est le nombre de pas effectués par la marche simple avant de sortir de  $B_n$ , qui est donc de l'ordre de  $n^2$ . De plus, comme les  $\tau_x$  sont ici supposés intégrables, il vient :

$$\mathbf{E}[\mathbf{E}_0^\tau[T_n]] \simeq C_1 n^2.$$

Soit  $\beta > d/\alpha$ . On souhaite montrer le résultat suivant.

$$(5.8) \quad \mathbb{P} [ |\mathbf{E}_0^\tau[T_n] - \mathbf{E}\mathbf{E}_0^\tau[T_n]| \geq n^\beta ] \ll \frac{1}{|B_n|}$$

(où  $|B_n|$  désigne le cardinal de  $B_n$ ). En d'autres termes, on souhaite montrer que les fluctuations de l'ordre de  $n^\beta$  ont lieu avec une probabilité  $o(n^{-d})$ . On admet ici qu'un résultat de la forme (5.8) implique que, pour presque tout environnement, et pour tout  $n$  suffisamment grand :

$$\sup_{x \in B_n} \mathbf{E}_x^\tau[T_n] \leq C_1 n^2 + n^\beta.$$

On obtiendrait alors le résultat souhaité en faisant tendre  $\beta$  vers  $d/\alpha$ .

Pour montrer un résultat du type de (5.8), nous utilisons un calcul de moments. Pour ce faire, il est nécessaire de commencer par définir une troncature des variables aléatoires  $\tau_x$ . Soit  $\alpha' < \alpha$ . On pose :

$$\tilde{\tau}_{x,n} = \begin{cases} \tau_x & \text{si } \tau_x \leq n^{d/\alpha'}, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Comme le maximum des  $(\tau_x)_{x \in B_n}$  est typiquement de l'ordre de  $n^{d/\alpha}$ , avec grande probabilité, aucun des  $\tau_x$  n'est affecté par la troncature. On définit les variables

aléatoires centrées associées  $\bar{\tau}_{x,n} = \tilde{\tau}_{x,n} - \mathbb{E}[\tilde{\tau}_{x,n}]$ . Plutôt que l'inégalité (5.8), nous allons montrer le résultat similaire suivant.

PROPOSITION 5.4. *Pour tout  $\beta > d/\alpha'$ , il existe  $\delta, C > 0$  tels que pour tout  $n$  :*

$$(5.9) \quad \mathbb{P} \left[ \left| \sum_{x \in B_n} G_n(0, x) \bar{\tau}_{x,n} \right| > n^\beta \right] \leq \frac{C}{n^{d+\delta}}.$$

IDÉE DE PREUVE. Pour montrer ce résultat, nous avons besoin d'informations concernant les  $G_n(0, x)$ . Il est clair que  $G_n(0, x)$  est majoré par la fonction de Green de la marche simple (rappelons que l'on suppose ici que  $d \geq 3$ ). Il existe donc une constante  $C_2$  telle que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et tout  $x \in \mathbb{Z}^d$  [La, théorème 1.5.4] :

$$(5.10) \quad G_n(0, x) \leq \frac{C_2}{(1 + \|x\|)^{d-2}}.$$

Pour montrer la proposition 5.4, l'idée est de calculer les moments de la somme apparaissant dans le terme de gauche de (5.9). On a :

$$(5.11) \quad \mathbb{E} \left[ \left( \sum_{x \in B_n} G_n(0, x) \bar{\tau}_{x,n} \right)^2 \right] = \sum_{x, y \in B_n} G_n(0, x) G_n(0, y) \mathbb{E}[\bar{\tau}_{x,n} \bar{\tau}_{y,n}].$$

Si  $x \neq y$ , alors les variables aléatoires  $\bar{\tau}_{x,n}$  et  $\bar{\tau}_{y,n}$  sont indépendantes. Comme elles sont de plus centrées, l'espérance  $\mathbb{E}[\bar{\tau}_{x,n} \bar{\tau}_{y,n}]$  est nulle, et la somme précédente se simplifie donc en :

$$(5.12) \quad \sum_{x \in B_n} G_n(0, x)^2 \mathbb{E}[(\bar{\tau}_{x,n})^2].$$

Rappelons que, comme  $\alpha' < \alpha$ , l'espérance de  $(\tau_0)^{\alpha'}$  est finie. On en déduit que si  $\alpha' \geq 2$ , alors  $\mathbb{E}[(\bar{\tau}_{x,n})^2]$  est bornée quand  $n$  tend vers l'infini. Dans le cas contraire, on a :

$$\mathbb{E}[(\bar{\tau}_{x,n})^2] = \mathbb{E}[|\bar{\tau}_{x,n}|^{2-\alpha'+\alpha'}] \leq (n^{d/\alpha'})^{2-\alpha'} \mathbb{E}[|\bar{\tau}_{0,n}|^{\alpha'}] \leq C n^{2d/\alpha'-d}.$$

Il reste à voir comment se comporte la somme des  $G_n(0, x)^2$ . En utilisant la majoration vue en (5.10), et par comparaison avec une intégrale, on obtient, pour  $d \geq 4$  :

$$\sum_{x \in B_n} G_n(0, x)^2 \leq C \ln(n).$$

On en déduit que, pour le cas où  $\alpha' < 2$  et  $d \geq 4$ , la somme (5.12) (et donc également le membre de gauche de l'égalité (5.11)) est majorée par

$$C \ln(n) n^{2d/\alpha'-d}.$$

En utilisant l'inégalité de Markov, on obtient ainsi dans ce cas :

$$\mathbb{P} \left[ \left| \sum_{x \in B_n} G_n(0, x) \bar{\tau}_{x,n} \right| > n^\beta \right] \leq \frac{C \ln(n)}{n^{d+2(\beta-d/\alpha')}},$$

ce qui montre la proposition. Pour les autres cas, il est nécessaire de calculer les moments d'ordre supérieur de

$$\sum_{x \in B_n} G_n(0, x) \bar{\tau}_{x,n},$$

mais l'idée générale est similaire.  $\square$

*Remarque 5.5.* En dimension 2 et pour  $\alpha > 1$ , la minoration donnée par les propositions 5.1 et 5.2 est de la forme :

$$\lambda_n \geq \frac{C}{n^2 \ln(n)},$$

ce qui n'est pas suffisant pour montrer le théorème 4.2. La méthode que nous venons de voir permet d'obtenir une minoration en  $n^{-2}$  dans ce cas.

*Remarque 5.6.* L'évaluation des temps de sortie nous a donc permis d'obtenir les minorations manquantes concernant la valeur propre principale. Il serait intéressant de savoir si le théorème 4.1 reste vrai concernant le trou spectral d'une dynamique conservative (par exemple, la marche aléatoire sur  $B_n$  avec conditions aux bords périodiques). Il n'est cependant pas du tout clair de généraliser la méthode que nous avons exposée dans cette section à ce cas.

## 6. Résultats plus récents, questions ouvertes

Dans le cas de la dimension 1, la limite de l'ensemble du spectre (et des fonctions propres) est obtenue dans [Fa09]. Nous verrons à la section IV.4 qu'en dimension 1, la marche aléatoire en pièges aléatoires, convenablement normalisée, converge vers une diffusion singulière [FIN02, BČ05]. La méthode de [Fa09] consiste grossièrement à montrer que les propriétés spectrales sont continues pour ce passage à la limite.

Plusieurs questions naturelles suivent l'étude de la valeur propre principale. Que peut-on dire des petites valeurs propres suivantes? Les vecteurs propres associés à ces valeurs propres sont-ils localisés? Nous avons également mentionné précédemment la question du trou spectral d'une dynamique conservative.

Enfin, les résultats de vieillissement mentionnés à la section 3 restent-ils vrais pour la dynamique générale?



## Marche aléatoire en pièges aléatoires sur $\mathbb{Z}^d$

Dans ce chapitre, nous étudions le comportement asymptotique de la marche aléatoire en pièges aléatoires sur le graphe  $\mathbb{Z}^d$ . Après avoir montré que, si  $\mathbb{E}[\tau]$  est finie, alors la marche aléatoire satisfait un principe d'invariance presque sûr, nous nous intéressons au cas où le comportement asymptotique n'est plus un mouvement brownien, mais devient fortement perturbé par l'environnement.

### 1. La marche aléatoire en pièges aléatoires est un changement de temps d'une marche aléatoire en conductances aléatoires

Dans le cas où  $a = 0$ , la marche aléatoire en pièges aléatoires est un changement de temps de la marche aléatoire simple. Nous souhaitons avoir une propriété similaire pour la dynamique générale, c'est-à-dire exprimer la marche aléatoire comme le changement de temps d'un processus plus régulier.

Nous avons vu au paragraphe I.1.2 que, lorsqu'elle atteint un piège profond  $x$ , la marche aléatoire passe un temps de l'ordre de  $\tau_x$  sur le piège  $x$  avant de quitter le voisinage du piège. Pour faire disparaître le phénomène de piégeage de la marche, nous considérons la marche  $\hat{X}$ , qui vérifie les propriétés :

- (1) la marche  $\hat{X}$  suit la trajectoire de la marche  $X$ ,
- (2) le temps passé par  $\hat{X}$  sur un site  $x$  avant de sauter est le temps passé par  $X$  divisé par  $\tau_x$ .

Autrement dit, la suite des positions occupées par la marche  $\hat{X}$  est la même que la suite des positions de  $X$ , mais le taux de saut global est multiplié par  $\tau_x$ . Ainsi, la marche aléatoire  $\hat{X}$  est un processus de Markov, dont le taux de saut d'un site  $x$  à un voisin  $y$  est donné par

$$(1.1) \quad (\tau_x \tau_y)^a.$$

Ce taux de saut est symétrique en  $x, y$ . La marche  $\hat{X}$  est donc une marche aléatoire en conductances aléatoires : pour une arête  $e = (x, y)$  la conductance  $\omega_e$  est donnée par (1.1). Notons

$$(1.2) \quad A(t) = \int_0^t \tau_{\hat{X}_s} ds.$$

PROPOSITION 1.1. *Pour tout  $t \geq 0$ , on a la relation :*

$$(1.3) \quad X_t = \hat{X}_{A^{-1}(t)}.$$

DÉMONSTRATION. Comme la fonction  $A$  est strictement croissante, il suffit de montrer que, pour tout  $s \geq 0$  :

$$(1.4) \quad X_{A(s)} = \hat{X}_s.$$

Notons  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  les instants de saut de la marche  $X$  (avec  $S_0 = 0$ ), et  $(\hat{S}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  les instants de saut de la marche  $\hat{X}$  (avec  $\hat{S}_0 = 0$ ). Par définition de la marche  $\hat{X}$ , on a

$$(1.5) \quad t \in [S_n, S_{n+1}) \text{ et } s \in [\hat{S}_n, \hat{S}_{n+1}) \Rightarrow X_t = \hat{X}_s,$$

et les instants de saut vérifient de plus, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$S_{n+1} - S_n = \tau_{\hat{X}_{\hat{S}_n}} \left( \hat{S}_{n+1} - \hat{S}_n \right).$$

De cette observation, on en déduit que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$A(\hat{S}_n) = S_n,$$

et l'égalité (1.4) est démontrée, en utilisant (1.5) et le fait que la fonction  $A$  est strictement croissante.  $\square$

Par ce changement de temps, nous pouvons bénéficier des résultats connus concernant les marches aléatoires en conductances aléatoires. Même pour des environnements très irréguliers, la marche aléatoire en conductances aléatoires a plus ou moins toujours un comportement asymptotique brownien. Pour comprendre la marche aléatoire en pièges aléatoires, le travail essentiel consiste donc à étudier le changement de temps défini en (1.2).

Dans ce nouveau contexte, nous redéfinissons l'environnement vu par la particule, introduit à la section II.3. Nous notons  $(\theta_x)_{x \in \mathbb{Z}^d}$  les translations agissant sur l'ensemble des environnements  $\Omega$ , telles que  $(\theta_x \tau)_y = \tau_{x+y}$ . L'environnement vu par la particule  $\hat{X}$  est le processus à valeurs dans  $\Omega$  défini par

$$(1.6) \quad \hat{\tau}(t) = \theta_{\hat{X}_t} \omega.$$

Hormis le fait qu'ici, l'environnement est une famille indexée par les sites de  $\mathbb{Z}^d$  et non plus par les arêtes, ce processus est identique à celui défini à la section II.3, et a donc les mêmes propriétés.

Même si les variables aléatoires  $(\tau_x)_{x \in \mathbb{Z}^d}$  sont indépendantes, il ne s'en suit pas que les conductances (définies par (1.1)) le sont. Les conductances d'arêtes adjacentes sont en effet corrélées. Cette corrélation est cependant de portée finie, et on peut vérifier que les résultats exposés au chapitre II pour le cas où les conductances sont indépendantes restent valides dans ce cas.

## 2. Principe d'invariance presque sûr

Dans cette section, nous nous intéressons au cas où le comportement asymptotique de la marche aléatoire  $X$  est de type brownien, c'est-à-dire au cas où l'environnement n'a pas une influence déterminante sur ce comportement. Nous supposons que les variables aléatoires  $(\tau_x)_{x \in \mathbb{Z}^d}$  sont indépendantes.

**THÉORÈME 2.1.** *Si  $\mathbb{E}[\tau_0]$  est finie, alors la marche aléatoire  $X$  satisfait un principe d'invariance presque sûr.*

**DÉMONSTRATION.** Pour montrer ce résultat, nous utilisons le changement de temps introduit à la section précédente. La marche aléatoire changée de temps  $\hat{X}$  satisfait un principe d'invariance presque sûr, d'après [BD09]. D'après [Bi, théorème 17.1], il suffit donc d'établir une loi des grands nombres pour le changement de temps, à savoir, que presque sûrement :

$$\frac{A(t)}{t} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} C \in (0, +\infty).$$

Cette propriété est une conséquence de l'ergodicité de l'environnement vu par la particule (Proposition II.3.1) et du fait que  $\mathbb{E}[\tau_0]$  est finie.  $\square$

### 3. Au-delà du principe d'invariance

Nous nous intéressons maintenant au cas où la profondeur des pièges n'est pas intégrable. A partir d'ici et jusqu'à la fin du chapitre, nous ferons les hypothèses suivantes sur leur loi.

**Hypothèses :**

(H1) Les variables aléatoires  $(\tau_x)_{x \in \mathbb{Z}^d}$  sont indépendantes et de même loi.

(H2) On a  $\tau_0 \geq 1$ .

(H3) Il existe  $\alpha \in (0, 1)$  tel que

$$(3.1) \quad \mathbb{P}[\tau_0 \geq y] \sim \frac{1}{y^\alpha} \quad (y \rightarrow +\infty).$$

Ces hypothèses reprennent celles vues au paragraphe I.2.4, avec cependant la condition supplémentaire  $\alpha < 1$ , qui nous amène hors du domaine de validité du principe d'invariance.

### 4. Cas unidimensionnel

Le comportement asymptotique de la marche aléatoire en dimension 1 est singulier. En effet, dans ce cas, le temps nécessaire pour sortir de  $B_n = \{-n, \dots, n\}$  est de l'ordre de grandeur du temps ergodique. Ainsi, comme pour la limite d'échelle vue à la section III.2, pour obtenir une convergence presque sûre, il est nécessaire d'effectuer un couplage des environnements sur les différentes échelles de normalisation. Par ce couplage, les environnements successifs convergent vers un environnement limite, qui détermine la loi du processus limite.

Nous commençons donc par construire ce couplage. On se donne un processus ponctuel de Poisson  $(w_i, x_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$  sur  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$  d'intensité

$$\frac{\alpha}{w^{\alpha+1}} dw dx,$$

dont la loi est notée  $\mathbb{P}$ . Soit  $\rho$  la mesure définie par

$$(4.1) \quad d\rho = \sum_{i=1}^{+\infty} w_i \delta_{x_i}.$$

On pose alors, pour tout  $\varepsilon > 0$  et tout  $i \in \mathbb{Z}$ ,

$$(4.2) \quad \tau_{\varepsilon i}^{(\varepsilon)} = \varepsilon^{-1/\alpha} \rho(\{\varepsilon i, \varepsilon(i+1)\}).$$

La famille  $(\tau_x^{(\varepsilon)})$  définit un environnement sur  $\varepsilon\mathbb{Z}$ , que l'on peut également voir comme une mesure

$$\rho^{(\varepsilon)} = \sum_{x \in \varepsilon\mathbb{Z}} \tau_x^{(\varepsilon)} \delta_x.$$

De plus, la loi de  $(\tau_{\varepsilon i}^{(\varepsilon)})_{i \in \mathbb{Z}}$  ne dépend pas de  $\varepsilon$ , et vérifie

$$\mathbb{P}[\tau_{\varepsilon i}^{(\varepsilon)} \geq y] \sim \frac{1}{y^\alpha} \quad (y \rightarrow +\infty).$$

Il serait possible de faire une construction plus générale permettant de représenter toutes les lois qui vérifient les hypothèses (H1)-(H3) vues plus haut [FIN02, proposition 3.1], mais nous restons dans ce cadre plus simple.

Le couplage assure que les environnements définis sur les échelles successives paramétrées par  $\varepsilon$  convergent vers un environnement limite. On a en effet,  $\mathbb{P}$ -presque sûrement (et au sens de la convergence vague) :

$$(4.3) \quad \varepsilon^{1/\alpha} \rho^{(\varepsilon)} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \rho.$$

Pour  $\varepsilon$  fixé, considérons la marche aléatoire  $(X^{(\varepsilon)}(t))_{t \geq 0}$  sur le graphe  $\varepsilon\mathbb{Z}$  dans l'environnement donné par  $\rho^{(\varepsilon)}$ . En prenant en compte le changement de graphe  $\mathbb{Z} \mapsto \varepsilon\mathbb{Z}$ , on observe que la loi de  $X^{(\varepsilon)}$  est la même que celle de  $\varepsilon X$ .

Considérons dans un premier temps le cas de la dynamique symétrique ( $a = 0$ ). La marche aléatoire changée de temps  $\hat{X}^{(\varepsilon)}$  est alors simplement la marche simple sur  $\varepsilon\mathbb{Z}$ .

Pour préparer l'apparition du processus limite, il est commode d'écrire  $X^{(\varepsilon)}$  directement comme un changement de temps d'un mouvement brownien. Soit  $(B_t)_{t \geq 0}$  un mouvement brownien, et  $(l(x, t))_{(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+}$  son temps local. Il est plus pratique pour la suite de considérer le mouvement brownien dont le générateur infinitésimal est le laplacien, c'est-à-dire tel que la variance de  $B_1$  soit égale à 2. Pour toute mesure  $\mu$  localement finie et non identiquement nulle, on pose :

$$A_\mu(t) = \int l(x, t) d\mu(x),$$

et l'inverse continu à droite de  $A_\mu$  :

$$A_\mu^{-1}(s) = \inf\{t > 0 : A_\mu(t) > s\}.$$

On définit alors le mouvement brownien changé de temps selon la mesure  $\mu$  comme étant le processus  $(B(\mu, t))_{t \geq 0}$  tel que

$$B(\mu, t) = B_{A_\mu^{-1}(t)}.$$

**THÉORÈME 4.1.** (1) *Pour  $a = 0$  et  $\mathbb{P}$ -presque sûrement, la marche aléatoire normalisée  $X^{(\varepsilon)}(\varepsilon^{-(1+1/\alpha)} \cdot)$  a même loi que  $B(\varepsilon^{1/\alpha} \rho^{(\varepsilon)}, \cdot)$ .*

(2)  *$\mathbb{P}$ -presque sûrement, on a la convergence :*

$$(4.4) \quad B(\varepsilon^{1/\alpha} \rho^{(\varepsilon)}, \cdot) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} B(\rho, \cdot)$$

*au sens de la topologie de Skorokhod.*

**IDÉE DE PREUVE.** Pour la première partie, il suffit de voir que la marche aléatoire  $X^{(\varepsilon)}(\varepsilon^{-1} \cdot)$  et le processus  $B(\rho^{(\varepsilon)}, \cdot)$  ont même loi. Rappelons que

$$\rho^{(\varepsilon)} = \sum_{x \in \varepsilon\mathbb{Z}} \tau_x^{(\varepsilon)} \delta_x.$$

[St63] montre que  $B(\rho^{(\varepsilon)}, \cdot)$  est une marche aléatoire au plus proche voisin sur  $\varepsilon\mathbb{Z}$  (c'est-à-dire sur le support de la mesure  $\rho^{(\varepsilon)}$ ), et dont le taux de saut du point  $x$  à l'un quelconque de ses voisins  $x - \varepsilon$ ,  $x + \varepsilon$  est donné par  $1/(\varepsilon\tau_x)$  (voir aussi [BČ05, proposition 2.1]). On obtient ainsi le résultat annoncé.

La deuxième partie est une conséquence des résultats généraux concernant les diffusions changées de temps sur  $\mathbb{R}$  obtenus par [St63], et découle de la convergence mentionnée en (4.3).  $\square$

*Remarque 4.2.* La construction du couplage permettant d'arriver à cette conclusion a été donnée par [FIN02]. Soulignons une nouvelle fois que celui-ci est réalisé pour des lois générales, et pas simplement pour les incréments d'un subordonateur. En fait, la construction est effectuée pour toute loi telle que la fonction

$$y \mapsto \mathbb{P}[\tau_0 \geq y]$$

soit à variation régulière d'indice  $-\alpha$ , une condition plus générale que (3.1). Par ailleurs, en utilisant une notion de convergence plus forte que la convergence vague dans (4.3), [FIN02] obtiennent la convergence (4.4) dans un sens également plus fort. Ce renforcement leur permet d'obtenir des propriétés de vieillissement vis-à-vis de fonctionnelles qui sont continues pour la nouvelle topologie considérée.

Mentionnons quelques propriétés intéressantes du processus limite  $B(\rho, \cdot)$ . La trajectoire du processus est continue presque sûrement, mais pour tout  $t > 0$ , la loi de  $B(\rho, t)$  est concentrée sur l'ensemble dénombrable des  $\{x_i\}$  apparaissant dans (4.1). Du fait de l'invariance d'échelle de la mesure  $\rho$ ,  $B(\rho, \lambda t)$  et  $\lambda^{1+1/\alpha} B(\rho, t)$  ont même loi sous la mesure moyennée.

Ce résultat a ensuite été étendu à la marche aléatoire générale (à quelconque dans  $[0, 1]$ ) par [BČ05]. La preuve utilise la fonction harmonique que nous avons définie en (II.4.1) pour les marches aléatoires en conductances aléatoires. Ici, elle prend la forme suivante, pour tout  $n \in \mathbb{Z}$  :

$$(4.5) \quad \chi_\varepsilon(n) = \begin{cases} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(\tau_{\varepsilon k}^{(\varepsilon)} \tau_{\varepsilon(k+1)}^{(\varepsilon)})^\alpha} & \text{si } n \geq 1, \\ 0 & \text{si } n = 0, \\ \sum_{k=n}^{-1} \frac{1}{(\tau_{\varepsilon k}^{(\varepsilon)} \tau_{\varepsilon(k+1)}^{(\varepsilon)})^\alpha} & \text{si } n \leq -1. \end{cases}$$

Nous définissons la forme normalisée de la fonction  $\chi_\varepsilon$  :

$$\chi^{(\varepsilon)}(\varepsilon \cdot) = \varepsilon \chi_\varepsilon(\cdot).$$

On suppose que  $\mathbb{E}[\tau_0^{-\alpha}]$  est finie (ce qui est vrai en particulier sous l'hypothèse (H2), mais également pour les incréments d'un subordonateur). Asymptotiquement quand  $\varepsilon$  tend vers 0, le comportement de  $\chi^{(\varepsilon)}$  devient linéaire :  $\chi^{(\varepsilon)}(x) \simeq \mathbb{E}[\tau_0^{-\alpha}]^2 x$ .

On considère la mesure  $\rho^{(\varepsilon)}$  modifiée par  $\chi^{(\varepsilon)}$  :

$$\bar{\rho}^{(\varepsilon)} = \sum_{x \in \varepsilon \mathbb{Z}} \tau_x^{(\varepsilon)} \delta_{\chi^{(\varepsilon)}(x)}.$$

**THÉORÈME 4.3.** (1)  $\mathbb{P}$ -presque sûrement, la marche aléatoire normalisée  $X^{(\varepsilon)}(\varepsilon^{-(1+1/\alpha)} \cdot)$  a même loi que  $(\chi^{(\varepsilon)})^{-1}(B(\varepsilon^{1/\alpha} \bar{\rho}^{(\varepsilon)}, \cdot))$ .

(2)  $\mathbb{P}$ -presque sûrement, on a la convergence :

$$(4.6) \quad (\chi^{(\varepsilon)})^{-1}(B(\varepsilon^{1/\alpha} \bar{\rho}^{(\varepsilon)}, \cdot)) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} B(\rho, \mathbb{E}[\tau_0^{-\alpha}]^{-2} \cdot)$$

au sens de la topologie de Skorokhod.

Ce résultat peut se démontrer de la même manière que le théorème 4.1.

Comme dans [FIN02], l'enjeu central de [BČ05] est d'obtenir une convergence dans un sens plus fort que seulement (4.6), pour pouvoir en déduire des résultats de vieillissement. Par exemple, la quantité

$$R(\theta) = \mathbb{E} \mathbb{P}_0[B(\rho, (1+\theta)t) = B(\rho, t)]$$

ne dépend pas de  $t$ , du fait de l'invariance d'échelle, et de plus,

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} R(\theta) = 1, \quad \text{et} \quad \lim_{\theta \rightarrow +\infty} R(\theta) = 0.$$

[BČ05] montrent notamment que

$$\mathbb{E} \mathbb{P}_0^\dagger[X_{(1+\theta)t} = X_t] \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} R(\theta),$$

ce qui est un résultat de vieillissement au sens donné au paragraphe I.3.4.

## 5. Dynamique symétrique

La situation est très différente en dimension supérieure. Remarquons pour commencer que la construction vue à la section précédente n'a pas de sens en dimension  $d \geq 2$ . Il n'existe pas de temps local pour le mouvement brownien, qui ne rencontre d'ailleurs jamais l'ensemble dénombrable des  $\{x_i\}$  issus du processus ponctuel de Poisson.

Dans cette section, nous portons notre attention sur la dynamique symétrique. Si  $d \geq 3$ , la marche aléatoire simple visite de l'ordre de  $n^2$  sites avant de quitter la

boîte de taille  $n$ . Le temps nécessaire pour sortir de la boîte est donné par la somme des profondeurs des sites rencontrés. Du fait de l'hypothèse (3.1), cette somme est de l'ordre de  $n^{2/\alpha}$ . En conséquence, la marche aléatoire doit être observée sur une échelle de temps très petite devant le temps ergodique (de l'ordre de  $n^{d/\alpha}$  d'après le théorème III.4.1), et ne rencontre jamais les pièges les plus profonds de la boîte, dont la profondeur est de l'ordre de  $n^{d/\alpha}$ .

En dimension 2, la situation est plus subtile. En effet, le temps ergodique est de l'ordre de  $\ln(n)n^{2/\alpha}$  (voir les propositions III.5.1 et III.5.2), qui doit être comparé au temps que met la marche aléatoire partant de 0 pour toucher le bord de la boîte. Typiquement, la marche aléatoire simple visite  $n^2/\ln(n)$  sites avant d'atteindre le bord, et chaque site est visité de l'ordre de  $\ln(n)$  fois. Le temps nécessaire pour atteindre le bord est donc de l'ordre de

$$\ln(n) \left( \frac{n^2}{\ln(n)} \right)^{1/\alpha} = \ln(n)^{1-1/\alpha} n^{2/\alpha},$$

ce qui est (juste) un peu plus court que le temps ergodique  $\ln(n)n^{2/\alpha}$ .

On peut donner l'image heuristique suivante pour la marche aléatoire  $X$ . La marche aléatoire se déplace à peu près comme une marche aléatoire simple non perturbée la plupart du temps. Parfois, elle rencontre un piège profond, sur lequel elle s'arrête un temps très long. Ce temps est suffisamment long pour qu'en comparaison, le temps passé entre deux pièges soit négligeable. Elle peut éventuellement faire quelques allers et retours entre ce piège et ses voisins, puis reprend son comportement diffusif. Elle rencontre plus tard un nouveau piège, etc., sans jamais revenir sur les pièges précédemment rencontrés.

Cette description est assez correcte, à ceci près qu'elle doit être vraie pour toute échelle d'observation, et ce qui est considéré comme un piège ou non doit dépendre de cette échelle.

Nous discutons ici de la limite d'échelle de la dynamique symétrique obtenue par [BČ07]. Soit  $X^{(\varepsilon)}(t) = \sqrt{\varepsilon} X_{\varepsilon^{-1/\alpha}t}$ .

**THÉORÈME 5.1.** *Si  $a = 0$  et  $d \geq 3$ , alors pour presque tout environnement, la loi de  $X^{(\varepsilon)}$  sous  $\mathbb{P}_0^\tau$  converge, pour la topologie de Skorokhod et quand  $\varepsilon$  tend vers 0, vers la loi de  $B \circ H^{-1}$ , où  $B$  est un mouvement brownien,  $H$  est un subordonateur  $\alpha$ -stable, et  $(B, H)$  sont indépendants.*

*Remarque 5.2.* En dimension 2, le résultat est également valable, mais la normalisation est différente : on pose alors  $X^{(\varepsilon)}(t) = \sqrt{\varepsilon} X_{\varepsilon^{-1/\alpha}|\ln(\varepsilon)|^{1-1/\alpha}t}$ .

Comme pour le cas unidimensionnel, la limite d'échelle est le changement de temps d'un mouvement brownien. Cependant, le changement de temps est ici indépendant du mouvement brownien, et ne dépend pas d'un environnement limite.

Le processus  $B \circ H^{-1}$  est appelé en anglais « fractional kinetics process », que l'on pourrait traduire par *diffusion fractionnaire*. Ce processus est continu, et auto-similaire :  $B \circ H^{-1}(\lambda t)$  et  $\lambda^{\alpha/2} B \circ H^{-1}(t)$  ont même loi. Il n'est pas markovien, et présente des propriétés de vieillissement. Comme nous l'avons expliqué à la section III.1, l'immobilité du processus  $B \circ H^{-1}$  pendant l'intervalle de temps  $[t_w, t_w + t]$  est un événement qui peut être reformulé comme le fait que l'ensemble image du subordonateur n'intersecte pas  $[t_w, t_w + t]$ . La probabilité de l'événement

$$\forall s \leq t : B \circ H^{-1}(t_w) = B \circ H^{-1}(t_w + s)$$

est donc égale à  $As_\alpha(t_w/(t_w + t))$ , où  $As_\alpha$  est la loi de l'arcsinus définie en (III.1.2).

Pour montrer le théorème 5.1, [BČ07] utilisent le changement de temps que nous avons introduit à la section 1, qui permet d'écrire  $X(t)$  sous la forme  $\tilde{X}_{A^{-1}(t)}$  (voir l'équation (1.3)). Rappelons que, pour la dynamique symétrique, ce changement de temps est particulièrement intéressant, puisque  $\tilde{X}$  est alors la marche aléatoire

simple. Posons  $\hat{X}^{(\varepsilon)}(t) = \sqrt{\varepsilon}\hat{X}_{\varepsilon^{-1}t}$  et  $H^{(\varepsilon)}(t) = \varepsilon^{1/\alpha}A(\varepsilon^{-1}t)$ . Pour montrer le théorème 5.1, il suffit de voir que  $(\hat{X}^{(\varepsilon)}, H^{(\varepsilon)})$  converge en loi vers  $(B, H)$ .

Un problème de nature topologique apparaît ici. En effet, le processus  $H^{(\varepsilon)}$  est continu, et l'ensemble des fonctions continues est fermé pour la topologie de Skorokhod usuelle. Il est donc nécessaire de considérer une topologie différente. En fait, dans [Sk56], Skorokhod introduit simultanément plusieurs topologies, dont la topologie usuelle, qu'il appelle  $J_1$ . Nous utiliserons une autre topologie, appelée  $M_1$ , pour laquelle une suite de fonctions continues peut converger vers une fonction présentant des sauts. Pour une définition de cette topologie, nous renvoyons à [Sk56], ou également à [Wh, (3.3.4)]. A partir de maintenant, nous précisons si nous considérons la topologie  $M_1$  ou la topologie usuelle  $J_1$ .

Il s'agit donc de montrer le résultat suivant.

**THÉORÈME 5.3.** *Si  $a = 0$  et  $d \geq 3$ , alors pour presque tout environnement, la loi jointe de  $(\hat{X}^{(\varepsilon)}, H^{(\varepsilon)})$  sous  $\mathbf{P}_0^\tau$  converge, pour la topologie  $J_1 \times M_1$  et quand  $\varepsilon$  tend vers 0, vers la loi de  $(B, H)$ , où  $B$  est un mouvement brownien,  $H$  est un subordinateur  $\alpha$ -stable, et  $(B, H)$  sont indépendants.*

Pour démontrer ce résultat, [BČ07] utilisent une technique dite de « coarse graining » en anglais, que nous appellerons ici *décomposition mésoscopique*.

## 6. Décomposition mésoscopique pour $a = 0$

La méthode de décomposition mésoscopique a été introduite en dimension 2 par [BČM06] pour montrer des propriétés de vieillissement de la dynamique symétrique. Elle a ensuite été utilisée par [BČ07] pour montrer le théorème 5.3. Nous allons décrire brièvement cette méthode, pour  $d \geq 3$ .

On se donne trois échelles d'espace :

$$1 \ll \nu(\varepsilon) \ll \rho(\varepsilon) \ll r(\varepsilon).$$

Le processus est considéré jusqu'à sa sortie de la boule de taille  $r(\varepsilon)$ , que l'on note  $B(0, r(\varepsilon))$ . L'échelle  $r(\varepsilon)$  peut donc être appelée l'échelle macroscopique (si l'on souhaite une correspondance avec la normalisation  $\sqrt{\varepsilon}X_{\varepsilon^{-1/\alpha}t}$ , on peut considérer  $r(\varepsilon) = \sqrt{\varepsilon}$ ). On peut voir  $\rho(\varepsilon)$  comme une échelle mésoscopique, et  $\nu(\varepsilon)$  comme une échelle microscopique. Nous n'aurons pas besoin de connaître la valeur précise de ces différentes échelles dans cette présentation, mais mentionnons les cependant :  $\rho(\varepsilon) = r(\varepsilon)^{1-1/3d}$  et  $\nu(\varepsilon) = r(\varepsilon)^{1/d}$ .

Jusqu'à sa sortie de  $B(0, r(\varepsilon))$ , la marche aléatoire visite de l'ordre de  $r(\varepsilon)^2$  sites. Les sites qui comptent dans le changement de temps sont les sites les plus profonds parmi ceux-ci, et leur profondeur est de l'ordre de  $r(\varepsilon)^{2/\alpha}$ . Pour un petit paramètre  $\delta > 0$ , et un grand paramètre  $M > 0$ , considérons l'ensemble des *pièges profonds* :

$$T_\delta^M = \{x \in B(0, r(\varepsilon)) : r(\varepsilon)^{-2/\alpha}\tau_x \in [\varepsilon, M]\}.$$

Nous découpons la trajectoire en sous-parties d'échelle mésoscopique. Définissons  $(j_i^{(\varepsilon)})_{i \in \mathbb{N}}$  les instants de cette découpe, tels que  $j_0^{(\varepsilon)} = 0$  et

$$j_{i+1}^{(\varepsilon)} = \inf\{t > j_i^{(\varepsilon)} : \|\hat{X}(t) - \hat{X}(j_i^{(\varepsilon)})\| > \rho(\varepsilon)\}.$$

L'instant  $\lambda_{i,1}^{(\varepsilon)}$  est le premier instant à partir de  $j_i^{(\varepsilon)}$  pour lequel la marche aléatoire rencontre un piège profond :

$$\lambda_{i,1}^{(\varepsilon)} = \inf\{t \geq j_i^{(\varepsilon)} : \hat{X}(t) \in T_\delta^M\}.$$

On définit de plus  $\lambda_{i,2}^{(\varepsilon)}$  et  $\lambda_{i,3}^{(\varepsilon)}$  par

$$\lambda_{i,2}^{(\varepsilon)} = \inf\{t \geq \lambda_{i,1}^{(\varepsilon)} : \|\hat{X}(t) - \hat{X}(\lambda_{i,1}^{(\varepsilon)})\| > \nu(\varepsilon)\},$$

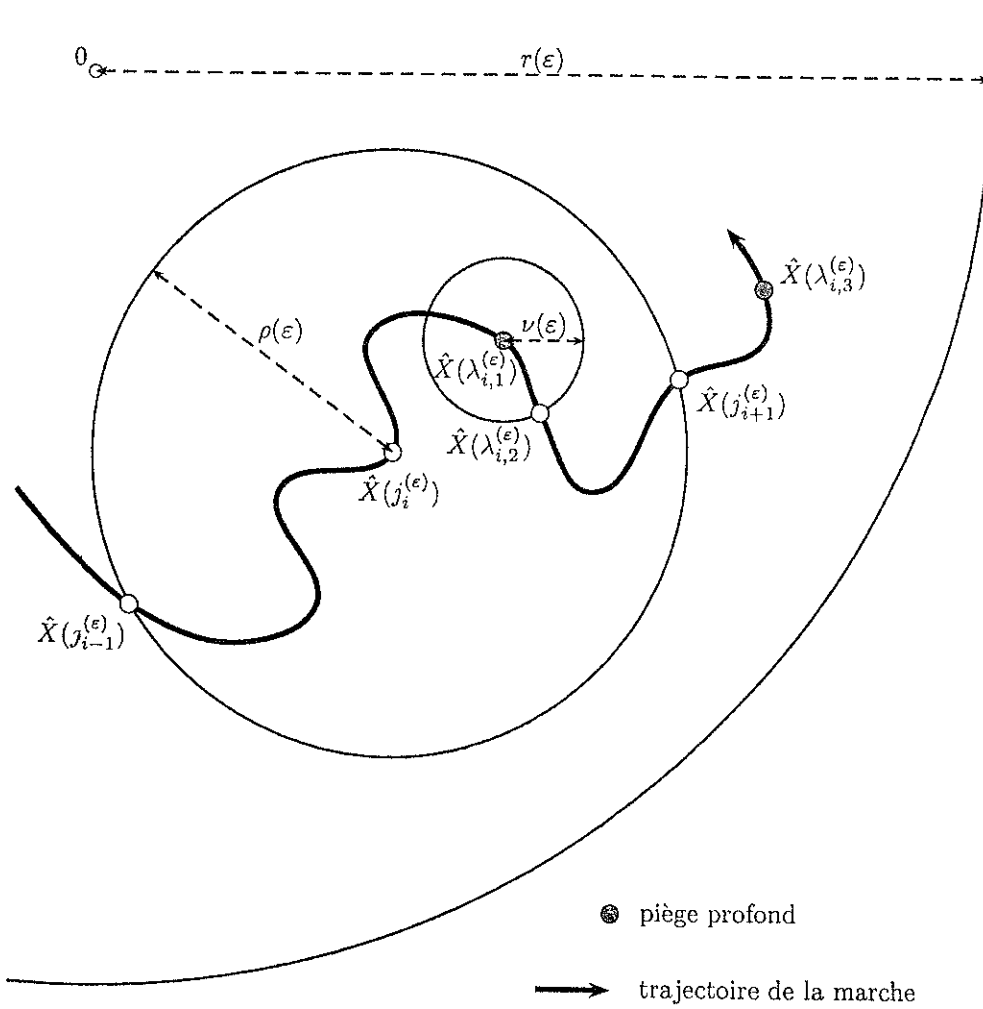


FIG. 6.1. Découpage mésoscopique de la trajectoire.

$$\lambda_{i,3}^{(\varepsilon)} = \inf \left[ \{t \geq \lambda_{i,2}^{(\varepsilon)} : \hat{X}(t) \in T_\delta^M\} \cup \{t \geq \lambda_{i,1}^{(\varepsilon)} : \hat{X}(t) \in T_\delta^M \setminus \{\hat{X}(\lambda_{i,1}^{(\varepsilon)})\}\} \right].$$

La figure 6.1 représente les différents paramètres ainsi définis.

Soient  $E_0$  et  $E_1$  les ensembles

$$E_0 = \{x \in B(0, r(\varepsilon)) : d(x, T_\delta^M) > \nu(\varepsilon)\},$$

$$E_1 = \{x \in E_0 : d(x, \partial B(0, r(\varepsilon))) > \rho(\varepsilon)\}.$$

Dans le cas où

$$(6.1) \quad \hat{X}(j_i^{(\varepsilon)}) \in E_1 \quad \text{et} \quad \hat{X}(j_{i+1}^{(\varepsilon)}) \in E_0,$$

on définit le *score*  $s_i^{(\varepsilon)}$  du morceau de trajectoire entre les instants  $j_i^{(\varepsilon)}$  et  $j_{i+1}^{(\varepsilon)}$  de la manière suivante :

(1) Si  $\lambda_{i,1}^{(\varepsilon)} > j_{i+1}^{(\varepsilon)}$ , alors  $s_i^{(\varepsilon)} = 0$ .

(2) Si les conditions suivantes sont vérifiées :

$$\lambda_{i,1}^{(\varepsilon)} < \lambda_{i,2}^{(\varepsilon)} < j_{i+1}^{(\varepsilon)} < \lambda_{i,3}^{(\varepsilon)},$$

$$d\left(\hat{X}(\lambda_{i,1}^{(\varepsilon)}), \partial B(\hat{X}(j_i^{(\varepsilon)}), \rho(\varepsilon))\right) > \nu(\varepsilon),$$

$$T_\delta^M \cap B(\hat{X}(\lambda_{i,1}^{(\varepsilon)}), \nu(\varepsilon)) = \{\hat{X}(\lambda_{i,1}^{(\varepsilon)})\},$$

alors le score est donné par

$$(6.2) \quad s_i^{(\varepsilon)} = \int_{j_i^{(\varepsilon)}}^{j_{i+1}^{(\varepsilon)}} \tau_{\hat{X}_s} \mathbf{1}_{\{\tau_{\hat{X}_s} \in T_\delta^M\}} ds.$$

Remarquons que la formule (6.2) est également vraie dans le premier cas. Dans les cas restants (en particulier, lorsque (6.1) n'est pas vérifiée), on pose  $s_i^{(\varepsilon)} = \infty$ .

S'il n'est pas infini, le score  $s_i^{(\varepsilon)}$  représente donc l'incrément du changement de temps sur l'intervalle de temps  $[j_i^{(\varepsilon)}, j_{i+1}^{(\varepsilon)}]$ .

Notons  $h(\varepsilon) = r(\varepsilon)/\rho(\varepsilon)$ , et  $G^\circ$  le temps total passé par la marche aléatoire simple sur son point de départ.

La partie centrale de [BČ07] consiste à montrer la proposition suivante.

**PROPOSITION 6.1.** *Pour tout  $\delta, M$ , pour presque tout environnement, les trois propriétés suivantes sont vérifiées, uniformément sur  $x \in E_1$ .*

$$(6.3) \quad \mathbf{P}_x^\tau[s_0^{(\varepsilon)} = \infty] = o(h(\varepsilon)^{-2}).$$

$$(6.4) \quad \mathbf{P}_x^\tau[s_0^{(\varepsilon)} \neq 0] = h(\varepsilon)^{-2} \left( \int_\delta^M \frac{\alpha}{G^\circ z^{\alpha+1}} dz + o(1) \right).$$

$$(6.5) \quad \mathbf{E}_x^\tau \left[ \exp \left( -\lambda \frac{s_0^{(\varepsilon)}}{r(\varepsilon)^{2/\alpha}} \right) \right] = 1 - \frac{1}{h(\varepsilon)^2} (F(\lambda) + o(1)),$$

où

$$(6.6) \quad F(\lambda) = \int_{z=\delta}^M \int_{t=0}^{+\infty} \left( 1 - e^{-\lambda G^\circ z t} \right) e^{-t} \frac{\alpha}{G^\circ z^{\alpha+1}} dt dz.$$

*Remarque 6.2.* Cette proposition reprend [BČ07, lemme 2.1], en prenant en compte le fait qu'il manque un terme multiplicatif en  $(G^\circ)^{-1}$  à partir de l'équation [BČ07, (4.15)]. Aussi, nous avons écrit (6.6) sous une forme légèrement différente de celle donnée par [BČ07, lemme 2.1], pour que celle-ci ressemble davantage aux résultats que nous obtiendrons pour la dynamique générale.

**IDÉE DE PREUVE.** Pour le premier point, la preuve consiste à énumérer tous les scénarios possibles donnant un score infini, et à montrer que chacun a une probabilité  $o(h(\varepsilon)^{-2})$ . Pour que le score soit infini, les différents scénarios possibles sont :

- (1) le point de sortie de  $B(x, \rho(\varepsilon))$  n'est pas dans  $E_0$ ,
- (2) la marche visite un piège profond à distance inférieure à  $\nu(\varepsilon)$  du bord de  $B(x, \rho(\varepsilon))$ ,
- (3) la marche visite deux pièges profonds avant de quitter  $B(x, \rho(\varepsilon))$ ,
- (4) la marche visite un piège profond tel qu'un autre piège profond se trouve à distance inférieure à  $\nu(\varepsilon)$  de celui-ci,
- (5) la marche visite un piège profond  $y$ , puis sort de la boule  $B(y, \nu(\varepsilon))$ , puis retourne en  $y$  avant de sortir de  $B(x, \rho(\varepsilon))$ .

Pour contrôler tous ces événements, il est nécessaire d'avoir à disposition de bonnes bornes supérieures sur les probabilités de transition. Il est plus difficile d'obtenir les égalités (6.4) et (6.6), car dans ce cas, il est nécessaire de disposer d'estimées inférieures et supérieures asymptotiquement équivalentes sur les probabilités de transition. En fait, le résultat repose essentiellement sur le lemme suivant [BC07, lemme 4.3].

LEMME 6.3. *Soit  $\mathcal{P}_x(\varepsilon)$  la probabilité partant de  $x$  de toucher  $T_\delta^M$  avant de quitter  $B(x, \rho(\varepsilon))$ . Pour tout  $\eta > 0$ , pour presque tout environnement, pour tout  $n$  assez grand, on a, pour tout  $x \in E_1$  :*

$$\frac{\mathcal{P}_x(\varepsilon)}{(G^\circ)^{-1}(\delta^{-\alpha} - M^{-\alpha})h(\varepsilon)^{-2}} \in [1 - \eta, 1 + \eta].$$

La preuve de ce lemme est subtile, et consiste, dans un premier temps, à montrer que l'ensemble des pièges profonds est distribué de manière assez homogène dans la boule  $B(x, \rho(\varepsilon))$ , en utilisant une échelle intermédiaire entre  $\nu(\varepsilon)$  et  $\rho(\varepsilon)$ . Ensuite, il faut estimer la probabilité de toucher cet ensemble « bien réparti », en utilisant des bornes supérieures et inférieures sur la probabilité pour la marche aléatoire simple de toucher tel ou tel point. Les bornes supérieures et inférieures doivent, au final, donner la même constante dominante, et doivent donc être très précises.

Ce lemme est, à peu de choses près, une réécriture de (6.4). Pour montrer (6.5), on peut d'après (6.3) se restreindre à l'événement où le score n'est pas infini. En particulier, on peut supposer que la marche aléatoire rencontre au plus un site profond. Rapidement, l'argument se décompose ainsi : le score vaut 0 avec probabilité

$$(6.7) \quad 1 - h(\varepsilon)^{-2} \int_\delta^M \frac{\alpha}{G^\circ z^{\alpha+1}} dz.$$

On décompose l'ensemble des pièges profonds en utilisant une suite  $\delta = z_0 < z_1 < \dots < z_k = M$ . Si la marche aléatoire simple trouve un piège  $y \in T_{z_i}^{z_{i+1}}$ , elle le visite pendant un temps total  $G^\circ$  multiplié par une variable aléatoire exponentielle sur ce site, avant de quitter  $B(x, \nu)$ . Si  $z_i$  et  $z_{i+1}$  sont assez proches, le score dans ce cas est environ  $G^\circ e_0 z_i r(\varepsilon)^{2/\alpha}$ , où  $e_0$  est une variable aléatoire exponentielle de paramètre 1. De plus, d'après le lemme, la probabilité d'un tel événement est de l'ordre de

$$h(\varepsilon)^{-2} \int_{z_i}^{z_{i+1}} \frac{\alpha}{G^\circ z^{\alpha+1}} dz.$$

Ainsi, l'espérance de  $\exp\left(-\lambda \frac{s_0^{(\varepsilon)}}{r(\varepsilon)^{2/\alpha}}\right)$ , restreinte à l'événement où la marche aléatoire trouve un piège profond, est approximée par

$$h(\varepsilon)^{-2} \sum_i \int_{z_i}^{z_{i+1}} \int_{t=0}^{+\infty} e^{-G^\circ z_i t} e^{-t} \frac{\alpha}{G^\circ z^{\alpha+1}} dt dz.$$

En prenant une subdivision  $(z_i)$  de plus en plus fine, et en prenant en compte la partie (6.7) correspondant à l'événement où la marche aléatoire ne rencontre aucun piège profond, on obtient (6.5).  $\square$

Pour obtenir la limite d'échelle de  $H^{(\varepsilon)}$ , il faut d'abord voir que la somme (normalisée) des scores est une bonne approximation de  $H^{(\varepsilon)}$ . Le nombre de sous-parties mésoscopiques découvertes avant de sortir de la boule de rayon  $r(\varepsilon)$  est de l'ordre de  $h(\varepsilon)^2$ . L'équation (6.3) assure donc qu'avec grande probabilité, aucune partie mésoscopique n'a un score infini. Il reste à montrer que, si  $\delta$  est assez petit et  $M$  assez grand, alors le temps passé dans l'ensemble  $T_\delta^\delta$  est négligeable, et avec

grande probabilité, la marche ne visite pas  $T_M^\infty$ . Il reste enfin à étudier la loi jointe de  $(X^{(\varepsilon)}, H^{(\varepsilon)})$ , et on obtient le théorème 5.3.

## 7. Dynamique générale

En utilisant des estimées fines obtenues par [BD09] sur les probabilités de transition et la fonction de Green de la marche aléatoire en conductance aléatoire (notamment, une inégalité de Harnack et des estimées du type vu en (II.11.3)), [BC09] sont parvenus à adapter la méthode que nous venons de voir au cas de la dynamique générale, et donc à montrer le théorème 5.3 pour tout  $a \in [0, 1]$ .

Nous présentons ici une approche alternative permettant de montrer ce théorème dès que  $d \geq 5$ . La preuve complète de ce résultat est donnée au chapitre VII.

**THÉOREME 7.1.** *Soit  $a \in [0, 1]$  et  $d \geq 5$ . Pour presque tout environnement, la loi jointe de  $(\hat{X}^{(\varepsilon)}, H^{(\varepsilon)})$  sous  $\mathbb{P}_0^\gamma$  converge, pour la topologie  $J_1 \times M_1$  et quand  $\varepsilon$  tend vers 0, vers la loi de  $(B, H)$ , où  $B$  est un mouvement brownien,  $H$  est un subordinateur  $\alpha$ -stable, et  $(B, H)$  sont indépendants.*

Dans un premier temps, nous allons montrer le résultat plus faible qui suit. Nous verrons ensuite comment en déduire le théorème 7.1. Nous notons  $\bar{\mathbb{P}} = \mathbb{P}\mathbb{P}_0^\gamma$  la loi moyennée, et  $\bar{\mathbb{E}}$  l'espérance associée.

**PROPOSITION 7.2.** *Si  $d \geq 5$ , alors la loi de  $H^{(\varepsilon)}$  sous  $\bar{\mathbb{P}}$  converge, pour la topologie  $M_1$  et quand  $\varepsilon$  tend vers 0, vers la loi d'un subordinateur  $\alpha$ -stable.*

La preuve de cette proposition repose sur les estimées de mélange de l'environnement vu par la particule obtenues au chapitre II, et plus précisément la proposition II.8.10. Cette proposition nous sera également utile pour passer du résultat pour la loi moyennée au résultat presque sûr du théorème 7.1. En dimension inférieure ou égale à 4, les estimées de mélange obtenues au chapitre II ne sont pas suffisantes pour permettre de montrer la proposition 7.2 de cette manière. Soulignons enfin le rôle de l'hypothèse (H2) donnée à la section 3. Celle-ci assure en effet que les conductances de  $\hat{X}$ , données en (1.1), sont uniformément minorées, une propriété requise pour la validité de la proposition II.8.10.

## 8. Idées de preuve

Dans cette section, nous donnons les grandes lignes de la preuve de la proposition 7.2, puis du théorème 7.1. Nous supposons que  $a \neq 0$  et  $d \geq 5$ .

Rappelons que  $H^{(\varepsilon)}$  s'écrit

$$H^{(\varepsilon)}(t) = \varepsilon^{1/\alpha} \int_0^{\varepsilon^{-1}t} \tau_{\hat{X}_s} ds.$$

En termes vagues (pour l'instant),  $H^{(\varepsilon)}$  ressemble à une somme de variables aléatoires distribuées comme  $\tau_0$ . De manière classique lorsque l'on considère des sommes de variables aléatoires non intégrables, seuls les plus grands termes contribuent vraiment à la somme. Pour tout  $\delta \geq 0$ , on pose donc

$$H_\delta^{(\varepsilon)}(t) = \varepsilon^{1/\alpha} \int_0^{\varepsilon^{-1}t} \tau_{\hat{X}_s} \mathbf{1}_{\{\varepsilon^{1/\alpha} \tau_{\hat{X}_s} \geq \delta\}} ds,$$

qui devrait être une bonne approximation de  $H^{(\varepsilon)}(t)$  pour  $\delta$  suffisamment petit. L'environnement vu par  $\hat{X}$ , que nous avons défini en (1.6), est stationnaire sous la mesure  $\bar{\mathbb{P}}$ . En conséquence,  $H_\delta^{(\varepsilon)}$ , qui est une fonctionnelle additive de l'environnement vu par la particule, est à accroissements stationnaires. De plus, la proposition II.8.10 donne une estimée de la vitesse de mélange de l'environnement vu par

la particule. En utilisant ce résultat, on peut montrer que, si  $H_\delta^{(\varepsilon)}$  converge le long d'une sous-suite particulière, alors la limite est à accroissements indépendants.

**PROPOSITION 8.1.** *On suppose  $d \geq 5$ . Si la loi de  $(H_\delta^{(\varepsilon)})$  sous  $\bar{\mathbb{P}}$  converge, le long d'une sous-suite, vers la loi d'un processus  $H$ , alors  $H$  est un subordonateur.*

Il ne serait pas difficile de montrer que  $H^{(\varepsilon)}$  forme une famille de lois tendue, en majorant  $H^{(\varepsilon)}$  par une somme de variables aléatoires indépendantes. Le problème est de montrer qu'il n'y a qu'un seul point d'adhérence ( $\alpha$ -stable) pour la loi de  $(H_\delta^{(\varepsilon)})$ .

**8.1. Processus d'exploration.** Nous commençons par définir une suite de points, que nous appelons *processus d'exploration*, qui consiste à parcourir la trajectoire de la marche aléatoire ainsi que son voisinage. Soient  $Y_1, Y_2, \dots$  les sites successivement visités par la marche aléatoire. On énumère ces sites et leur voisinage

$$(8.1) \quad (Y_1 + z)_{|z| \leq 1}, (Y_2 + z)_{|z| \leq 1}, \dots,$$

où  $(Y_i + z)_{|z| \leq 1}$  est parcouru dans un ordre arbitrairement choisi, indépendamment de  $i$ . Le processus d'exploration, noté  $x_1, x_2, \dots$ , est obtenu en supprimant les répétitions de la suite (8.1).

Lorsque la marche aléatoire arrive en  $Y_i$ , elle peut découvrir de nouveaux sites. La loi de la marche aléatoire jusqu'au point  $Y_i$  ne dépend pas de la profondeur de ces nouveaux sites découverts, et on a donc le résultat suivant.

**PROPOSITION 8.2.** *Sous  $\bar{\mathbb{P}}$ , les variables aléatoires  $(\tau_{x_n})_{n \geq 1}$  sont indépendantes et identiquement distribuées.*

Nous dirons qu'un site  $x$  est découvert avant l'instant  $t$  s'il existe  $s \leq t$  tel que

$$\|\hat{X}_s - x\| \leq 1.$$

Notons  $r(t)$  le nombre de sites découverts avant l'instant  $t$ . La proposition suivante donne une loi des grands nombres pour  $r(t)$ .

**PROPOSITION 8.3.** *Il existe une constante  $c > 0$  telle que, presque sûrement :*

$$\frac{r(t)}{t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} c.$$

La preuve de cette proposition utilise le théorème ergodique sous-additif pour le processus de l'environnement vu par la particule. Une partie technique consiste à montrer que  $r(t)$  est une variable aléatoire intégrable. La méthode utilisée pour ce faire est proche de celle esquissée à la fin de l'idée de preuve de la proposition II.8.9, et consiste à entourer les arêtes de conductance élevée par un petit ensemble, pour lequel le temps de sortie est minoré.

**8.2. Temps d'occupation d'un piège profond.** Soit  $l(x, \cdot)$  le temps local au point  $x$  de la marche aléatoire  $\hat{X}$ . Il est possible de réécrire  $H^{(\varepsilon)}$  de la façon suivante :

$$(8.2) \quad H^{(\varepsilon)}(t) = \varepsilon^{1/\alpha} \int_0^{\varepsilon^{-1}t} \tau_{\hat{X}_s} ds = \varepsilon^{1/\alpha} \sum_{i=1}^{+\infty} l(x_i, \varepsilon^{-1}t) \tau_{x_i}.$$

Nous dirons que  $x$  est un *piège profond* si  $\varepsilon^{1/\alpha} \tau_x \geq \delta$ . Notons  $(x_\delta^{(\varepsilon)}(n))_{n \geq 1}$  la suite des pièges profonds découverts par la marche aléatoire. On a de même :

$$(8.3) \quad H_\delta^{(\varepsilon)}(t) = \varepsilon^{1/\alpha} \sum_{n=1}^{+\infty} l(x_\delta^{(\varepsilon)}(n), \varepsilon^{-1}t) \tau_{x_\delta^{(\varepsilon)}(n)}.$$

Lorsque la marche aléatoire découvre un site profond, elle le visite un certain nombre de fois (ou éventuellement jamais), puis s'en éloigne sans plus y revenir. Ces visites successives ont lieu sur un intervalle de temps qui ne dépend pas de  $\varepsilon$ . Après la renormalisation en  $\varepsilon^{-1}t$ , la fonction  $l(x_\delta^{(\varepsilon)}(n), \varepsilon^{-1}\cdot)$  ressemble donc de plus en plus à une fonction en escalier :

$$l(x_\delta^{(\varepsilon)}(n), \varepsilon^{-1}t) \simeq l(x_\delta^{(\varepsilon)}(n), \infty) \mathbf{1}_{\{t \geq \varepsilon T_\delta^{(\varepsilon)}(n)\}},$$

où  $T_\delta^{(\varepsilon)}(n)$  est l'instant de découverte du site  $x_\delta^{(\varepsilon)}(n)$ . Notons  $G(\tau)$  l'espérance du temps total passé à l'origine par la marche aléatoire  $\hat{X}$  partant de ce point, dans l'environnement  $\tau$ . En introduisant une nouvelle variable aléatoire  $e_\delta^{(\varepsilon)}(n)$ , on peut décomposer  $l(x_\delta^{(\varepsilon)}(n), \infty)$  en :

$$(8.4) \quad l(x_\delta^{(\varepsilon)}(n), \infty) = G\left(\theta_{x_\delta^{(\varepsilon)}(n)} \tau\right) e_\delta^{(\varepsilon)}(n),$$

Il est possible que  $l(x_\delta^{(\varepsilon)}(n), \infty) = 0$ , dans le cas où la marche aléatoire découvre  $x_\delta^{(\varepsilon)}(n)$  mais ne le visite pas. Cependant, comme nous supposons ici  $a \neq 0$ , la marche est davantage attirée vers le piège profond que vers les autres sites, et le visitera avec une probabilité proche de 1. Conditionnellement à cet événement,  $e_\delta^{(\varepsilon)}(n)$  suit une loi exponentielle de paramètre 1.

Pour comprendre le comportement asymptotique de  $G\left(\theta_{x_\delta^{(\varepsilon)}(n)} \tau\right)$ , on définit

$$\tau_\delta^{(\varepsilon)}(n) = \left(\tau_{x_\delta^{(\varepsilon)}(n)+z}\right)_{z \neq 0} \quad \text{et} \quad \bar{G}((\tau_z)_{z \neq 0}) = \lim_{\tau_0 \rightarrow +\infty} G(\tau).$$

En d'autres termes,  $\tau_\delta^{(\varepsilon)}(n)$  est l'environnement autour du piège profond  $x_\delta^{(\varepsilon)}(n)$ , sans prendre en compte la valeur à l'origine. Quand  $\varepsilon$  tend vers 0, la profondeur du piège profond diverge, et  $G\left(\theta_{x_\delta^{(\varepsilon)}(n)} \tau\right)$  devient proche de  $\bar{G}\left(\tau_\delta^{(\varepsilon)}(n)\right)$ . En conséquence,  $H_\delta^{(\varepsilon)}(t)$  est assez proche de

$$(8.5) \quad \varepsilon^{1/\alpha} \sum_{n=1}^{+\infty} \bar{G}\left(\tau_\delta^{(\varepsilon)}(n)\right) e_\delta^{(\varepsilon)}(n) \tau_{x_\delta^{(\varepsilon)}(n)} \mathbf{1}_{\{t \geq \varepsilon T_\delta^{(\varepsilon)}(n)\}}.$$

D'après la proposition 8.1, toute limite de (8.5) est un subordonateur. Pour caractériser les limites possibles, il suffit donc de s'intéresser à la loi du premier saut. Intuitivement,  $\varepsilon^{1/\alpha} \tau_{x_\delta^{(\varepsilon)}(1)}$  est dans le domaine d'attraction d'une loi  $\alpha$ -stable, tandis que  $\bar{G}\left(\tau_\delta^{(\varepsilon)}(n)\right) e_\delta^{(\varepsilon)}(n)$  est une variable aléatoire très régulière, de telle sorte que le produit reste dans le domaine d'attraction d'une loi  $\alpha$ -stable, et donc que le subordonateur limite soit assez proche d'un subordonateur  $\alpha$ -stable.

Il est possible de décrire précisément le comportement asymptotique des variables aléatoires apparaissant dans la somme (8.5). On a déjà vu que  $e_\delta^{(\varepsilon)}(n)$  suit (asymptotiquement) une loi exponentielle de paramètre 1. La loi de  $\tau_{x_\delta^{(\varepsilon)}(n)}$  est celle de  $\tau_0$  conditionnée à ce que 0 soit un piège profond, et il n'est donc pas difficile de voir que  $\varepsilon^{1/\alpha} \tau_{x_\delta^{(\varepsilon)}(n)}$  converge en loi, et d'identifier la limite.

Considérons maintenant les variables aléatoires  $(\varepsilon T_\delta^{(\varepsilon)}(n))_{n \geq 1}$ . Rappelons que les  $(\tau_{x_i})_{i \geq 1}$  sont des variables aléatoires indépendantes et de même loi. Les événements successifs «  $x_i$  est un piège profond » forment une suite de tirages de Bernoulli. La probabilité que l'un de ces événements soit réalisé est donnée par

$$\mathbb{P}[\tau_0 \geq \varepsilon^{-1/\alpha} \delta] \sim \frac{\varepsilon}{\delta^\alpha}.$$

De plus, le nombre de sites visités durant le temps  $\varepsilon^{-1}t$  est de l'ordre de  $c\varepsilon^{-1}t$  d'après la proposition 8.3. De ces observations, il s'en suit que les  $(\varepsilon T_\delta^{(\varepsilon)}(n))_{n \in \mathbb{N}}$  convergent en loi vers un processus de Poisson d'intensité  $c\delta^{-\alpha}$ .

On peut montrer que les variables aléatoires  $(e_\delta^{(\varepsilon)}(n), \tau_\delta^{(\varepsilon)}(n), \varepsilon^{1/\alpha} \tau_{x_\delta^{(\varepsilon)}(n)})$  sont asymptotiquement indépendantes. Pour caractériser la loi asymptotique du premier saut de (8.5), il ne reste donc plus qu'à décrire le comportement asymptotique de  $\tau_\delta^{(\varepsilon)}(1)$ .

**8.3. L'environnement autour d'un piège profond.** Nous montrons alors le résultat suivant.

**PROPOSITION 8.4.** *La loi de  $\tau_\delta^{(\varepsilon)}(1)$  sous  $\bar{\mathbb{P}}$  converge vers une loi absolument continue par rapport à  $\mathbb{P}$ , qui est donnée par*

$$\frac{1}{c\bar{G}(\tau)} d\mathbb{P}(\tau),$$

où la constante  $c$  est celle de la proposition 8.3.

Pour montrer cette proposition, nous utilisons une approche similaire. Soit  $h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue bornée, à valeurs dans  $\mathbb{R}_+$ , et telle que  $h(\tau)$  ne dépende pas de  $\tau_0$ . Nous étudions

$$(8.6) \quad L_\delta^{(\varepsilon)}(t) = \int_0^{\varepsilon^{-1}t} h(\hat{\tau}(s)) \mathbf{1}_{\{\varepsilon^{1/\alpha} \tau_{X_s} \geq \delta\}} ds.$$

Nous pouvons calculer l'espérance de  $L_\delta^{(\varepsilon)}(t)$  de deux manières différentes. En utilisant (8.6) et la stationnarité de l'environnement vu par la particule, nous avons :

$$\bar{\mathbb{E}} \left[ L_\delta^{(\varepsilon)}(t) \right] = \varepsilon^{-1} t \mathbb{E} \left[ h(\tau) \mathbf{1}_{\{\varepsilon^{1/\alpha} \tau_0 \geq \delta\}} \right],$$

qui, comme  $h(\tau)$  ne dépend pas de  $\tau_0$ , converge vers

$$(8.7) \quad t\delta^{-\alpha} \mathbb{E}[h(\tau)].$$

Par ailleurs, en utilisant une décomposition de  $L_\delta^{(\varepsilon)}$  similaire à celle obtenue en (8.5) pour  $H_\delta^{(\varepsilon)}$ , on obtient :

$$\bar{\mathbb{E}} \left[ L_\delta^{(\varepsilon)}(t) \right] \simeq tc\delta^{-\alpha} \bar{\mathbb{E}} \left[ e_\delta^{(\varepsilon)}(1) (\bar{G}h)(\tau_\delta^{(\varepsilon)}(1)) \right] = tc\delta^{-\alpha} \bar{\mathbb{E}} \left[ (\bar{G}h)(\tau_\delta^{(\varepsilon)}(1)) \right].$$

En comparant ce résultat avec (8.7), on obtient la proposition 8.4.

**8.4. Conclusion.** A l'aide de la proposition 8.4, il est facile d'en déduire que la loi de  $H_\delta^{(\varepsilon)}$  a une unique valeur d'adhérence, et de caractériser celle-ci, à l'aide de son exposant de Laplace par exemple. En passant à la limite  $\delta \rightarrow 0$ , on obtient que la loi de  $H^{(\varepsilon)}$  converge, quand  $\varepsilon$  tend vers 0, vers la loi d'un subordonateur dont l'exposant de Laplace est donné par

$$(8.8) \quad \psi(\lambda) = \Gamma(\alpha + 1) \mathbb{E} \left[ \bar{G}(\tau)^{\alpha-1} \right] \int_0^{+\infty} (1 - e^{-\lambda u}) \frac{\alpha}{u^{\alpha+1}} du,$$

où  $\Gamma$  est la fonction gamma d'Euler. Cet exposant de Laplace est bien celui d'un subordonateur  $\alpha$ -stable, ce qui termine la preuve de la proposition 7.2.

Pour en déduire le théorème 7.1, il reste essentiellement deux étapes. Il faut dans un premier temps étendre la convergence à la loi jointe  $(\hat{X}^{(\varepsilon)}, H^{(\varepsilon)})$ , puis passer du résultat sous la mesure moyennée à un résultat presque sûr.

Comme nous l'avons vu à la section II.5, la marche aléatoire  $\hat{X}$  satisfait un principe d'invariance presque sûr d'après [BD09], et donc en particulier un principe d'invariance en moyenne. En conséquence, la loi jointe  $(\hat{X}^{(\varepsilon)}, H^{(\varepsilon)})$  est tendue, et toute valeur d'adhérence est de la forme  $(B, H)$ , où les marginales sont connues,

$B$  étant un mouvement brownien, et  $H$  un subordonateur  $\alpha$ -stable. Un résultat similaire à celui de la proposition 8.1 assure que  $(B, H)$  est un processus de Lévy. Si l'on décompose un processus de Lévy en la somme d'un processus continu et d'un processus de sauts, ces deux processus sont indépendants (ce fait peut être montré en utilisant la représentation de Lévy-Khintchine [Be, section I-1]). En conséquence, les processus  $B$  et  $H$  sont indépendants. Ceci caractérise de manière unique la loi de  $(B, H)$ .

Il reste finalement à passer de la mesure moyennée à la mesure presque sûre. Pour ce faire, nous utilisons une technique similaire au lemme II.5.1, qui peut être vue comme un argument de concentration. Cette technique consiste à vérifier que la variance de certaines fonctionnelles de  $(\hat{X}^{(e)}, H^{(e)})$  converge vers 0 suffisamment rapidement, un résultat que nous obtenons en utilisant à nouveau la proposition II.8.10.

### 9. Questions ouvertes

Nous avons donc obtenu la limite d'échelle de la dynamique asymétrique ( $a \neq 0$ ) sur  $\mathbb{Z}^d$ , pour  $d \geq 5$ . Le premier problème laissé en suspens est d'étendre la méthode aux dimensions inférieures. Pour que le résultat couvre toute dimension  $d \geq 3$  (comme c'est le cas pour [BČ09]), il suffirait d'améliorer les estimées de mélange de l'environnement vu par la particule. Le cas de la dimension 2 semble plus délicat, et reste ouvert à ce jour.



## Variance decay for functionals of the environment viewed by the particle

ABSTRACT. For the random walk among random conductances, we prove that the environment viewed by the particle converges to equilibrium polynomially fast in the variance sense, our main hypothesis being that the conductances are bounded away from zero. The basis of our method is the establishment of a Nash inequality, followed either by a comparison with the simple random walk or by a more direct analysis based on a martingale decomposition. As an example of application, we show that under certain conditions, our results imply an estimate of the speed of convergence of the mean square displacement of the walk towards its limit.

### 1. Introduction

When considering some large scale property of a heterogeneous environment, it is natural to expect that the local fluctuations average out, and that one can replace the irregular medium by an “averaged” one, described by a small number of effective parameters. This problem of homogenization of heterogeneous media is old, and can be traced back at least to [Ma] and [Ra92]. Mathematical results concerning the homogenization of periodic environments began to appear around 1970 (see for instance [JKO, Chapter 1], and references therein). The study of averaging of random environments started with the works of [Ko78], [Yu80], and [PV81], where stochastic homogenization was obtained for divergence form elliptic operators. These analytic results have their probabilistic counterpart, in terms of invariance principles for certain diffusions in random environment [Kü83, Os83].

A central question follows any homogenization result : when can one replace, up to some given precision, the heterogeneous medium by the averaged one ?

As discussed in [Mo91, p. 199-205], and contrary to the periodic case (see for instance [Mo91, p. 151-152] and [JKO, Section 2.6]), the typical space scale of the averaging of a random environment may be unexpectedly large. As a matter of fact, very little is known about this issue. A notable exception is [Yu86], where the author considers the Poisson equation on a bounded domain of  $\mathbb{R}^d$ , for divergence form elliptic operators. It is shown that the solution corresponding to a typical length scale of order  $\varepsilon$  converges, as  $\varepsilon$  tends to 0, to the solution of the averaged problem faster than some power of  $\varepsilon$ , where the exponent depends on the dimension  $d \geq 3$ , the ellipticity constant and some mixing condition.

The related problem of finding an efficient way to compute the effective parameters of the averaged environment is also troublesome. Let us consider a random walk or a diffusion in random environment, and assuming it exists, let us write  $D$  for the effective diffusion matrix. As the periodic case is better understood, it is natural to consider periodizations of the initial random environment  $\omega$ . For periods of size  $n$ , this procedure defines an effective diffusion matrix  $D_n(\omega)$ , that might be a good approximation of  $D$ . Considering divergence form elliptic operators and using results from [Yu86], it is shown in [BP04] that  $D_n(\omega)$  converges to  $D$  faster than  $Cn^{-\alpha}$ , where  $\alpha$  depends on the dimension  $d \geq 3$ , the ellipticity constant and

some mixing condition. In the case of a random walk among random independent conductances, [CI03] and [Bo09] have shown that, under an ellipticity condition,  $D_n(\omega)$  converges to  $D$  almost surely (but without quantitative estimates on this convergence), and provide estimates of the variance of  $D_n(\omega)$  for fixed  $n$ .

Many proofs of homogenization results rely on the ergodicity of an auxiliary process introduced in [PV82], that is now usually called *the environment viewed by the particle* (see for instance [Os83], [Ko85], [KV86] or [DFGW89]). Naturally, the ergodic theorem gives only an asymptotic result. Our main purpose here is to provide, in the context of random walks among random conductances, an estimate of the speed of convergence to equilibrium of the environment viewed by the particle, our central assumption being that the conductances are bounded away from zero. We obtain a polynomial decay of the variance of a large class of functionals. Under the additional hypothesis that the conductances are also bounded from above and when  $d \geq 7$ , we can derive information on the rate of convergence of the mean square displacement of the walk towards its limit.

We would like to draw the reader's attention to the fact that, in the aforementioned papers, the proofs of algebraic speed of convergence rely on analytical tools such as Harnack's inequality. As a consequence, the exponent found in the polynomial decay is kept implicit, and depends on the ellipticity constant. In contrast, the exponent we find here is given explicitly in terms of the dimension only, and the polynomial decay holds for possibly non-elliptic environments.

We now define our present setting with more precision. Consider on  $\mathbb{Z}^d$  ( $d \geq 1$ ) the nearest neighbour relation :  $x, y \in \mathbb{Z}^d$  are neighbours (written  $x \sim y$ ) if and only if  $\|x - y\|_2 = 1$ . Drawing an (unoriented) edge between any two neighbours turns  $\mathbb{Z}^d$  into a graph, and we write  $\mathbb{B}^d$  for the set of edges. We define a *random walk among random conductances* on  $\mathbb{Z}^d$  as follows.

Let  $\Omega = (0, +\infty)^{\mathbb{B}^d}$  ; we call an element  $\omega = (\omega_e)_{e \in \mathbb{B}^d} \in \Omega$  an *environment*. If  $e = (x, y) \in \mathbb{B}^d$ , we may write  $\omega_{x,y}$  instead of  $\omega_e$ . By construction,  $\omega$  is symmetric :  $\omega_{x,y} = \omega_{y,x}$ .

For any  $\omega \in \Omega$ , we consider the Markov process  $(Z_t)_{t \geq 0}$  with jump rate between  $x$  and  $y$  given by  $\omega_{x,y}$ . We write  $\mathbb{P}_x^\omega$  for the law of this process starting from  $x \in \mathbb{Z}^d$ ,  $\mathbb{E}_x^\omega$  for its associated expectation.

The environment  $\omega$  will be itself a random variable, whose law we write  $\mathbb{P}$  (and  $\mathbb{E}$  for the corresponding expectation). There are translation operators  $(\theta_x)_{x \in \mathbb{Z}^d}$  acting on  $\Omega$ , given by  $(\theta_x \omega)_{y,z} = \omega_{x+y, x+z}$ . We assume the measure  $\mathbb{P}$  to be invariant under these translations. Moreover, we assume, without further mention, that the random walk is well defined for all times, or in other words, that it does not travel along its trajectory in finite time. This assumption is satisfied whenever one can find a threshold such that the set of conductances above this threshold does not percolate. In particular, it holds if  $\mathbb{P}$  is a product measure.

We define the averaged (or *annealed*) law as

$$\bar{\mathbb{P}}[\cdot] = \mathbb{P}[\mathbb{P}_0^\omega[\cdot]],$$

and  $\bar{\mathbb{E}} = \mathbb{E} \cdot \mathbb{E}_0^\omega$  for the corresponding expectation.

Assuming that the conductances are integrable, and that  $\mathbb{P}$  is ergodic (with respect to  $(\theta_x)_{x \in \mathbb{Z}^d}$ ), [DFGW89] have shown that the process  $(\varepsilon Z_{\varepsilon^{-2}t})_{t \geq 0}$  converges to a Brownian motion under the annealed law, as  $\varepsilon$  goes to 0. The proof of this result uses the ergodicity of *the environment viewed by the particle*. This process is defined by  $\omega(t) = \theta_{Z_t} \omega$ . It is a Markov process for which the measure  $\mathbb{P}$  is reversible, and whose infinitesimal generator is given by

$$\mathcal{L}f(\omega) = \sum_{|z|=1} \omega_{0,z} (f(\theta_z \omega) - f(\omega)).$$

The aim of this note is to provide a quantitative information about the speed of convergence of  $(\omega(t))$  towards equilibrium, our central assumption being that for any  $e \in \mathbb{B}^d$ ,  $\omega_e \geq 1$ . More precisely, let us define  $f_t(\omega) = \mathbf{E}_0^\omega[f(\omega(t))]$ . We would like to find appropriate functional  $V$  and exponent  $\alpha > 0$  such that, for any function  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  satisfying  $\mathbb{E}[f] = 0$  :

$$(1.1) \quad \mathbb{E}[(f_t)^2] \leq \frac{V(f)}{t^\alpha},$$

with  $V(f)$  finite at least for functions that are bounded and depend only on a finite number of coordinates.

A first attempt to solve the problem could be to decompose  $\mathbf{E}_0^\omega[f(\omega(t))]$  into

$$\sum_{x \in \mathbb{Z}^d} f(\theta_x \omega) \mathbf{P}_0^\omega[Z_t = x],$$

and look for Gaussian bounds on the transition probabilities. Although this can be an efficient strategy when the random walk is not influenced by the environment (and indicates that  $\alpha$  should be equal to  $d/2$ ), it seems bound to fail in our context, as the random variables  $f(\theta_x \omega)$  and  $\mathbf{P}_0^\omega[Z_t = x]$  are correlated in a rather problematic way.

In the not so distant context of interacting particle systems, first results concerning polynomial convergence to equilibrium were obtained in [Li91, De94]. We will here rely on the general technique proposed in [Li91, Theorem 2.2], where it is shown that, under some assumption on the functional  $V$  involved in (1.1), the polynomial convergence to equilibrium of the process is equivalent to a certain Nash inequality.

In our context, we derive a Nash inequality from the knowledge of the spectral gap for the dynamics restricted to a finite box, in a way that is similar to the one contained in [BZ99] (section 3).

An important issue is the choice of the functional  $V$  in equation (1.1). As one can see in [Li91, Theorem 2.2], a desirable feature for  $V$  is to be contractive under the action of the semi-group. For the case of interacting particle systems, this contractivity property is usually obtained using some monotonicity of the model considered. In our present context, there is no such property at our disposal, and we are left with a functional that turns out not to be contractive.

We propose two different approaches to overcome this difficulty. The first is to consider instead the particular case when the law of the random walk does not depend on the environment (section 4). Here, the contractivity property holds, and one thus easily obtains algebraic convergence to equilibrium, with exponent  $\alpha = d/2$ . Using a comparison of resolvents between the simple random walk and the random walk in random environment (section 5), one can partially transfer this result back to the original random walk among random conductances, obtaining (if one forgets about logarithmic corrections) an exponent  $\alpha = \min(d/2, 1)$ .

This exponent is rather unsatisfactory, especially when the dimension is large. We therefore provide a second method in section 6 to circumvent the absence of contractivity, based on a martingale method. This enables us to obtain an algebraic decay of the form (1.1) with a new functional and the exponent  $\alpha = d/2 - 2$ . This improves the previous result as soon as  $d \geq 7$ , although it requires a more restrictive condition on  $f$ , implying in particular that it is bounded.

One might argue that systems of particles and random walks in random environments are similar problems. Indeed, they look close to one another, since a tagged particle in a system of interacting particles can be seen as a random walk in a random environment. However, if one considers the environment seen by this tagged particle, it constantly changes with time, even when the particle does not

move. On the other hand, the environment seen by the random walk among random conductances is static, and evolves only via translations, making the convergence to equilibrium more difficult.

We now turn our attention to the consequences of our results. Observe that, as  $\mathbb{P}$  is reversible for  $(\omega(t))_{t \geq 0}$ , the associated semi-group is self-adjoint in  $L^2(\mathbb{P})$ . Hence, it comes that

$$(1.2) \quad \mathbb{E}[(f_t)^2] = \mathbb{E}[f(\omega)f_{2t}(\omega)] = \overline{\mathbb{E}}[f(\omega(0))f(\omega(2t))].$$

As a consequence, our problem is in fact equivalent to a control of the decay of the correlations of  $(\omega(t))_{t \geq 0}$ . It is shown in [KV86] that, provided these correlations are integrable, an annealed invariance principle holds for

$$(1.3) \quad I_f(t) = \int_0^t f(\omega(s))ds.$$

In fact, if the correlations in (1.2) decay faster than  $t^{-\alpha}$  for some  $\alpha > 1$ , we will see that one can control the speed of convergence of  $\overline{\mathbb{E}}[I_f(t)^2]/t$  towards its limit. This kind of result can be seen as a (rather weak) quantitative annealed central limit theorem. As an example, when  $d \geq 7$  and the conductances are bounded from above, we can estimate the speed of convergence of the mean square displacement  $\overline{\mathbb{E}}[(\|Z_t\|_2)^2]/t$  towards its limit.

As noted before, because of its relative simplicity and of the possibility to relate it with our initial problem, we will also consider the simple random walk  $Z_t^\circ$  (for which the jump rates are uniformly equal to 1), together with  $\omega^\circ(t) = \theta_{Z_t^\circ} \omega$ . This last process is also reversible with respect to  $\mathbb{P}$ , and has for infinitesimal generator

$$\mathcal{L}^\circ f(\omega) = \sum_{|z|=1} (f(\theta_z \omega) - f(\omega)).$$

We will write  $f_t^\circ(\omega)$  for  $\mathbb{E}_0^\omega[f(\omega^\circ(t))]$ .

**Addendum.** A referee pointed out to us the references [CK08, GO09, GO10], that we were not previously aware of. In these papers, the problem of estimating the effective diffusion matrix  $D$  is investigated. This matrix can be expressed in terms of a so-called “corrector field”, that solves a Poisson equation. Following [Yu86], [CK08, GO09, GO10] propose to approach this corrector by the practically computable solution of a regularized Poisson equation. In [CK08], the authors consider the case when the conductances can take only two different values, and give an explicit bound between the diffusion matrix and its approximation. Most interestingly, in [GO09, GO10], the authors tackle the problem of general bounded conductances. They decompose the difference between the matrix  $D$  and its approximation into the sum of two error terms, one being due to the discrepancy between  $D$  and the expected value of the approximation, and the other to the random fluctuations of the approximation. They provide the precise asymptotic behaviour of this second term in [GO09], and of the first one in [GO10]. There is an interesting interplay between their approach and ours, which we will describe in the last section of this chapter.

## 2. Statement of the main results

From now on, we always assume that the conductances are uniformly bounded from below by 1 : for any  $e \in \mathbb{B}^d$ , we impose that  $\omega_e \geq 1$ . We define the following possible additional hypothesis on the regularity of  $\mathbb{P}$  :

**Assumption (J) :** The random variables  $(\omega_e)_{e \in \mathbb{B}^d}$  are independent and identically distributed.

**Assumption (Q) :** Assumption (J) is satisfied, and the conductances are uniformly bounded from above.

To state our main results, we need to fix some notations. We write  $B_n$  for  $\{-n, \dots, n\}^d$ . For a function  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , let

$$(2.1) \quad S_n(f) = \sum_{x \in B_n} f(\theta_x \omega),$$

and

$$(2.2) \quad \mathcal{N}(f) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{|B_n|} \mathbb{E} \left[ (S_n(f))^2 \right].$$

Note that, using the translation invariance of  $\mathbb{P}$ , we have for  $f \in L^2(\mathbb{P})$  :

$$\frac{1}{|B_n|} \mathbb{E} \left[ (S_n(f))^2 \right] = \frac{1}{|B_n|} \sum_{x, y \in B_n} \mathbb{E}[f(\theta_x \omega) f(\theta_y \omega)] \leq \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} |\mathbb{E}[f(\omega) f(\theta_x \omega)]|.$$

In particular,  $\mathcal{N}(f)$  is finite under assumption  $(\mathfrak{J})$  if  $f \in L^2(\mathbb{P})$  satisfies  $\mathbb{E}[f] = 0$  and depends only on a finite number of coordinates. As a rule of thumb, the reader is advised to remember that the fact that  $\mathcal{N}(f)$  is finite should imply that  $\mathbb{E}[f] = 0$  (and our results, together with Birkhoff's ergodic theorem, show that it is indeed the case).

For each edge  $e \in \mathbb{B}^d$ , let :

$$(2.3) \quad |\nabla f|(e) = \sup |f(\omega) - f(\omega')|,$$

where the sup is taken over all  $\omega, \omega'$  in the support of  $\mathbb{P}$  such that  $\omega = \omega'$  except possibly on  $e$ . We define the semi-norm :

$$(2.4) \quad \|f\| = \sum_{e \in \mathbb{B}^d} |\nabla f|(e),$$

and  $\mathcal{N}(f) = \|f\|^2 + \|f\|_\infty^2$ . For example,  $\mathcal{N}(f)$  is finite if  $f$  is a bounded function that depends only on a finite number of coordinates. We write  $\ln_+(t)$  for  $\max(1, \ln(t))$ .

We first obtain a decay of the variance of  $f_t^\circ$  for certain functions  $f$ .

**THEOREM 2.1.** *There exists  $C > 0$  such that for any  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , if  $\mathcal{N}(f)$  is finite, then for any  $t > 0$ , we have :*

$$\mathbb{E}[(f_t^\circ)^2] \leq C \frac{\mathcal{N}(f)}{t^{d/2}}.$$

This result has its partial counterpart concerning the random walk among random conductances, as follows.

**THEOREM 2.2.** *There exists  $C > 0$  such that for any  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , if  $\mathcal{N}(f)$  is finite, then for any  $t > 0$ , we have :*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(f_t)^2] &\leq C \frac{\mathcal{N}(f)}{\sqrt{t}} && \text{if } d = 1, \\ \mathbb{E}[(f_t)^2] &\leq C \frac{\mathcal{N}(f) \ln_+(t)}{t} && \text{if } d = 2, \\ \mathbb{E}[(f_t)^2] &\leq C \frac{\mathcal{N}(f)}{t} && \text{if } d \geq 3. \end{aligned}$$

Moreover, if  $d \geq 3$ , we also have :

$$(2.5) \quad \int_0^{+\infty} \mathbb{E}[(f_t)^2] dt \leq C \mathcal{N}(f).$$

**Remarks.** As the proof reveals, the constant  $C$  appearing in Theorems 2.1 and 2.2 can be chosen so that the results hold for any law  $\mathbb{P}$  (provided it satisfies the always assumed uniform lower bound  $\omega \geq 1$ ). Moreover, one can generalize these results to cases when  $\mathcal{N}(f)$  is infinite, see Proposition 7.1.

For larger dimensions, we obtain the following result.

THEOREM 2.3. *Under assumption (J), there exists  $C$  such that for any  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , if  $N(f)$  is finite and  $\mathbb{E}[f] = 0$ , then for any  $t > 0$ , we have :*

$$\mathbb{E}[(f_t)^2] \leq C \frac{N(f)}{t^{d/2-2}} \quad \text{if } d \geq 5.$$

**Remarks.** If  $\eta$  is some positive real number, one can choose  $C$  so that the result in Theorem 2.3 is valid uniformly for any law  $\mathbb{P}$  satisfying the property given in equation (6.9). It turns out however that Theorem 2.2 is stronger when  $d \leq 6$ . Indeed, one can show using the martingale method introduced in section 6 that, under assumption (J), we have  $\mathcal{N}(f) \leq N(f)$ . Finally, we point out that, for a specific class of functionals, Proposition 7.2 provides a variation on this result that is also of interest.

Our starting point (section 3) is the existence of spectral gap inequalities for the dynamics restricted to a finite box of size  $n$ . For this dynamics, it gives the rate of convergence of the environment viewed by the particle towards the empirical measure (that is, the uniform measure over any translation of the environment, provided we keep the range of the translations inside the box). We do some computation that makes the measure  $\mathbb{P}$  come into play, and a corrective term appears (see Proposition 3.2).

In the case of  $(\omega^\circ(t))$ , we show in section 4 that this corrective term decays with the time evolution, thus leading to Theorem 2.1. Noting that the Dirichlet form associated with  $(\omega^\circ(t))$  is dominated by the one of  $(\omega(t))$ , we obtain Theorem 2.2 in section 5 by a comparison of the resolvents of these processes.

A second approach is to estimate directly this (not necessarily decreasing with time) corrective term for the random walk under random conductances. We do so under assumption (J) in section 6 via a martingale method. We finally prove Theorem 2.3 (together with some variations) in section 7, using the former results.

We now present some consequences of the previous theorems.

Whenever  $f \in L^2(\mathbb{P})$ , we define  $e_f$  as the spectral measure of  $-\mathcal{L}$  (as a self-adjoint operator on  $L^2(\mathbb{P})$ ) projected on the function  $f$ , so that for any bounded continuous  $\Psi : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  :

$$(2.6) \quad \mathbb{E}[\Psi(-\mathcal{L})(f)(\omega)f(\omega)] = \int \Psi(\lambda) de_f(\lambda).$$

Lemma 5.1 states that :

$$(2.7) \quad \int_0^{+\infty} \mathbb{E}[(f_t)^2] dt = 2 \int \frac{1}{\lambda} de_f(\lambda).$$

Herce, a consequence of equation (2.5) is that, whenever  $d \geq 3$  and  $\mathcal{N}(f)$  is finite,

$$\int \frac{1}{\lambda} de_f(\lambda) < +\infty.$$

This condition is shown in [KV86] to be necessary and sufficient to ensure that  $(I_f(t))_{t \geq 0}$  (defined in (1.3)) satisfies an invariance principle. More precisely, the authors show that there exist  $(M_t)_{t \geq 0}$ ,  $(\xi_t)_{t \geq 0}$  such that  $I_f(t) = M_t + \xi_t$ , where  $(M_t)$  is a martingale with stationary increments under  $\bar{\mathbb{P}}$  (and the natural filtration), and  $(\xi_t)$  is such that :

$$(2.8) \quad \frac{1}{t} \bar{\mathbb{E}}[(\xi_t)^2] \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0.$$

Using this decomposition, they prove that  $(\varepsilon I_f(t/\varepsilon^2))_{t \geq 0}$  converges, as  $\varepsilon$  goes to 0, to a Brownian motion of variance

$$(2.9) \quad \sigma^2 = \bar{\mathbb{E}}[(M_1)^2] = 2 \int \frac{1}{\lambda} de_f(\lambda).$$

We will show first that an algebraic decay (with exponent strictly greater than 1) of the variance of  $(f_t)$  is equivalent to a particular behaviour of the spectral measure  $e_f$  close to 0.

**THEOREM 2.4.** *Let  $\alpha > 1$  and  $f \in L^2(\mathbb{P})$ . The following statements are equivalent :*

- (1) *There exists  $C > 0$  such that for any  $t > 0$ ,*

$$\mathbb{E}[(f_t)^2] \leq \frac{C}{t^\alpha}.$$

- (2) *There exists  $C > 0$  such that for any  $\delta > 0$ ,*

$$\int_{[0,\delta]} \frac{1}{\lambda} de_f(\lambda) \leq C\delta^{\alpha-1}.$$

It turns out that this additional control of the spectral measure enables us to estimate the speed of convergence in equation (2.8). This provides us enough information to estimate the speed of convergence of  $\overline{\mathbb{E}}[I_f(t)^2]/t$  towards its limit.

For any  $\alpha > 1$ , let  $\psi_\alpha : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  be defined by

$$(2.10) \quad \psi_\alpha(t) = \begin{cases} t^{\alpha-1} & \text{if } \alpha < 2 \\ t/(\ln_+(t)) & \text{if } \alpha = 2 \\ t & \text{if } \alpha > 2. \end{cases}$$

**THEOREM 2.5.** *Under one of the equivalent conditions (1), (2) of Theorem 2.4 (and in particular under assumption (J), if  $N(f)$  is finite and  $d \geq 7$ ) :*

- (1) *One can construct  $(M_t)$ ,  $(\xi_t)$  such that  $I_f(t) = M_t + \xi_t$ , where  $(M_t)$  is a martingale with stationary increments under  $\overline{\mathbb{P}}$ , and  $(\xi_t)$  is such that, for some  $C > 0$  :*

$$\frac{1}{t} \overline{\mathbb{E}}[(\xi_t)^2] \leq \frac{C}{\psi_\alpha(t)}.$$

- (2) *There exists  $C > 0$  such that for any  $t \geq 0$  :*

$$0 \leq \sigma^2 - \frac{1}{t} \overline{\mathbb{E}}[I_f(t)^2] \leq \frac{C}{\psi_\alpha(t)},$$

where  $\sigma$  is defined by (2.9).

In [KV86, Section 4] and [DFGW89, Section 4], the authors prove in particular that under assumption (Q), the random walk satisfies an invariance principle :  $(\varepsilon Z_{t/\varepsilon^2})_{t \geq 0}$  converges, as  $\varepsilon$  goes to 0, to a Brownian motion of covariance matrix  $\overline{\sigma}^2 \text{Id}$ . A consequence of Theorems 2.3 and 2.5 is that, when  $d \geq 7$ , we can give an estimate of the speed of convergence of the mean square displacement towards its limit.

**COROLLARY 2.6.** *Under assumption (Q) and when  $d \geq 7$ , there exists  $C > 0$  such that for any  $t \geq 0$  :*

$$0 \leq \frac{1}{t} \overline{\mathbb{E}}[(\|Z_t\|_2)^2] - d\overline{\sigma}^2 \leq \frac{C}{\psi_\alpha(t)} \quad \text{with } \alpha = \frac{d}{2} - 2.$$

Theorems 2.4 and 2.5 are proved in section 8, together with Corollary 2.6.

**Remark.** As we discuss in the addendum, results from [GO10] enable to strengthen Corollary 2.6 when  $d \leq 8$  (see in particular Corollary 9.3).

**Some more notations.** We introduce the Dirichlet forms associated with the processes  $(\omega(t))$  and  $(\omega^\circ(t))$ , respectively :

$$\mathcal{E}(f, f) = -\mathbb{E}[\mathcal{L}f(\omega)f(\omega)] = \frac{1}{2} \sum_{|z|=1} \mathbb{E}[\omega_{0,z}(f(\theta_z \omega) - f(\omega))^2],$$

and

$$\mathcal{E}^\circ(f, f) = -\mathbb{E}[\mathcal{L}^\circ f(\omega)f(\omega)] = \frac{1}{2} \sum_{|z|=1} \mathbb{E}[(f(\theta_z \omega) - f(\omega))^2].$$

For  $A$  a subset of  $\mathbb{Z}^d$ , we will write  $|A|$  for its cardinal. We also define its inner boundary as

$$\partial A = \{x \in A : \exists y \in \mathbb{Z}^d \setminus A \ x \sim y\}.$$

The letter  $C$  refers to a strictly positive number, that may not be the same from one occurrence to another.

### 3. From spectral gap to Nash inequality

PROPOSITION 3.1 (Spectral gap). *There exists  $C_S > 0$  such that for any  $n \in \mathbb{N}$  and any function  $g : B_n \rightarrow \mathbb{R}$ , we have :*

$$\sum_{x \in B_n} (g(x) - m_n(g))^2 \leq \frac{C_S}{4} n^2 \sum_{\substack{x, y \in B_n \\ x \sim y}} (g(y) - g(x))^2,$$

where  $m_n(g)$  is given by

$$m_n(g) = \frac{1}{|B_n|} \sum_{x \in B_n} g(x).$$

PROOF. A lower bound on the isoperimetric constant is given by [SC97, Theorem 3.3.9], which implies a lower bound on the spectral gap via Cheeger's inequality ([SC97, Lemma 3.3.7]).  $\square$

PROPOSITION 3.2. *For any function  $f \in L^2(\mathbb{P})$  and any  $n \in \mathbb{N}$ , we have :*

$$\mathbb{E}[f(\omega)^2] \leq C_S n^2 \mathcal{E}(f, f) + \frac{2}{|B_n|^2} \mathbb{E}[S_n(f)^2],$$

where  $S_n(f)$  was defined in (2.1). Moreover, the same inequality holds with  $\mathcal{E}$  replaced by  $\mathcal{E}^\circ$ .

PROOF. As we assumed that  $\omega \geq 1$ , it is clear that  $\mathcal{E}(f, f) \geq \mathcal{E}^\circ(f, f)$ , so it is enough to show the claim for  $\mathcal{E}^\circ$ .

Let  $g(x) = f(\theta_x \omega)$ . Using the translation invariance of  $\mathbb{P}$  and the fact that  $(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$ , we have :

$$\mathbb{E}[f^2] = \mathbb{E}[g(x)^2] \leq 2\mathbb{E}[(g(x) - m_n(g))^2] + 2\mathbb{E}[m_n(g)^2].$$

Summing this inequality over all  $x \in B_n$ , and using Proposition 3.1, we obtain :

$$|B_n| \mathbb{E}[f^2] \leq \frac{C_S}{2} n^2 \sum_{\substack{x, y \in B_n \\ x \sim y}} \mathbb{E}[(f(\theta_y \omega) - f(\theta_x \omega))^2] + 2|B_n| \mathbb{E}[m_n(g)^2].$$

Note that

$$\sum_{\substack{x, y \in B_n \\ x \sim y}} \mathbb{E}[(f(\theta_y \omega) - f(\theta_x \omega))^2] \leq \sum_{x \in B_n} \sum_{\substack{y \in \mathbb{Z}^d \\ y \sim x}} \mathbb{E}[(f(\theta_y \omega) - f(\theta_x \omega))^2].$$

As  $\mathbb{P}$  is invariant under translation, the sum

$$\sum_{\substack{y \in \mathbb{Z}^d \\ y \sim x}} \mathbb{E}[(f(\theta_y \omega) - f(\theta_x \omega))^2]$$

is in fact independent of  $x$ , and it comes that :

$$|B_n| \mathbb{E}[f^2] \leq \frac{C_S}{2} n^2 |B_n| \sum_{|z|=1} \mathbb{E}[(f(\theta_z \omega) - f(\omega))^2] + 2|B_n| \mathbb{E}[m_n(g)^2].$$

We get the result dividing by  $|B_n|$  and noting that  $m_n(g) = S_n(f)/|B_n|$ .  $\square$

We need to modify slightly  $\mathcal{N}(f_t)$ , to ensure that it does not become too small when  $t$  goes to infinity. We define  $\mathcal{N}'(f_t) = \max(\mathcal{N}(f_t), \|f\|_2^2)$ .

PROPOSITION 3.3 (Nash inequality). *There exists  $C > 0$  such that for any  $f \in L^2(\mathbb{P})$  and any  $t \geq 1$  :*

$$\mathbb{E}[(f_t)^2] \leq C\mathcal{E}(f_t, f_t)^{d/(d+2)}\mathcal{N}'(f_t)^{2/(d+2)},$$

and the same inequality holds with  $f_t, \mathcal{E}$  replaced by  $f_t^\circ, \mathcal{E}^\circ$ .

We first prove the following classical result.

LEMMA 3.4. *For any  $f \in L^2(\mathbb{P})$  and any  $t > 0$ , we have*

$$\mathcal{E}^\circ(f_t, f_t) \leq \mathcal{E}(f_t, f_t) \leq \frac{1}{2et}\|f\|_2^2.$$

PROOF. As was already mentioned, the first inequality is clear due to the assumption that  $\omega \geq 1$ .

The Dirichlet form  $\mathcal{E}(f_t, f_t)$  can be expressed in terms of the spectral measure  $e_f \varepsilon_s$  (see (2.6) for the definition of  $e_f$ ) :

$$\mathcal{E}(f_t, f_t) = \int \lambda e^{-2\lambda t} de_f(\lambda).$$

Noting that for any  $x \geq 0$ , we have  $x e^{-x} \leq 1/e$ , we obtain that  $\lambda e^{-2\lambda t} \leq 1/(2et)$ , and the result follows.  $\square$

PROOF OF PROPOSITION 3.3. Using the fact that  $|B_n| \geq 2n^d$ , together with the definition of  $\mathcal{N}(f)$  given in (2.2), Proposition 3.2 gives

$$(3.1) \quad \mathbb{E}[(f_t)^2] \leq C_S n^2 \mathcal{E}(f_t, f_t) + n^{-d} \mathcal{N}'(f_t).$$

Let  $w$  be the positive real number satisfying

$$w^{d+2} = \frac{\mathcal{N}'(f_t)}{2e\mathcal{E}(f_t, f_t)}.$$

Using the fact that  $\mathcal{N}'(f_t) \geq \|f\|_2^2$ , we know by Lemma 3.4 that  $w \geq 1$  whenever  $t \geq 1$ . In particular, the integer part  $[w]$  satisfies  $w/2 \leq [w] \leq w$ . Taking  $n = [w]$  in equation (3.1) (and  $t \geq 1$ ), we obtain

$$\mathbb{E}[(f_t)^2] \leq C\mathcal{E}(f_t, f_t)^{d/(d+2)}\mathcal{N}'(f_t)^{2/(d+2)},$$

with

$$C = C_S(2e)^{-2/(d+2)} + 2^d(2e)^{d/(d+2)}.$$

$\square$

PROPOSITION 3.5. *There exists  $C > 0$  such that for any  $f \in L^2(\mathbb{P})$  and any  $t \geq 1$  :*

$$\mathbb{E}[f_t^2] \leq C \left( \int_1^t \mathcal{N}'(f_s)^{-2/d} ds \right)^{-d/2},$$

and the same inequality holds with  $f_t, f_s$  replaced by  $f_t^\circ, f_s^\circ$ .

PROOF. Noting that  $\partial_t \mathbb{E}[f_t^2] = -2\mathcal{E}(f_t, f_t)$ , the inequality obtained in Proposition 3.3 becomes a differential inequality :

$$\mathcal{E}(f_t, f_t)(\mathbb{E}[f_t^2])^{-(1+2/d)} = \frac{d}{4} \partial_t [(\mathbb{E}[f_t^2])^{-2/d}] \geq C^{-(1+2/d)} \mathcal{N}'(f_t)^{-2/d}.$$

Integrating this inequality, we are led to :

$$(\mathbb{E}[f_t^2])^{-2/d} \geq \frac{4}{d} C^{-(1+2/d)} \int_1^t \mathcal{N}'(f_s)^{-2/d} ds,$$

which shows the proposition for  $f_t$ . The same proof applies to  $f_t^\circ$  as well.  $\square$

#### 4. Variance decay for the simple random walk

PROPOSITION 4.1. *For any integer  $n$  and any  $f \in L^2(\mathbb{P})$ , the function*

$$t \mapsto \mathbb{E}[(S_n(f_t^\circ))^2]$$

*is decreasing. On the other hand, there exist a law  $\mathbb{P}$  satisfying  $(\mathfrak{A})$ , a bounded function  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  that depends on a finite number of coordinates, and an integer  $n$  such that the function*

$$t \mapsto \mathbb{E}[(S_n(f_t))^2]$$

*is not decreasing.*

PROOF. When the walk is independent from the environment, environment translations and time evolution commute, in the sense that :

$$(4.1) \quad \mathbb{E}[S_n(f_t^\circ)^2] = \mathbb{E}[\left((S_n(f))_t^\circ\right)^2],$$

and as a consequence :

$$\partial_t \mathbb{E}[S_n(f_t^\circ)^2] = -2\mathcal{E}_0((S_n(f))_t^\circ, (S_n(f))_t^\circ) \leq 0.$$

The commutation property (4.1) no longer holds for the random walk on random conductances  $(Z_t)$ . We construct an example showing that  $t \rightarrow \mathbb{E}[S_n(f_t)^2]$  may increase. We fix  $d = 1$ ,  $n = 1$ . Computing the derivative at  $t = 0$ , we have :

$$\frac{1}{2} (\partial_t \mathbb{E}[S_1(f_t)^2])|_{t=0} = \mathbb{E}[(S_1(\mathcal{L}f))(\omega)S_1(f)(\omega)],$$

and we obtain :

$$\frac{1}{2} (\partial_t \mathbb{E}[S_1(f_t)^2])|_{t=0} = \mathbb{E}[\{\omega_{1,2}(f(\theta_2 \omega) - f(\theta_1 \omega)) + \omega_{-2,-1}(f(\theta_{-2} \omega) - f(\theta_{-1} \omega))\} \\ (f(\theta_{-1} \omega) + f(\omega) + f(\theta_1 \omega))].$$

We choose  $f(\omega) = \omega_{-1,0} + (\omega_{2,3})^2$ . Writing  $\mu_i$  for  $\mathbb{E}[(\omega_{0,1})^i]$ , a computation shows that the latter is equal to :

$$\mu_1 \mu_2 - \mu_3 + \mu_4 - (\mu_2)^2 + 2\mu_1(\mu_2)^2 - 2\mu_1 \mu_4 \geq \mu_4(1 - 2\mu_1) - \mu_3 - (\mu_2)^2.$$

Letting  $\varepsilon > 0$  and  $p \in [0, 1]$ , we choose the following law for  $\omega_{0,1}$  :

$$(1 - p)\delta_0 + p(4 + \varepsilon)x^{-(5+\varepsilon)}\mathbf{1}_{\{x \geq 1\}} dx.$$

Then, for  $i \leq 4$  :

$$\mu_i = p \frac{4 + \varepsilon}{4 + \varepsilon - i}.$$

If we choose  $p = 1/4$ , then  $\mu_1 \leq 1/3$  and it comes that :

$$\mu_4(1 - 2\mu_1) - \mu_3 - (\mu_2)^2 \geq \frac{1}{3}\mu_4 - \mu_3 - (\mu_2)^2.$$

Now taking  $\varepsilon$  close enough to 0,  $\mu_4$  becomes the dominant term, making the last expression strictly positive.

Yet, this example is inappropriate as it does not satisfy the uniform lower bound  $\omega \geq 1$ . It is clear that the law can be modified so that its support lies in  $[\lambda, +\infty)$  for some  $\lambda > 0$ . Then changing  $\omega$  for  $\omega' = \omega/\lambda$ , and taking  $f'$  so that  $f'(\omega') = f(\omega)$  completes this requirement. In a similar way, one can ensure that the support of  $\omega$  is bounded, so that  $\mathbb{P}$  satisfies  $(\mathfrak{A})$ , in which case  $f'$  becomes bounded.  $\square$



PROOF OF THEOREM 2.2. As  $\partial_t \mathbb{E}[(f_t)^2] = -2\mathcal{E}(f_t, f_t)$  is negative, the function  $t \mapsto \mathbb{E}[(f_t)^2]$  is decreasing, so we have, for any  $\mu > 0$  :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(f_{t/2})^2] &\leq \frac{\int_0^t e^{-\mu s} \mathbb{E}[(f_{s/2})^2] ds}{\int_0^t e^{-\mu s} ds} \\ &\leq \mu \frac{(R_\mu f, f)}{1 - e^{-\mu t}}. \end{aligned}$$

Using Lemma 5.1, we obtain :

$$(5.3) \quad \mathbb{E}[(f_{t/2})^2] \leq \mu \frac{(R_\mu^\circ f, f)}{1 - e^{-\mu t}}.$$

For  $d = 1$ , Theorem 2.1 implies that there exists  $C > 0$  such that for any  $f$  with  $\mathcal{N}(f)$  finite :

$$\begin{aligned} (R_\mu^\circ f, f) &\leq C\mathcal{N}(f) \int_0^{+\infty} \sqrt{\frac{2}{t}} e^{-\mu t} dt \\ &\leq \frac{\sqrt{2}C\mathcal{N}(f)}{\sqrt{\mu}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du. \end{aligned}$$

Using this bound in equation (5.3), we get :

$$\mathbb{E}[(f_{t/2})^2] \leq \frac{C\sqrt{\mu}\mathcal{N}(f)}{1 - e^{-\mu t}}.$$

Choosing  $\mu = 1/t$  in the last expression gives the desired result.

For  $d = 2$ , Theorem 2.1 implies that

$$\begin{aligned} (R_\mu^\circ f, f) &\leq \|f\|_2^2 + C\mathcal{N}(f) \int_1^{+\infty} \frac{2e^{-\mu t}}{t} dt \\ &\leq \|f\|_2^2 + C\mathcal{N}(f) \int_\mu^{+\infty} 2e^{-u} \frac{du}{u}. \end{aligned}$$

Assuming that  $\mu \leq 1$  (and using the fact that  $\mathcal{N}(f) \geq \|f\|_2^2$ ), it comes that

$$(R_\mu^\circ f, f) \leq \|f\|_2^2 + C\mathcal{N}(f) \left( C + \int_\mu^1 \frac{2du}{u} \right) \leq C\mathcal{N}(f)(1 + \ln(1/\mu)).$$

By equation (5.3), it comes that, for any  $\mu \leq 1$  :

$$\mathbb{E}[(f_{t/2})^2] \leq \mu C\mathcal{N}(f) \frac{1 + \ln(1/\mu)}{1 - e^{-\mu t}}.$$

The result comes choosing  $\mu = 1/t$ , whenever  $t \geq 1$ . As is always the case,  $\mathbb{E}[(f_{t/2})^2]$  is controlled for smaller times by the bound  $\mathbb{E}[(f_{t/2})^2] \leq \|f\|_2^2 \leq \mathcal{N}(f)$ .

In larger dimension ( $d \geq 3$ ),  $(R_\mu^\circ f, f)$  remains bounded as  $\mu$  goes to 0, and choosing  $\mu = 1/t$  in equation (5.3) gives the desired upper bound. Using the comparison lemma once again and Theorem 2.1, we also obtain :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \mathbb{E}[(f_t)^2] dt &\leq \int_0^{+\infty} \mathbb{E}[(f_t^\circ)^2] dt \\ &\leq \int_0^{+\infty} \frac{C\mathcal{N}(f)}{\max(1, t^{d/2})} dt \\ &\leq C\mathcal{N}(f). \end{aligned}$$

□

In the next section, we focus on finding upper bounds for  $\mathbb{E}[S_n(f_t)^2]$ .

### 6. A martingale method

Recall the definition of  $\|\cdot\|$  in (2.4). In this section, we will always assume, without further mention, that assumption (J) is satisfied. Under this assumption, we will prove the following upper bound on  $\mathbb{E}[S_n(f_t)^2]$ .

**THEOREM 6.1.** *There exists  $c \geq 0$  such that for any  $f \in L^\infty(\mathbb{P})$  with  $\mathbb{E}[f] = 0$ , any integer  $n$  and any  $t \geq 0$ , we have :*

$$\mathbb{E}[S_n(f_t)^2] \leq 2\|f\|^2|B_n| + c\|f\|_\infty^2(1+t)^2|B_n|.$$

**PROOF.** We choose an enumeration of the edges  $\mathbb{B}^d = (e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ , and define  $\mathcal{F}_k$  as the  $\sigma$ -algebra generated by  $(\omega_{e_0}, \dots, \omega_{e_k})$ ,  $\mathcal{F}_{-1} = \{\emptyset, \Omega\}$ . For any  $t \geq 0$ , we define the martingale  $M_k(t) = \mathbb{E}[S_n(f_t)|\mathcal{F}_k]$  and the corresponding martingale increments  $\Delta_k(t) = M_k(t) - M_{k-1}(t)$ . We have the following decomposition :

$$S_n(f_t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \Delta_k(t).$$

This convergence holds almost surely. As  $f \in L^\infty(\mathbb{P})$ , the dominated convergence theorem ensures that it holds also in  $L^2$  sense. Due to the orthogonality of the increments, we get :

$$\mathbb{E}[S_n(f_t)^2] = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{E}[\Delta_k(t)^2].$$

We will now estimate the right-hand side of this equality. First, we introduce a representation (that we learned from [Bo09]) for  $M_k(t)$  that we find convenient. For two environments  $\omega, \sigma \in \Omega$ , we define :

$$[\omega, \sigma]_k(e_i) = \begin{cases} \omega_{e_i} & \text{if } i \leq k \\ \sigma_{e_i} & \text{otherwise,} \end{cases}$$

and we write  $\mathbb{E}_\sigma$  to refer to integration with respect to  $d\mathbb{P}(\sigma)$ . As we assume in this section that  $(\omega_e)_{e \in \mathbb{B}^d}$  are independent random variables, we can rewrite  $M_k(t)$  as :

$$\begin{aligned} M_k(t)(\omega) &= \mathbb{E}_\sigma[S_n(f_t)([\omega, \sigma]_k)] \\ &= \sum_{x \in B_n} \mathbb{E}_\sigma[f_t(\theta_x [\omega, \sigma]_k)]. \end{aligned}$$

But note that

$$f_t(\theta_x \omega) = \mathbb{E}_0^{\theta_x \omega}[f(\theta_{Z_t+x} \omega)],$$

and as the law of  $Z_t + x$  under  $\mathbb{P}_0^{\theta_x \omega}$  is the same as the one of  $Z_t$  under  $\mathbb{P}_x^\omega$ , we are led to

$$f_t(\theta_x \omega) = \mathbb{E}_x^\omega[f(\theta_{Z_t} \omega)],$$

which implies that

$$M_k(t) = \sum_{x \in B_n} \mathbb{E}_\sigma[\mathbb{E}_x^{[\omega, \sigma]_k}[f(\theta_{Z_t} [\omega, \sigma]_k)]].$$

We obtain :

$$\Delta_k(t) = \sum_{x \in B_n} \mathbb{E}_\sigma[\mathbb{E}_x^{[\omega, \sigma]_k}[f(\theta_{Z_t} [\omega, \sigma]_k)] - \mathbb{E}_x^{[\omega, \sigma]_{k-1}}[f(\theta_{Z_t} [\omega, \sigma]_{k-1})]].$$

Let  $\mathcal{V}(e_k)$  be the set of endpoints of  $e_k$ . We want to distinguish whether the walk already met the set  $\mathcal{V}(e_k)$  at time  $t$  or not. For this purpose, we introduce the following events :

$$(6.1) \quad \mathcal{A}_t(y) = \{\{Z_s, 0 \leq s \leq t\} \cap \mathcal{V}(e_k) = \emptyset \text{ and } Z_t = y\},$$

$$(6.2) \quad \mathcal{A}'_t = \{\{Z_s, 0 \leq s \leq t\} \cap \mathcal{V}(e_k) \neq \emptyset\}.$$

Then one can decompose  $\Delta_k(t)$  as  $A_k(t) + A'_k(t)$ , where :

$$(6.3) \quad \begin{aligned} A_k(t) &= \sum_{\substack{x \in B_n \\ y \in \mathbb{Z}^d}} \mathbb{E}_\sigma \left[ \mathbb{E}_x^{[\omega, \sigma]_k} [f(\theta_{Z_t} [\omega, \sigma]_k) \mathbf{1}_{\mathcal{A}_t(y)}] - \mathbb{E}_x^{[\omega, \sigma]_{k-1}} [f(\theta_{Z_t} [\omega, \sigma]_{k-1}) \mathbf{1}_{\mathcal{A}_t(y)}] \right] \\ &= \sum_{\substack{x \in B_n \\ y \in \mathbb{Z}^d}} \mathbb{E}_\sigma \left[ f(\theta_y [\omega, \sigma]_k) \mathbf{P}_x^{[\omega, \sigma]_k} [\mathcal{A}_t(y)] - f(\theta_y [\omega, \sigma]_{k-1}) \mathbf{P}_x^{[\omega, \sigma]_{k-1}} [\mathcal{A}_t(y)] \right], \end{aligned}$$

and

$$(6.4) \quad A'_k(t) = \sum_{x \in B_n} \mathbb{E}_\sigma \left[ \mathbb{E}_x^{[\omega, \sigma]_k} [f(\theta_{Z_t} [\omega, \sigma]_k) \mathbf{1}_{\mathcal{A}'_t}] - \mathbb{E}_x^{[\omega, \sigma]_{k-1}} [f(\theta_{Z_t} [\omega, \sigma]_{k-1}) \mathbf{1}_{\mathcal{A}'_t}] \right],$$

so that we have :

$$(6.5) \quad \mathbb{E}[S_n(f_t)^2] \leq 2 \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{E}[A_k(t)^2] + 2 \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{E}[A'_k(t)^2].$$

We now turn to evaluate each of these terms. Theorem 6.1 is proved once we have shown the following results.

PROPOSITION 6.2. *For any integer  $n$  and any  $t \geq 0$  :*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{E}[A_k(t)^2] \leq \|f\|^2 |B_n|.$$

*There exists  $c \geq 0$  (independent of  $f$ ) such that for any integer  $n$  and any  $t \geq 0$  :*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{E}[A'_k(t)^2] \leq c \|f\|_\infty^2 (1+t)^2 |B_n|.$$

PROOF OF PROPOSITION 6.2. Note that  $\mathbf{P}_x^\omega[\mathcal{A}_t(y)]$ , as a function of  $\omega$ , does not depend on  $\omega_{e_k}$ . Therefore, for almost every  $\omega$ , we have :

$$\begin{aligned} A_k(t) &= \sum_{\substack{x \in B_n \\ y \in \mathbb{Z}^d}} \mathbb{E}_\sigma \left[ (f(\theta_y [\omega, \sigma]_k) - f(\theta_y [\omega, \sigma]_{k-1})) \mathbf{P}_x^{[\omega, \sigma]_k} [\mathcal{A}_t(y)] \right] \\ |A_k(t)| &\leq \sum_{\substack{x \in B_n \\ y \in \mathbb{Z}^d}} |\nabla f|(e_k - y) \mathbb{E}_\sigma \left[ \mathbf{P}_x^{[\omega, \sigma]_k} [Z_t = y] \right], \end{aligned}$$

where  $e_k - y$  stands for the edge obtained when translating the edge  $e_k$  by the vector  $(-y)$  ( $|\nabla f|$  is defined in (2.3)). Due to reversibility, we have that  $\mathbf{P}_x^{[\omega, \sigma]_k} [Z_t = y] = \mathbf{P}_y^{[\omega, \sigma]_k} [Z_t = x]$ , and it comes that :

$$(6.6) \quad |A_k(t)| \leq \sum_{y \in \mathbb{Z}^d} |\nabla f|(e_k - y) \mathbb{E}_\sigma \left[ \mathbf{P}_y^{[\omega, \sigma]_k} [Z_t \in B_n] \right].$$

Using the fact that  $\mathbf{P}_y^{[\omega, \sigma]_k} [Z_t \in B_n] \leq 1$ , we get that for almost every  $\omega$ ,  $|A_k(t)| \leq \|f\|$ . Using this together with equation (6.6), we obtain :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{E}[A_k(t)^2] \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \|f\| \sum_{y \in \mathbb{Z}^d} |\nabla f|(e_k - y) \mathbb{E} \mathbb{E}_\sigma \left[ \mathbf{P}_y^{[\omega, \sigma]_k} [Z_t \in B_n] \right].$$

Noting that the law of  $[\omega, \sigma]_k$  under  $\mathbb{E}\mathbb{E}_\sigma$  is the same as the one of  $\omega$  under  $\mathbb{E}$ , the latter simplifies into

$$\|f\| \sum_{y \in \mathbb{Z}^d} \sum_{k=1}^{+\infty} |\nabla f|(e_k - y) \mathbb{E}[\mathbf{P}_y^\omega[Z_t \in B_n]] \leq \|f\|^2 \sum_{y \in \mathbb{Z}^d} \mathbb{E}[\mathbf{P}_y^\omega[Z_t \in B_n]].$$

Using once again reversibility, we have

$$\sum_{y \in \mathbb{Z}^d} \mathbb{E}[\mathbf{P}_y^\omega[Z_t \in B_n]] = \sum_{\substack{x \in B_n \\ y \in \mathbb{Z}^d}} \mathbb{E}[\mathbf{P}_x^\omega[Z_t = y]] = |B_n|,$$

which shows the first part of the proposition.

We now turn to  $A'_k(t)$ . From equation (6.4), we have the following estimate :

$$\begin{aligned} |A'_k(t)| &\leq \|f\|_\infty \sum_{x \in B_n} \mathbb{E}_\sigma[\mathbf{P}_x^{[\omega, \sigma]_k}[A'_t] + \mathbf{P}_x^{[\omega, \sigma]_{k-1}}[A'_t]] \\ &\leq 2\|f\|_\infty \sum_{x \in B_n} \mathbb{E}_\sigma[\mathbf{P}_x^{[\omega, \sigma]_k}[A'_t]], \end{aligned}$$

where, in the last step, we used the fact that the event  $A'_t$  does not depend on the conductance  $\omega_{e_k}$ . If we define  $\bar{A}_k(t)$  to be

$$(6.7) \quad \bar{A}_k(t) = \sum_{x \in B_n} \mathbf{P}_x^{[\omega, \sigma]_k}[A'_t],$$

then the last equation can be rewritten as

$$(6.8) \quad |A'_k(t)| \leq 2\|f\|_\infty \mathbb{E}_\sigma[\bar{A}_k(t)].$$

In order to estimate  $\bar{A}_k(t)$ , we would like to compare the probability to hit  $\mathcal{V}(e_k)$  (the event  $A'_t$ ) with the expected time spent inside this set. However, because conductances may take arbitrarily large values, this comparison is not possible, as the walk may exit the set  $\mathcal{V}(e_k)$  very fast. In order to circumvent this difficulty, we will compare the probability to hit  $\mathcal{V}(e_k)$  with the expected time spent in a larger set, to be defined below.

Let  $p_\omega(x)$  be the total jump rate of site  $x$  :

$$p_\omega(x) = \sum_{y \sim x} \omega_{x,y}.$$

For a reason that will become clear in the proof of part (2) of Lemma 6.4, we now introduce a parameter  $\eta$ , chosen large enough so that :

$$(6.9) \quad q := \mathbb{P}[p_\omega(0) > \eta] < \frac{1}{(2d)^{(2d+1)}}.$$

We say that a point  $x \in \mathbb{Z}^d$  is *good* in the environment  $\omega$  if  $p_\omega(x) \leq \eta$ ; we say that it is *bad* otherwise.

We now define  $\bar{\mathcal{V}}_\omega(e_k)$  the following way :

$$(6.10) \quad y \in \bar{\mathcal{V}}_\omega(e_k)$$

$$\Leftrightarrow y \in \mathcal{V}(e_k) \text{ or } \exists \gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_l) : \gamma_1 \in \mathcal{V}(e_k), \gamma_l = y, \gamma_1, \dots, \gamma_{l-1} \text{ bad points,}$$

where  $\gamma$  is a nearest-neighbour path. The set  $\bar{\mathcal{V}}_\omega(e_k)$  contains  $\mathcal{V}(e_k)$ , and any point in its inner boundary is a good point (in fact, it is the smallest such set). Indeed, the fact that it contains  $\mathcal{V}(e_k)$  is clear from the definition. Moreover, let  $y$  be a bad point in  $\bar{\mathcal{V}}_\omega(e_k)$ . Then there exists a nearest-neighbour path  $\gamma_1, \dots, \gamma_l$  as in (6.10) (if  $y \in \mathcal{V}(e_k)$ , then one can choose the path that is made only of the point  $y$ ). Observe that as  $\gamma_l = y$ ,  $\gamma_l$  is a bad point. Hence, if  $z$  is a neighbour of  $y$ , considering the path  $\gamma_1, \dots, \gamma_l, z$ , one can see that  $z$  belongs to  $\bar{\mathcal{V}}_\omega(e_k)$ . We have

shown that any bad point in  $\bar{\mathcal{V}}_\omega(e_k)$  has all its neighbours in  $\bar{\mathcal{V}}_\omega(e_k)$ . This implies that any point in the inner boundary of  $\bar{\mathcal{V}}_\omega(e_k)$  is a good point.

The following lemma relates the probability to hit  $\mathcal{V}(e_k)$  with the expected time spent inside  $\bar{\mathcal{V}}_\omega(e_k)$ .

LEMMA 6.3. *For every  $x \in \mathbb{Z}^d$  and every  $\omega$ , we have :*

$$(6.11) \quad \mathbf{P}_x^\omega[\mathcal{A}'_t] \leq \varepsilon\eta \int_0^{t+1} \mathbf{P}_x^\omega[Z_s \in \bar{\mathcal{V}}_\omega(e_k)] \, ds.$$

PROOF. Let  $T$  be the hitting time of the set  $\mathcal{V}(e_k)$  :

$$T = \inf\{s \geq 0 : Z_s \in \mathcal{V}(e_k)\}.$$

One can bound from below the integral appearing in the right hand side of (6.11) as follows :

$$\begin{aligned} \int_0^{t+1} \mathbf{P}_x^\omega[Z_s \in \bar{\mathcal{V}}_\omega(e_k)] \, ds &\geq \mathbf{E}_x^\omega \left[ \mathbf{1}_{T \leq t} \int_0^{t+1} \mathbf{1}_{Z_s \in \bar{\mathcal{V}}_\omega(e_k)} \, ds \right] \\ &\geq \mathbf{E}_x^\omega \left[ \mathbf{1}_{T \leq t} \int_T^{T+1} \mathbf{1}_{Z_s \in \bar{\mathcal{V}}_\omega(e_k)} \, ds \right]. \end{aligned}$$

By the Markov property at time  $T$ , the latter equals :

$$\mathbf{E}_x^\omega \left[ \mathbf{1}_{T \leq t} \mathbf{E}_{Z_T}^\omega \left[ \int_0^1 \mathbf{1}_{Z_s \in \bar{\mathcal{V}}_\omega(e_k)} \, ds \right] \right].$$

As  $\mathbf{P}_x^\omega[T \leq t] = \mathbf{P}_x^\omega[\mathcal{A}'_t]$ , the lemma would be proved if we can show that

$$(6.12) \quad \mathbf{E}_{Z_T}^\omega \left[ \int_0^1 \mathbf{1}_{Z_s \in \bar{\mathcal{V}}_\omega(e_k)} \, ds \right] \geq \frac{1}{\varepsilon\eta}.$$

Let  $\bar{T}$  be the exit time from  $\bar{\mathcal{V}}_\omega(e_k)$  :

$$\bar{T} = \inf\{s \geq 0 : Z_s \notin \bar{\mathcal{V}}_\omega(e_k)\}.$$

The left hand side of (6.12) is greater than

$$\mathbf{E}_{Z_T}^\omega[\min(\bar{T}, 1)].$$

As we want to show that the exit from  $\bar{\mathcal{V}}_\omega(e_k)$  occurs slowly enough, we are interested in the first time  $T_g$  that the walk visits a good site :

$$T_g = \inf\{s \geq 0 : Z_s \text{ is a good site}\},$$

and also in the time  $\varepsilon_g$  spent between  $T_g$  and the next jump of the walk. Conditionally on  $Z_{T_g}$ , the random variable  $\varepsilon_g$  is exponentially distributed, with parameter  $p_\omega(Z_{T_g})$ . But by definition of  $T_g$ , the site  $Z_{T_g}$  is good, hence  $p_\omega(Z_{T_g}) \leq \eta$ , and we obtain that for any  $y \in \mathbb{Z}^d$  :

$$(6.13) \quad \mathbf{P}_y^\omega[\varepsilon_g \geq \eta^{-1}] \geq e^{-1}.$$

Moreover, if the walk starts from a site inside  $\bar{\mathcal{V}}_\omega(e_k)$ , then it is clear that  $\bar{T} \geq \varepsilon_g$ . This is due to the fact that any site in the inner boundary of  $\bar{\mathcal{V}}_\omega(e_k)$  is a good site, so the walk must meet a good site before exiting  $\bar{\mathcal{V}}_\omega(e_k)$ . We finally obtain :

$$\mathbf{E}_{Z_T}^\omega[\min(\bar{T}, 1)] \geq \mathbf{E}_{Z_T}^\omega[\min(\varepsilon_g, 1)] \geq \eta^{-1} \mathbf{P}_{Z_T}^\omega[\varepsilon_g \geq \eta^{-1}],$$

which, together with (6.13), proves the lemma.  $\square$

Recalling the definition of  $\bar{A}_k(t)$  from (6.7), and using the estimate provided by the lemma, we obtain :

$$(6.14) \quad \bar{A}_k(t) \leq \varepsilon\eta \sum_{x \in B_n} \int_0^{t+1} \mathbf{P}_x^{[\omega, \sigma]_k} [Z_s \in \bar{\mathcal{V}}_{[\omega, \sigma]_k}(e_k)] \, ds.$$

Using reversibility, one can rewrite it as :

$$\begin{aligned} \bar{A}_k(t) &\leq e\eta \int_0^{t+1} \sum_{y \in \bar{V}_{[\omega, \sigma]_k}(e_k)} \mathbf{P}_y^{[\omega, \sigma]_k} [Z_s \in B_n] \, ds \\ (6.15) \quad &\leq e\eta(t+1) |\bar{V}_{[\omega, \sigma]_k}(e_k)|. \end{aligned}$$

Besides, by (6.8) and Jensen's inequality, note that :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[A'_k(t)^2] &\leq 4\|f\|_\infty^2 \mathbb{E} \left[ (\mathbb{E}_\sigma[\bar{A}_k(t)])^2 \right] \\ (6.16) \quad &\leq 4\|f\|_\infty^2 \mathbb{E} \mathbb{E}_\sigma [\bar{A}_k(t)^2]. \end{aligned}$$

Hence, in order to prove the second part of Proposition 6.2, it is enough to show that there exists  $c \geq 0$  such that for any integer  $n$  and any  $t \geq 0$  :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{E} \mathbb{E}_\sigma [\bar{A}_k(t)^2] \leq c(t+1)^2 |B_n|.$$

Using inequalities (6.14) and (6.15), we obtain :

$$(6.17) \quad \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{E} \mathbb{E}_\sigma [\bar{A}_k(t)^2] \leq e^2 \eta^2 (t+1) \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{x \in B_n} \int_0^{t+1} \mathbb{E} [|\bar{V}_\omega(e_k)| \mathbf{P}_x^\omega [Z_s \in \bar{V}_\omega(e_k)]] \, ds,$$

where the integration of  $[\omega, \sigma]_k$  under  $\mathbb{E} \mathbb{E}_\sigma$  has been replaced by integration of  $\omega$  under  $\mathbb{E}$ . In this last expression, we can rewrite the expectation the following way :

$$(6.18) \quad \sum_{x=0}^{+\infty} \mathbb{E} [|\bar{V}_\omega(e_k)| \mathbf{P}_x^\omega [Z_s \in \bar{V}_\omega(e_k)]] = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{y \in \mathbb{Z}^d} \mathbb{E} [|\bar{V}_\omega(e_k)| \mathbf{1}_{y \in \bar{V}_\omega(e_k)} \mathbf{P}_x^\omega [Z_s = y]].$$

We introduce the following function of the environment :

$$W(\omega) = \sum_{k=0}^{+\infty} |\bar{V}_\omega(e_k)| \mathbf{1}_{0 \in \bar{V}_\omega(e_k)}.$$

From the definition of  $\bar{V}_\omega(e_k)$  given in (6.10), it is not hard to check that

$$\bar{V}_{\theta_y \omega}(e_k) = -y + \bar{V}_\omega(y + e_k),$$

where we understand  $y + e_k$  as the edge obtained from  $e_k$  by a translation of the vector  $y$ . This observation implies that :

$$\begin{aligned} W(\theta_y \omega) &= \sum_{k=0}^{+\infty} |\bar{V}_\omega(y + e_k)| \mathbf{1}_{y \in \bar{V}_\omega(y + e_k)} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} |\bar{V}_\omega(e_k)| \mathbf{1}_{y \in \bar{V}_\omega(e_k)}. \end{aligned}$$

As a consequence, the right-hand side of equation (6.18) becomes :

$$(6.19) \quad \sum_{y \in \mathbb{Z}^d} \mathbb{E} [W(\theta_y \omega) \mathbf{P}_x^\omega [Z_s = y]] = \mathbb{E} \mathbb{E}_x^\omega [W(\omega(s))].$$

As the measure  $\mathbb{P}$  is stationary for the environment viewed by the particle, this last expectation does not depend on  $s$ . We thus obtain that the expression appearing in the right hand side of (6.17) is equal to

$$\mathbb{E}[W(\omega)] e^2 \eta^2 (t+1)^2 |B_n|,$$

and Proposition 6.2 is proved, provided  $\mathbb{E}[W(\omega)]$  is finite. We prove this fact in the next lemma.

Before stating it, we introduce  $\mathcal{C}$  the set of  $z \in \mathbb{Z}^d$  such that there exists a path from 0 to  $z$  visiting only bad points, except possibly 0 and  $z$  :

$$(6.20) \quad z \in \mathcal{C} \Leftrightarrow \exists \gamma = (\gamma_0, \dots, \gamma_l) : \gamma_0 = 0, \gamma_l = z, \gamma_1, \dots, \gamma_{l-1} \text{ bad points,}$$

where  $\gamma$  is a nearest-neighbour path.

LEMMA 6.4. (1) For any  $\omega$ , we have

$$(6.21) \quad W(\omega) \leq 2d|\mathcal{C}|^2.$$

(2) The random variable  $W(\omega)$  is integrable.

PROOF OF LEMMA 6.4. To prove the first part of the lemma, it is enough to show the following implication :

$$(6.22) \quad 0 \in \bar{\mathcal{V}}_\omega(e_k) \Rightarrow \bar{\mathcal{V}}_\omega(e_k) \subseteq \mathcal{C}.$$

Indeed, it would imply that

$$W(\omega) \leq |\{k : \bar{\mathcal{V}}_\omega(e_k) \subseteq \mathcal{C}\}| |\mathcal{C}| \leq |\{k : \mathcal{V}(e_k) \subseteq \mathcal{C}\}| |\mathcal{C}|.$$

Moreover,  $|\{k : \mathcal{V}(e_k) \subseteq \mathcal{C}\}|$  is the number of edges between any two points of  $\mathcal{C}$ . Any point having at most  $2d$  edges attached to it, it is clear that this number is smaller than  $2d|\mathcal{C}|$ , and we obtain (6.21). We now proceed to prove (6.22).

Let us assume that  $0 \in \bar{\mathcal{V}}_\omega(e_k)$ , and let  $z \in \bar{\mathcal{V}}_\omega(e_k)$ . We will show that  $z \in \mathcal{C}$ , distinguishing various cases and using the characterizations given in (6.10) and (6.20).

Suppose first that  $0 \in \mathcal{V}(e_k)$ . If  $z$  belongs to  $\mathcal{V}(e_k)$  as well, then considering the path  $(0, z)$  (or simply  $(0)$  if  $z = 0$ ), one can see that  $z \in \mathcal{C}$ . Otherwise, there exists  $\gamma' = (\gamma'_1, \dots, \gamma'_{l'})$  such that  $\gamma'_1 \in \mathcal{V}(e_k)$ ,  $\gamma'_{l'} = z$ , and  $\gamma'_1, \dots, \gamma'_{l'-1}$  are bad points. The path  $(0, \gamma'_1, \dots, \gamma'_{l'})$  (or  $(\gamma'_1, \dots, \gamma'_{l'})$  if  $\gamma'_1 = 0$ ) satisfies the conditions needed to show that  $z \in \mathcal{C}$ .

Now if  $0 \notin \mathcal{V}(e_k)$ , then there exists a path  $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_l)$  as in (6.10). If  $z$  is in  $\mathcal{V}(e_k)$ , then the path  $(\gamma_l, \dots, \gamma_1, z)$  (or  $(\gamma_l, \dots, \gamma_1)$  if  $\gamma_1 = z$ ) shows that  $z \in \mathcal{C}$ . Otherwise, there exists  $\gamma' = (\gamma'_1, \dots, \gamma'_{l'})$  as before, and the path  $(\gamma_l, \dots, \gamma_1, \gamma'_1, \dots, \gamma'_{l'})$  (or  $(\gamma_l, \dots, \gamma_1, \gamma'_2, \dots, \gamma'_{l'})$  if  $\gamma_1 = \gamma'_1$ ) is an appropriate choice. This finishes the proof of (6.22).

We now turn to part (2). For  $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{Z}^d$ , we define the graph norm  $\|x\|_1 = |x_1| + \dots + |x_d|$ . Let  $\mathcal{B}(r)$  be the ball centered at the origin and of radius  $r$  with respect to  $\|\cdot\|_1$ . For any  $r \in \mathbb{N}$  :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[\mathcal{C} \not\subseteq \mathcal{B}(r)] \\ \leq \mathbb{P}[\exists \gamma = (\gamma_0, \dots, \gamma_r) \text{ simple path w. } \gamma_0 = 0 \text{ and } \gamma_1, \dots, \gamma_r \text{ bad points}]. \end{aligned}$$

Let  $G_x$  be the event ' $x$  is a good point'. Note that  $G_x$  is independent of  $(G_y)$ , for all  $y$  that is neither  $x$  nor one of its neighbours (there are  $2d+1$  such sites). So from  $\{\gamma_i, 1 \leq i \leq r\}$ , we can extract a subset  $\gamma'$  of cardinal at least  $k = \lceil r/(2d+1) \rceil$ , and such that  $(G_x)_{x \in \gamma'}$  are independent random variables. Recalling that we write  $q$  for the probability to be a bad site, and bounding the number of possible paths by  $(2d)^r$ , we get :

$$\mathbb{P}[\mathcal{C} \not\subseteq \mathcal{B}(r)] \leq (2d)^r q^k.$$

Using the hypothesis on  $q$  made in (6.9), the quantity  $\mu = 2dq^{1/(2d+1)}$  is strictly smaller than 1, and we obtain :

$$\mathbb{P}[\mathcal{C} \not\subseteq \mathcal{B}(r)] \leq \mu^r.$$

Also, note that, for some  $C > 0$  :

$$\mathbb{P}[|\mathcal{C}| \geq r] \leq \mathbb{P}[\mathcal{C} \not\subseteq \mathcal{B}(Cr^{1/d})].$$

Combining these two facts, we obtain that

$$\mathbb{P}[|C| \geq r] \leq \mu^{Cr^{1/d}}.$$

This decay of the tail probability ensures that  $|C|^2$  is integrable, and hence  $W(\omega)$  as well as a consequence of the first part of the lemma.  $\square$

Part (2) of Lemma 6.4 was the last required step in the establishment of Proposition 6.2.  $\square$

Theorem 6.1 now follows from Proposition 6.2, as can be seen from inequality (6.5).  $\square$

### 7. Theorem 2.3 and extensions

We will now combine the results of the preceding sections to obtain the decay of the variance of  $f_t$  as  $t$  goes to infinity.

PROOF OF THEOREM 2.3. We recall that  $N(f) = \|f\|^2 + \|f\|_\infty^2$ . We have shown in Theorem 6.1 that under assumption (J), there exists  $c > 0$  such that for any  $f \in L^\infty(\mathbb{P})$  with  $\mathbb{E}[f] = 0$ , any integer  $n$  and any  $t \geq 0$ :

$$\mathbb{E}[S_n(f_t)^2] \leq cN(f)(1+t)^2|B_n|,$$

or in other terms, that  $\mathcal{N}(f_t) \leq cN(f)(1+t)^2$ . This, together with Proposition 3.5, implies that there exists  $C > 0$  such that for any  $t \geq 1$ :

$$\mathbb{E}[(f_t)^2] \leq CN(f) \left( \int_1^t (1+s)^{-4/d} ds \right)^{-d/2}.$$

This estimate (together, for smaller times, with the fact that  $\mathbb{E}[(f_t)^2] \leq \|f\|_2^2 \leq N(f)$ ) leads to the announced result.  $\square$

Our method of proof has the following direct generalization, which holds true without the additional assumption (J).

PROPOSITION 7.1. *Let  $\delta, \gamma \geq 0$  be such that  $\delta > 2\gamma$ . There exists  $C > 0$  such that, for any  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  satisfying, for any  $n \in \mathbb{N}$  and any  $t \geq 0$ :*

$$\mathbb{E}[(S_n(f_t))^2] \leq c(f)n^{2d-\delta}(t+1)^\gamma$$

where  $c(f) > 0$ , we have

$$\mathbb{E}[(f_t)^2] \leq C \frac{c(f)}{t^{\delta/2-\gamma}}.$$

Moreover, the claim still holds if one replaces  $f_t$  by  $f_t^\circ$ .

PROOF. As given by Proposition 3.2, we know that the above hypothesis implies

$$\mathbb{E}[(f_t)^2] \leq C_S n^2 \mathcal{E}(f_t, f_t) + c(f)n^{-\delta}(t+1)^\gamma.$$

From this inequality (compare with equation (3.1)), one can follow the proof of Propositions 3.3 and 3.5, replacing  $\mathcal{N}'(f_t)$  by  $c(f)(t+1)^\gamma$  and the exponent  $d$  by  $\delta$ . The fact that  $c(f)$  is larger than  $\|f\|_2^2$  is clear from the hypothesis (taking  $n = 0$  and  $t = 0$ ), and one obtains

$$\mathbb{E}[f_t^2] \leq Cc(f) \left( \int_1^t s^{-2\gamma/\delta} ds \right)^{-\delta/2} \leq C \frac{c(f)}{t^{\delta/2-\gamma}},$$

provided  $2\gamma/\delta < 1$  and  $t$  is large enough (say  $t \geq 2$ ). The result now follows, using the bound  $\mathbb{E}[f_t^2] \leq \|f\|_2^2 \leq c(f)$  for smaller times. The same proof applies to  $f_t^\circ$  as well.  $\square$

The interest of this generalization is twofold. On one hand, it may provide a variance decay for functionals for which  $\mathcal{N}(f)$  is infinite (for instance if the environment is assumed only to be mixing). On the other, it may strengthen the original claim for functionals for which  $\mathbb{E}[(S_n(f_t))^2]$  decays atypically fast. For example, let  $(e_1, \dots, e_d)$  be the canonical basis of  $\mathbb{R}^d$ . We define the local drift in the first coordinate as

$$(7.1) \quad \mathfrak{d}(\omega) = \omega_{0, e_1} - \omega_{0, -e_1}.$$

Then a simple calculation shows that in the sum  $S_n(\mathfrak{d})$ , most of the terms cancel out, except for boundary terms, so that, provided the conductances have a second moment, we have :

$$\mathbb{E}[(S_n(\mathfrak{d}))^2] \leq Cn^{d-1}.$$

Now recall that, as given by Proposition 4.1, the function  $t \mapsto \mathbb{E}[(S_n(\mathfrak{d}_t^\circ))^2]$  is decreasing, so the above estimate still holds for  $\mathbb{E}[(S_n(\mathfrak{d}_t^\circ))^2]$ , and Proposition 7.1 implies that :

$$\mathbb{E}[(\mathfrak{d}_t^\circ)^2] \leq \frac{C}{t^{(d+1)/2}}.$$

This exponent can in fact be improved to  $d/2 + 1$ , as we will see in the end of the last section.

We now present a second variation around Theorem 2.3. One drawback of this theorem is that it is often problematic to evaluate  $\mathcal{N}(f)$ , when it is not simply infinite. For a particular class of functionals, we show below that one can get improved results with only minor changes in the method of proof.

For some  $s \geq 0$ , we say that a function  $g(Z, \omega)$  depends only on the trajectory up to time  $s$  if one can write it as a function of the sites visited up to time  $s$ , together with their neighbouring conductances, or more precisely if one can write  $g(Z, \omega)$  as

$$g((Z_u)_{u \leq s}, (\omega_{Z_u+e})_{u \leq s}),$$

where we understand that  $e$  ranges in the set of edges adjacent to 0. We say that such a function is *translation invariant* if moreover, for any  $x \in \mathbb{Z}^d$  :

$$g((x + Z_u)_{u \leq s}, (\omega_{Z_u+e})_{u \leq s}) = g((Z_u)_{u \leq s}, (\omega_{Z_u+e})_{u \leq s}).$$

We write  $\text{Var}(f)$  for the variance of the function  $f$  with respect to the measure  $\mathbb{P}$ .

**PROPOSITION 7.2.** *Under assumption (J), there exists  $C > 0$  such that, for any bounded function  $g$  that depends only on the trajectory up to time  $s$  and is translation invariant, if  $f(\omega) = \mathbf{E}_0^\omega[g]$ , then for any  $t > 0$  :*

$$\text{Var}(f_t) \leq C \|g\|_\infty^2 \ln_+ \left( \frac{s+t}{s} \right)^{-2} \quad \text{if } d = 4,$$

$$\text{Var}(f_t) \leq C \frac{\|g\|_\infty^2 (s+t)^2}{t^{d/2}} \quad \text{if } d \geq 5.$$

**PROOF.** We begin by recalling the definition of  $f_t$ , namely

$$f_t(\omega) = \mathbf{E}_0^\omega \left[ \mathbf{E}_0^{\theta_{Z_t} \omega} [g((Z_u)_{u \leq s}, (\omega_{Z_u+e})_{u \leq s})] \right].$$

Recall also that the law of  $Z+x$  under  $\mathbf{P}_0^{\theta_x \omega}$  is the same as the one of  $Z$  under  $\mathbf{P}_x^\omega$ , therefore we have, using the translation invariance of  $g$  :

$$\mathbf{E}_0^{\theta_{Z_t} \omega} [g((Z_u)_{u \leq s}, (\omega_{Z_u+e})_{u \leq s})] = \mathbf{E}_{Z_t}^\omega [g((Z_u)_{u \leq s}, (\omega_{Z_u+e})_{u \leq s})].$$

The Markov property now leads to

$$(7.2) \quad f_t(\omega) = \mathbf{E}_0^\omega [g(t)],$$

where, to ease notation, we wrote  $g(t)$  for

$$g((Z_u)_{t \leq u \leq t+s}, (\omega_{Z_u+e})_{t \leq u \leq t+s}).$$

We define, as in section 6,  $M_k(t) = \mathbb{E}[S_n(f_t) | \mathcal{F}_k]$ , and the martingale increments  $\Delta_k(t) = M_k(t) - M_{k-1}(t)$ . Writing  $\bar{f}$  for  $f - \mathbb{E}[f]$ , we obtain :

$$S_n(\bar{f}_t) = S_n(f_t) - \mathbb{E}[S_n(f_t)] = \sum_{k=0}^{+\infty} \Delta_k(t).$$

One has the following expression for  $\Delta_k(t)$  :

$$\Delta_k(t) = \sum_{x \in B_n} \mathbb{E}_\sigma \left[ \mathbf{E}_x^{[\omega, \sigma]^k} [g(t)] - \mathbf{E}_x^{[\omega, \sigma]^{k-1}} [g(t)] \right],$$

which was the starting point of the computations of section 6. However, we now introduce the events :

$$\tilde{\mathcal{A}}_t = \{ \{Z_u, 0 \leq s \leq t+s\} \cap \mathcal{V}(e_k) = \emptyset \},$$

and  $\tilde{\mathcal{A}}'_t$  the complementary event. Note the difference with (6.1-6.2) : we consider intersections with  $\mathcal{V}(e_k)$  up to time  $t+s$ , and not just up to time  $t$ . Then one can decompose  $\Delta_k(t)$  as  $\tilde{A}_k(t) + \tilde{A}'_k(t)$ , where :

$$\tilde{A}_k(t) = \sum_{x \in B_n} \mathbb{E}_\sigma \left[ \mathbf{E}_x^{[\omega, \sigma]^k} [g(t) \mathbf{1}_{\tilde{\mathcal{A}}_t}] - \mathbf{E}_x^{[\omega, \sigma]^{k-1}} [g(t) \mathbf{1}_{\tilde{\mathcal{A}}_t}] \right]$$

and

$$\tilde{A}'_k(t) = \sum_{x \in B_n} \mathbb{E}_\sigma \left[ \mathbf{E}_x^{[\omega, \sigma]^k} [g(t) \mathbf{1}_{\tilde{\mathcal{A}}'_t}] - \mathbf{E}_x^{[\omega, \sigma]^{k-1}} [g(t) \mathbf{1}_{\tilde{\mathcal{A}}'_t}] \right].$$

The remarkable property is that one has :

$$\mathbf{E}_x^{[\omega, \sigma]^k} [g(t) \mathbf{1}_{\tilde{\mathcal{A}}_t}] = \mathbf{E}_x^{[\omega, \sigma]^{k-1}} [g(t) \mathbf{1}_{\tilde{\mathcal{A}}_t}].$$

Indeed, the event  $\tilde{\mathcal{A}}_t$  itself does not depend on the value of  $\omega_{e_k}$ , and on this event, the law of the walk up to time  $t+s$  does not either, nor does  $g(t)$  by the definition of  $g$  as a function that depends only on the trajectory up to time  $s$ . Therefore  $\tilde{A}_k(t)$  simply vanishes in that case. The evaluation of  $\tilde{A}'_k(t)$  follows the same line as for Proposition 6.2, and one finally obtains that there exists  $C > 0$  (independent of  $g$ ,  $s$  and  $t$ ) such that :

$$\mathcal{N}(\bar{f}_t) \leq C \|g\|_\infty^2 (s+t+1)^2.$$

From this estimate, and using Proposition 3.5, it comes that, for any  $t > 1$  :

$$\mathbb{E} [(\bar{f}_t)^2] \leq C \|g\|_\infty^2 \left( \int_1^t (s+u+1)^{-4/d} du \right)^{-d/2}.$$

Elementary computations then lead to the claims of the proposition, using the fact that  $\text{Var}(f_t) \leq \|g\|_\infty^2$  to treat smaller times.  $\square$

We will use this result in chapter VII in order to find the scaling limit of the random walk among random traps.

## 8. Central limit theorems

We begin with the proof of Theorem 2.4, which shows the equivalence between the algebraic decay of the variance of  $f_t$  and a particular behaviour of the spectral measure  $e_f$  around 0.

PROOF OF THEOREM 2.4. Note that the variance of  $f_t$  can be rephrased in terms of the spectral measure  $e_f$  as

$$\mathbb{E}[(f_t)^2] = \int e^{-2\lambda t} de_f(\lambda).$$

The variance decay given in point (1) of Theorem 2.4 is therefore equivalent to :

$$(8.1) \quad \int e^{-\lambda t} de_f(\lambda) \leq \frac{C}{t^\alpha}.$$

We will show that equation (8.1) is equivalent to point (2) of the theorem.

Assume that equation (8.1) holds, and let

$$\chi(t) = \begin{cases} 0 & \text{if } 0 \leq t < 1 \\ 1 - e^{-t} & \text{if } t \geq 1. \end{cases}$$

Multiplying inequality (8.1) by  $\chi(\delta t)$  and integrating over  $t \in [0, +\infty)$ , it comes that

$$(8.2) \quad \begin{aligned} \int_{t=0}^{+\infty} \chi(\delta t) \int e^{-\lambda t} de_f(\lambda) dt &\leq C \int_0^{+\infty} \chi(\delta t) t^{-\alpha} dt \\ &\leq C \delta^{\alpha-1} \int_1^{+\infty} \chi(u) u^{-\alpha} du, \end{aligned}$$

where the integral is finite, as  $\alpha > 1$  and  $\chi$  is bounded. Now,  $\chi$  has been chosen so that

$$\int_{t=0}^{+\infty} e^{-\lambda t} \chi(\delta t) dt = \frac{e^{-\lambda/\delta}}{\lambda} - \frac{e^{-(\lambda+\delta)/\delta}}{\lambda + \delta} \geq \frac{1}{2e\lambda} \mathbf{1}_{[0, \delta]}(\lambda),$$

so we get, using Fubini's theorem :

$$(8.3) \quad \int_{t=0}^{+\infty} \int \chi(\delta t) e^{-\lambda t} de_f(\lambda) dt \geq \int_{[0, \delta]} \frac{1}{2e\lambda} de_f(\lambda).$$

Combining (8.2) and (8.3), we obtain :

$$(8.4) \quad \int_{[0, \delta]} \frac{1}{\lambda} de_f(\lambda) \leq C \delta^{\alpha-1}.$$

Reciprocally, assume that (8.4) holds. Note that

$$\lambda e^{-\lambda t} = \int_{\lambda}^{+\infty} (\delta t - 1) e^{-\delta t} d\delta.$$

It comes that

$$\begin{aligned} \int e^{-\lambda t} de_f(\lambda) &= \int \int_{\delta=0}^{+\infty} (\delta t - 1) e^{-\delta t} \frac{1}{\lambda} \mathbf{1}_{\{\lambda \leq \delta\}} d\delta de_f(\lambda) \\ &= \int_0^{+\infty} (\delta t - 1) e^{-\delta t} \int_{[0, \delta]} \frac{1}{\lambda} de_f(\lambda) d\delta, \end{aligned}$$

the use of Fubini's theorem being justified by the fact that the integrand is bounded in absolute value by  $(\delta t + 1)e^{-\delta t}/\lambda$ , which is integrable (the total mass of  $e_f$  is  $\|f\|_2^2$ , assumed to be finite). Using inequality (8.4), the former is bounded by

$$C \int_0^{+\infty} (\delta t - 1) e^{-\delta t} \delta^{\alpha-1} d\delta = \frac{C}{t^\alpha} \int_0^{+\infty} (u - 1) e^{-u} u^{\alpha-1} du,$$

which proves that (8.1) holds.  $\square$

We now present some results taken from [KV86]. Although the authors give a complete proof for the discrete time case, they provide less details in the continuous time setting. For convenience of the reader, and also because we will need some of these details in the sequel, we provide here part of the proof of these results. We recall that the definition of  $I_f(t)$  was given in (1.3).

THEOREM 8.1 ([KV86]). *If*

$$(8.5) \quad \int \frac{1}{\lambda} de_f(\lambda) < +\infty,$$

then there exist  $(M_t)_{t \geq 0}$ ,  $(\xi_t)_{t \geq 0}$  such that  $I_f(t) = M_t + \xi_t$ , where  $(M_t)$  is a martingale with stationary increments under  $\bar{\mathbb{P}}$  (and the natural filtration), and  $(\xi_t)$  is such that :

$$(8.6) \quad \frac{1}{t} \bar{\mathbb{E}}[(\xi_t)^2] = 2 \int \frac{1 - e^{-\lambda t}}{\lambda^2 t} de_f(\lambda) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0.$$

Moreover, if  $\mathbb{P}$  is ergodic,  $(\varepsilon I_f(t/\varepsilon^2))_{t \geq 0}$  converges, as  $\varepsilon$  goes to 0, to a Brownian motion of variance

$$\sigma^2 = \bar{\mathbb{E}}[(M_1)^2] = 2 \int \frac{1}{\lambda} de_f(\lambda).$$

**Remark.** We shall only give the proof of the first part of the theorem. We refer to [KV86] for a proof of the invariance principle.

PROOF. Let  $\varepsilon > 0$ , and let  $u_\varepsilon$  be such that

$$(8.7) \quad (-\mathcal{L} + \varepsilon)u_\varepsilon = f.$$

We define  $(M_t^\varepsilon)$ ,  $(\xi_t^\varepsilon)$ ,  $(\eta_t^\varepsilon)$  by :

$$\begin{aligned} M_t^\varepsilon &= u_\varepsilon(\omega(t)) - u_\varepsilon(\omega(0)) - \int_0^t \mathcal{L}u_\varepsilon(\omega(s))ds \\ \xi_t^\varepsilon &= -u_\varepsilon(\omega(t)) + u_\varepsilon(\omega(0)) \\ \eta_t^\varepsilon &= \int_0^t \varepsilon u_\varepsilon(\omega(s))ds. \end{aligned}$$

Using the definition of  $u_\varepsilon$  in (8.7), one can see that  $I_f(t) = M_t^\varepsilon + \xi_t^\varepsilon + \eta_t^\varepsilon$ . Moreover,  $(M_t^\varepsilon)_{t \geq 0}$  is a martingale with stationary increments under  $\bar{\mathbb{P}}$ . We first show that  $\eta_t^\varepsilon$  tends to 0 in  $L^2(\bar{\mathbb{P}})$  as  $\varepsilon$  goes to 0. We will then prove that  $(M_t^\varepsilon)$ ,  $(\xi_t^\varepsilon)$  have limits in  $L^2(\bar{\mathbb{P}})$  as  $\varepsilon$  goes to zero, by checking that they are Cauchy sequences. Writing these two limits  $M_t$  and  $\xi_t$  respectively, we will have  $I_f(t) = M_t + \xi_t$ .

We begin by showing that  $\eta_t^\varepsilon$  tends to 0 as  $\varepsilon$  goes to 0. Note that

$$\begin{aligned} \bar{\mathbb{E}} \left[ \left( \int_0^t g(\omega(s))ds \right)^2 \right] &= 2 \int_{0 \leq s \leq u \leq t} \bar{\mathbb{E}}[g(\omega(s))g(\omega(u))]ds du \\ &= 2 \int_{0 \leq s \leq u \leq t} \bar{\mathbb{E}}[g(\omega(0))g(\omega(u-s))]ds du, \end{aligned}$$

using the stationarity of  $(\omega(s))$ . By a change of variables (and using the fact that  $\bar{\mathbb{E}} = \mathbb{E} \cdot \mathbb{E}_0^\omega$ ), the latter becomes

$$(8.8) \quad 2 \int_0^t (t-s) \mathbb{E}[g(\omega)g_s(\omega)]ds.$$

Together with the fact that  $u_\varepsilon = (-\mathcal{L} + \varepsilon)^{-1}f$ , this enables us to compute

$$\begin{aligned} \overline{\mathbb{E}}[(\eta_t^\varepsilon)^2] &= 2 \int \int_0^t (t-s)e^{-\lambda s} ds \left( \frac{\varepsilon}{\lambda + \varepsilon} \right)^2 de_f(\lambda) \\ &= 2 \int \frac{e^{-\lambda t} - 1 + \lambda t}{\lambda^2} \frac{\varepsilon^2}{(\lambda + \varepsilon)^2} de_f(\lambda). \end{aligned}$$

As  $\lambda \mapsto (e^{-\lambda t} - 1 + \lambda t)/\lambda^2$  remains bounded (and does not depend on  $\varepsilon$ ), the dominated convergence theorem shows that

$$\overline{\mathbb{E}}[(\eta_t^\varepsilon)^2] \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

We now turn to the study of  $(M_t^\varepsilon)$ . We will show that

$$(8.9) \quad \overline{\mathbb{E}} \left[ \left( g(\omega(t)) - g(\omega(0)) - \int_0^t \mathcal{L}g(\omega(s)) ds \right)^2 \right] = -2t\mathbb{E}[g(\omega)\mathcal{L}g(\omega)].$$

Indeed, as noted before, the process

$$g(\omega(t)) - g(\omega(0)) - \int_0^t \mathcal{L}g(\omega(s)) ds$$

is a martingale with stationary increments under  $\overline{\mathbb{P}}$ , so the expression on the left hand side of equation (8.9) is equal to  $Ct$  for some  $C \geq 0$ .  $C$  can be determined by computing the derivative at  $t = 0$ . Note that the the left hand side of (8.9) can be decomposed into

$$\begin{aligned} \overline{\mathbb{E}} \left[ (g(\omega(t)) - g(\omega(0)))^2 \right] - 2\overline{\mathbb{E}} \left[ (g(\omega(t)) - g(\omega(0))) \int_0^t \mathcal{L}g(\omega(s)) ds \right] \\ + \overline{\mathbb{E}} \left[ \left( \int_0^t \mathcal{L}g(\omega(s)) ds \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

Due to the reversibility of the process, (the cadlag modification of)  $(\omega(t-s))_{0 \leq s \leq t}$  has the same law under  $\overline{\mathbb{P}}$  as  $(\omega(s))_{0 \leq s \leq t}$ . But under this time reversal, the integral remains unchanged while  $g(\omega(t)) - g(\omega(0))$  is changed into its opposite. The double product is therefore equal to zero. As for the square of the integral, the computation that lead to equation (8.8) shows that it is bounded by a constant times  $t^2$ . In particular, its derivative at 0 is equal to zero, and there is only the first term left. Its derivative at 0 is known to be twice the Dirichlet form  $\mathcal{E}(g, g) = -\mathbb{E}[g(\omega)\mathcal{L}g(\omega)]$ . It comes that

$$\begin{aligned} \overline{\mathbb{E}}[(M_t^{\varepsilon_1} - M_t^{\varepsilon_2})^2] &= \int 2t\lambda \left( \frac{1}{\lambda + \varepsilon_1} - \frac{1}{\lambda + \varepsilon_2} \right)^2 de_f(\lambda) \\ &= \int \frac{2t\lambda(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)^2}{(\lambda + \varepsilon_1)^2(\lambda + \varepsilon_2)^2} de_f(\lambda). \end{aligned}$$

If, say,  $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$ , then the integrand is bounded by

$$\frac{2t\lambda(\varepsilon_2)^2}{\lambda^2(\varepsilon_2)^2} = \frac{2t}{\lambda},$$

which is integrable due to assumption (8.5). So dominated convergence theorem applies, and as

$$\frac{2t\lambda(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)^2}{(\lambda + \varepsilon_1)^2(\lambda + \varepsilon_2)^2} \leq \frac{2t\lambda(\varepsilon_2)^2}{\lambda^4} \xrightarrow{\varepsilon_1, \varepsilon_2 \rightarrow 0} 0,$$

we get

$$\overline{\mathbb{E}}[(M_t^{\varepsilon_1} - M_t^{\varepsilon_2})^2] \xrightarrow{\varepsilon_1, \varepsilon_2 \rightarrow 0} 0.$$

We write  $M_t$  for the  $L^2(\overline{\mathbb{P}})$  limit of  $(M_t^\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$  as  $\varepsilon$  goes to 0.

What is left is to check the convergence of  $\xi_t^\varepsilon$ . Similarly, it comes that

$$\begin{aligned}\overline{\mathbb{E}}[(\xi_t^{\varepsilon_1} - \xi_t^{\varepsilon_2})^2] &= \int 2(1 - e^{-\lambda t}) \left( \frac{1}{\lambda + \varepsilon_1} - \frac{1}{\lambda + \varepsilon_2} \right)^2 de_f(\lambda) \\ &= \int \frac{2(1 - e^{-\lambda t})(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)^2}{(\lambda + \varepsilon_1)^2(\lambda + \varepsilon_2)^2} de_f(\lambda).\end{aligned}$$

and we show the same way, using dominated convergence theorem, that the latter converges to 0 as  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  go to 0. We write  $\xi_t$  for the limit. We have

$$\overline{\mathbb{E}}[(\xi_t^\varepsilon)^2] = \int 2(1 - e^{-\lambda t}) \left( \frac{1}{\lambda + \varepsilon} \right)^2 de_f(\lambda).$$

Letting  $\varepsilon$  go to 0, the  $L^2$  convergence on one hand, and the monotone convergence theorem on the other, ensure that :

$$\frac{1}{t} \overline{\mathbb{E}}[(\xi_t)^2] = 2 \int \frac{1 - e^{-\lambda t}}{\lambda^2 t} de_f(\lambda).$$

Using the fact that for any  $x \geq 0$ ,  $1 - e^{-x} \leq x$ , the integrand above is bounded by  $1/\lambda$ , which is assumed to be integrable. Dominated convergence theorem thus implies that the integral above converges to 0 as  $t$  tends to infinity.  $\square$

Under a stronger assumption, the next proposition gives an estimate of the speed of convergence to 0 in equation (8.6).

**PROPOSITION 8.2.** *Under one of the equivalent conditions (1), (2) of Theorem 2.4, there exists  $C > 0$  such that*

$$(8.10) \quad \frac{1}{t} \overline{\mathbb{E}}[(\xi_t)^2] = 2 \int \frac{1 - e^{-\lambda t}}{\lambda^2 t} de_f(\lambda) \leq \frac{C}{\psi_\alpha(t)},$$

where  $\psi_\alpha$  is defined in (2.10).

**PROOF.** The equality of the first two terms in (8.10) was given in Theorem 8.1. For the inequality, note first that for any  $\alpha$ , we have

$$\psi_\alpha(t) \leq t \quad \text{and} \quad \psi_\alpha(t) \leq t^{\alpha-1}.$$

Assuming that  $t \geq 1$ , we will decompose the interval of integration  $\mathbb{R}_+$  into  $[0, 1/t) \cup [1/t, 1) \cup [1, +\infty)$ . As for any  $x \geq 0$ ,  $1 - e^{-x} \leq x$ , we have

$$\int_0^{1/t} \frac{1 - e^{-\lambda t}}{\lambda^2 t} de_f(\lambda) \leq C \int_0^{1/t} \frac{1}{\lambda} de_f(\lambda) \leq \frac{C}{t^{\alpha-1}},$$

using condition (2) of Theorem 2.4. On the other hand,

$$\int_1^{+\infty} \frac{1 - e^{-\lambda t}}{\lambda^2 t} de_f(\lambda) \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{t} de_f(\lambda) \leq \frac{\|f\|_2^2}{t}.$$

Now for the integral between  $1/t$  and 1, it is bounded from above by the following, on which we perform a kind of integration by parts :

$$\begin{aligned}\int_{1/t}^1 \frac{1}{\lambda t} \frac{1}{\lambda} de_f(\lambda) &= \int_{\lambda=1/t}^1 \int_{\delta=\lambda}^{+\infty} \frac{1}{\delta^2 t} \frac{1}{\lambda} d\delta de_f(\lambda) \\ &= \int_{\delta=1/t}^{+\infty} \frac{1}{\delta^2 t} \int_{\lambda=1/t}^{\min(\delta, 1)} \frac{1}{\lambda} de_f(\lambda) d\delta.\end{aligned}$$

Using property (2) of Theorem 2.4 once again, it comes that the latter is bounded by

$$C \int_{\delta=1/t}^{+\infty} \frac{1}{\delta^2 t} \min(\delta, 1)^{\alpha-1} d\delta.$$

This integral can be decomposed into two parts :

$$\int_{\delta=1}^{+\infty} \frac{1}{\delta^2 t} d\delta = \frac{1}{t},$$

and

$$\int_{\delta=1/t}^1 \frac{\delta^{\alpha-3}}{t} d\delta = \begin{cases} \frac{1}{(\alpha-2)t} \left(1 - \frac{1}{t^{\alpha-2}}\right) & \text{if } \alpha \neq 2 \\ \frac{\ln(t)}{t} & \text{if } \alpha = 2. \end{cases}$$

which proves the proposition.  $\square$

PROPOSITION 8.3. *Under one of the equivalent conditions (1), (2) of Theorem 2.4, there exists  $C > 0$  such that*

$$0 \leq \sigma^2 - \frac{1}{t} \overline{\mathbb{E}}[I_f(t)^2] \leq \frac{C}{\psi_\alpha(t)}.$$

where  $\sigma$  is defined by (2.9).

PROOF. Note that

$$\overline{\mathbb{E}}[(M_t)^2] = \overline{\mathbb{E}}[(I_f(t) - \xi_t)^2] = \overline{\mathbb{E}}[I_f(t)^2] - 2\overline{\mathbb{E}}[I_f(t)\xi_t] + \overline{\mathbb{E}}[(\xi_t)^2].$$

Stationarity of the increments of  $M_t$  implies that  $\overline{\mathbb{E}}[(M_t)^2] = t\sigma^2$ . Due to reversibility, (the cadlag modification of)  $(\omega(t-s))_{0 \leq s \leq t}$  has the same law under  $\overline{\mathbb{P}}$  as  $(\omega(s))_{0 \leq s \leq t}$ . But under this time reversal,  $I_f(t)$  remains unchanged while  $\xi_t$  is changed into  $-\xi_t$  (it is enough to check that it is true on  $\xi_t^c$ , which is clear). Therefore, we have

$$\overline{\mathbb{E}}[I_f(t)\xi_t] = -\overline{\mathbb{E}}[I_f(t)\xi_t] = 0.$$

Proposition 8.2 states that

$$0 \leq \frac{1}{t} \overline{\mathbb{E}}[(\xi_t)^2] \leq \frac{C}{\psi_\alpha(t)},$$

which proves the proposition.  $\square$

We write  $Z_t \in \mathbb{Z}^d$  as  $(Z_{1,t}, \dots, Z_{d,t})$ . Corollary 2.6 is implied by the following result.

PROPOSITION 8.4. *Let  $i \in \{1, \dots, d\}$ . Under assumption (2) and if  $d \geq 7$ , there exists  $C > 0$  such that*

$$0 \leq \frac{1}{t} \overline{\mathbb{E}}[(Z_{i,t})^2] - \bar{\sigma}^2 \leq \frac{C}{\psi_\alpha(t)} \quad \text{with } \alpha = \frac{d}{2} - 2.$$

PROOF. By symmetry, it is sufficient to prove the result for  $i = 1$ . Recall from equation (7.1) that we defined the local drift in the first coordinate as

$$\mathfrak{d}(\omega) = \omega_{0,e_1} - \omega_{0,-e_1}.$$

Let

$$I_{\mathfrak{d}}(t) = \int_0^t \mathfrak{d}(\omega(s)) ds.$$

Then

$$N_t := Z_{1,t} - I_{\mathfrak{d}}(t)$$

is a martingale with stationary increments under  $\overline{\mathbb{P}}$ . Under assumption (2), it is clear that  $N(\mathfrak{d})$  is finite, as it is bounded and depends only on a finite number of coordinates. Using Theorem 2.3, we obtain that assumption (1) of Theorem 2.4 is satisfied with  $\alpha = d/2 - 2$ . We have  $\alpha > 1$  whenever  $d \geq 7$ , and in this case, Proposition 8.3 applies :

$$(8.11) \quad 0 \leq \sigma^2 - \frac{1}{t} \overline{\mathbb{E}}[I_{\mathfrak{d}}(t)^2] \leq \frac{C}{\psi_\alpha(t)},$$

where  $\sigma^2 = 2 \int \lambda^{-1} d e_{\mathfrak{d}}(\lambda)$ . We obtain

$$(8.12) \quad \overline{\mathbb{E}}[(N_t)^2] = \overline{\mathbb{E}}[(Z_{1,t})^2] - 2\overline{\mathbb{E}}[Z_{1,t}I_{\mathfrak{d}}(t)] + \overline{\mathbb{E}}[I_{\mathfrak{d}}(t)^2].$$

Stationarity of the increments of  $N_t$  implies that  $\overline{\mathbb{E}}[(N_t)^2] = t(\sigma')^2$  for some  $\sigma' \geq 0$ . We will now show that  $\overline{\mathbb{E}}[Z_{1,t}I_{\mathfrak{d}}(t)] = 0$ .

Indeed, one can see  $Z_{1,t}$  as a function of  $(\omega(s))_{0 \leq s \leq t}$  (this is valid whenever  $\omega$  is not periodic, which is true almost surely). But as we saw before, the (cadlag modification of the) time reversal  $(\omega(t-s))_{0 \leq s \leq t}$  has the same law as  $(\omega(s))_{0 \leq s \leq t}$  under  $\overline{\mathbb{P}}$ . It is clear that this time reversal changes  $Z_{1,t}$  into  $-Z_{1,t}$ . On the other hand, it leaves  $I_{\mathfrak{d}}(t)$  unchanged. Therefore, we obtain

$$\overline{\mathbb{E}}[Z_{1,t}I_{\mathfrak{d}}(t)] = -\overline{\mathbb{E}}[Z_{1,t}I_{\mathfrak{d}}(t)] = 0,$$

which, together with (8.11) and (8.12), proves the proposition (with  $\overline{\sigma}^2 = (\sigma')^2 - \sigma^2$ ).  $\square$

## 9. Addendum

A referee made us aware of the recent works [GO09, GO10], in which the authors propose a practical way to estimate the effective diffusion matrix. As we will now see, their results have consequences in terms of the exponent of decay to equilibrium associated with the function  $\mathfrak{d}$  defined in (7.1). They consider the case when  $d \geq 2$ . For bounded, independent and identically distributed conductances, our Theorems 2.2 and 2.3 give an exponent of decay equal to  $\max(1, d/2 - 2)$  (with a logarithmic correction for  $d = 2$ ). On the other hand, roughly speaking, their results imply that the exponent of decay is at least  $\min(d/2 + 1, 3)$  for this particular function  $\mathfrak{d}$ , which is a better result when  $d \leq 9$ . This observation enables to strengthen Corollary 2.6 when  $d \leq 8$ . Our approach does not provide such good exponents, but has the advantage of covering a large class of functions at once, and also gives some information when the conductances are unbounded (although in this case, Theorem 2.3 does not apply to the function  $\mathfrak{d}$ , as  $N(\mathfrak{d})$  becomes infinite).

We describe their approach briefly, and refer the reader to [GO09, GO10] for details. The authors assume that the conductances are bounded, independent and identically distributed. In this case, we recall that the effective diffusion matrix is  $\overline{\sigma}^2$  times the identity matrix. The authors ask for a practical way to compute  $\overline{\sigma}^2$  numerically, with a control of the error. The constant  $\overline{\sigma}^2$  can be expressed in terms of the “corrector field”. We recall from (7.1) the definition of the local drift in the first coordinate as

$$(9.1) \quad \mathfrak{d}(\omega) = \omega_{0,e_1} - \omega_{0,-e_1}.$$

The corrector is a function  $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  such that

$$(9.2) \quad -\mathcal{L}\phi = \mathfrak{d},$$

whose gradient is stationary and of mean 0 [Kü83, Theorem 3].

Let us define the following quantities :

$$(9.3) \quad \begin{aligned} A_0(\phi) &= \mathbb{E}[\omega_{0,e_1}] - \mathcal{E}(\phi, \phi), \\ A_1(\phi) &= \mathbb{E}[\omega_{0,e_1}(1 + \phi(\theta_{e_1} \omega) - \phi(\omega))], \\ A_2(\phi) &= \frac{1}{2} \sum_{|z|=1} \mathbb{E}[\omega_{0,z}(e_1 \cdot z + \phi(\theta_z \omega) - \phi(\omega))^2]. \end{aligned}$$

These three expressions are all equal to  $\overline{\sigma}^2/2$  (see [DFGW89, Theorem 4.5 (iii)] and [Kü83, (3.17), (3.19)]).

The problem faced is that the function  $\phi$  is not practically computable. An idea is to replace  $\phi$  by  $R_\mu \mathfrak{d}$ , where  $R_\mu$  is the resolvent operator defined in (5.1), and

$\mu > 0$  is a small parameter. In the words of [Yu86], the function  $R_\mu \mathfrak{d}$  is an “almost solution” of the original Poisson equation (9.2). As discussed in the introduction of [GO09], the function  $R_\mu \mathfrak{d}$  can be computed in practice.

At this point, one expects  $A_0(R_\mu \mathfrak{d})$ ,  $A_1(R_\mu \mathfrak{d})$  and  $A_2(R_\mu \mathfrak{d})$  to approach  $\bar{\sigma}^2/2$  as  $\mu$  tends to 0. These quantities are however no longer equal, and a computation (following [Kü83, p. 50]) shows that

$$A_0(R_\mu \mathfrak{d}) = A_1(R_\mu \mathfrak{d}) + \mu \mathbb{E}[(R_\mu \mathfrak{d})^2] = A_2(R_\mu \mathfrak{d}) + 2\mu \mathbb{E}[(R_\mu \mathfrak{d})^2].$$

In other words, these approximations are of the form

$$A_k(R_\mu \mathfrak{d}) = A_0(R_\mu \mathfrak{d}) - k\mu \mathbb{E}[(R_\mu \mathfrak{d})^2],$$

for some  $k \in \mathbb{R}$ . It turns out that, among the family of possible approximations  $(A_k(R_\mu \mathfrak{d}))_{k \in \mathbb{R}}$ , all approximations are asymptotically of the same order, except for  $k = 2$ , for which the approximation is better. [GO09, GO10] have indeed chosen  $A_2(R_\mu \mathfrak{d})$  as their approximation, while [Yu86, Theorem 2.1] had chosen  $A_1(R_\mu \mathfrak{d})$  (but obtained a non-optimal result anyways). A spectral computation gives that

$$\begin{aligned} A_k(R_\mu \mathfrak{d}) - \frac{\bar{\sigma}^2}{2} &= \mathcal{E}(\phi, \phi) - \mathcal{E}(R_\mu \mathfrak{d}, R_\mu \mathfrak{d}) - k\mu \mathbb{E}[(R_\mu \mathfrak{d})^2] \\ &= \int \left( \frac{1}{\lambda} - \frac{\lambda}{(\lambda + \mu)^2} - \frac{k\mu}{(\lambda + \mu)^2} \right) de_{\mathfrak{d}}(\lambda) \\ &= \int \frac{\mu^2 + (2 - k)\lambda\mu}{\lambda(\lambda + \mu)^2} de_{\mathfrak{d}}(\lambda). \end{aligned}$$

For any  $f \in L^2(\mathbb{P})$  satisfying  $\int \lambda^{-1} de_f(\lambda) < +\infty$ , we thus define

$$J_{k,\mu}(f) = \int \frac{\mu^2 + (2 - k)\lambda\mu}{\lambda(\lambda + \mu)^2} de_f(\lambda).$$

Its behaviour as  $\mu$  tends to 0 can be described the following way.

**PROPOSITION 9.1.** *Let  $f \in L^2(\mathbb{P})$  and  $\alpha > 1$ . Under one of the equivalent conditions (1), (2) of Theorem 2.4, there exists  $C > 0$  such that for any  $\mu > 0$  :*

$$0 \leq J_{2,\mu}(f) \leq \begin{cases} C\mu^{\alpha-1} & \text{if } \alpha < 3, \\ C\mu^2 \ln(\mu^{-1}) & \text{if } \alpha = 3, \\ C\mu^2 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

*Reciprocally :*

$$(9.4) \quad \int_0^\mu \frac{1}{\lambda} de_f(\lambda) \leq 4J_{2,\mu}(f),$$

and, if  $f \neq 0$ , then there exists  $C > 0$  such that, for any  $\mu$  small enough,

$$(9.5) \quad C\mu^2 \leq J_{2,\mu}(f).$$

On the other hand, if  $k \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ ,  $f \neq 0$  and  $\alpha > 2$ , then there exists  $C_1, C_2 > 0$  such that, for any  $\mu$  small enough,

$$C_1\mu \leq |J_{k,\mu}(f)| \leq C_2\mu.$$

**PROOF.** The proof is similar to the proof of Theorem 2.4. We decompose  $J_{2,\mu}(f)$  as

$$2 \int_{\lambda=0}^{+\infty} \int_{\delta=\lambda}^{+\infty} \frac{\mu^2}{(\mu + \delta)^3} d\delta \frac{1}{\lambda} de_f(\lambda).$$

By Fubini’s theorem, this integral can be rewritten as

$$2 \int_{\delta=0}^{+\infty} \frac{\mu^2}{(\mu + \delta)^3} \int_{\lambda=0}^{\delta} \frac{1}{\lambda} de_f(\lambda) d\delta.$$

Under assumption (2) of Theorem 2.4, this integral is bounded by a constant times

$$\int_{\delta=0}^{+\infty} \frac{\mu^2}{(\mu + \delta)^3} \min(\delta^{\alpha-1}, 1) d\delta.$$

The integral obtained when  $\delta$  ranges in  $[1, +\infty)$  can be computed explicitly, and is smaller than  $\mu^2$ . For the remaining part, a change of variable leads to

$$\mu^{\alpha-1} \int_0^{1/\mu} \frac{1}{(1+u)^3} u^{\alpha-1} du,$$

from which the first part of the proposition follows. Inequality (9.4) is clear if one observes that

$$\frac{\mu^2}{(\lambda + \mu)^2} \geq \frac{1}{4} \mathbf{1}_{[0, \mu]}(\lambda).$$

For the next claim, let  $\delta > 0$  be such that

$$(9.5) \quad \int_0^\delta de_f(\lambda) > 0.$$

Then

$$J_{2, \mu}(f) \geq \frac{\mu^2}{\delta(\delta + \mu)^2} \int_0^\delta de_f(\lambda),$$

which shows (9.5). For the last part, let us assume that  $k > 2$ . One can decompose  $J_{k, \mu}(f)$  as

$$(9.7) \quad \left( \int_0^{\mu/(k-2)} + \int_{\mu/(k-2)}^{+\infty} \right) \frac{\mu^2 - (k-2)\lambda\mu}{\lambda(\lambda + \mu)^2} de_f(\lambda).$$

In this expression, the integrand is positive on the first interval of integration, and negative on the second one. The first integral is thus positive, and bounded by

$$\int_0^{\mu/(k-2)} \frac{\mu^2}{\lambda(\lambda + \mu)^2} de_f(\lambda) \leq \int_0^{\mu/(k-2)} \frac{1}{\lambda} de_f(\lambda) \leq C\mu^{\alpha-1},$$

which is negligible compared to  $\mu$  when  $\alpha > 2$ . The second integral obtained from (9.7) can be separated into

$$\int_{\mu/(k-2)}^{+\infty} \frac{\mu^2}{\lambda(\lambda + \mu)^2} de_f(\lambda) - (k-2) \int_{\mu/(k-2)}^{+\infty} \frac{\mu}{(\lambda + \mu)^2} de_f(\lambda).$$

The first integral is positive, and bounded by  $J_{2, \mu}(f)$ , which is negligible compared to  $\mu$  when  $\alpha > 2$ . Let us define  $\delta > 0$  such that (9.6) holds. Then

$$\int_{\mu/(k-2)}^{+\infty} \frac{\mu}{(\lambda + \mu)^2} de_f(\lambda) \geq \frac{\mu}{(\delta + \mu)^2} \int_{\mu/(k-2)}^\delta de_f(\lambda),$$

which is larger than  $C\mu$  for any small enough  $\mu$ . The proof is similar for  $k < 2$  (only simpler).

Reciprocally, we need to show that, for any  $\alpha > 2$ ,  $|J_{k, \mu}(f)| \leq C\mu$ . Due to the previous observations, it is in fact sufficient to bound

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mu}{(\lambda + \mu)^2} de_f(\lambda) = \mu \mathbb{E}[(R_\mu f)^2].$$

We postpone the proof of this last fact to the proof of Proposition 9.4.  $\square$

[GO10] obtain the following result.

THEOREM 9.2 ([GO10]). For  $\mathfrak{d}$  defined in (9.1), and for some  $c > 0$ , one has :

$$J_{2,\mu}(\mathfrak{d}) \leq \begin{cases} C\mu \ln(\mu^{-1})^c & \text{if } d = 2, \\ C\mu^{3/2} & \text{if } d = 3, \\ C\mu^2 \ln(\mu^{-1}) & \text{if } d = 4, \\ C\mu^2 & \text{if } d \geq 5. \end{cases}$$

They also argue that, except possibly for the logarithmic term in dimension 2, these bounds cannot be improved [GO09, Appendix]. This result has the following consequences.

COROLLARY 9.3. For any  $\varepsilon > 0$ , there exists  $C > 0$  such that, for any  $t > 0$  :

$$(9.8) \quad \mathbb{E}[(\mathfrak{d}_t)^2] \leq \begin{cases} Ct^{-2+\varepsilon} & \text{if } d = 2, \\ Ct^{-5/2} & \text{if } d = 3, \\ Ct^{-3+\varepsilon} & \text{if } d = 4, \\ Ct^{-3} & \text{if } d \geq 5, \end{cases}$$

and moreover,

$$(9.9) \quad 0 \leq t^{-1} \mathbb{E}[(\|Z_t\|_2)^2] - d\bar{\sigma}^2 \leq \begin{cases} Ct^{-1+\varepsilon} & \text{if } d = 2, \\ Ct^{-1} & \text{if } d \geq 3. \end{cases}$$

PROOF. The first claim is obtained from Theorem 9.2 using inequality (9.4) and Theorem 2.4. The second one is a consequence of the first, obtained exactly the same way as we proved Proposition 8.4.  $\square$

**Remark.** The result in (9.8) improves on our Theorems 2.2 and 2.3 when  $d \leq 9$  (the bound coincides with the one given by Theorem 2.3 when  $d = 10$ , and is weaker for larger dimensions), while (9.9) strengthens our Corollary 2.6 when  $d \leq 8$  (and is equivalent otherwise).

In terms of practical computations, the expectation that one needs to compute in the formula (9.3) is still problematic. [GO09] propose to replace this expectation by a spatial average, evaluated on a single realisation of the environment. This new approximation has expectation  $A_2(R_\mu \mathfrak{d})$ , but also has random fluctuations.

The main purpose of [GO09] is to estimate the  $L^2$  norm of these fluctuations. In order to do so, they show [GO09, Proposition 1] that, for  $d \geq 3$  and for any  $q > 0$ , there exists a constant  $C$  such that

$$(9.10) \quad \sup_{\mu > 0} \mathbb{E}[|R_\mu \mathfrak{d}|^q] \leq C,$$

and in dimension 2, that  $\mathbb{E}[|R_\mu \mathfrak{d}|^q]$  is bounded by some power of  $\ln(\mu^{-1})$ . The result concerning the case  $q = 2$  can easily be linked with the behaviour of the spectral measure.

PROPOSITION 9.4. Let  $f \in L^2(\mathbb{P})$  and  $\alpha > 1$ . Under one of the equivalent conditions (1), (2) of Theorem 2.4, there exists  $C > 0$  such that for any  $\mu > 0$  :

$$\mathbb{E}[(R_\mu f)^2] \leq \begin{cases} C\mu^{\alpha-2} & \text{if } \alpha < 2, \\ C \ln(\mu^{-1}) & \text{if } \alpha = 2, \\ C & \text{otherwise,} \end{cases}$$

and reciprocally :

$$\int_0^\mu \frac{1}{\lambda} de_f(\lambda) \leq 8\mu \mathbb{E}[(R_\mu f)^2].$$

PROOF. The spectral representation gives us that

$$(9.11) \quad \mathbb{E}[(R_\mu f)^2] = \int \frac{1}{(\lambda + \mu)^2} de_f(\lambda).$$

We may rewrite this integral as

$$\int \frac{\lambda}{(\lambda + \mu)^2} \frac{1}{\lambda} de_f(\lambda) = \int_{\lambda=0}^{+\infty} \int_{\delta=\lambda}^{+\infty} \frac{\delta - \mu}{(\delta + \mu)^3} d\delta \frac{1}{\lambda} de_f(\lambda).$$

Using Fubini's theorem, and under condition (2) of Theorem 2.4, one obtains that this integral is bounded by a constant times

$$\int_0^{+\infty} \frac{\delta - \mu}{(\delta + \mu)^3} \min(\delta^{\alpha-1}, 1) d\delta.$$

The integral over the interval  $[1, +\infty)$  is bounded by

$$\int_1^{+\infty} \frac{\delta - \mu}{(\delta + \mu)^3} d\delta = \frac{1}{(1 + \mu)^2} \leq 1,$$

One is thus left with the study of

$$\int_0^1 \frac{\delta - \mu}{(\delta + \mu)^3} \delta^{\alpha-1} d\delta,$$

which, by a change of variable, becomes

$$\mu^{\alpha-2} \int_0^{1/\mu} \frac{u-1}{(u+1)^3} u^{\alpha-1} du.$$

The first part of the proposition then follows. Reciprocally, one can see from (9.11) that :

$$(9.12) \quad \int_0^\mu de_f(\lambda) \leq 4\mu^2 \mathbb{E}[(R_\mu f)^2].$$

We then note that

$$\int_0^\mu \frac{1}{\lambda} de_f(\lambda) = \int_{\lambda=0}^\mu \int_{\delta=\lambda}^{+\infty} \frac{1}{\delta^2} de_f(\lambda).$$

We first bound the part of this double integral for which  $\delta$  ranges in  $[\mu, +\infty)$  :

$$\int_{\lambda=0}^\mu \int_{\delta=\mu}^{+\infty} \frac{1}{\delta^2} de_f(\lambda) = \frac{1}{\mu} \int_{\lambda=0}^\mu de_f(\lambda).$$

This term is, by (9.12), bounded by  $4\mu \mathbb{E}[(R_\mu f)^2]$ . Using Fubini's theorem, the remaining part of the double integral is equal to

$$\int_{\delta=0}^\mu \frac{1}{\delta^2} \int_{\lambda=0}^\delta de_f(\lambda) d\delta.$$

Using the inequality (9.12) once again, we obtain that this second term is also bounded by  $4\mu \mathbb{E}[(R_\mu f)^2]$ , which finishes the proof of the proposition.  $\square$

Considering Corollary 9.3, it seems reasonable to expect the exponent of decay associated with the function  $\mathfrak{d}$  to be equal to  $d/2 + 1$  in any dimension. A simple argument enables to prove that if one considers the environment seen by the simple random walk, then it is indeed the case. One may indeed write  $\mathfrak{d}$  as

$$\mathfrak{d} = f(\theta_{e_1} \omega) - f(\omega),$$

where  $f(\omega) = \omega_{0, -e_1} - \mathbb{E}[\omega_{0, -e_1}]$ . For the process of the environment seen by the simple random walk, as we have seen in the proof of Proposition 4.1, the semi-group and the space translations commute, and thus

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(\mathfrak{d}_t^\circ)^2] &= \mathbb{E}[(f_t^\circ(\theta_{e_1} \omega) - f_t^\circ(\omega))^2] \\ &\leq \mathcal{E}^\circ(f_t^\circ, f_t^\circ) = \int \lambda e^{-2\lambda t} de_f^\circ(\lambda), \end{aligned}$$

where  $e_f^\circ$  is the spectral measure of  $-\mathcal{L}^\circ$  projected on the function  $f$ . With this representation, and knowing that the exponent of decay to equilibrium of  $f$  is  $d/2$  (a fact which follows from Theorem 2.1, assuming that the conductances are square integrable), one obtains that the exponent of decay to equilibrium of  $\mathfrak{d}$  is  $d/2 + 1$  by following the proof of Theorem 2.4.