



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS

DOS MODELOS QUE ILUSTRAN EL FENÓMENO DE
RESONANCIA EN MECÁNICA CUÁNTICA

Por

Rodrigo Pérez Arancibia

Tesis presentada a la Facultad de Matemáticas
de la Pontificia Universidad Católica de Chile,
como un requisito para optar al
grado de Doctor en Ciencias Exactas mención Matemática.

Profesor Guía	:	Claudio Fernández Jaña.	-	P. Universidad Católica de Chile.
Comisión Informante	:	Maria A. Astaburuaga Eguiguren.	-	P. Universidad Católica de Chile.
		Rafael Benguria Donoso.	-	P. Universidad Católica de Chile.
		Victor Cortés Momberg.	-	P. Universidad Católica de Chile.

Enero 2006
Santiago, Chile

AGRADECIMIENTOS

Por medio de estas líneas quisiera dar las gracias a todas las personas que de una u otra forma hizo posible que esta ardua labor llegara a buen término.

Quisiera agradecer en primer lugar a la Facultad de Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica de Chile por darme la oportunidad de proseguir los estudios de postgrado. Por supuesto, agradezco a mi profesor guía el Dr. Claudio Fernández por su constante apoyo, preocupación y actitud positiva durante todo el proceso que culminó con esta tesis. A los profesores la Dra. María Angélica Astaburuaga y el Dr. Víctor Cortés por las sugerencias, comentarios y críticas que surgieron en la elaboración de este trabajo, como también al Dr. Rafael Benguria por sus opiniones siempre favorables. Una mención especial al Dr. Olivier Bourget: su generosa dedicación mostrada en lo que se refiere a la corrección y redacción de esta tesis son enormes, van para él mi más sincera gratitud.

Desde el punto de vista de lo económico, aspecto importantísimo para que una labor de este tipo se desarrolle de buena forma, deseo agradecer a Conicyt por su aporte durante los años 2001-2004, período en el cual fui becario de postgrado. Del mismo modo extendiendo mis agradecimientos a Dipuc por el financiamiento durante el año 2005.

En lo personal, agradezco con inmenso cariño a mis padres y hermanos por todo el compromiso, apoyo y comprensión a lo largo de estos años. La deuda para con ellos es impagable.

Por último, agradezco a mis amigos Jorge, Cristian, Rubén, Efraín y Miguel por los gratos momentos compartidos.

Índice General

Resumen	6
Introducción	7
1 Decaimiento exponencial para barreras de potencial en el espacio \mathbb{R}^3	13
1.1 Estudio de la resolvente generalizada	13
1.2 Solución Saliente y esféricos armónicos	16
1.3 Caso unidimensional	18
1.4 Resultado Central	33
1.5 Comentario Final	35
2 Tiempo de vida para un operador unitario perturbado	36
2.1 Perturbación de rango uno de operadores unitarios	37
2.2 Un modelo particular	39
2.3 Método de traslación analítica	42
2.4 Un poco de teoría de perturbación analítica de operadores	50
2.5 Comportamiento asintótico del tiempo de vida	58
A Resolvente generalizada de un operador en $L^2(\mathbb{R}^+)$ con potencial singular	65
A.1 Existencia de soluciones – soluciones débiles	65
A.2 Comportamiento asintótico de las soluciones	66
A.3 Solución saliente y resolvente generalizada	67

B Soluciones linealmente independientes para la ecuación de autovalores	71
C Esféricos armónicos y el operador de Laplace	77
C.1 Generalidades	77
C.2 Descomposición del Hamiltoniano	82
D Resolvente generalizada del operador $-\Delta + V(x)$ en $L^2(\mathbb{R}^3)$	85
D.1 Solución Fundamental y Resolvente	85
D.2 Estudio de la Resolvente	86
E Análisis del espectro del operador U_θ: detalles técnicos	92
E.1 Propiedades del vector analítico. Ejemplos	92
E.2 Algunas identidades generales	96
E.2.1 El caso $n = 1$	97
E.2.2 El caso $n > 1$	103
E.2.3 Prueba de los lemas 2.3 y 2.5	108
E.2.4 Anexo	109
E.3 Medida espectral y derivada de Radon-Nikodym de un operador unitario	113
Bibliografía	115

Notaciones

Las siguientes notaciones son utilizadas a lo largo de este trabajo:

\mathcal{H}	Espacio de Hilbert complejo separable
$\mathcal{L}(\mathcal{H})$	Espacio de los operadores lineales acotados en \mathcal{H}
$\mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$	Espacio de los operadores lineales acotados entre \mathcal{H}_1 y \mathcal{H}_2
$\mathcal{H}_{pp}(U)$	Subespacio puramente puntual asociado al operador unitario U
$\mathcal{H}_{ac}(U)$	Subespacio absolutamente continuo asociado al operador unitario U
$\mathcal{H}_{sc}(U)$	Subespacio singular continuo asociado al operador unitario U
\mathbb{N}	Conjunto de los números naturales
\mathbb{Z}	Conjunto de los números enteros
\mathbb{R}	Conjunto de los números reales
\mathbb{C}	Conjunto de los números complejos
\mathbb{S}	Círculo unitario $\{z \in \mathbb{C} : z = 1\}$
$\mathcal{B}(\mathbb{R})$	Algebra de los borelianos de \mathbb{R}
$\mathcal{B}(\mathbb{S})$	Algebra de los borelianos de \mathbb{S}

Resumen

Esta tesis tiene por objetivo estudiar la existencia del fenómeno de resonancia cuántica para los siguientes dos modelos: una barrera de potencial en dimensión tres y una versión similar al modelo de Friedrich.

El primer modelo tiene relación con un Hamiltoniano de la forma $H = -\Delta + V$ en el espacio \mathbb{R}^3 , donde V es un potencial de clase C^1 acotado, no negativo y de soporte compacto. La cantidad $P_\varphi(t)$ dada por $P_\varphi(t) = |\langle \varphi, e^{-iHt}\varphi \rangle|^2$ y $\tau(\varphi)$ su integral en toda la recta, son analizadas aquí. Se logra probar que $P_\varphi(t)$ tiene un comportamiento de tipo casi-exponencial, como consecuencia de estimar la diferencia $|\langle \varphi, e^{-iHt}\varphi \rangle - e^{-i\lambda_0 t} e^{-\epsilon|t|}|$ para todo $t \in \mathbb{R}$, con un error que depende de ϵ , donde el vector φ está relacionado con una solución saliente ψ , esto es, ψ es una solución de la ecuación $-\Delta\psi + V(x)\psi = (\lambda_0 - i\epsilon)\psi$ donde $\lambda_0, \epsilon > 0$. La existencia de un vector φ para el cual $P_\varphi(t)$ tiene el comportamiento antes señalado es una de las maneras de caracterizar la presencia del fenómeno de resonancia.

También se obtienen estimaciones para $\tau(\varphi)$, mostrándose que se comporta en la forma ϵ^{-1} cuando ϵ es pequeño. De esto se sigue que $\tau(\varphi)$ es finito pero grande si el número $\lambda_0 - i\epsilon$ esta cerca del eje real.

El segundo modelo es una perturbación continua de un operador con un autovalor simple. Concretamente $U(w) = U_0 e^{-iT(w+1)P}$, $w \in \mathbb{R}$, $w > -1$, donde U_0 es el operador unitario en $L^2(\mathbb{R}^n)$ definido como la multiplicación por la función $e^{-iTv \cdot x}$, con $v \in \mathbb{R}^n$, $\|v\| = 1$, P es la proyección ortogonal sobre φ y $T > 0$, $T \neq 2m\pi$, $m \in \mathbb{N}$. Se asume que el operador $U(0)$ tiene un único autovalor $z_0 = e^{iE_0}$ con ψ_0 su correspondiente autovector y $U(w)$ no posee autovalores si w es pequeño. Se considera la expresión análoga a $\tau(\varphi)$ para el caso autoadjunto:

$$\tau_w(\psi_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\langle \psi_0, U(w)^k \psi_0 \rangle|^2$$

la que es estudiada como función del parámetro w . Bajo la hipótesis adicional que el vector φ es analítico, se muestra que $\tau_w(\psi_0)$ es del orden de w^{-2} cuando w tiende a cero. Al igual que para el modelo anterior, la estimación lograda implica la existencia del fenómeno ya mencionado en este caso.

Introducción

En general, según el formalismo matemático de la mecánica cuántica es posible asociar a un sistema cuántico, una familia de operadores autoadjuntos dependientes del tiempo $(H(t))_{t \in \mathbb{R}}$ definida en un espacio de Hilbert \mathcal{H} , conocida como el Hamiltoniano del sistema. La dinámica generada por tal sistema puede ser descrita por una familia $U(t, 0)$ de operadores unitarios en \mathcal{H} , con la propiedad $U(0, 0) = I$, donde I es el operador identidad en \mathcal{H} . Para un estado φ , esto es, un vector de norma uno perteneciente a \mathcal{H} , la cantidad:

$$(1) \quad P_\varphi(t) = |\langle \varphi, U(t, 0)\varphi \rangle|^2$$

representa la probabilidad de que la partícula inicialmente en el estado φ permanezca en dicho estado en el tiempo t , o sea, que no abandone el subespacio generado por φ , el cual es denotado por $\langle \{\varphi\} \rangle$. En el caso autónomo, esto es $H(t) = H$, la cantidad (1) se escribe como:

$$(2) \quad P_\varphi(t) = |\langle \varphi, e^{-iHt}\varphi \rangle|^2$$

El comportamiento de $P_\varphi(t)$ en (2) depende de las propiedades espectrales del operador H . Por ejemplo, cuando el operador H posee un autovalor λ con φ un respectivo vector propio, se tiene $P_\varphi(t) = 1$ para todo t . Esto significa, desde el punto de vista físico, la existencia de un estado representado por el autovector φ en la cual la energía es precisamente λ , y el sistema permanece en el subespacio $\langle \{\varphi\} \rangle$ para siempre. Tales estados son denominados ligados o estacionarios.

Se produce una conducta totalmente distinta si el operador H es absolutamente continuo, ya que por el lema de Riemann-Lebesgue, $P_\varphi(t)$ tiende a cero cuando $|t|$ crece al infinito, lo cual quiere decir que el sistema no permanece en el subespacio $\langle \{\varphi\} \rangle$, sino que lo abandona a medida que $|t|$ crece. En ese caso resulta interesante saber la manera en la cual la probabilidad $P_\varphi(t)$ tiende a cero.

Una cantidad importante vinculada directamente con $P_\varphi(t)$ en (2) es lo que se conoce como el tiempo de vida del sistema en el estado φ , el cual es definido por la integral:

$$(3) \quad \tau(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} P_\varphi(t) dt$$

En mecánica cuántica este número es interpretado como el tiempo que permanece el sistema en su estado inicial φ . Es inmediato que al haber un autovalor, su correspondiente estado estacionario posee un tiempo de vida infinito. Sin embargo, en varios modelos donde no hay presencia de estados estacionarios, modelos cuyo Hamiltoniano corresponde a un operador absolutamente continuo, se ha detectado un fenómeno bastante peculiar: el de la existencia de estados en los cuales el tiempo de permanencia es muy grande que puede ser confundido con un tipo de estado estacionario y por lo tanto tener asociado una especie de autovalor. Este fenómeno en la literatura física es denominado *resonancia* del sistema cuántico.

Para los sistemas autónomos varios intentos de caracterizar esta noción han sido desarrollados a lo largo de los años. Se menciona a continuación algunas puntos de vista:

- A) Para un sistema con Hamiltoniano H hay presencia del fenómeno de resonancia si existe un estado φ (denominado estado resonante) y un número $\Gamma > 0$ (ancho de energía) tal que $P_\varphi(t) = e^{-\Gamma t}$ para todo $t > 0$. Notar que de esto se deduce $P_\varphi(t) = e^{-\Gamma|t|}$, para $t \in \mathbb{R}$ y en tal situación el respectivo tiempo de vida $\tau(\varphi)$ en (3) es igual a Γ^{-1} , por lo tanto es grande cuando Γ es pequeño.

Sin embargo, como es señalado en [37], esta definición resulta ser contradictoria en el caso que el operador H sea semiacotado inferiormente (consecuencia del teorema de Paley-Wiener). Entonces comúnmente se reformula la condición anterior en el sentido de requerir que esta igualdad se cumpla en forma aproximada y, en algunos casos, sólo para tiempos t ni muy grandes ni muy pequeños. En este sentido, el sistema presenta estados resonantes si $P_\varphi(t)$ tiene un decaimiento exponencial, salvo un error pequeño.

- B) Una resonancia (también llamada frecuencia dispersiva) es un polo con parte imaginaria negativa y pequeña (o sea cercano al eje real) obtenido de una continuación analítica al semiplano inferior de $\langle \varphi, (H - z)^{-1} \varphi \rangle$, definida inicialmente en el semiplano superior para una cierta colección de vectores $\varphi \in \mathcal{H}$. En muchos casos este polo resulta ser autovalor de un cierto operador no autoadjunto. Tal operador surge de asociar a H una familia de operadores $H(\theta)$ con θ un parámetro complejo perteneciente a alguna franja $|Im\theta| < \alpha$. El espectro de este operador no intersecta en general al eje real para $Im\theta \neq 0$, y en algún sentido es una deformación del espectro de H . La forma de construir $H(\theta)$ es parte de un procedimiento conocido como *dilatación analítica (complex scaling)* (para los detalles de este método y varias aplicaciones véase [19, 32, 36, 37]).

- C) Perturbación de sistemas con presencia de estados estacionarios: Se considera un Hamiltoniano H que posee un autovalor aislado λ_0 y H_n un Hamiltoniano absolutamente continuo que converge en alguna forma a H_0 cuando n tiende al infinito (en este sentido H_n es una perturbación de H_0). Se dice que el sistema perturbado se encuentra en resonancia si existe una sucesión de términos positivos $\{\Gamma_n\}$ con Γ_n tendiendo a cero, tal que la probabilidad $P_\varphi^{(n)}(t) = |\langle \varphi, e^{-it(H_n - \lambda_0)} \varphi \rangle|^2$ se

comporta como $e^{-\Gamma_n t}$, donde φ es un vector propio asociado a λ_0 .

En ese caso, para t en compactos, $P_\varphi^{(n)}(t)$ decae casi-exponencialmente si n es suficientemente grande. Es posible concluir en algunas ocasiones, que el tiempo de vida $\tau_n(\varphi)$ es grande para n tendiendo al infinito.

Es importante hacer notar que para una amplia clase de operadores H , se puede establecer una relación entre las definiciones A) y B) en el sentido que la existencia de una resonancia z_0 , implique la existencia de un estado resonante φ tal que $P_\varphi(t)$ decrece como $e^{\operatorname{Im} z_0 t}$. Por otro lado, en las condiciones señaladas en C) se produce el fenómeno conocido como concentración espectral [22, 32]: el soporte de la medida espectral del operador H_n en el vector propio φ de H_0 tiende a "concentrarse" en una vecindad arbitrariamente pequeña de λ_0 cuando n tiende al infinito (en [12, 20] se discuten algunos perspectivas entre concentración espectral y el fenómeno de resonancia).

En el presente trabajo vamos a examinar el fenómeno de resonancia en dos modelos bien específicos.

El primero pertenece a la clase de las perturbaciones del Laplaciano en el espacio \mathbb{R}^3 de la forma $H = -\Delta + V$ donde V es un potencial acotado, no negativo y de soporte compacto. Tal modelo es un caso particular de los comúnmente denominados barreras de potencial, los cuales son de la forma $H = -\Delta + V$, donde V es un operador de multiplicación por una función $V(x)$ no negativa que se aproxima a cero en el infinito. Para este tipo de modelos se espera que $P_\varphi(t)$ tenga un decaimiento en el tiempo de la manera expresada en A). La estrategia empleada para conseguir este comportamiento es sugerida por el hecho de observar que si se considera un vector φ como una solución de la ecuación de autovalores:

$$(4) \quad -\Delta\varphi + V(x)\varphi = (\lambda_0 - i\epsilon)\varphi$$

con $\epsilon > 0$ se obtiene formalmente $P_\varphi(t) = e^{-2\epsilon t}$. Naturalmente tal solución no puede estar en $L^2(\mathbb{R}^3)$ (en otras palabras $\lambda_0 - i\epsilon$ no es un autovalor de H). A pesar de esto, la idea de considerar soluciones de la ecuación (4), de alguna manera permitirá encontrar estados φ para los cuales $P_\varphi(t)$ manifiesta un decrecimiento casi-exponencial. Al respecto, se conoce que una estimación de la forma

$$(5) \quad |\langle \psi, e^{-iHt}\psi \rangle - e^{-i\lambda_0 t} e^{-\epsilon|t|}| < \epsilon f(\log \epsilon)$$

para todo $t \in \mathbb{R}$, donde f es una función lineal, fue obtenida en el caso unidimensional en [23], donde se considera un operador de la forma $H = -\frac{d^2}{dr^2} + V(r)$ en $L^2(\mathbb{R}^+)$ con condición de Dirichlet en $r = 0$ y ψ es la función truncada y normalizada de φ , con φ una solución no trivial de (4). Tal resultado se generaliza en [24] eliminando la condición de soporte compacto y asumiendo que $V \in C^2([0, \infty))$ es convexa fuera de un intervalo $[0, R]$.

Logramos establecer la estimación (5) aquí para el caso del operador $H = -\Delta + V(x)$ en $L^2(\mathbb{R}^3)$, con V de soporte compacto ya mencionado, de clase C^1 y además radial.

Con el fin de probar esto, se modifican de manera conveniente las técnicas empleadas en [23, 4]. La idea fundamental está basada en el uso de la identidad:

$$\langle \phi, e^{-iHt} \phi \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda t} \text{Im} \langle \phi, (H - \lambda - i0)^{-1} \phi \rangle d\lambda$$

válida para un operador autoadjunto H en un espacio de Hilbert \mathcal{H} , donde

$$\text{Im} \langle \phi, (H - \lambda - i0)^{-1} \phi \rangle = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \text{Im} \langle \phi, (H - \lambda - i\delta)^{-1} \phi \rangle$$

El decrecimiento casi-exponencial obtenido es una consecuencia de estimar el lado izquierdo de (5) para $\lambda_0 - i\epsilon$ una resonancia y ψ un vector asociado a la correspondiente solución saliente. Como

$$e^{-i\lambda_0 t} e^{-\epsilon|t|} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda t} \text{Im}(\lambda - \lambda_0 - i\epsilon) d\lambda = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda t} \frac{\epsilon}{(\lambda - \lambda_0)^2 + \epsilon^2} d\lambda$$

es la transformada de Fourier de la Lorentziana, se sigue que,

$$(6) \quad \left| \langle \psi, e^{-iHt} \psi \rangle - e^{-i\lambda_0 t} e^{-\epsilon|t|} \right| \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \text{Im} \langle \psi, (H - \lambda - i0)^{-1} \psi \rangle - \frac{\epsilon}{(\lambda - \lambda_0)^2 + \epsilon^2} \right| d\lambda$$

y el problema se reduce a estimar la norma L^1 de la diferencia entre la parte imaginaria de la resolvente en el eje real, también conocida como resolvente generalizada, y la función Lorentziana para un valor de ϵ adecuado. Este mismo razonamiento es usado, vía el teorema de Plancherel, para conseguir una estimación en el caso L^2 (similar a la obtenida en [4]), lo cual permite encontrar una cota inferior para el tiempo de vida $\tau(\psi)$ en términos de la parte imaginaria de la resonancia. Mas precisamente, también conseguimos para ϵ pequeño

$$(7) \quad \tau(\psi) \geq \frac{1}{\epsilon} [1 - (C\epsilon^2 U(\epsilon))^{1/2}]^2$$

donde $C = C(\varphi)$, $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon U(\epsilon) = 0$ concluyéndose que $\tau(\psi)$ es muy grande si la resonancia está cerca del eje real.

En esto consiste el primer capítulo de la tesis. La estimación (5) es obtenida como consecuencia de encontrar una expresión para $(H - \lambda - i0)^{-1}$ la resolvente generalizada de H . La hipótesis que el potencial V es radial, permite representar H mediante una colección numerable de operadores autoadjuntos de la forma $H_l = -\frac{d^2}{dr^2} + V(r) + \frac{l(l+1)}{r^2}$ en $L^2(\mathbb{R}^+)$ y por lo tanto expresar la resolvente generalizada de H en términos de la correspondiente resolvente generalizada de H_l . Para este operador se obtiene una desigualdad similar a (5) (teorema 1.2) por una aplicación de las ideas descritas en [23]. Además se logra estimar el tiempo de vida del respectivo estado resonante (corolario 1.1). Debe notarse, sin embargo, que los cálculos empleados se dificultan considerablemente pues el potencial $V(r) + \frac{l(l+1)}{r^2}$ no tiene soporte compacto y es singular en $r = 0$. Por último, la relación entre H y H_l proporciona los resultados de decaimiento casi-exponencial y tiempo de vida grande (7) (teorema 1.4 y corolario 1.2).

en términos de $z_j(w)^k$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y utilizar algunos elementos de teoría de perturbación analítica para operadores.

De ésto es lo que trata el segundo capítulo. Se comienza caracterizando los autovalores para el operador $U = U_0 + \zeta U_0 P$, donde U_0 es un operador unitario arbitrario en un espacio de Hilbert \mathcal{H} , P es la proyección ortogonal sobre $\varphi \in \mathcal{H}$ y $\zeta \in \mathbb{C}$. Tal caracterización está determinada en términos del vector φ . Cuando $U = U_0 e^{-iT P}$ con U_0 el operador de multiplicación por la función $e^{-iTv \cdot x}$, este operador es unitario se escribe en la forma anterior, donde $\zeta = e^{-iT} - 1$. Se verifica que U tiene un autovalor $z_0 = e^{iE_0}$ si y sólo si la función φ se anula en el conjunto $\mathcal{R} = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} \mathcal{R}_m$, donde $\mathcal{R}_m = \{y \in \mathbb{R}^n : v \cdot y = \hat{\rho}_m\}$ con $\hat{\rho}_m = -T^{-1}(E_0 + 2m\pi)$, la función definida como

$$(12) \quad \psi(x) = \frac{e^{-iT x} \varphi(x)}{e^{-iT x} - e^{iE_0}}$$

pertenece a $L^2(\mathbb{R}^n)$ y satisface $\langle \varphi, \psi \rangle = -\frac{1}{\zeta}$. En ese caso z_0 es simple y $\psi_0 = c\psi$, $c \in \mathbb{C}$, es un correspondiente autovector. Para la familia de operadores unitarios $U(w)$ en (8) se sigue también que $U(w) = U_0 + \zeta(w) U_0 P$, con $\zeta(w) = e^{-iT(w+1)} - 1$. La caracterización anterior muestra que $U(w)$ no tiene autovalores si $w \neq 0$. La suposición planteada de asumir que φ es un vector analítico implica, entre otras cosas, que $U(w)$ no tiene parte singular continua (teorema 2.2). En conclusión, $U(w)$ es absolutamente continuo si $w \neq 0$. El método de traslación analítica transforma $U(w)$ en el operador $\mathcal{U}(w) = U_\theta(w)$ dado por $\mathcal{U}(w) = U_\theta + \beta(w) U_\theta P_\theta$ con θ fijo, $Im \theta > 0$ y $\beta(w) = e^{-iT w} - 1$. De acuerdo con la teoría de perturbación, la familia $\mathcal{U}(w)$ depende analíticamente del parámetro w , luego las funciones $(z_j(w))$, que son los autovalores de $\mathcal{U}(w)$ tienen también esta propiedad para w en un pequeño disco centrado en $z = 0$ del plano complejo. Además $e^{-TIm\theta} < |z_j(w)| \leq 1$ y $z_j(0)$ son los autovalores de $\mathcal{U}(0)$. En particular una de estas funciones, denotada por $\lambda(w)$, satisface $\lambda(0) = z_0$. Se establece una relación entre $\langle \psi_0, U(w)^k \psi_0 \rangle$ y $z_j(w)^k$ la cual lleva a estimar el tiempo de vida $\tau_w(\psi_0)$ en términos de $|\lambda(w)|^2$ (igualdad (2.63)). Esto hace necesario determinar algunos coeficientes en el desarrollo en serie de $\lambda(w)$ para así establecer el resultado buscado (11) (teorema 2.4).

Además de los dos capítulos ya mencionados, esta tesis consta de cinco apéndices. Los cuatro primeros apéndices proporcionan todos los argumentos técnicos que hacen posible justificar los resultados obtenidos en el primer capítulo. El quinto apéndice cumple el mismo rol para el segundo capítulo.

Tanto los resultados citados en [4, 23, 24] como los obtenidos en el capítulo 1 se apoyan en el hecho de asumir que hay resonancias. Este es un asunto bastante no trivial y que ha llevado a considerar resonancias en un contexto más amplio. Se mencionan aquí por ejemplo el estudio de resonancias para la ecuación de ondas, ondas elásticas y operadores diferenciales más generales. Algunos resultados obtenidos en este campo dan una respuesta al problema recíproco: la existencia de regiones del plano complejo libres de resonancias (véase [5, 9, 15, 26, 11], aunque en el apéndice de este último se muestra que hay un conjunto numerable de resonancias). Otros resultados tienen relación con estimaciones de la función $n(r)$ que cuenta el número de resonancias en el disco de radio r para el operador de Schrödinger (ver [18] y las referencias contenidas allí).

En el segundo modelo ilustramos el fenómeno de resonancia en el sentido de C), considerando una perturbación continua a partir de un operador con un autovalor simple. El modelo a estudiar es un análogo del modelo de Friedrich en [2]. Más precisamente

$$(8) \quad U(w) = U_0 e^{-iT(w+1)P}, \quad w \in \mathbb{R}, \quad w > -1$$

con U_0 el operador unitario en $L^2(\mathbb{R}^n)$ que actúa como $(U_0 f)(x) = e^{-iTvx} f(x)$, donde $v \in \mathbb{R}^n$, $\|v\| = 1$ si $n > 1$, y $v \in \mathbb{R}$, $v \neq 0$ si $n = 1$. P es la proyección ortogonal sobre φ y $T > 0$, $T \neq 2m\pi$, $m \in \mathbb{N}$. El operador $U(w)$ puede ser considerado como la evolución en el tiempo T asociada formalmente al Hamiltoniano definido por:

$$(9) \quad H(t) = H_0 + (w+1)P \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - mT)$$

donde δ es la distribución de Dirac. Notar que $H(t+T) = H(t)$, o sea $(H(t))_{t \in \mathbb{R}}$ es periódica de período T . En nuestro caso el operador $U(w) = U(0, T, w)$ es el operador de Floquet asociado a la familia $H(t)$ en (9). Los sistemas que tienen un Hamiltoniano de la forma (9) se conocen como sistemas *golpeados* (kicked system) y han sido bastante estudiados desde el punto de vista del espectro de su respectivo operador de Floquet (véase [6, 14] y las referencias contenidas allí).

Las hipótesis sobre el operador $U(w)$ son las siguientes: para $w = 0$, el operador $U(0)$ tiene un autovalor $z_0 = e^{iE_0}$ con ψ_0 su correspondiente autovector y $U(w)$ no posee autovalores si w es pequeño. El objetivo es estudiar la evolución en el tiempo de vida $\tau_w(\psi_0)$ del vector ψ_0 bajo la perturbación $U(w)$, donde $\tau_w(\psi_0)$ es definido ahora como,

$$(10) \quad \tau_w(\psi_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\langle \psi_0, U(w)^k \psi_0 \rangle|^2$$

El resultado obtenido muestra que $\tau_w(\psi_0)$ es finito y del orden de w^{-2} cuando w es pequeño. Mas precisamente

$$(11) \quad \tau_w(\psi_0) = Cw^{-2} + \mathcal{O}(w^{-1})$$

cuando $w \rightarrow 0$, donde la constante C depende de la dimensión considerada.

Para lograr esto se asume como hipótesis adicional que φ es un vector analítico, en un sentido a precisar mas adelante. De esta manera es posible aplicar el método de traslación analítica (el cual se asemeja al de dilatación analítica mencionado antes). La condición sobre φ permite considerar un operador no unitario $U_\theta(w)$ con θ perteneciente al disco $S_a := \{z \in \mathbb{C}, |z| < a\}$, para algún $a > 0$. Se verifica que el espectro esencial $\sigma_{e.ss}(U_\theta(w))$ es el conjunto $\{e^{-TIm\theta} z : z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$ y para $Im\theta > 0$ el espectro discreto $\sigma_{dis}(U_\theta(w))$ está incluido en $\{z : e^{-TIm\theta} < |z| \leq 1\}$. Además, se muestra que los autovalores $z_j(w)$ de $U_\theta(w)$, contenidos en la región anterior son también polos asociados a una extensión meromorfa de la resolvente de $U(w)$. Por lo tanto pueden ser considerados también como las resonancias asociadas al operador $U(w)$ en el sentido de B). El procedimiento que permite estimar $\tau_w(\psi_0)$ sigue de expresar $\langle \psi_0, U(w)^k \psi_0 \rangle$

Capítulo 1

Decaimiento exponencial para barreras de potencial en el espacio \mathbb{R}^3

En este capítulo se establece para el operador de Schrödinger $H = -\Delta + V(x)$ en $L^2(\mathbb{R}^3)$ que la cantidad $P_\psi(t)$ definida en la introducción posee un comportamiento casi-exponencial en el tiempo t cuando el vector ψ es un estado resonante, o sea ψ está relacionado con una solución saliente φ asociada a una resonancia para este operador. Esto proporciona una estimación del tiempo de vida $\tau(\psi)$ (ver introducción). El resultado es obtenido suponiendo que el potencial V es de soporte compacto, de clase C^1 y radial. Esta última hipótesis lleva a estudiar la cantidad $P_\psi(t)$ para caso del operador $H_l = -\frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l+1)}{r^2} + V(r)$ en $L^2(\mathbb{R}^+)$ el cual resulta de H vía el empleo de la descomposición en esféricos armónicos. Se logra mostrar el comportamiento casi-exponencial de $P_\psi(t)$ para H_l (teorema 1.2) y de ahí se obtiene como consecuencia el resultado ya señalado para H (teorema 1.3). A partir de estos resultados el tiempo de vida $\tau(\psi)$ se calcula como del orden de $(-Imk_0)^{-1}$ donde k_0 es una resonancia para H (corolario 1.2). La condición de suavidad asumida para la función V es discutida al final del capítulo.

1.1 Estudio de la resolvente generalizada

Sea V una función real y medible definida en \mathbb{R}^n satisfaciendo la propiedad

$$(1.1) \quad |V(x)| \leq C(1 + |x|)^{-\rho} \quad \rho > 2$$

Denótese $\langle x \rangle = (1 + |x|^2)^{1/2}$. El siguiente resultado establece algunas propiedades relacionadas con el espectro del operador $H = -\Delta + V$ definido en $L^2(\mathbb{R}^n)$:

Teorema 1.1 *Para el operador $H = -\Delta + V$, con V verificando la condición (1.1), las siguientes propiedades son válidas:*

- a) No tiene espectro singular continuo.
- b) Su espectro positivo es absolutamente continuo.
- c) Tiene a lo más una sucesión de autovalores negativos, cada uno de multiplicidad finita que solo pueden acumularse en $x = 0$. También posee a lo más una sucesión de autovalores positivos satisfaciendo lo anterior.

Además, la función $\mathcal{R}(z) = \langle x \rangle^{-l} R(z) \langle x \rangle^{-l}$ con $l > 1$, donde $R(z) = (H - z)^{-1}$, es continua en la norma de $\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n))$ en el plano complejo cerrado $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ con excepción del punto $z = 0$ y de los autovalores negativos de H .

La prueba de este resultado es dada en [40]. La parte final del teorema 1.1 se conoce como el Principio de Absorción Límite para el operador de Schrödinger H . Lo que se está afirmando es que la aplicación $\mathcal{G} : z \rightarrow \mathcal{R}(z)$ es continua del plano complejo cerrado $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ en el espacio $\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n))$ de los operadores lineales y acotados, salvo el valor $z = 0$ y los autovalores negativos de H . Lo del plano complejo cerrado $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ se traduce como:

Para todo $\lambda > 0$ existe $\mathcal{R}(\lambda \pm i0)$ los valores de frontera de la aplicación \mathcal{G} que son dados por $\mathcal{R}(\lambda \pm i0) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{R}(\lambda \pm i\delta)$, donde la convergencia es en $\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n))$, y eventualmente $\mathcal{R}(\lambda + i0) \neq \mathcal{R}(\lambda - i0)$. De esto se sigue que $\mathcal{R}(\lambda \pm i0) \in \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n))$ y

$$(1.2) \quad \mathcal{R}(\lambda \pm i0)\varphi = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{R}(\lambda \pm i\delta)\varphi$$

uniformemente en $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Es importante notar que el caso en que la función V es radial, la condición (1.1) muestra que $H = -\Delta + V$ no posee autovalores positivos. Esto es una consecuencia de ([32] pag. 225),

Proposición 1.1 *Sea V función radial en \mathbb{R}^n satisfaciendo*

$$\int_a^\infty |V(r)| dr < \infty$$

para algún $a > 0$. Supóngase que $V \in L^2(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ y sea H una extensión autoadjunta de $-\Delta + V$ en $C_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ que conmuta con rotaciones. Entonces H no tiene autovalores positivos.

De la proposición 1.1 se tiene:

Si V es un función radial, no negativa que verifica la igualdad (1.1), entonces el operador H no tiene autovalores, esto es $\sigma_{pp}(H) = \emptyset$.

Consecuencia de los resultados anteriores es que el operador H es absolutamente continuo.

Sea $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n)$, se cumple que $\langle x \rangle^{-l} R(\lambda \pm i0) \langle x \rangle^{-l} \varphi \in L^2(\mathbb{R}^n)$, luego $R(\lambda \pm i0) \langle x \rangle^{-l} \varphi \in L^2(\mathbb{R}^n, d\mu)$, con $d\mu = \langle x \rangle^{-2l} dx$. Por otro lado, para $d\nu = \langle x \rangle^{2l} dx$ se tiene $\langle x \rangle^{-l} \varphi \in$

$L^2(\mathbb{R}^n, d\nu)$. Entonces $Ran((x)^{-l}) = L^2(\mathbb{R}^n, d\nu)$ y $L^2(\mathbb{R}^n) \subseteq L^2(\mathbb{R}^n, d\mu)$ donde la inclusión es estricta. concluyéndose que $R(\lambda \pm i0) : L^2(\mathbb{R}^n, d\nu) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n, d\mu)$ es un operador acotado conocido como la Resolvente Generalizada y,

$$(1.3) \quad R(\lambda \pm i0) = \lim_{\delta \rightarrow 0} R(\lambda \pm i\delta)$$

es válido en la norma de $\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n, d\nu), L^2(\mathbb{R}^n, d\mu))$. En particular,

$$(1.4) \quad R(\lambda \pm i0)\varphi = \lim_{\delta \rightarrow 0} R(\lambda \pm i\delta)\varphi, \quad \varphi \in L^2(\mathbb{R}^n, d\nu)$$

donde la convergencia es en $L^2(\mathbb{R}^n, d\mu)$. Además obsérvese que,

$$(1.5) \quad L^2(\mathbb{R}^n, d\mu) \subseteq L^2_{loc}(\mathbb{R}^n) \text{ y } L^2(K, d\nu) = L^2(K) = L^2(K, d\mu)$$

para $K \subseteq \mathbb{R}^n$ un compacto arbitrario.

Sea $V \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$ un potencial con soporte compacto contenido en la bola abierta $B_R = B(0, R)$. Sea $\psi \in L^2(\mathbb{R}^3)$ y $u_\delta = u(\lambda + i\delta, \cdot)$ solución en el sentido de las distribuciones de la ecuación $-\Delta u_\delta + V(x)u_\delta = k^2 u_\delta + \psi$, $x \in \mathbb{R}^3$, con $k^2 = \lambda + i\delta$, para $\lambda, \delta > 0$. Esto es $u_\delta = R(\lambda + i\delta)\psi = (-\Delta + V(x) - k^2)^{-1}\psi$. Luego $u_\delta \in \mathcal{H}^2 = \mathcal{D}(H) = \mathcal{D}(-\Delta)$, y por el lema de Sobolev $u_\delta \in C(\mathbb{R}^3)$.

En el caso que ψ tiene soporte compacto contenido en una bola B_{R_1} con $R_1 > R$ se sigue que en el conjunto $\mathbb{R}^3 \setminus B_R$ la función u_δ satisface,

$$(1.6) \quad -\Delta u_\delta = k u_\delta + \psi$$

en el sentido distribucional, por lo que los teoremas de regularidad elíptica [17] implican que $u_\delta \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus B_R)$, luego $u_\delta \in \mathcal{H}^2 \cap C^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus B_R)$.

Denótese $u(\lambda, \cdot) = R(\lambda + i0)\psi$. Se tiene:

Proposición 1.2 *La función $u(\lambda, \cdot)$ satisface la ecuación*

$$(1.7) \quad -\Delta u(\lambda, \cdot) + V(x)u(\lambda, \cdot) = \lambda u(\lambda, \cdot) + \psi$$

en el sentido de las distribuciones. En particular $u(\lambda, \cdot) \in C(\mathbb{R}^3)$.

Demostración: Como $\psi \in L^2(\mathbb{R}^3, d\nu)$ se cumple que $u(\lambda, \cdot) \in L^2(\mathbb{R}^3, d\mu)$. Ahora, para $h \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ se tiene,

$$\langle -\Delta h + V(x)h - (\lambda - i\delta)h, u_\delta \rangle = \langle h, -\Delta u_\delta + V(x)u_\delta - (\lambda + i\delta)u_\delta \rangle = \langle h, \psi \rangle$$

Sea $g_\delta = -\Delta h + V(x)h - (\lambda - i\delta)h$. De (1.5) se sigue,

$$\begin{aligned} |\langle g_\delta \cdot u_\delta - u(\lambda, \cdot) \rangle| &\leq \int_{\mathbb{R}^3} |g_\delta(x)| |u_\delta(x) - u(\lambda, x)| d\mu = \int_{\text{sop}(g_\delta)} |g_\delta(x)| |u_\delta(x) - u(\lambda, x)| d\mu \\ &\leq C \|g_\delta\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|u_\delta - u(\lambda, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^3, d\mu)} \end{aligned}$$

Entonces haciendo $g_0 = -\Delta h + V(x)h - \lambda h$ se tiene,

$$\begin{aligned} |\langle g_\delta, u_\delta \rangle - \langle g_0, u(\lambda, \cdot) \rangle| &\leq |\langle g_\delta, u_\delta - u(\lambda, \cdot) \rangle| + |\langle g_\delta - g_0, u(\lambda, \cdot) \rangle| \\ &\leq \|g_\delta\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|u_\delta - u(\lambda, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^3, d\mu)} + \delta \|h\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|u(\lambda, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^3, d\mu)} \end{aligned}$$

pero $\|g_\delta\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq \|-\Delta h + V(x)h\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \tilde{C}\|h\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$, si δ es pequeño. Luego

$$\langle -\Delta h + V(x)h - \lambda h, u(\lambda, \cdot) \rangle = \langle g_0, u(\lambda, \cdot) \rangle = \lim_{\delta \rightarrow 0} \langle g_\delta, u_\delta \rangle = \langle h, \psi \rangle$$

lo que muestra la igualdad (1.7). En particular $u(\lambda, \cdot)$ satisface la ecuación (1.6) con $\delta = 0$, por lo tanto $u(\lambda, \cdot) \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus B_R)$. Además del hecho que $\psi \in L^2(B_{R_1}, d\nu)$ se tiene de (1.4) que $u(\lambda, \cdot) \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^3)$. Esto ultimo y la regularidad elíptica permiten concluir que $u(\lambda, \cdot) \in \mathcal{H}^2(B_R)$ y por lo tanto $u(\lambda, \cdot) \in C(B_R)$. ■

Este resultado muestra que $Ran(R(\lambda + i0)) \subseteq C(\mathbb{R}^3)$.

1.2 Solución Saliente y esféricos armónicos

En esta parte se escoge una función ψ específica, mas precisamente $\psi = \chi_{B_{R_1}} \varphi$ con $R_1 > R$ y $\varphi \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^3)$ solución no trivial del problema:

$$(1.8) \quad -\Delta \varphi + V(x)\varphi = z\varphi, \quad x \in \mathbb{R}^3$$

donde $z = k_0^2 = \lambda_0 - i\epsilon$ con $\lambda_0 > 0$ y $\epsilon > 0$ satisfaciendo una cierta condición *saliente* en el infinito, que sera precisada pronto. El número complejo k_0 se conoce como *resonancia* asociada al potencial V y φ es denominada solución *resonante*. De la regularidad de los operadores elípticos y el lema de Sobolev, se puede ver que $\varphi \in C(\mathbb{R}^3) \cap C^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus B_R)$. Sin embargo esta función no pertenece a $L^2(\mathbb{R}^3)$, pues asumiendo lo contrario se tiene $\Delta \varphi = (V(x) - z)\varphi \in L^2(\mathbb{R}^3)$, luego $\varphi \in \mathcal{H}^2 = \mathcal{D}(H)$ lo que no es posible.

La condición saliente es establecida mediante una definición equivalente del concepto de resonancia: Un número complejo k_0 es una resonancia para el operador H si es un valor de k tal que la ecuación integral

$$(1.9) \quad \varphi(x) = - \int_{B_R} \frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} V(y)\varphi(y) dy$$

tiene una solución no trivial. En el Apéndice D se muestra que las identidades (1.8) y (1.9) son equivalentes, también se comprueba que tal numero k_0 cumple $Im k_0 < 0$ y que la igualdad (1.9) puede ser reescrita como:

$$\varphi(x) = \frac{e^{ik|x|}}{|x|} Q(x), \quad |x| \text{ grande}$$

donde $Q(x)$ es acotada. Entonces para $k = k_0$,

$$(1.10) \quad \varphi(x) = O\left(\frac{e^{ik|x|}}{|x|}\right), \quad |x| \rightarrow \infty$$

La expresión $f(k, x)$ en el lado derecho de la igualdad (1.9) tiene sentido para todo $k \in \mathbb{C}$. De la desigualdad $|e^{ik|x-y|}| \leq e^{-Imk(|x|-|y|)}$ si $Imk > 0$ y $|x| > |y|$, se sigue que el lado derecho de (1.9) es acotado por

$$(1.11) \quad \frac{e^{-Imk|x|}}{4\pi(|x| - R)} \int_{B_R} e^{Imk|y|} |V(y)| |\varphi(y)| dy$$

luego $f(k, x)$ decrece exponencialmente si $|x| \rightarrow \infty$ para $Imk > 0$. Notar que $f(k, \cdot) \in L^2(\mathbb{R}^3)$ y de acuerdo con la observación C.2 del Apéndice C se puede realizar la descomposición de $f(k, \cdot)$ en esféricos armónicos ($f_{lm}(k, \cdot)$), y obtener de la expresión (1.11) el mismo comportamiento exponencial para $f_{lm}(k, r)$.

Además $f(k, r)$ satisface la ecuación $\Delta f + k^2 f = 0$ si $|x| > R$. Entonces las funciones $f_{l,m}(k, x)$ cumplen la ecuación

$$-f_{lm}''(k, r) + \frac{l(l+1)}{r^2} f_{lm}(k, r) = k^2 f_{lm}(k, r) \quad , \quad r > R$$

y la igualdad (B.8) del apéndice B permite concluir:

$$(1.12) \quad f_{lm}(k, r) \sim e^{ikr} \quad , \quad r \rightarrow \infty$$

(se cumple: $f_{l,m}(k, x) = Cp(r)e^{ikr}$, con $p(r)$ acotado para r grande). Siendo $f_{lm}(k, x)$ una función en la variable k analítica en todo \mathbb{C} , (pues $f(k, x)$ tiene esta propiedad) se deduce que (1.12) es también válido para $k = k_0$. O sea, el comportamiento en el infinito (1.10) mostrado por φ se preserva para (φ_{lm}) sus componentes en esféricos armónicos.

Por la sección anterior se tiene que $u_\delta = R(\lambda + i\delta)\psi$. Sean $\tilde{u}_\delta = \chi_{B_{R_2}} u_\delta$, y $v = \chi_{B_{R_2}} u(\lambda, \cdot)$ con $R_2 > R_1$. Considérese $v_{lm}(\lambda, \cdot)$, $\tilde{u}_{lm}(\lambda + i\delta, \cdot)$ y $u_{lm}(\lambda + i\delta, \cdot)$ las componentes en armónicas esféricas de v , \tilde{u}_δ y u_δ . Nótese que $\tilde{u}_{lm}(\lambda + i\delta, \cdot) = \chi_{[0, R_2]} u_{lm}(\lambda + i\delta, \cdot)$ y $\psi_{lm}(k_0, \cdot) = \chi_{[0, R_2]} \varphi_{lm}(k_0, \cdot)$. Se tiene

$$(1.13) \quad \langle \psi, (H - \lambda - i0)^{-1} \psi \rangle = \langle \psi, u(\lambda, \cdot) \rangle = \langle \psi, v \rangle = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{|m| \leq l} \langle \psi_{lm}, v_{lm}(\lambda, \cdot) \rangle_{L^2(\mathbb{R}^+)}$$

Entonces de la inclusión (1.5) se sigue,

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{|m| \leq l} \|\tilde{u}_{lm}(\lambda + i\delta, \cdot) - v_{lm}(\lambda, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^+)}^2 &= \left\| \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{|m| \leq l} [\tilde{u}_{lm}(\lambda + i\delta, \cdot) - v_{lm}(\lambda, \cdot)] Y_{lm}(\omega) \right\|^2 \\ &= \|\tilde{u}_\delta - v\|_{L^2(B_{R_2}, d\mu)}^2 \leq \|\tilde{u}_\delta - v\|_{L^2(\mathbb{R}^3, d\mu)}^2 \rightarrow 0 \end{aligned}$$

si $\delta \rightarrow 0$. Luego $\|\tilde{u}_{lm}(\lambda + i\delta, \cdot) - v_{lm}(\lambda, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^+)} \rightarrow 0$ cuando $\delta \rightarrow 0$. O sea,

$$(1.14) \quad u_{lm}(\lambda + i\delta, \cdot) \rightarrow v_{lm}(\lambda, \cdot)$$

en $L^2(0, R_2)$, y la convergencia es uniforme en l y m .

Ahora, asúmase que la función V es radial. Entonces por la sección 3 del Apéndice C,

se sabe que la descomposición en esféricos armónicos induce una representación para el operador H en términos de una familia de operadores (H_l) en $L^2(\mathbb{R}^+)$ dados por,

$$(1.15) \quad H_l = -\frac{d^2}{dr^2} + V(r) + \frac{l(l+1)}{r^2}$$

con dominio

$$(1.16) \quad \mathcal{D}(H_l) = \{f \in L^2(\mathbb{R}^+) : f, f' \in AC_{loc}(\mathbb{R}^+), f(0) = 0, H_l f \in L^2(\mathbb{R}^+)\}$$

por lo tanto si $\kappa = k^2 = \lambda + i\delta$ $u_{lm}(\kappa, \cdot) = (H_l - k)^{-1}\psi_{lm} \in \mathcal{D}(H_l)$ El lema A.2 del Apéndice A implica en este caso:

$$(1.17) \quad u_{lm}(\kappa, r) \rightarrow u_{lm}(\lambda, r), \quad \delta \rightarrow 0$$

para todo $r > 0$, donde

$$(1.18) \quad u_{lm}(\lambda, r) = (H_l - \lambda - i0)^{-1}\psi_{lm}$$

es la *resolvente generalizada* de H_l . Del hecho que la convergencia (1.14) muestra la existencia de una subsucesión de $(u_{lm}(\lambda + i\delta, r))$ convergente para casi todo punto $\lambda \in \mathbb{R}^+$ a $v_{lm}(\lambda, r)$ en $(0, R_2)$, se deduce de (1.17) que $v_{lm}(\lambda, r) = u_{lm}(\lambda, r)$ en $(0, R_2)$. O sea $v_{lm}(\lambda, \cdot) = \chi_{[0, R_2]} u_{lm}(\lambda, \cdot)$. Luego (1.14) se reescribe,

$$(1.19) \quad \langle \psi, (H - \lambda - i0)^{-1}\psi \rangle = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{|m| \leq l} \langle \psi_{lm}, u_{lm}(\lambda, \cdot) \rangle_{L^2(\mathbb{R}^+)}$$

esta igualdad cambia el problema de estimar $\langle \psi, (H - \lambda - i0)^{-1}\psi \rangle$ a realizar un estudio de $\langle \psi_{lm}, (H_l - \lambda - i0)^{-1}\psi_{lm} \rangle$ lo que justamente es el objetivo de la proxima sección.

1.3 Caso unidimensional

Sea H_l el operador definido en (1.15) donde $V \in L^\infty(\mathbb{R}^+)$ es no negativo y de soporte compacto contenido en $[0, R]$, cuyo dominio es dado por (1.16). El operador H_l es positivo y luego su espectro está contenido en $[0, \infty)$. Nótese que $\frac{l(l+1)}{r^2} + V(r)$ es un potencial singular en $r = 0$ y no tiene soporte compacto, por lo que no está incluido en aquellos que son objeto de estudio en [4, 23]. Sin embargo los métodos utilizados en los artículos citados se modifican de tal forma que el caso singular puede ser analizado aquí.

Sea $R_1 > R$ y considérese una función $f \in L^2(\mathbb{R}^+)$ dada por

$$(1.20) \quad f = \chi_{[0, R_1]}\psi$$

donde $\psi \in L^2_{loc}([0, \infty))$ es una solución de la ecuación

$$(1.21) \quad -\psi'' + \frac{l(l+1)}{r^2}\psi + V(r)\psi = k_0^2\psi, \quad r > 0$$

$$\psi(r) \sim e^{ik_0 r}, \quad r \rightarrow \infty$$

donde $k_0^2 = \lambda_0 - i\epsilon$ con $\lambda_0, \epsilon > 0$. Acá se está considerando a $\sqrt{\theta}$ con $-\pi < \arg \theta < \pi$. Por lo tanto $\psi \in \mathcal{H}_{loc}^2([0, \infty))$ pero $\psi \notin L^2(\mathbb{R}^+)$.

De acuerdo con la identidad (A.22) en la sección 3 del Apéndice A se tiene:

$$\int_0^{R_1} \overline{f(y)} \omega(\lambda, y) dy = \frac{\|f\|_2^2}{\lambda_0 - i\epsilon - \lambda} \|f\|_2^2 + \frac{W(f, u_2(\lambda, \cdot))(R_1) W(\bar{f}, u_1(\lambda, \cdot))(R_1)}{\Upsilon |\lambda_0 - i\epsilon - \lambda|^2}$$

donde $u_1(\lambda, \cdot), u_2(\lambda, \cdot)$ son soluciones linealmente independientes de la ecuación

$$(1.22) \quad -u'' + V(r)u + \frac{l(l+1)}{r^2}u = \lambda u, \quad r > 0$$

satisfaciendo propiedades bien específicas, $\Upsilon = -W_0$, con W_0 el wronskiano de $u_1(\lambda, \cdot), u_2(\lambda, \cdot)$ y $\omega(\lambda, \cdot) = (H_l - \lambda - i0)^{-1}f$. La igualdad anterior se escribe,

$$(1.23) \quad \langle f, \omega(\lambda, \cdot) \rangle = \frac{\|f\|_2^2}{\lambda_0 - i\epsilon - \lambda} + \frac{W(f, u_2(\lambda, \cdot))(R_1) W(\bar{f}, u_1(\lambda, \cdot))(R_1)}{\Upsilon |\lambda_0 - i\epsilon - \lambda|^2}$$

Sea la función $F(\lambda) = \text{Im} \langle f, \omega(\lambda, \cdot) \rangle$. Equivalentemente,

$$(1.24) \quad F(\lambda) = \frac{\epsilon \|f\|_{L^2}^2}{(\lambda - \lambda_0)^2 + \epsilon^2} + \text{Im} \left(\frac{W(f, u_2(\lambda, \cdot))(R_1) W(\bar{f}, u_1(\lambda, \cdot))(R_1)}{\Upsilon |\lambda_0 - i\epsilon - \lambda|^2} \right)$$

Sea $T(\lambda) = \Upsilon^{-1} W(f, u_2(\lambda, \cdot))(R_1) W(\bar{f}, u_1(\lambda, \cdot))(R_1)$ y defínase,

$$(1.25) \quad h(\lambda) = \frac{1}{|\lambda_0 - i\epsilon - \lambda|^2} \text{Im} T(\lambda)$$

El objetivo es estudiar la función $h(\lambda)$. Concretamente analizar si $h \in L^p(\mathbb{R}^+)$ para algún $p \geq 1$.

Como fue mencionado con anterioridad $u_1(\lambda, \cdot)$ y $u_2(\lambda, \cdot)$ son soluciones linealmente independientes de la ecuación (1.22). Del hecho que el soporte de V esta contenido en $[0, R]$, de la igualdad (B.9) del Apéndice B se tiene que $u_1(\lambda, \cdot)$ y $u_2(\lambda, \cdot)$ pueden ser escogidas para $r \geq R$ de la forma:

$$(1.26) \quad u_1(\lambda, r) = \sum_{j=0}^{\infty} A_j (\sqrt{\lambda} r)^{l+2j+1}, \quad A_j = \frac{(-1)^j 2^l (l+j)!}{(2l+2j+1)!}$$

$$(1.27) \quad u_2(\lambda, r) = \sum_{j=0}^l B_j (\sqrt{\lambda} r)^{-j} e^{i\sqrt{\lambda} r}, \quad B_j = \frac{(l+j) \dots (l-j+1)}{j! (-2i)^j} \in \mathbb{C}$$

Se verifica que $W_0 = i^l$ (véase el Apéndice B). Además de acuerdo al comportamiento asintótico (1.21) de ψ en el infinito, se tiene que la función $f(r)$ satisface,

$$(1.28) \quad f(r) = C \chi_{[0, R_1]} u_2(k_0, r) = \sum_{j=0}^l B_j (k_0 r)^{-j} e^{ik_0 r} \quad R \leq r \leq R_1$$

donde $C \in \mathbb{C}$ es una constante y R_1 es suficientemente grande. Se verifica que $u_1(\lambda, \cdot)$ y $u_2(\lambda, \cdot)$ no poseen ceros comunes (su wronskiano es no nulo). Esto puede ser expresado de la siguiente manera:

Sea $r > R$ fijo, los conjuntos

$$U_1 = \{\lambda > 0 : u_1(\lambda, r) = 0\} \quad , \quad U_2 = \{\lambda > 0 : u_2(\lambda, r) = 0\}$$

son disjuntos. Por su parte, se verifica que si $\lambda \in U_1$ entonces $u'_1(\lambda, r) \neq 0$, de igual manera $\lambda \in U_2$ implica $u'_2(\lambda, r) \neq 0$. Entonces para $\lambda \notin U = U_1 \cup U_2$, donde $r > R$ es elegido de tal forma que $f(r) \neq 0$, es válido:

$$\begin{aligned} W(f, u_2)W(\bar{f}, u_1) &= |f|^2(u'_2 - \frac{f'}{f}u_2)(u'_1 - \frac{\bar{f}'}{\bar{f}}u_1) \\ &= |f|^2 u_1 u_2 (\frac{u'_2}{u_2} - \frac{f'}{f})(\frac{u'_1}{u_1} - \frac{\bar{f}'}{\bar{f}}). \end{aligned}$$

Luego

$$\frac{1}{T} W(f, u_2)(r)W(\bar{f}, u_1)(r) = |f(r)|^2 \frac{(\frac{u'_2}{u_2} - \frac{f'}{f})(\frac{u'_1}{u_1} - \frac{\bar{f}'}{\bar{f}})}{\frac{u'_1}{u_1} - \frac{u'_2}{u_2}}.$$

Por lo tanto,

$$(1.29) \quad T(\lambda) = |f(r)|^2 \frac{[\beta_1(\lambda, r) - \overline{\beta(r)}][\beta_2(\lambda, r) - \beta(r)]}{\beta_1(\lambda, r) - \beta_2(\lambda, r)},$$

donde

$$(1.30) \quad \beta_1(\lambda, r) = \frac{u'_1(\lambda, r)}{u_1(\lambda, r)} \quad , \quad \beta_2(\lambda, r) = \frac{u'_2(\lambda, r)}{u_2(\lambda, r)} \quad , \quad \beta(r) = \frac{f'(r)}{f(r)}.$$

Nótese que,

$$T(\lambda) = \begin{cases} |f(r)|^2 u_2(\lambda, r) u'_1(\lambda, r) [\beta_2(\lambda, r) - \beta(r)] & , \lambda \in U_1 \\ |f(r)|^2 u_1(\lambda, r) u'_2(\lambda, r) [\beta_1(\lambda, r) - \overline{\beta(r)}] & , \lambda \in U_2 \end{cases}$$

Además de (1.29) se tiene,

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_1, \lambda_1 \in U_1} T(\lambda) &= \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_1, \lambda_1 \in U_1} |f(r)|^2 [\beta_2(\lambda, r) - \beta(r)] \left(\frac{1 - \frac{\overline{\beta(r)}}{\beta_1(\lambda, r)}}{1 - \frac{\beta_2(\lambda, r)}{\beta_1(\lambda, r)}} \right) \\ &= |f(r)|^2 [\beta_2(\lambda_1, r) - \beta(r)] \end{aligned}$$

pues $\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_1} \beta_1(\lambda, r) = \infty$. Análogamente $\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_2, \lambda_2 \in U_2} T(\lambda) = |f(r)|^2 [\overline{\beta(r)} - \beta_1(\lambda_2, r)]$, con lo cual se deduce que esta función posee discontinuidades de primera especie en

el conjunto U y por lo tanto es acotada en compactos de \mathbb{R}^+ . Más precisamente dado $K \subseteq \mathbb{R}^+$ compacto existe $M = M(r, K) > 0$ tal que

$$(1.31) \quad |T(\lambda)| \leq |f(r)|^2 M, \quad \text{para todo } \lambda \in K$$

Ahora, por las igualdades (B.12)-(B.14) del Apéndice B, se tiene

$$u_1(\lambda, r) = C \left(\frac{\sqrt{\lambda r}}{2} \right)^{1/2} J_{l+1/2}(\sqrt{\lambda r})$$

donde $J_{l+1/2}(x)$ es la función de Bessel de orden $l + 1/2$, la cual posee una sucesión de ceros estrictamente creciente hacia el infinito. De esto se obtiene que U_1 es numerable y discreto. Por su parte,

$$(1.32) \quad u_2(\lambda, r) = P((\sqrt{\lambda r})^{-1}) e^{i\sqrt{\lambda r}}, \quad \text{donde } P(x) = \sum_{j=0}^l B_j x^j$$

es un polinomio de grado l , luego U_2 es un conjunto finito con a lo más l elementos (pudiendo ser vacío). Se concluye de esto que la igualdad (1.29) es válida c.t.p. en \mathbb{R}^+ .

Para $r > R$ y λ como antes,

$$\begin{aligned} \frac{[\beta_1(\lambda, r) - \overline{\beta(r)}][\beta_2(\lambda, r) - \beta(r)]}{\beta_1(\lambda, r) - \beta_2(\lambda, r)} &= \frac{[\beta_1(\lambda, r) - \overline{\beta_2(\lambda, r)} + \overline{\beta_2(\lambda, r)} - \overline{\beta(r)}][\beta_2(\lambda, r) - \beta(r)]}{\beta_1(\lambda, r) - \beta_2(\lambda, r)} \\ &= \frac{[\beta_1(\lambda, r) - \overline{\beta_2(\lambda, r)}][\beta_2(\lambda, r) - \beta(r)]}{\beta_1(\lambda, r) - \beta_2(\lambda, r)} + \frac{|\beta_2(\lambda, r) - \beta(r)|^2}{\beta_1(\lambda, r) - \beta_2(\lambda, r)} \end{aligned}$$

además de la identidad (A.21) del Apéndice A,

$$\begin{aligned} \int_0^r f(t) \overline{f(t)} dt &= \frac{W(\overline{f}, f)|_0^r}{\lambda_0 + i\epsilon - (\lambda_0 - i\epsilon)} = \frac{1}{2i\epsilon} \left(\overline{f(r)} f'(r) - f(r) \overline{f'(r)} \right) \\ &= \frac{1}{2i\epsilon} f(r) \overline{f(r)} \left(\frac{f'(r)}{f(r)} - \frac{\overline{f'(r)}}{\overline{f(r)}} \right) = \frac{|f(r)|^2}{\epsilon} \operatorname{Im} \beta(r) \end{aligned}$$

esto es,

$$(1.33) \quad |f(r)|^2 = \frac{\epsilon}{\operatorname{Im} \beta(r)} \|f\|_2^2,$$

de donde la función $T(\lambda)$ en (1.29) queda:

$$(1.34) \quad T(\lambda) = \frac{\epsilon}{\operatorname{Im} \beta(r)} \|f\|_2^2 \left\{ \frac{[\beta_1(\lambda, r) - \overline{\beta_2(\lambda, r)}][\beta_2(\lambda, r) - \beta(r)]}{\beta_1(\lambda, r) - \beta_2(\lambda, r)} + \frac{|\beta_2(\lambda, r) - \beta(r)|^2}{\beta_1(\lambda, r) - \beta_2(\lambda, r)} \right\}.$$

Por lo tanto,

$$(1.35) \quad \operatorname{Im} T(\lambda) = \frac{\epsilon \|f\|_2^2}{\operatorname{Im} \beta(r)} \left\{ \operatorname{Im} \left(\frac{[\beta_1(\lambda, r) - \overline{\beta_2(\lambda, r)}][\beta_2(\lambda, r) - \beta(r)]}{\beta_1(\lambda, r) - \beta_2(\lambda, r)} \right) + \operatorname{Im} \beta_2(\lambda, r) \frac{|\beta_2(\lambda, r) - \beta(r)|^2}{|\beta_1(\lambda, r) - \beta_2(\lambda, r)|^2} \right\},$$

pues $\beta_1(\lambda, r)$ es real. Obsérvese de (1.34) que,

$$(1.36) \quad |T(\lambda)| \leq \frac{\epsilon \|f\|_2^2}{\text{Im} \beta(r)} \left\{ |\beta_2(\lambda, r) - \beta(r)| + \frac{|\beta_2(\lambda, r) - \beta(r)|^2}{|\beta_1(\lambda, r) - \beta_2(\lambda, r)|} \right\}$$

para casi todo $\lambda \in \mathbb{R}^+$. Como $|\beta_1(\lambda, r) - \beta_2(\lambda, r)| \geq |\text{Im} \beta_2(\lambda, r)|$, la desigualdad (1.36) implica,

$$(1.37) \quad |h(\lambda)| = \frac{1}{|\lambda_0 - \lambda - i\epsilon|^2} |\text{Im} T(\lambda)| \leq L_1(\lambda)$$

donde $L_1(\lambda)$ está definida en casi todo $\lambda \in \mathbb{R}^+$ por

$$(1.38) \quad L_1(\lambda) = \frac{\epsilon \|f\|_2^2}{\text{Im} \beta(r)} \left\{ \frac{|\beta_2(\lambda, r) - \beta(r)|}{|\lambda_0 - \lambda - i\epsilon|^2} + \frac{|\beta_2(\lambda, r) - \beta(r)|^2}{|\lambda_0 - \lambda - i\epsilon|^2 |\text{Im} \beta_2(\lambda, r)|} \right\}$$

De acuerdo con la igualdad (1.27) defínase,

- z_0 : la raíz de $P(x)$ con $|z_0|$ mas pequeño
- $\tilde{\alpha}$: la menor raíz positiva de $P(x)$
- $\hat{\alpha}$: la mayor raíz positiva de $P(x)$
- B^* : $\max_{0 \leq j \leq l} \{|B_j|\}$, : B_j son los coeficientes de $P(x)$
- a_1 : el primer cero de la función $J_{l+1/2}(x)$

donde $P(x)$ es dado por (1.32). Necesariamente $z_0 \neq 0$ pues $P(0) = B_0 \neq 0$. Además notar que para $z \in \mathbb{C}$ vale $\text{Re} z^2 \leq (\text{Re} z)^2$. De esto se sigue que si $\text{Re} z \geq 0$ entonces $\sqrt{\text{Re} z} \leq \text{Re} \sqrt{z}$ y en este caso queda,

$$(1.39) \quad \text{Im} i k_0 = \text{Re} k_0 = \text{Re} \sqrt{\lambda_0 - i\epsilon} > \sqrt{\lambda_0}$$

luego $|k_0| > \sqrt{\lambda_0}$. Se establecerá una estimación para la función $L_1(\lambda)$. Para esto es necesario el siguiente resultado:

Lema 1.1 *Sea $r^* > R$ satisfaciendo la condición:*

$$(A_1) \quad r^* > \max \left\{ \frac{1}{\sqrt{\lambda_0} |z_0|}, \frac{1}{\sqrt{\lambda_0} \tilde{\alpha}} \right\}$$

Entonces $\beta_2(\lambda, r^)$ es continua en $[\lambda_0, \infty)$. Además para todo $\lambda \in [\lambda_0, \infty)$, se cumple*

$$(1.40) \quad |\beta_2(\lambda, r^*) - i\sqrt{\lambda}| < \frac{l+1}{\sqrt{\lambda_0} r^*}$$

Demostración: De la condición (A_1) se sigue que $u_2(\lambda, r^*) \neq 0$ para todo $\lambda \geq \lambda_0$ (pues en ese caso $\frac{1}{\sqrt{\lambda} r^*} \leq \frac{1}{\sqrt{\lambda_0} r^*} < \tilde{\alpha}$). De donde $\beta_2(\lambda, r^*)$ es continua en $[\lambda_0, \infty)$.

Ahora, realizando el cambio de variables $x = \sqrt{\lambda} r^*$ se tiene que si φ es solución de (1.22) entonces $w(x) = \varphi\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\right)$ es solución de

$$w'' - \frac{l(l+1)}{x^2} w + w = 0, \quad \text{para } x \geq \sqrt{\lambda} R.$$

Además $w(x) = e^{ix}v(x)$ con v una solución de

$$(1.41) \quad v'' + 2iv' - \frac{l(l+1)}{x^2}v = 0, \text{ para } x \geq \sqrt{\lambda}R.$$

De las identidades $(|\varphi|^2)' = 2\text{Re}(\varphi\bar{\varphi}')$, $(|\varphi'|^2)' = 2\text{Re}(\varphi''\bar{\varphi}')$, multiplicando la ecuación (1.41) por \bar{v}' y tomando parte real se tiene que,

$$(1.42) \quad (|v'|^2)' - \frac{l(l+1)}{x^2}(|v|^2)' = 0$$

como $(\frac{1}{x^2})' = -\frac{2}{x^3}$, se sigue que

$$\left(\frac{l(l+1)}{x^2}|v|^2\right)' = \frac{l(l+1)}{x^2}(|v|^2)' + \frac{-2l(l+1)}{x^3}|v|^2,$$

y por lo tanto

$$\frac{l(l+1)}{x^2}(|v|^2)' = \left(\frac{l(l+1)}{x^2}|v|^2\right)' + \frac{2l(l+1)}{x^3}|v|^2$$

De este modo, de la igualdad (1.42) queda,

$$(|v'|^2)' - \left(\frac{l(l+1)}{x^2}|v|^2\right)' - \frac{2l(l+1)}{x^3}|v|^2 = 0,$$

luego

$$\left(|v'|^2 - \frac{l(l+1)}{x^2}|v|^2\right)' = \frac{2l(l+1)}{x^3}|v|^2.$$

integrando entre $\sqrt{\lambda}r^*$ e ∞ y observando que v tiende a cero cuando x crece (1.32), para $\lambda \geq \lambda_0$ queda,

$$- \left(|v'(\sqrt{\lambda}r^*)|^2 - \frac{l(l+1)}{(\sqrt{\lambda}r^*)^2}|v(\sqrt{\lambda}r^*)|^2\right) = 2l(l+1) \int_{\sqrt{\lambda}r^*}^{\infty} \frac{|v(x)|^2}{x^3} dx \geq 0.$$

Entonces

$$|v'(\sqrt{\lambda}r^*)|^2 \leq \frac{l(l+1)}{(\sqrt{\lambda}r^*)^2}|v(\sqrt{\lambda}r^*)|^2,$$

obteniéndose

$$\frac{|v'(\sqrt{\lambda}r^*)|^2}{|v(\sqrt{\lambda}r^*)|^2} \leq \frac{l(l+1)}{\lambda(r^*)^2},$$

y como

$$\beta_2(\lambda, r^*) = i\sqrt{\lambda} + \frac{v'(\sqrt{\lambda}r^*)}{v(\sqrt{\lambda}r^*)}$$

se llega a la desigualdad buscada. ■

Sea $r = r^*$. Notar que de la desigualdad (A_1) se deduce que $\beta(r^*)$ está bien definida.

Como consecuencia del lema anterior, se tiene

$$\left| \frac{\text{Im}\beta_2(\lambda, r)}{\sqrt{\lambda}} - 1 \right| < \frac{1}{\sqrt{\lambda_0}} \frac{l+1}{\sqrt{\lambda_0}r} = \frac{l+1}{\lambda_0 r}.$$

Por otro lado,

$$\beta(r) = \beta_2(k_0, r) = ik_0 + \frac{v'(k_0 r)}{v(k_0 r)}$$

con $v(k_0 r) = P((k_0 r)^{-1})$ verificando,

$$P'((k_0 r)^{-1}) = k_0 \sum_{j=1}^l (-j) B_j (k_0 r)^{-(j+1)}$$

Del hecho que $\lim_{r \rightarrow \infty} v(k_0 r) = B_0$, se tiene $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{v'(k_0 r)}{v(k_0 r)} = 0$.

Entonces, para $0 < \eta < \frac{1}{2}|B_0|$ dado y

$$r > \gamma = \max_{1 \leq j, k \leq l} \left\{ \left(\frac{lB^*}{\sqrt{\lambda_0} \eta} \right)^{1/j}, \left(\frac{2l^2 B^*}{|B_0| (\sqrt{\lambda_0})^k \eta} \right)^{1/(k+1)} \right\}$$

es válido,

$$(1.43) \quad |\beta(r) - ik_0| < \eta$$

y de (1.39) se deduce,

$$\left| \frac{\operatorname{Im} \beta(r)}{\operatorname{Im} ik_0} - 1 \right| < \frac{1}{\sqrt{\lambda_0}} \eta.$$

Luego, considerando $\eta < \min\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}|B_0|, \frac{\sqrt{\lambda_0}}{2}\}$ y

$$(A_2) \quad r > \max \left\{ \frac{1}{\sqrt{\lambda_0} |z_0|}, \frac{1}{\sqrt{\lambda_0} \tilde{\alpha}}, \frac{l+1}{\sqrt{\lambda_0} \eta}, \gamma \right\}$$

se obtiene del lema 1.1 y (1.43),

$$(1.44) \quad |\beta_2(\lambda, r) - \beta(r)| < 2\eta + |\sqrt{\lambda} - k_0|, \quad |\operatorname{Im} \beta_2(\lambda, r)| > \frac{1}{2} \sqrt{\lambda}, \quad |\operatorname{Im} \beta(r)| > \frac{1}{2} \sqrt{\lambda_0}$$

De esta forma se prueba:

Proposición 1.3 *Sea $\rho > (Re k_0)^2$. Entonces la función $L_1(\lambda)$ en (1.38) puede ser estimada en el intervalo $[\rho, \infty)$ en la forma $L_1(\lambda) \leq C_1 \epsilon \|f\|_2^2 g(\lambda)$, donde*

$$C_1 = C_1(\epsilon) = \frac{24}{\sqrt{\lambda_0}} (1 + d^{-1} \sqrt{\lambda_0}), \quad \text{para } d = d(\epsilon) = \inf_{\lambda \geq \rho} |\sqrt{\lambda} - k_0|$$

y

$$(1.45) \quad g(\lambda) = \frac{|\sqrt{\lambda} - k_0|}{|\lambda_0 - \lambda - i\epsilon|^2} + \frac{|\sqrt{\lambda} - \sqrt{k_0}|^2}{\sqrt{\lambda} |\lambda_0 - \lambda - i\epsilon|^2}$$

Demostración: De (1.44) se tiene en el intervalo $[\lambda_0, \infty)$,

$$\begin{aligned} L_1(\lambda) &\leq \epsilon \|f\|_2^2 \frac{2}{\sqrt{\lambda_0}} \frac{1}{|\lambda_0 - \lambda - i\epsilon|^2} \left\{ 2\eta + |\sqrt{\lambda} - k_0| + \frac{2(2\eta + |\sqrt{\lambda} - k_0|)^2}{\sqrt{\lambda}} \right\} \\ &< \epsilon \|f\|_2^2 \frac{16}{\sqrt{\lambda_0}} \frac{1}{|\lambda_0 - \lambda - i\epsilon|^2} \left\{ \left(\eta + \frac{\eta^2}{\sqrt{\lambda}}\right) + \left(1 + \frac{\eta}{\sqrt{\lambda}}\right) |\sqrt{\lambda} - k_0| + \frac{|\sqrt{\lambda} - k_0|^2}{\sqrt{\lambda}} \right\} \\ &< \epsilon \|f\|_2^2 \frac{16}{\sqrt{\lambda_0}} \frac{1}{|\lambda_0 - \lambda - i\epsilon|^2} \left\{ \frac{5}{4} \sqrt{\lambda_0} + \frac{3}{2} |\sqrt{\lambda} - k_0| + \frac{|\sqrt{\lambda} - k_0|^2}{\sqrt{\lambda}} \right\} \end{aligned}$$

Como $|\sqrt{\lambda} - k_0|^2 = (\sqrt{\lambda} - \operatorname{Re}k_0)^2 + (\operatorname{Im}k_0)^2 \geq (\operatorname{Im}k_0)^2$ para todo $\lambda > 0$ se tiene que $\inf_{\lambda > 0} |\sqrt{\lambda} - k_0| = |\operatorname{Im}k_0|$. Sin embargo, considerando $\rho > (\operatorname{Re}k_0)^2$ se tiene por definición $d = |\sqrt{\rho} - \operatorname{Re}k_0| > 0$, por lo tanto $1 \leq d^{-1} |\sqrt{\lambda} - k_0|$, obteniéndose

$$\begin{aligned} L_1(\lambda) &\leq \epsilon \|f\|_2^2 \frac{24}{\sqrt{\lambda_0}} \frac{1}{|\lambda_0 - \lambda - i\epsilon|^2} \left\{ (1 + d^{-1} \sqrt{\lambda_0}) |\sqrt{\lambda} - k_0| + \frac{|\sqrt{\lambda} - k_0|^2}{\sqrt{\lambda}} \right\} \\ &< \epsilon \|f\|_2^2 \frac{24(1 + d^{-1} \sqrt{\lambda_0})}{\sqrt{\lambda_0}} \left\{ \frac{|\sqrt{\lambda} - k_0|}{|\lambda_0 - \lambda - i\epsilon|^2} + \frac{|\sqrt{\lambda} - k_0|^2}{\sqrt{\lambda} |\lambda_0 - \lambda - i\epsilon|^2} \right\} \\ &= \epsilon \|f\|_2^2 \frac{24(1 + d^{-1} \sqrt{\lambda_0})}{\sqrt{\lambda_0}} g(\lambda) \\ &= C_1 \epsilon \|f\|_2^2 g(\lambda) \end{aligned}$$

■

De esta manera (1.37) muestra que $|h(\lambda)| \leq g(\lambda)$ si $\lambda \in [\rho, \infty)$, con $\rho > (\operatorname{Re}k_0)^2$.

Ahora debe analizarse lo que sucede con la función $h(\lambda)$ en el intervalo $]0, \rho[$.

Para esto se debe estudiar las funciones $\beta_j(\lambda, r)$ con $r = r^*$ cumpliendo la condición (A_2) . Asíumase también que $r > \frac{a_1}{\sqrt{\lambda_0}}$. Sea $\hat{\delta} > 0$ tal que,

$$\hat{\delta} < \min \left\{ \frac{1}{(\hat{\alpha}r)^2}, \left(\frac{a_1}{r}\right)^2 \right\}$$

entonces $\beta_1(\lambda, r)$ y $\beta_2(\lambda, r)$ están bien definidas y son continuas en $]0, \hat{\delta}[$ con $\hat{\delta} < \lambda_0$. Como,

$$\begin{aligned} u_2(\lambda, r) &= B_0 e^{i\sqrt{\lambda}r} \left\{ 1 + \sum_{j=1}^l B_0^{-1} B_j (\sqrt{\lambda}r)^{-j} \right\} \\ u_2'(\lambda, r) &= i\sqrt{\lambda} B_0 e^{i\sqrt{\lambda}r} \left\{ 1 + \sum_{j=1}^l B_0^{-1} B_j (\sqrt{\lambda}r)^{-j} + i^{-1} \sum_{j=1}^l (-j) B_0^{-1} B_j (\sqrt{\lambda}r)^{-(j+1)} \right\} \end{aligned}$$

definiendo

$$\tilde{P}(x) = \sum_{j=1}^l B_0^{-1} B_j x^j, \quad \tilde{Q}(x) = \sum_{j=1}^l (-j) B_0^{-1} B_j x^{j+1}$$

se tiene para todo $\lambda \in]0, \hat{\delta}[$,

$$\beta_2(\lambda, r) = i\sqrt{\lambda} \left[1 + \frac{i^{-1} \tilde{Q}((\sqrt{\lambda}r)^{-1})}{1 + \tilde{P}((\sqrt{\lambda}r)^{-1})} \right]$$

luego

$$\beta_2(\lambda, r) - i\sqrt{\lambda} = \sqrt{\lambda} \frac{\bar{Q}((\sqrt{\lambda}r)^{-1})}{1 + \bar{P}((\sqrt{\lambda}r)^{-1})}$$

observando que,

$$\begin{aligned} \sqrt{\lambda} \frac{\bar{Q}((\sqrt{\lambda}r)^{-1})}{1 + \bar{P}((\sqrt{\lambda}r)^{-1})} &= \frac{(\sqrt{\lambda})^l \sum_{j=1}^l (-j) B_0^{-1} B_j (\sqrt{\lambda})^{-j} r^{-(j+1)}}{(\sqrt{\lambda})^l + (\sqrt{\lambda})^l \sum_{j=1}^l B_0^{-1} B_j (\sqrt{\lambda})^{-j} r^{-j}} \\ &= \frac{c_1 (\sqrt{\lambda})^{l-1} + c_2 (\sqrt{\lambda})^{l-2} + \dots + c_{l-1} (\sqrt{\lambda}) + c_l}{(\sqrt{\lambda})^l + d_1 (\sqrt{\lambda})^{l-1} + d_2 (\sqrt{\lambda})^{l-2} + \dots + d_{l-1} (\sqrt{\lambda}) + d_l} \end{aligned}$$

donde los coeficientes c_j, d_j son: $c_j = (-j) B_0^{-1} B_j r^{-(j+1)}$ y $d_j = B_0^{-1} B_j r^{-j}$ $j = 1, \dots, l$. Se cumple,

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \beta_2(\lambda, r) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{c_1 (\sqrt{\lambda})^{l-1} + c_2 (\sqrt{\lambda})^{l-2} + \dots + c_{l-1} (\sqrt{\lambda}) + c_l}{(\sqrt{\lambda})^l + d_1 (\sqrt{\lambda})^{l-1} + d_2 (\sqrt{\lambda})^{l-2} + \dots + d_{l-1} (\sqrt{\lambda}) + d_l} = \frac{c_l}{d_l} = -\frac{l}{r}$$

lo cual implica

$$(1.46) \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} \operatorname{Re} \beta_2(\lambda, r) = -\frac{l}{r}, \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} \operatorname{Im} \beta_2(\lambda, r) = 0$$

Por su parte, reescribiendo $u_1(\lambda, r)$ en la forma $u_1(\lambda, r) = (\sqrt{\lambda}r)^{l+1} F(\sqrt{\lambda}r)$, donde $F(z) = \sum_{j=0}^{\infty} A_j z^{2j}$ es analítica en todo \mathbb{C} y notando que $F(0) = A_0 \neq 0$, por continuidad existe $\tau > 0$, con $\tau < a_1$, tal que $F(z) \neq 0$ si $z \in D(0, \tau)$. Luego

$$u_1(\lambda, r) = (l+1)(\sqrt{\lambda})^{l+1} r^l F(\sqrt{\lambda}r) + (\sqrt{\lambda})^{l+1} r^{l+1} F'(\sqrt{\lambda}r) \sqrt{\lambda}$$

Entonces se tiene para todo $\lambda \in]0, \hat{\delta}[$,

$$\begin{aligned} \beta_1(\lambda, r) &= \frac{(l+1)(\sqrt{\lambda})^{l+1} r^l F(\sqrt{\lambda}r)}{(\sqrt{\lambda}r)^{l+1} F(\sqrt{\lambda}r)} + \frac{(\sqrt{\lambda})^{l+1} r^{l+1} F'(\sqrt{\lambda}r) \sqrt{\lambda}}{(\sqrt{\lambda}r)^{l+1} F(\sqrt{\lambda}r)} \\ &= \frac{l+1}{r} + \sqrt{\lambda} \frac{F'(\sqrt{\lambda}r)}{F(\sqrt{\lambda}r)} \end{aligned}$$

esto es,

$$\beta_1(\lambda, r) = \frac{l+1}{r} + \sqrt{\lambda} \frac{F'(\sqrt{\lambda}r)}{F(\sqrt{\lambda}r)}$$

siendo $F'(z) = 2A_1 z + 4A_2 z^3 + \dots$, queda $F'(0) = 0$. Así,

$$(1.47) \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} \beta_1(\lambda, r) = \frac{l+1}{r}$$

Luego dado $\tilde{\eta} > 0$, existe $0 < \delta < \hat{\delta}$, con $\delta = \delta(r, \tilde{\eta})$, tal que si $\lambda \in]0, \delta[$,

$$\begin{aligned} |\beta_2(\lambda, r) - \beta(r)| &\leq \left| \beta_2(\lambda, r) + \frac{l}{r} \right| + |\beta(r) - ik_0| + \left| ik_0 + \frac{l}{r} \right| \\ &< \tilde{\eta} + \eta + |k_0| + \frac{l}{r} \\ &< \tilde{\eta} + (1 + \sqrt{\lambda_0})\eta + |k_0| \\ &< \tilde{\eta} + \frac{\sqrt{\lambda_0}}{2} (1 + \sqrt{\lambda_0}) + |k_0| \end{aligned}$$

y

$$\frac{|Im\beta_2(\lambda, r)|}{(Re\beta_2(\lambda, r) - \beta_1(\lambda, r))^2} < \tilde{\eta}$$

De esto es posible mostrar:

Proposición 1.4 Para la función $L_2(\lambda)$ definida en $]0, \delta[$ por,

$$(1.48) \quad L_2(\lambda) = \frac{\epsilon \|f\|_2^2}{Im\beta(r)} \frac{1}{|\lambda_0 - \lambda - i\epsilon|^2} \left\{ |\beta_2(\lambda, r) - \beta(r)| + \frac{|Im\beta_2(\lambda, r)| |\beta_2(\lambda, r) - \beta(r)|^2}{(Re\beta_2(\lambda, r) - \beta_1(\lambda, r))^2 + (Im\beta_2(\lambda, r))^2} \right\}$$

se verifica,

$$L_2(\lambda) \leq C_2 \epsilon \|f\|_2^2 \frac{1}{|\lambda_0 - \lambda - i\epsilon|^2}$$

donde

$$C_2 = C_2(\epsilon) = \frac{2}{\sqrt{\lambda_0}} (\tilde{\eta} + \frac{\sqrt{\lambda_0}}{2} (1 + \sqrt{\lambda_0}) + |k_0|) \left\{ 1 + \tilde{\eta} (\tilde{\eta} + \frac{\sqrt{\lambda_0}}{2} (1 + \sqrt{\lambda_0}) + |k_0|) \right\}$$

Demostración: Empleando las desigualdades anteriores se tiene,

$$\begin{aligned} L_2(\lambda) &\leq \epsilon \|f\|_2^2 \frac{2}{\sqrt{\lambda_0}} \frac{1}{|\lambda_0 - \lambda - i\epsilon|^2} \left\{ |\beta_2(\lambda, r) - \beta(r)| + \frac{|Im\beta_2(\lambda, r)| |\beta_2(\lambda, r) - \beta(r)|^2}{(Re\beta_2(\lambda, r) - \beta_1(\lambda, r))^2} \right\} \\ &\leq \epsilon \|f\|_2^2 \frac{2}{\sqrt{\lambda_0}} \frac{1}{|\lambda_0 - \lambda - i\epsilon|^2} \left\{ \tilde{\eta} + \frac{\sqrt{\lambda_0}}{2} (1 + \sqrt{\lambda_0}) + |k_0| + \tilde{\eta} (\tilde{\eta} + \frac{\sqrt{\lambda_0}}{2} (1 + \sqrt{\lambda_0}) + |k_0|)^2 \right\} \end{aligned}$$

lo que prueba la afirmación. ■

Como de la igualdad (1.35),

$$|h(\lambda)| = \frac{1}{|\lambda_0 - \lambda - i\epsilon|^2} |ImT(\lambda)| \leq L_2(\lambda)$$

se obtiene una estimación de $h(\lambda)$ en el intervalo $]0, \delta[$.

Falta ver el comportamiento de $h(\lambda)$ en el intervalo $[\delta, \rho]$, donde $\delta < \lambda_0 < (Rek_0)^2 < \rho$. Para esto es suficiente analizar esta función en una pequeña vecindad \widetilde{W} de λ_0 , pues es conocido que la función $T(\lambda)$ está acotada en el intervalo cerrado $\widetilde{W} = [\delta, \rho] \setminus W$ (el intervalo $[\delta, \rho]$ contiene al conjunto de los ceros de $u_j(\lambda, \cdot)$, $j = 1, 2$ y $T(\lambda)$ tiene discontinuidades de primera especie en ese conjunto). Luego existe $M = M(r, \widetilde{W}) > 0$ (véase (1.31)) tal que para todo $\lambda \in \widetilde{W}$,

$$|h(\lambda)| \leq \frac{M|f(r)|^2}{|\lambda - \lambda_0 - i\epsilon|^2} = \frac{\epsilon \|f\|_2^2}{Im\beta(r)} \frac{M}{|\lambda - \lambda_0 - i\epsilon|^2} \leq \frac{C_3 \epsilon \|f\|_2^2}{|\lambda - \lambda_0 - i\epsilon|^2}$$

con $C_3 = \frac{2M}{\sqrt{\lambda_0}}$. Recordar que,

$$\beta_2(z, r) = iz + \frac{c_1 z^{l-1} + c_2 z^{l-2} + \dots + c_{l-1} z + c_l}{z^l + d_1 z^{l-1} + d_2 z^{l-2} + \dots + d_{l-1} z + d_l} = iz + \frac{A(z)}{B(z)}$$

luego,

$$\beta_2(\lambda_0, r) - \beta_2(k_0, r) = i\sqrt{\lambda_0} - ik_0 + \frac{A(\sqrt{\lambda_0})}{B(\sqrt{\lambda_0})} - \frac{A(k_0)}{B(k_0)}$$

Ahora,

$$\frac{A(\sqrt{\lambda_0})}{B(\sqrt{\lambda_0})} - \frac{A(k_0)}{B(k_0)} = \frac{[A(\sqrt{\lambda_0})(B(k_0) - B(\sqrt{\lambda_0})) + B(\sqrt{\lambda_0})(A(\sqrt{\lambda_0}) - A(k_0))]}{B(\sqrt{\lambda_0})B(k_0)}$$

De la identidad $x^n - y^n = (x - y) \sum_{s=1}^n x^{n-s} y^{s-1} = (x - y)T_n(x, y)$, se concluye que

$$A(\sqrt{\lambda_0}) - A(k_0) = \sum_{j=1}^{l-1} c_{l-j}((\sqrt{\lambda_0})^j - k_0^j) = (\sqrt{\lambda_0} - k_0) \sum_{j=1}^{l-1} c_{l-j} T_j(\sqrt{\lambda_0}, k_0)$$

$$B(\sqrt{\lambda_0}) - B(k_0) = \sum_{j=1}^l d_{l-j}((\sqrt{\lambda_0})^j - k_0^j) = (\sqrt{\lambda_0} - k_0) \sum_{j=1}^l d_{l-j} T_j(\sqrt{\lambda_0}, k_0)$$

las cuales se pueden reescribir,

$$A(\sqrt{\lambda_0}) - A(k_0) = (\sqrt{\lambda_0} - k_0)F_1(\sqrt{\lambda_0}, k_0), \quad B(\sqrt{\lambda_0}) - B(k_0) = (\sqrt{\lambda_0} - k_0)F_2(\sqrt{\lambda_0}, k_0)$$

de donde,

$$\left| \frac{A(\sqrt{\lambda_0})}{B(\sqrt{\lambda_0})} - \frac{A(k_0)}{B(k_0)} \right| \leq |\sqrt{\lambda_0} - k_0| \frac{[|A(\sqrt{\lambda_0})||F_2(\sqrt{\lambda_0}, k_0)| + |B(\sqrt{\lambda_0})||F_1(\sqrt{\lambda_0}, k_0)|]}{|B(\sqrt{\lambda_0})B(k_0)|}$$

Entonces,

$$(1.49) \quad |\beta_2(\lambda_0, r) - \beta_2(k_0, r)| \leq |\sqrt{\lambda_0} - k_0| S(\sqrt{\lambda_0}, k_0)$$

con

$$S(\sqrt{\lambda_0}, k_0) = 1 + |A(\sqrt{\lambda_0})||F_2(\sqrt{\lambda_0}, k_0)| + \frac{|B(\sqrt{\lambda_0})||F_2(\sqrt{\lambda_0}, k_0)|}{|B(\sqrt{\lambda_0})B(k_0)|}$$

Por otro lado, del hecho que $u_2(\lambda_0, r) \neq 0$, se sigue por continuidad que existe W una vecindad de λ_0 tal que $u_2(\lambda, r) \neq 0$. Notar que W está contenida en el intervalo $[\nu_1, \nu_2]$ donde $\nu_1 = \left(\frac{1}{\alpha r}\right)^2$ y $\lambda_0 < \nu_2$, y que el lema 1.1 se puede extender hasta esta vecindad. Recordar que la función $T(\lambda)$ satisface la desigualdad (1.36) en todo punto $\lambda \in W$ salvo en aquellos en que $u_1(\lambda, r) = 0$. Sin pérdida de generalidad puede suponerse que $u_1(\lambda_0, r) \neq 0$, y por lo tanto ajustar la vecindad W de tal manera que $u_1(\lambda, r) \neq 0$. Entonces la función $T(\lambda)$ se puede estimar en W en términos de la función $L_1(\lambda)$ dada por (1.38).

Observación 1.1 Denótese por $\{a_n\}$ la sucesión de ceros positivos de la función de Bessel $J_{l+1/2}(x)$. Para r verificando (A_2) y $r > \frac{a_1}{\sqrt{\lambda_0}}$ existe $m \in \mathbb{N}, m > 1$ tal que $r < \frac{a_m}{\sqrt{\lambda_0}}$. Si $r = \frac{a_j}{\sqrt{\lambda_0}}$ para un (único) j , $1 < j < m$, entonces $\beta_1(\lambda_0, r) = \infty$ y la desigualdad $|\beta_2(\lambda, r) - \beta_1(\lambda, r)| \geq |Im\beta_2(\lambda, r)|$ es ciertamente válida para λ cerca de λ_0 , de donde $T(\lambda)$ se puede acotar por $L_1(\lambda)$. En caso que $r \neq \frac{a_j}{\sqrt{\lambda_0}}$ para todo j , debe

existir $1 < k < m$ tal que $\frac{a_k}{\sqrt{\lambda_0}} < r < \frac{a_{k+1}}{\sqrt{\lambda_0}}$, luego $\lambda_0 \in](\frac{a_k}{r})^2, (\frac{a_{k+1}}{r})^2[$ y $u_1(\lambda_0, r) \neq 0$ en este intervalo.

Ahora, de las consideraciones anteriores $\beta_2(\lambda, r)$ es diferenciable con respecto a λ y se tiene:

$$\frac{\partial \beta_2}{\partial \lambda}(\lambda, r) = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \left[i + r \frac{A'(\sqrt{\lambda}r)B(\sqrt{\lambda}r) - A(\sqrt{\lambda}r)B'(\sqrt{\lambda}r)}{B(\sqrt{\lambda}r)^2} \right]$$

mas aún, $\frac{\partial \beta_2}{\partial \lambda}(\lambda, r)$ es continua en el cerrado \overline{W} . Entonces se sigue por el teorema del valor medio,

$$|\beta_2(\lambda, r) - \beta_2(\lambda_0, r)| \leq \left| \frac{\partial \beta_2}{\partial \lambda}(\zeta, r) \right| |\sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda_0}| \leq \frac{\widetilde{M}}{\sqrt{\lambda}} |\sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda_0}|$$

Siendo $|\beta_2(\lambda, r) - \beta_2(k_0, r)| \leq |\beta_2(\lambda, r) - \beta_2(\lambda_0, r)| + |\beta_2(\lambda_0, r) - \beta_2(k_0, r)|$, de (1.49) queda para $\lambda \in W$,

$$|\beta_2(\lambda, r) - \beta_2(k_0, r)| \leq \frac{\widetilde{M}}{\sqrt{\lambda}} |\sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda_0}| + |\sqrt{\lambda_0} - k_0| S(\sqrt{\lambda_0}, k_0)$$

Notando que $\sqrt{\lambda_0} - k_0 = \frac{\lambda_0 - k_0^2}{\sqrt{\lambda_0} + k_0}$ implica $|\sqrt{\lambda_0} - k_0| = \frac{\epsilon}{|\sqrt{\lambda_0} + k_0|} \leq \frac{\epsilon}{2\sqrt{\lambda_0}}$, obteniéndose de esto

$$(1.50) \quad |\beta_2(\lambda, r) - \beta_2(k_0, r)| \leq \frac{\widetilde{M}}{\sqrt{\lambda}} \frac{|\lambda - \lambda_0|}{2\sqrt{\lambda_0}} + \frac{\epsilon}{2\sqrt{\lambda_0}} S(\sqrt{\lambda_0}, k_0), \quad \lambda \in W$$

Consecuencia de esta desigualdad es lo siguiente:

Proposición 1.5 *La función $L_1(\lambda)$ esta acotada en el intervalo W en la forma*

$L_1(\lambda) \leq \epsilon \|f\|_2^2 E(\lambda)$, donde

(1.51)

$$E(\lambda) = \frac{1}{\lambda_0} \left\{ \frac{\widetilde{M}}{2\sqrt{\lambda}} \frac{|\lambda - \lambda_0|}{|\lambda_0 - \lambda - i\epsilon|^2} + \frac{\epsilon S(\sqrt{\lambda_0}, k_0)}{|\lambda_0 - \lambda - i\epsilon|^2} + \frac{\widetilde{M}^2}{2\lambda\sqrt{\lambda_0}} + \frac{S(\sqrt{\lambda_0}, k_0)^2}{2\sqrt{\lambda_0}} + \frac{\widetilde{M} S(\sqrt{\lambda_0}, k_0) \epsilon}{\sqrt{\lambda}\sqrt{\lambda_0}} \frac{|\lambda - \lambda_0|}{|\lambda_0 - \lambda - i\epsilon|^2} \right\}$$

Demostración: De la desigualdad (1.50) se tiene,

$$|\beta_2(\lambda, r) - \beta_2(k_0, r)|^2 \leq \frac{\widetilde{M}^2}{4\lambda\lambda_0} |\lambda - \lambda_0|^2 + \frac{\epsilon^2}{4\lambda_0} S(\sqrt{\lambda_0}, k_0)^2 + \frac{\widetilde{M}\epsilon}{2\sqrt{\lambda}\lambda_0} |\lambda - \lambda_0| S(\sqrt{\lambda_0}, k_0)$$

y por lo tanto

$$\frac{|\beta_2(\lambda, r) - \beta_2(k_0, r)|}{|\lambda_0 - \lambda - i\epsilon|^2} \leq \frac{\widetilde{M}}{2\sqrt{\lambda}\sqrt{\lambda_0}} \frac{|\lambda - \lambda_0|}{|\lambda_0 - \lambda - i\epsilon|^2} + \frac{\epsilon S(\sqrt{\lambda_0}, k_0)}{2\sqrt{\lambda_0} |\lambda_0 - \lambda - i\epsilon|^2}$$

$$\frac{|\beta_2(\lambda, r) - \beta_2(k_0, r)|^2}{|\lambda_0 - \lambda - i\epsilon|^2} \leq \frac{\widetilde{M}^2}{4\lambda\lambda_0} + \frac{S(\sqrt{\lambda_0}, k_0)^2}{4\lambda_0} + \frac{\widetilde{M} S(\sqrt{\lambda_0}, k_0) \epsilon}{2\sqrt{\lambda}\lambda_0} \frac{|\lambda - \lambda_0|}{|\lambda_0 - \lambda - i\epsilon|^2}$$

Entonces para la función $L_1(\lambda)$ queda:

$$L_1(\lambda) \leq \epsilon \|f\|_2^2 \frac{2}{\sqrt{\lambda_0}} \left\{ \frac{\tilde{M}}{2\sqrt{\lambda}\sqrt{\lambda_0}} \frac{|\lambda-\lambda_0|}{|\lambda_0-\lambda-i\epsilon|^2} + \frac{\epsilon S(\sqrt{\lambda_0}, k_0)}{2\sqrt{\lambda_0} |\lambda_0-\lambda-i\epsilon|^2} + \frac{\tilde{M}^2}{4\lambda\lambda_0} + \frac{S(\sqrt{\lambda_0}, k_0)^2}{4\lambda_0} \right\} \\ + \epsilon \|f\|_2^2 \frac{2}{\sqrt{\lambda_0}} \left\{ \frac{\tilde{M}S(\sqrt{\lambda_0}, k_0)\epsilon}{2\sqrt{\lambda}\lambda_0} \frac{|\lambda-\lambda_0|}{|\lambda_0-\lambda-i\epsilon|^2} \right\}$$

Esto termina la prueba. ■

Las proposiciones anteriores se pueden resumir en la siguiente manera:

Para $r = R_1$ satisfaciendo,

$$(1.52) \quad r > \max \left\{ \frac{1}{\sqrt{\lambda_0} |z_0|}, \frac{1}{\sqrt{\lambda_0} \alpha}, \frac{l+1}{\sqrt{\lambda_0} \eta}, \frac{a_1}{\sqrt{\lambda_0}}, \gamma \right\}$$

se tiene

$$(1.53) \quad |h(\lambda)| \leq \epsilon \|f\|_2^2 \begin{cases} C_1 g(\lambda) & \lambda \in]\rho, \infty[\\ (C_2 + C_3) \frac{1}{|\lambda-\lambda_0-i\epsilon|^2} & \lambda \in]0, \delta[\cup]\delta, \rho[\setminus W \\ E(\lambda) & \lambda \in W \end{cases}$$

Ahora, de acuerdo a lo realizado en [23] la función $g(\lambda) \in L^1(\mathbb{R}^+)$ y,

$$(1.54) \quad \int_{3\lambda_0/2}^{\infty} |g(\lambda)| d\lambda \leq \tilde{C}$$

Considérese $\frac{\sqrt{5}}{2} < q < \sqrt{\frac{3}{2}}$. Para $\epsilon < q\lambda_0$, se tiene $(\operatorname{Re} k_0)^2 \leq |k_0|^2 = (\lambda_0^2 + \epsilon^2)^{1/2} < (1+q^2)^{1/2} \lambda_0$. Por lo tanto $\rho > (1+q^2)^{1/2} \lambda_0 > \frac{3}{2} \lambda_0$ implica que (1.54) vale en el intervalo $[\rho, \infty)$. Por su parte, sea

$$(1.55) \quad W = (\lambda_0 - \sigma, \lambda_0 + \sigma) \text{ con } \sigma < \min\{\lambda_0 - \delta, \frac{\lambda_0}{2}\}$$

De los cálculos anteriores $\sigma < \rho - \lambda_0$, luego W esta contenido en $[\delta, \rho]$. Del hecho que

$$\int_{\lambda_0-\sigma}^{\lambda_0+\sigma} \frac{|\lambda-\lambda_0|}{(\lambda-\lambda_0)^2 + \epsilon^2} = \log \left(1 + \frac{\sigma^2}{\epsilon^2} \right), \quad \int_{\lambda_0-\sigma}^{\lambda_0+\sigma} \frac{\epsilon}{(\lambda-\lambda_0)^2 + \epsilon^2} = 2 \arctan \left(\frac{\sigma}{\epsilon} \right),$$

se obtiene que la función $E(\lambda)$ es integrable en W . Entonces siendo $\sigma < \frac{\lambda_0}{2}$ queda

$$(1.56) \quad \int_{\lambda_0-\sigma}^{\lambda_0+\sigma} E(\lambda) d\lambda \leq \frac{\tilde{M}}{\sqrt{2}\lambda_0^{3/2}} \log \left(1 + \frac{\lambda_0^2}{4\epsilon^2} \right) + \frac{\pi}{\lambda_0} S(\sqrt{\lambda_0}, k_0) + \frac{\tilde{M}^2}{\lambda_0^{3/2}} \\ + \frac{S(\sqrt{\lambda_0}, k_0)^2}{2\sqrt{\lambda_0}} + \frac{2\tilde{M}S(\sqrt{\lambda_0}, k_0)\epsilon}{\lambda_0} \log \left(1 + \frac{\lambda_0^2}{4\epsilon^2} \right)$$

Luego $h(\lambda)$ es integrable en todo \mathbb{R}^+ y

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |h(\lambda)|d\lambda &\leq \epsilon \|f\|_2^2 \left(C_1 \int_\rho^\infty |g(\lambda)|d\lambda + \int_0^\rho |h(\lambda)|d\lambda \right) \\ &\leq \epsilon Q_1(\epsilon) \|f\|_2^2 \left(\tilde{C} + \int_0^{\lambda_0-\sigma} \frac{d\lambda}{(\lambda-\lambda_0)^2} + \int_{\lambda_0+\sigma}^\rho \frac{d\lambda}{(\lambda-\lambda_0)^2} + \int_{\lambda_0-\sigma}^{\lambda_0+\sigma} |E(\lambda)|d\lambda \right) \\ &\leq \epsilon Q_1(\epsilon) \|f\|_2^2 \left(\tilde{C} + \frac{2}{\sigma} + \int_{\lambda_0-\sigma}^{\lambda_0+\sigma} |E(\lambda)|d\lambda \right), \end{aligned}$$

donde $Q_1(\epsilon) = (C_1 + C_2 + C_3 + 1)$. De (1.56) se sigue que,

$$(1.57) \quad J(\epsilon) = \frac{\tilde{M}}{\lambda_0} \left(\frac{1}{\sqrt{2\lambda_0}} + 2S(\sqrt{\lambda_0}, k_0) \right) + \frac{S(\sqrt{\lambda_0}, k_0)}{\sqrt{\lambda_0}} \left(\frac{\pi}{\sqrt{\lambda_0}} + \frac{1}{2}S(\sqrt{\lambda_0}, k_0) \right) + \frac{\tilde{M}^2}{\lambda_0^{3/2}}$$

y $Q(\epsilon) = Q_1(\epsilon)(\tilde{C} + \frac{2}{\sigma} + J(\epsilon))$ implican la estimación

$$\int_0^\infty |h(\lambda)|d\lambda \leq \epsilon Q(\epsilon) \|f\|_2^2 \left[3 + (1 + \epsilon) \log \left(1 + \frac{\lambda_0^2}{4\epsilon^2} \right) \right].$$

Notando que la función $F(\lambda)$ dada en (1.24) satisface $F(\lambda) = 0$ si $\lambda < 0$ (pues $(H - \lambda - i0)^{-1} = (H - \lambda)^{-1}$ por lo tanto $\langle f, (H - \lambda)^{-1} f \rangle$ es real), se sigue de lo anterior,

$$(1.58) \quad \int_{-\infty}^\infty \left| F(\lambda) - \frac{\epsilon \|f\|_{L^2}^2}{(\lambda - \lambda_0)^2 + \epsilon^2} \right| d\lambda \leq \epsilon Q(\epsilon) \|f\|_2^2 \left[3 + (1 + \epsilon) \log \left(1 + \frac{\lambda_0^2}{4\epsilon^2} \right) \right].$$

Como ya fue señalado en la introducción, las identidades

$$\begin{aligned} \langle f, e^{-iHt} f \rangle &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda t} \operatorname{Im} \langle f, (H_t - \lambda - i0)^{-1} f \rangle d\lambda = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda t} F(\lambda) d\lambda \\ e^{-i\lambda_0 t} e^{-\epsilon|t|} &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda t} \frac{\epsilon}{(\lambda - \lambda_0)^2 + \epsilon^2} d\lambda \end{aligned}$$

permiten concluir el siguiente resultado:

Teorema 1.2 *Sea $V \in L^\infty(\mathbb{R}^+)$ un potencial no-negativo de soporte compacto contenido en $[0, R]$ y H_t el operador autoadjunto en $L^2(\mathbb{R}^+)$ dado por la igualdad (1.15). Asíumase que existe $\psi \in L_{loc}^2([0, \infty))$ como en (1.21), donde $k_0^2 = \lambda_0 - i\epsilon$ con $\lambda_0 > 0$ y $0 < \epsilon < q\lambda_0$ para $\frac{\sqrt{5}}{2} < q < \sqrt{\frac{3}{2}}$. Sea $f = c\chi_{[0, R_1]}\psi$, con R_1 satisfaciendo la desigualdad (1.52), tal que $\|f\|_2 = 1$.*

Entonces

$$(1.59) \quad |\langle f, e^{-iHt} f \rangle - e^{-i\lambda_0 t} e^{-\epsilon|t|}| \leq \epsilon Q(\epsilon) \left[3 + (1 + \epsilon) \log \left(1 + \frac{\lambda_0^2}{4\epsilon^2} \right) \right]$$

para todo $t \in \mathbb{R}$, donde $Q(\epsilon)$ es acotada para ϵ pequeño.

Es posible mostrar [4] que $g(\lambda) \in L^2(\mathbb{R}^+)$ con $\|g\|_2^2 \leq C$. Por otro lado, notar que para cada $\epsilon > 0$ fijo la función $E(\lambda)$ dada en (1.51) es continua en $\lambda = \lambda_0$, luego $E(\lambda) < 2E(\lambda_0)$ si $\lambda \in W = W(\epsilon)$ una vecindad de λ_0 , donde

$$E(\lambda_0) = \frac{1}{\lambda_0^2} \left\{ \frac{\lambda_0}{\epsilon} S(\sqrt{\lambda_0}, k_0) + \frac{\tilde{M}^2}{2\sqrt{\lambda_0}} + \frac{\sqrt{\lambda_0}}{2} S(\sqrt{\lambda_0}, k_0) \right\}.$$

Con el objetivo de precisar esta vecindad considérese $\sigma(\epsilon) = (\lambda_0^2 + \epsilon^p)^{1/2} - \lambda_0$, donde $0 < p < \frac{1}{3}$ y defínase $W = (\lambda_0 - \sigma(\epsilon), \lambda_0 + \sigma(\epsilon))$. Para ϵ pequeño se cumple que $\sigma(\epsilon) < \lambda_0 - \delta$. Además si $\lambda_0 > 1$ se tiene $\sigma(\epsilon) + \lambda_0 < (\lambda_0^2 + \epsilon^p \lambda_0^2)^{1/2} < (1 + \epsilon^2)^{1/2} \lambda_0 < \rho$. Por lo tanto W está contenido en $[\delta, \rho]$. Se verifica también que $\lambda_0 - \sigma(\epsilon) > (2 - \sqrt{\frac{5}{2}})\lambda_0$, de donde $\sigma(\epsilon) < (\sqrt{\frac{5}{2}} - 1)\lambda_0 < \lambda_0$. Entonces,

$$|h(\lambda)|^2 < \epsilon^2 \|f\|_2^4 E(\lambda)^2 < 2\epsilon^2 \|f\|_2^4 E(\lambda_0) E(\lambda)$$

si $\lambda \in W$. De esto se concluye que $h(\lambda) \in L^2(\mathbb{R}^+)$ y

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |h(\lambda)|^2 d\lambda &\leq CC_1^2 \epsilon^2 \|f\|_2^4 + \int_{[0, \delta]} |h(\lambda)|^2 d\lambda + \int_{[\delta, \rho] \setminus W} |h(\lambda)|^2 d\lambda + \int_W |h(\lambda)|^2 d\lambda \\ &\leq \epsilon^2 \|f\|_2^4 \left(D \left[1 + \int_{[0, \delta]} \frac{d\lambda}{(\lambda - \lambda_0)^4} + \int_{[\delta, \rho] \setminus W} \frac{d\lambda}{(\lambda - \lambda_0)^4} \right] + \int_W E(\lambda)^2 d\lambda \right) \end{aligned}$$

con $D = CC_1^2 + (C_2 + C_3)^2$. Denotando $\tilde{D}(\epsilon) = D + 2E(\lambda_0)$ queda

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |h(\lambda)|^2 d\lambda &\leq \tilde{D}(\epsilon) \epsilon^2 \|f\|_2^4 \left(1 + \int_{[0, \delta]} \frac{d\lambda}{(\lambda - \lambda_0)^4} + \int_{[\delta, \rho] \setminus W} \frac{d\lambda}{(\lambda - \lambda_0)^4} + \int_W E(\lambda) d\lambda \right) \\ &\leq \tilde{D}(\epsilon) \epsilon^2 \|f\|_2^4 \left(1 + \frac{2}{3\sigma(\epsilon)^3} + \int_{\lambda_0 - \sigma(\epsilon)}^{\lambda_0 + \sigma(\epsilon)} E(\lambda) d\lambda \right) \end{aligned}$$

Entonces si $\tilde{Q}(\epsilon) = \epsilon \tilde{D}(\epsilon)$ se llega a

$$\int_0^\infty |h(\lambda)|^2 d\lambda \leq \tilde{Q} \epsilon \|f\|_2^4 \left(1 + \frac{2}{3\sigma(\epsilon)^3} + \int_{\lambda_0 - \sigma(\epsilon)}^{\lambda_0 + \sigma(\epsilon)} E(\lambda) d\lambda \right)$$

Como en (1.56),

$$\begin{aligned} \int_{\lambda_0 - \sigma(\epsilon)}^{\lambda_0 + \sigma(\epsilon)} E(\lambda) d\lambda &\leq \frac{\tilde{M}}{\sqrt{\xi_0} \lambda_0^{3/2}} \log \left(1 + \frac{\lambda_0^2}{\epsilon^2} \right) + \frac{\pi S(\sqrt{\lambda_0}, k_0)}{\lambda_0} + \frac{\tilde{M}^2}{\xi_0 \lambda_0^{1/2}} + \\ &\quad + \frac{S(\sqrt{\lambda_0}, k_0)^2}{\lambda_0^{1/2}} + \frac{\sqrt{2} \tilde{M} S(\sqrt{\lambda_0}, k_0) \epsilon}{\xi_0 \lambda_0} \log \left(1 + \frac{\lambda_0^2}{\epsilon^2} \right) \end{aligned}$$

donde $\xi_0 = 2 - \sqrt{\frac{5}{2}}$, y para

$$(1.60) \quad U(\epsilon) = J(\epsilon) \left[4 + \frac{2}{3\sigma(\epsilon)^3} + (1 + \epsilon) \log \left(1 + \frac{\lambda_0^2}{\epsilon^2} \right) \right]$$

con $J(c) = \frac{\tilde{N}}{\sqrt{\epsilon_0 \lambda_0}} \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_0}} + \frac{\sqrt{2}S(\sqrt{\lambda_0}, k_0)}{\sqrt{\epsilon_0}} \right) + S(\sqrt{\lambda_0}, k_0) \left(\frac{\pi}{\lambda_0} + \frac{S(\sqrt{\lambda_0}, k_0)}{2\sqrt{\lambda_0}} \right) + \frac{\tilde{N}^2}{\epsilon_0 \lambda_0^{1/2}}$, se obtiene la estimación

$$\int_0^\infty |h(\lambda)|^2 d\lambda \leq \tilde{Q} \epsilon U(\epsilon) \|f\|_2^4$$

Ahora, para $J(t) = t^{1/2}$, se tiene por teorema del valor medio que $J(x) - J(y) > \frac{1}{2}x^{-1/2}(x - y)$ si $x > y$. De esto se deduce,

$$\sigma(\epsilon) = (\lambda_0^2 + \epsilon^p)^{1/2} - \lambda_0 > \frac{1}{2}(\lambda_0^2 + \epsilon^p)^{-1/2} \epsilon^p$$

luego $\frac{\epsilon}{\sigma(\epsilon)^3} < 8(\lambda_0^2 + \epsilon^p)^{3/2} \epsilon^{1-3p}$, y esto implica $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\epsilon}{\sigma(\epsilon)^3} = 0$, obteniéndose que $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon U(\epsilon) = 0$. Entonces al igual que en (1.58),

$$(1.61) \quad \int_{-\infty}^\infty \left| F(\lambda) - \frac{\epsilon}{(\lambda - \lambda_0)^2 + \epsilon^2} \|f\|_{L^2}^2 \right|^2 d\lambda \leq \tilde{Q} \epsilon U(\epsilon) \|f\|_2^4$$

Como $\|e^{-\epsilon|t|}\|_2^2 = \frac{1}{\epsilon}$, si $\|f\|_2 = 1$ queda

$$\|\langle f, e^{-iHt} f \rangle\|_{L^2(\mathbb{R})} \geq \left(\frac{1}{\epsilon}\right)^{1/2} - C(\tilde{Q} \epsilon U(\epsilon))^{1/2} = \left(\frac{1}{\epsilon}\right)^{1/2} [1 - C(\tilde{Q} \epsilon^2 U(\epsilon))^{1/2}]$$

De esta forma se llega a,

Corolario 1.1 *Sea $f \in L^2(\mathbb{R}^+)$ tal que $\|f\|_2 = 1$, y*

$$\tau(f) = \int_{-\infty}^\infty |\langle f, e^{-iHt} f \rangle|^2 dt$$

Con las hipótesis del teorema anterior, mas la suposición $\lambda_0 > 1$, se tiene

$$(1.62) \quad \tau(f) \geq \frac{1}{\epsilon} [1 - C(\tilde{Q} \epsilon^2 U(\epsilon))^{1/2}]^2$$

si ϵ es pequeño.

1.4 Resultado Central

Asúmase la condición $V \in C^1(\mathbb{R}^3)$. Entonces la observación C.3 en el Apéndice C implica que las funciones ψ_{lm} son soluciones de la ecuación (1.21), y por lo tanto la igualdad (1.23) es válida para $f = \psi_{lm}$ y $\omega(\lambda, \cdot) = u_{lm}(\lambda, \cdot)$. Luego la identidad (1.19) queda,

$$(1.63) \quad \langle \psi, (H - \lambda - i0)^{-1} \psi \rangle = \frac{\|\psi\|_{L^2}^2}{\lambda_0 - i\epsilon - \lambda} + \sum_{l=0}^\infty \sum_{|m| \leq l} \frac{W(\psi_{lm}, u_{lm}^{(2)}(\lambda, \cdot))(R_1) \overline{W(\psi_{lm}, u_{lm}^{(1)}(\lambda, \cdot))(R_1)}}{\Upsilon_{lm} |\lambda_0 - i\epsilon - \lambda|^2}$$

Observación 1.2 De la desigualdad de Cauchy-Schwarz se tiene que, $\langle \psi_{lm}, u_{lm}(\lambda, \cdot) \rangle_{L^2(\mathbb{R}^+)} \leq \|\psi_{lm}\|_{L^2(\mathbb{R}^+)}^2 + \|u_{lm}\|_{L^2(\mathbb{R}^+)}^2$, por lo tanto

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{|m| \leq l} \langle \psi_{lm}, u_{lm}(\lambda, \cdot) \rangle_{L^2(\mathbb{R}^+)}$$

converge absolutamente en \mathbb{C} . De donde la serie en el lado derecho de (1.63) también converge absolutamente en \mathbb{C} .

Sean

$$G_{l,m}(\lambda) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{|m| \leq l} \frac{W(\psi_{lm}, u_{lm}^{(2)}(\lambda, \cdot))(R_1) W(\overline{\psi_{lm}}, u_{lm}^{(1)}(\lambda, \cdot))(R_1)}{\Upsilon_{lm} |\lambda_0 - i\epsilon - \lambda|^2}$$

y defínase la función $F_{l,m}(\lambda) = \text{Im } G_{l,m}(\lambda)$. Como no hay dependencia de l en la desigualdad (1.58) no es posible hacer uso en forma directa de ésta para acotar la serie en el lado derecho de (1.63). En este contexto $\psi = \chi_{B_{R_1}} \varphi$ no sería el vector adecuado que asegure el comportamiento exponencial buscado. Sin embargo es posible realizar el siguiente procedimiento con fin de utilizar el resultado unidimensional:

Sea $\tilde{R} > R$ y $\tilde{\psi} = \chi_{B_{\tilde{R}}} \varphi$, $\tilde{\psi}$ se expresa por

$$\tilde{\psi} = \sum_{l=0}^{\infty} \tilde{\psi}_l, \quad \text{donde } \tilde{\psi}_l = \sum_{|m| \leq l} \psi_l(r) Y_{lm}(w)$$

Siendo φ no nulo se puede considerar $l_0 \geq 0$ tal que $\tilde{\psi}_{l_0} \neq 0$. Escójase $R_1 > \tilde{R}$ verificando la condición (1.52) con $l = l_0$ entonces (observación C.2 Apéndice C) $\Psi = \chi_{B_{R_1}} \varphi$ satisface $\Psi_{l_0} \neq 0$.

$$\begin{aligned} \langle \Psi_{l_0}, (H - \lambda - i0)^{-1} \Psi_{l_0} \rangle &= \langle \Psi_{l_0}, \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{|m| \leq l} v_{lm}(\lambda, \cdot) Y_{lm} \rangle \\ &= \left\langle \sum_{|m| \leq l_0} \Psi_{l_0,m} Y_{l_0,m}, \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{|m| \leq l} v_{lm}(\lambda, \cdot) Y_{lm} \right\rangle \\ &= \left\langle \sum_{|m| \leq l_0} \Psi_{l_0,m} Y_{l_0,m}, \sum_{|m| \leq l_0} v_{l_0,m}(\lambda, \cdot) Y_{l_0,m} \right\rangle \\ &= \sum_{|m| \leq l_0} \langle \Psi_{l_0,m}, v_{l_0,m}(\lambda, \cdot) \rangle_{L^2(\mathbb{R}^+)} \end{aligned}$$

Así, haciendo $\|\psi_{l_0}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 = 1$ la identidad (1.63) queda en este caso:

$$(1.64) \quad \langle \Psi_{l_0}, (H - \lambda - i0)^{-1} \Psi_{l_0} \rangle = \frac{1}{\lambda_0 - i\epsilon - \lambda} + G_{l_0 m}(\lambda)$$

De esto es posible concluir:

Teorema 1.3 Sea $V \in C^1(\mathbb{R}^3)$ un potencial radial no-negativo con soporte compacto contenido en $B_R = B(0, R)$, y $H = -\Delta + V(r)$ actuando en $L^2(\mathbb{R}^3)$ con una resonancia k_0 donde $k_0^2 = \lambda_0 - i\epsilon$, $\lambda_0 > 0$ y $0 < \epsilon < q\lambda_0$ para $\frac{\sqrt{5}}{2} < q < \sqrt{\frac{3}{2}}$. Sea $\varphi \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^3)$ no nulo, la respectiva solución saliente. Escogiendo l , $R_1 > R$ y Ψ_l como antes, es válido:

$$(1.65) \quad |\langle \Psi_l, e^{-iHt} \Psi_l \rangle - e^{i\lambda_0 t} e^{-\epsilon|t|}| \leq \text{Const}(2l+1) \frac{\epsilon}{\pi} Q \left[3 + (1+\epsilon) \log \left(1 + \frac{\lambda_0^2}{4\epsilon^2} \right) \right]$$

Se concluye al igual que en el corolario 1.1 de la sección anterior (con $\lambda_0 > 1$):

Corolario 1.2 Sea Ψ_l definida como en el teorema anterior, y

$$\tau(\Psi_l) = \int_{-\infty}^{\infty} |\langle \Psi_l, e^{-iHt} \Psi_l \rangle|^2 dt$$

Entonces si ϵ es pequeño, se cumple

$$(1.66) \quad \tau(\Psi_l) \geq \frac{1}{\epsilon} [1 - C(\tilde{Q}(2l+1)\epsilon^2 U(\epsilon))^{1/2}]^2$$

En consecuencia si la resonancia está cerca del eje real (o sea su parte imaginaria es pequeña) entonces el respectivo tiempo de vida $\tau(\Psi_l)$ es finito pero grande y del orden de c/ϵ .

1.5 Comentario Final

Como fue mencionado en el Apéndice C (observación C. 3), la condición $V \in C^1(\mathbb{R}^3)$ permitio garantizar que las componentes (φ_{lm}) de la solución resonante φ satisfacen la ecuación (1.21), pues tal hipótesis implica que $\varphi \in \mathcal{H}^3(B_R)$ (regularidad de operadores elípticos), de donde $\varphi(r, \cdot)$ pertenece a $\mathcal{H}^2(S^1)$ para todo $r > 0$ fijo el cual es el dominio de la única extensión autoadjunta del operador de Laplace-Beltrami [27, 30]. El método empleado en la prueba del resultado, el cual es una adaptación del visto en [23], se apoya en esta afirmación. Sin embargo, como quedo de manifiesto, las estimaciones son ciertas asumiendo solamente que $V \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$. Esto hace pensar en buscar la manera que la ecuación (1.21) se cumpla sin hacer uso de los argumentos vistos antes.

Por ejemplo bajo esta hipótesis sobre V y suponiendo que la dificultad descrita anteriormente es resuelta se puede notar que en el caso $\Psi_0 \neq 0$ y $\Psi_l = 0$ para todo $l \geq 1$, esto es la solución de (1.8) es radial, se tiene que $\langle \Psi, (H - \lambda - i0)^{-1} \Psi \rangle = \langle \Psi_{0,0}, u_{0,0} \rangle_{L^2(\mathbb{R}^+)}$, luego

$$\langle \Psi, (H - \lambda - i0)^{-1} \Psi \rangle = \frac{\|\psi_{0,0}\|_{L^2}^2}{\lambda_0 - i\epsilon - \lambda} + \frac{W(\psi_{0,0}, \theta_{0,0}^{(2)}(\lambda, \cdot))(R_1) \overline{W(\psi_{0,0}, \theta_{0,0}^{(1)}(\lambda, \cdot))(R_1)}}{\Upsilon_{lm} |\lambda_0 - i\epsilon - \lambda|^2}$$

donde $R_1 > R$ (la función $u_{0,0}$ es no nula pues es dada por (1.18) con $\Psi_{0,0}$), que es justamente la igualdad a la cual se llega en [23] para el problema unidimensional. Esto significa que el resultado obtenido es una generalización del visto en [23].

Capítulo 2

Tiempo de vida para un operador unitario perturbado

Este capítulo está dedicado a estudiar la familia de operadores unitarios $(U(w))_{w>-1}$ definida por $U(w) = U_0 e^{-iT(w+1)P}$ en $L^2(\mathbb{R}^n)$ donde U_0 es el operador de multiplicación por la función $e^{-iTv \cdot x}$ con $v \in \mathbb{R}^n$ tal que $\|v\| = 1$ y P es una proyección ortogonal sobre un vector $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Se analizan algunas propiedades espectrales de tal operador (sección 1). Para esto se asume que con $w = 0$ el operador $U = U_0 e^{-iTP}$ posee un único autovalor $z_0 = e^{iE_0} \in \mathbb{S}$. Este autovalor es simple (lema 2.2) y todo autovector ψ_0 es caracterizado en términos del vector φ . Se establece una estimación del tiempo de vida $\tau_w(\psi_0)$ en función del parámetro w . Con este propósito se supone como hipótesis que φ es un vector analítico, y se hace uso del método de traslación analítica el cual permite asociar al operador $U(w)$ un operador no unitario $U_\theta(w)$ ($Im\theta \neq 0$) que, entre otras cosas, preserva el espectro de $U(w)$ y posee a lo más un número finito de autovalores en una región del tipo $\{z : e^{-T(1-l)Im\theta} < |z| \leq 1\}$ para $Im\theta > 0$ y algún $0 < l < 1$ (sección 3). Estos autovalores, por analogía con el caso autoadjunto (definición B) en la introducción), pueden considerarse como las resonancias para el operador $U(w)$. Denotando $\lambda(w)$ al respectivo autovalor de este operador tal que $\lambda(0) = z_0$, se tiene (por algunos resultados de perturbación analítica de operadores) que $\lambda(w)$ es una función analítica en un pequeño disco centrado en $w = 0$. Es posible relacionar $\tau_w(\psi_0)$ con una expresión que involucra a la función $\lambda(w)$, la que al desarrollar en serie de potencias, hace posible obtener como resultado un cálculo para $\tau_w(\psi_0)$ de la forma $\tau_w(\psi_0) = Cw^{-2} + \mathcal{O}(w^{-1})$ cuando w tiende a cero, donde la constante C depende de la dimensión considerada (teorema 2.4).

El problema que se estudia en este capítulo es tratado para el caso autoadjunto en [2]. Algunos de los resultados obtenidos son adaptaciones de los correspondientes resultados que aparecen en la referencia anteriormente citada. Sin embargo en la mayoría de los resultados expuestos acá, las modificaciones efectuadas presentan una dificultad apreciable, como consecuencia directa del tipo de operador considerado.

2.1 Perturbación de rango uno de operadores unitarios

En todo este capítulo El círculo unitario $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ es denotado por \mathbb{S} . Para $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\gamma(t) = e^{it}$ definida en el intervalo $[\alpha, \alpha + 2\pi)$, se identifican funciones f definidas en \mathbb{S} con funciones \tilde{f} definidas en $[\alpha, \alpha + 2\pi)$ mediante la relación $\tilde{f} = f \circ \gamma$. Del mismo modo una medida μ en \mathbb{S} esta asociada con una medida $\tilde{\mu}$ en $[\alpha, \alpha + 2\pi)$ de la forma $\tilde{\mu}(E) = \mu(\gamma(E))$ con $E \subseteq [\alpha, \alpha + 2\pi)$. Entonces la identificación entre $\tilde{\mu}$ y μ permite escribir (véase [34] pag. 253)

$$\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(t) d\mu(t) \text{ en lugar de } \int_{\mathbb{S}} f d\mu$$

Sea U_0 un operador unitario en un espacio de Hilbert \mathcal{H} . Sea $\phi \in \mathcal{H}$ y considérese μ_{ϕ} la medida espectral para U_0 asociada a ϕ .

Lema 2.1 *Sea $e^{i\rho} \in \mathbb{S}$. Entonces $(U_0 - e^{i\rho})(U_0 - re^{i\rho})^{-1}$ converge fuertemente al operador identidad I cuando $r \rightarrow 1^{\pm}$.*

Demostración: Dado $\phi \in \mathcal{H}$, se tiene

$$\begin{aligned} \|(U_0 - e^{i\rho})(U_0 - re^{i\rho})^{-1}\phi\|^2 &= \langle \phi, (U_0 - re^{i\rho})^{-1*}(U_0 - e^{i\rho})^*(U_0 - e^{i\rho})(U_0 - re^{i\rho})^{-1}\phi \rangle \\ &= \langle \phi, (U_0^{-1} - re^{-i\rho})^{-1}(U_0^{-1} - e^{-i\rho})(U_0 - e^{i\rho})(U_0 - re^{i\rho})^{-1}\phi \rangle \end{aligned}$$

Por el teorema espectral,

$$\|(U_0 - e^{i\rho})(U_0 - re^{i\rho})^{-1}\phi\|^2 = \int_{\mathbb{S}} \frac{(e^{-it} - e^{-i\rho})(e^{it} - e^{i\rho})}{(e^{-it} - re^{-i\rho})(e^{it} - re^{i\rho})} d\mu_{\phi}(t) = \int_{\mathbb{S}} h_r(t) d\mu_{\phi}(t)$$

Ahora, si $r \neq 1$

$$\left| \frac{e^{\pm it} - e^{\pm i\rho}}{e^{\pm it} - re^{\pm i\rho}} - 1 \right| = \frac{|1 - r|}{|e^{\pm it} - re^{\pm i\rho}|} \leq \frac{|1 - r|}{||e^{\pm it}| - r|} = \frac{|1 - r|}{|1 - r|} = 1$$

Entonces, escribiendo

$$h_r(t) = \left(\left[\frac{e^{-it} - e^{-i\rho}}{e^{-it} - re^{-i\rho}} - 1 \right] + 1 \right) \left(\left[\frac{e^{it} - e^{i\rho}}{e^{it} - re^{i\rho}} - 1 \right] + 1 \right)$$

se sigue que $|h_r(t)| \leq 4$ para todo $r \neq 1$. Como $h_r(t)$ converge 1 cuando $r \rightarrow 1^{\pm}$ para c.t.p. $t \in \mathbb{R}$ se sigue por el teorema de la convergencia dominada,

$$\|\phi\|^2 = \int_{\mathbb{S}} d\mu_{\phi}(t) = \lim_{r \rightarrow 1^{\pm}} \int_{\mathbb{S}} h_r(t) d\mu_{\phi}(t)$$

luego $\|\phi\| = \lim_{r \rightarrow 1^{\pm}} \|(U_0 - e^{i\rho})(U_0 - re^{i\rho})^{-1}\phi\|$. Análogamente se prueba que $\lim_{r \rightarrow 1^{\pm}} \langle \phi, (U_0 - e^{i\rho})(U_0 - re^{i\rho})^{-1}\phi \rangle = \|\phi\|^2$. De lo anterior se deduce que $\lim_{r \rightarrow 1^{\pm}} \|(U_0 - e^{i\rho})(U_0 -$

$re^{i\rho})^{-1}\phi - \phi\| = 0$, lo que muestra el lema. ■

Considérese el operador U

$$(2.1) \quad U = U_0 + \zeta U_0 P$$

donde $\zeta \in \mathbb{C}$ y $P = \langle \varphi, \cdot \rangle \varphi$, con $\|\varphi\| = 1$. El operador P es la proyección ortogonal sobre el vector $\varphi \in \mathcal{H}$. El siguiente resultado proporciona una caracterización de los autovalores del operador U ,

Lema 2.2 *Asúmase que e^{iE_0} no es un autovalor de U_0 . Para $\zeta \neq 0$ el número e^{iE_0} es un autovalor del operador U dado en (2.1) si y sólo si $\psi = \lim_{r \rightarrow 1^\pm} (U_0 - re^{iE_0})^{-1} U_0 \varphi$ existe, ψ es un elemento de \mathcal{H} y verifica $\langle \varphi, \psi \rangle = -\frac{1}{\zeta}$.*

Demostración: Sea $\psi_0 \in \mathcal{H}$ tal que $U\psi_0 = e^{iE_0}\psi_0$. Se tiene $(U_0 - e^{iE_0})\psi_0 = -\zeta \langle \varphi, \psi_0 \rangle U_0 \varphi$. Notar que $\langle \varphi, \psi_0 \rangle \neq 0$ pues e^{iE_0} no es un autovalor de U_0 , luego

$$(U_0 - e^{iE_0})(U_0 - re^{iE_0})^{-1}\psi_0 = (U_0 - re^{iE_0})^{-1}(U_0 - e^{iE_0})\psi_0 = -\zeta \langle \varphi, \psi_0 \rangle (U_0 - re^{iE_0})^{-1} U_0 \varphi$$

por el lema 2.1,

$$\psi_0 = \lim_{r \rightarrow 1^\pm} (U_0 - e^{iE_0})(U_0 - re^{iE_0})^{-1}\psi_0 = -\zeta \langle \varphi, \psi_0 \rangle \lim_{r \rightarrow 1^\pm} (U_0 - re^{iE_0})^{-1} U_0 \varphi$$

de donde $\psi = \lim_{r \rightarrow 1^\pm} (U_0 - re^{iE_0})^{-1} U_0 \varphi$ existe y pertenece a \mathcal{H} . Entonces queda $\psi_0 = -\zeta \langle \varphi, \psi_0 \rangle \psi$, y tomando producto interno en la igualdad anterior con respecto a φ se llega a

$$(*) \quad \langle \varphi, \psi \rangle = -\frac{1}{\zeta}$$

Recíprocamente, asúmase que $\psi = \lim_{r \rightarrow 1^\pm} (U_0 - re^{iE_0})^{-1} U_0 \varphi$ existe, pertenece a \mathcal{H} y verifica (*). Haciendo $\psi(r) = (U_0 - re^{iE_0})^{-1} U_0 \varphi$ se tiene que $\lim_{r \rightarrow 1^\pm} (U_0 - e^{iE_0})\psi(r) = U_0 \varphi$, de donde $(U_0 - e^{iE_0})\psi = U_0 \varphi$. Luego $U_0 \psi - U_0 \varphi = e^{iE_0} \psi$, y de (*) se deduce que $U_0 \psi + \zeta \langle \varphi, \psi \rangle U_0 \varphi = e^{iE_0} \psi$. O sea $U\psi = e^{iE_0} \psi$, lo que prueba la afirmación. ■

Observación 2.1 De la prueba del lema anterior se desprende que el autovalor e^{iE_0} es simple, esto es $\text{Ker}(U - e^{iE_0})$ es de dimensión uno, pues si ψ_0 es un autovector asociado a e^{iE_0} entonces $\psi_0 = -\zeta \langle \varphi, \psi_0 \rangle \psi$.

Denótese por $\mathcal{H}_{ac}(U_0)$ el subespacio absolutamente continuo asociado al operador U_0 . Se cumple la siguiente propiedad:

Proposición 2.1 *Supóngase que $\varphi \in \mathcal{H}_{ac}(U_0)$. Entonces para ζ dado en (2.1) se cumple,*

$$(2.2) \quad -\frac{2}{|\zeta|^2} \text{Re} \zeta = 1$$

Demostración: Sea $\frac{d\mu_\varphi}{d\rho}$ la respectiva derivada de Radon-Nikodym de la medida espectral μ_φ . Como

$$\langle \varphi, (U_0 - re^{iE_0})^{-1} U_0 \varphi \rangle = \int_{\mathbb{S}} \frac{d\mu_\varphi(t)}{1 - re^{i(E_0-t)}}$$

se sigue de la sección 3 del Apéndice E y del Lema 2.2,

$$\begin{aligned} \frac{d\mu_\varphi}{d\rho}(E_0) &= \lim_{r \rightarrow 1^-} \frac{1}{2\pi} (\langle \varphi, (U_0 - re^{iE_0})^{-1} U_0 \varphi \rangle - \langle \varphi, (U_0 - r^{-1}e^{iE_0})^{-1} U_0 \varphi \rangle) \\ &= \frac{1}{2\pi} (\langle \varphi, \psi \rangle - \langle \varphi, \psi \rangle) = 0 \end{aligned}$$

Por otro lado, de este mismo Apéndice E,

$$\begin{aligned} \frac{d\mu_\varphi}{d\rho}(E_0) &= \lim_{r \rightarrow 1^-} \frac{1}{2\pi} \left[2\operatorname{Re} \left(\int_{\mathbb{S}} \frac{d\mu_\varphi(t)}{1 - re^{i(E_0-t)}} \right) - 1 \right] = \frac{1}{2\pi} (2\operatorname{Re}(\langle \varphi, \psi \rangle) - 1) \\ &= \frac{1}{2\pi} (2\operatorname{Re}(-\frac{1}{\zeta}) - 1) \end{aligned}$$

luego $2\operatorname{Re}(-\frac{1}{\zeta}) - 1 = 0$, y de esto se obtiene que el número ζ debe cumplir la condición (2.2). ■

2.2 Un modelo particular

Sea $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ un vector de norma uno en \mathbb{R}^n si $n > 1$, y $v \in \mathbb{R}$ no nulo, si $n = 1$. Sea X el operador de multiplicación por la función $v \cdot x = \sum_{j=1}^n v_j x_j$,

$$(2.3) \quad (X\varphi)(x) = v \cdot x\varphi(x)$$

con su dominio natural $\mathcal{D}(X)$. Sea $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n)$, $\|\varphi\| = 1$ tal que φ es una función continua y $P = \langle \varphi, \cdot \rangle \varphi$ la proyección ortogonal sobre tal vector. Considérese el operador unitario U_0 en $L^2(\mathbb{R}^n)$ definido por $U_0 = e^{-iTX}$, el cual actúa como

$$(2.4) \quad (U_0 f)(x) = e^{-iT v \cdot x} f(x), \quad f \in L^2(\mathbb{R}^n)$$

donde $T > 0$, $T \neq 2m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$. Sea U el operador unitario,

$$(2.5) \quad U = U_0 e^{-iTP}$$

Nótese que este operador puede ser escrito en la forma (2.1), con $\zeta = e^{-iT} - 1$. Ahora, mediante el uso de la transformada de Fourier, se pueden adaptar los resultados obtenidos en [3], para obtener el siguiente resultado que describe las propiedades espectrales del operador U :

Teorema 2.1 *Asúmase que el vector φ pertenece a $\mathcal{H}^2(\mathbb{R}^n)$. Entonces el espectro de U no tiene parte singular continua y su espectro puntual es finito. Además su componente absolutamente continua llena todo el círculo unitario.*

O sea, si $\mathcal{H}_{sc}(U)$ denota el subespacio singular continuo asociado al operador U , entonces $\mathcal{H}_{sc}(U) = \{0\}$.

A continuación se introduce una perturbación continua del operador U . Más precisamente se define la familia de operadores unitarios $U(w)$ como en (2.5):

$$(2.6) \quad U(w) = Ue^{-iTvP} = U_0e^{-iT(w+1)P}$$

donde $w \in \mathbb{R}$ cumple $w > -1$. Se tiene,

$$(2.7) \quad U(w) = e^{-iTX} + \zeta(w)e^{-iTX}P, \quad \zeta(w) = e^{-iT(w+1)} - 1$$

Para T fijo se impone la condición $T(w+1) \neq 2m\pi$, $m \in \mathbb{N}$. Notar que

$$Re\zeta(w) = \cos(T(w+1)) - 1, \quad |\zeta(w)|^2 = 2(1 - \cos(T(w+1)))$$

luego $\zeta(w)$ cumple (2.2).

Sea w fijo y $\eta(w) = e^{iE(w)} \in \mathbb{S}$. Es posible establecer con precisión las condiciones del lema 2.2 de tal manera que $\eta(w)$ es un autovalor de $U(w)$. Para ver esto, considerar $\hat{\rho}_m(w) = -T^{-1}(2m\pi + E(w))$, con $m \in \mathbb{Z}$ y $\mathcal{R}_w = \bigcup_m \mathcal{R}_{w,m}$, donde

$$(2.8) \quad \mathcal{R}_{w,m} = \{y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{j=1}^n v_j y_j = \hat{\rho}_m(w)\}$$

Proposición 2.2 *El número $\eta(w) = e^{iE(w)}$ es un autovalor de $U(w)$ si y sólo si φ se anula en \mathcal{R}_w y ψ_w dado por*

$$(2.9) \quad \psi_w(x) = \frac{e^{-iTv \cdot x} \varphi(x)}{e^{-iTv \cdot x} - e^{iE(w)}}$$

pertenece a $L^2(\mathbb{R}^n)$, con ψ_w satisfaciendo $\langle \varphi, \psi_w \rangle = -\frac{1}{\zeta(w)}$. Esta última igualdad queda en la forma:

$$(2.10) \quad \int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{-iTv \cdot x} |\varphi(x)|^2}{e^{-iTv \cdot x} - e^{iE(w)}} dx = -\frac{1}{\zeta(w)}$$

Demostración: Por definición,

$$((U_0 - r\eta(w))^{-1}U_0\varphi)(x) = \frac{e^{-iTv \cdot x}}{e^{-iTv \cdot x} - re^{iE(w)}} \varphi(x)$$

Entonces, del lema 2.2 se tiene que $\eta(w)$ es un autovalor de $U(w)$ si y sólo si

$$(2.11) \quad \psi_w(x) = \lim_{r \rightarrow 1^\pm} \frac{e^{-iTv \cdot x} \varphi(x)}{e^{-iTv \cdot x} - re^{iE(w)}} \in L^2(\mathbb{R}^n)$$

y $\langle \varphi, \psi_w \rangle = -\frac{1}{\zeta(w)}$. Haciendo $\varphi_{w,r}(x) = \frac{e^{-iTv \cdot x} \varphi(x)}{e^{-iTv \cdot x} - re^{iE(w)}}$, lo anterior implica que $\psi_w(x)$ es el límite c.t.p. de la sucesión $\varphi_{w,r}(x)$ (más precisamente de una subsucesión de ésta), luego

$$(2.12) \quad \psi_w(x) = \frac{e^{-iTv \cdot x} \varphi(x)}{e^{-iTv \cdot x} - e^{iE(w)}}$$

Como el denominador de la expresión en el lado derecho de (2.9) se anula si $x \in \mathcal{R}_{w,m}$, para algún $m \in \mathbb{Z}$, se tiene por la continuidad de φ que $\psi_w \in L^2(\mathbb{R}^n)$ implica $\varphi(x) = 0$ si $x \in \mathcal{R}_w = \bigcup_m \mathcal{R}_{w,m}$. Por otro lado, de la condición $\varphi(x) = 0$ para $x \in \mathcal{R}_w$ y $\psi_w \in L^2(\mathbb{R}^n)$ se tiene $|\psi_w(x) - \varphi_{w,r}(x)| \leq |\psi_w(x)|$, obteniéndose (2.11). La igualdad (2.10) es inmediata. ■

Sean $w_1, w_2 > -1$. La proposición 2.2 permite concluir que los operadores $U(w_1)$ y $U(w_2)$ poseen los mismos autovalores siempre que exista $m \in \mathbb{Z}$ tal que $T(w_1 - w_2) = 2m\pi$. En particular los autovalores de $U(w)$ y $U = U(0)$ coinciden si $Tw = 2m\pi$, para algún $m \in \mathbb{Z}$. De esta condición y el teorema 2.1, se verifica:

Corolario 2.1 *Sea $\varphi \in \mathcal{H}^2(\mathbb{R}^n)$. Sean e^{iE_k} , $k = 1, \dots, s$ los autovalores correspondientes para $U = U(0)$. Supóngase que φ se anula solamente en los respectivos conjuntos \mathcal{R}_j con $\mathcal{R}_j = \bigcup_m \mathcal{R}_{j,m}$ donde $\mathcal{R}_{j,m}$ es dado por la igualdad (2.9) para $w = 0$. Entonces si $Tw \neq 2s\pi$, para todo $s \in \mathbb{Z}$, el operador $U(w)$ no tiene autovalores para todo $w \neq 0$.*

Demostración: Si $\eta(w) = e^{iE(w)}$ es un tal autovalor entonces φ se anula en cada conjunto del tipo $\mathcal{R}_{w,m}$. Si $y \in \mathcal{R}_{w,m}$ entonces existe $\tilde{m} \in \mathbb{Z}$ tal que $y \in \mathcal{R}_{\nu, \tilde{m}}$ para algún ν , de donde $\hat{\rho}_m(w) = \rho_{\tilde{m}}$, por lo que $E(w) = E_j + 2(\tilde{m} - m)\pi$. Luego $\eta(w) = e^{iE_\nu}$ es un autovalor de U lo cual lleva a una contradicción. ■

Este resultado y el teorema 2.1 muestran que el operador $U(w)$ es absolutamente continuo si $w \neq 0$.

Observación 2.2 *Asúmase que $U = U(0)$ posee un único autovalor $z_0 = e^{iE_0}$. Siempre es posible elegir T de forma que la identidad (2.10) se cumple.*

Para ver esto escójase una función continua $\phi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ satisfaciendo $\phi(x) = 0$ para $x \in \tilde{\mathcal{R}}$, donde $\tilde{\mathcal{R}} = \bigcup_m \tilde{\mathcal{R}}_m$ con $x \in \tilde{\mathcal{R}}_m$ si $v \cdot x = T\hat{\rho}_m$, y tal que

$$\tilde{\psi}(x) = \frac{e^{-iv \cdot x} \phi(x)}{e^{-iv \cdot x} - e^{iE_0}} \in L^2(\mathbb{R}^n)$$

Entonces φ definida por $\varphi(x) := \phi(Tx)$ cumple $\varphi(x) = 0$, si $x \in \mathcal{R}$ y $\psi(x) := \tilde{\psi}(Tx)$ es justamente la función dada en (2.12) la cual pertenece a $L^2(\mathbb{R}^n)$. Se tiene:

$$\|\varphi\|^2 = \frac{1}{T} \|\phi\|^2, \quad \langle \varphi, \psi \rangle = \frac{1}{T} \langle \phi, \tilde{\psi} \rangle = \frac{1}{T} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\phi(x)|^2}{1 - e^{i(v \cdot x + E_0)}} dx$$

De la identidad

$$(2.13) \quad \frac{1}{1 - e^{i\beta}} = \frac{1}{2} + \frac{i}{2} \frac{\operatorname{sen} \beta}{1 - \cos \beta}$$

se sigue que

$$\operatorname{Re}(\langle \varphi, \psi \rangle) = \frac{1}{2T} \|\phi\|^2, \quad \operatorname{Im}(\langle \varphi, \psi \rangle) = \frac{1}{2T} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\operatorname{sen}(v \cdot y + E_0) |\phi(y)|^2}{1 - \cos(v \cdot y + E_0)} dy$$

Entonces por la definición de ζ en (2.7) se tiene que la identidad (2.10) es válida si y sólo si

$$\frac{1}{T}\|\phi\|^2 = 1, \quad y \quad \frac{1}{T} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\text{sen}(v \cdot y + E_0)|\phi(y)|^2}{1 - \cos(v \cdot y + E_0)} dy = -\frac{\text{sen } T}{1 - \cos T}$$

Luego denotando

$$B = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\text{sen}(v \cdot y + E_0)|\phi(y)|^2}{1 - \cos(v \cdot y + E_0)} dy$$

se llega a que $T = \|\phi\|^2$ debe cumplir:

$$(\star) \quad \frac{\text{sen } T}{\cos T - 1} = T^{-1}B$$

Ahora, la función $f(t) = \frac{\text{sen } t}{\cos t - 1}$ es continua en el intervalo $(0, 2\pi)$ verificando $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = -\infty$ y $\lim_{t \rightarrow 2\pi^-} f(t) = +\infty$. De esto se sigue que existe $\lambda_0 \in (0, 2\pi)$ tal que $f(\lambda_0\|\phi\|^2) = \|\phi\|^{-2}B$. Entonces haciendo $T_0 = \lambda_0\|\phi\|^2$ y definiendo $\Phi(x) = \sqrt{\lambda_0}\phi(x)$ se tiene que $T_0 = \|\Phi\|^2$ y $\varphi(x) := \Phi(T_0x)$ satisface

$$\|\varphi\|^2 = 1, \quad 2\text{Im}(\langle \varphi, \psi \rangle) = \frac{1}{\|\phi\|^2} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\text{sen}(v \cdot y + E_0)|\phi(y)|^2}{1 - \cos(v \cdot y + E_0)} dy = \|\phi\|^{-2}B = f(T_0)$$

de donde la igualdad (\star) es cierta y por lo tanto, $\text{Re}(\langle \varphi, \psi \rangle) = \text{Re}(-\frac{1}{\zeta})$, $\text{Im}(\langle \varphi, \psi \rangle) = \text{Im}(-\frac{1}{\zeta})$, con lo que se llega a la expresión (2.11).

2.3 Método de traslación analítica

En esta sección se presenta un método que permite asociar al operador $U(w)$ un operador $U_\theta(w)$ que depende analíticamente del parámetro θ en una región del plano complejo. Este operador preserva el espectro puntual de $U(w)$ y, cuando $\text{Im}\theta \neq 0$, posee a lo mas una cantidad finita de autovalores en una región anular del plano complejo que tiene al conjunto \mathbb{S} como parte de su frontera. Estos autovalores son las resonancias para el operador $U(w)$, y pueden ser caracterizados en términos del operador resolvente de $U(w)$.

En todo lo que viene se considera a w fijo.

Para $\theta \in \mathbb{R}$ se define la familia de operadores unitarios,

$$(2.14) \quad (V_\theta\psi)(x) = \psi(x - \theta v), \quad \psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$$

Se tiene que V_θ ; $\theta \in \mathbb{R}$ es un grupo unitario fuertemente continuo a un parámetro. Sea,

$$(2.15) \quad U_\theta(w) := V_\theta U(w) V_\theta^{-1} = U_{0,\theta} + \zeta(w) U_{0,\theta} P_\theta$$

donde P_θ es la proyección sobre el espacio generado por el vector $\varphi_\theta := V_\theta\varphi$ y

$$(U_{0,\theta}f)(x) = e^{-iTv \cdot (x - \theta v)} f(x)$$

En lo que resta del capítulo se asúmen las siguiente hipótesis:

(H1) Existe algún $a > 0$ tal que la aplicación a valores vectoriales, $\theta \in \mathbb{R} \rightarrow \varphi_\theta \in L^2(\mathbb{R}^n)$ tiene una extensión analítica en el disco $S_a := \{z \in \mathbb{C}, |z| \leq a\}$.

(H2) El operador $U(w)$ posee finitos autovalores $\eta_\nu(w) = e^{iE_\nu(w)}$, $\nu = 1, \dots, s$.

(H3) Para $w = 0$ el operador $U = U(0)$ posee un único autovalor $z_0 = e^{iE_0}$.

El conjunto de los vectores satisfaciendo la condición (H1) es denotado por \mathcal{D}_a , y se llama el conjunto de los vectores analíticos en $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Observacion 2.3 La condición anterior se verifica si este conjunto tiene la propiedad de que cada elemento φ es la restricción a \mathbb{R}^n de una función analítica en una pequeña vecindad compleja de \mathbb{R}^n y además $\varphi(v \cdot (x - \theta v)) \in L^2(\mathbb{R}^n)$ como función de x . Esto es posible [19] considerando la clase de todas las funciones analíticas $\varphi(z)$ en \mathbb{C}^n tales que en el conjunto $\mathcal{C}_\varepsilon = C_\varepsilon^n = C_\varepsilon \times C_\varepsilon \times \dots \times C_\varepsilon$ con C_ε dado por la región

$$(2.16) \quad C_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C} : |Imz| \leq (1 - \varepsilon)|Rez|\}, \quad 0 < \varepsilon < 1$$

se cumple para todo $\nu \in \mathbb{N}$

$$(2.17) \quad \lim_{\|z\| \rightarrow \infty, z \in \mathcal{C}_\varepsilon} \|z\|^\nu |\varphi(z)| = 0$$

donde $\|z\|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + \dots + |z_n|^2$. Es sencillo comprobar de la condición (2.18) que la función φ está en $L^p(\mathbb{R}^n)$ para todo $1 \leq p \leq \infty$. Más aún es posible mostrar que $\varphi \in \mathcal{H}^2(\mathbb{R}^n)$ (véase la sección 1 de Apéndice E).

Un ejemplo de este tipo de funciones es dado para $n = 1$ por la función $\varphi(z) = e^{-\alpha z^2} p(z)$ con $\alpha > 0$ y $p(z)$ un polinomio. Además se puede mencionar que el conjunto \mathcal{D}_a es denso en $L^2(\mathbb{R}^n)$ [19].

Ahora, el operador P_θ para $\theta \in S_a$ y $\varphi \in \mathcal{D}_a$ se extiende como $P_\theta := \langle \varphi_{\bar{\theta}}, \cdot \rangle \varphi_\theta$. Se tiene que (P_θ) es una familia de operadores analíticos de rango uno. De esto se deduce que U_θ es de la forma:

$$(2.18) \quad (U_\theta(w)f)(x) = e^{-iTv \cdot (x - \theta v)} f(x) + \zeta \langle \varphi_{\bar{\theta}}, f \rangle e^{-iTv \cdot (x - \theta v)} \varphi_\theta(x)$$

y es una familia analítica de tipo A [22]. Además, siendo $U_0 P$ una proyección de rango uno (no ortogonal) se tiene por el teorema de Weyl [22, 32] que $\sigma_{ess}(U(w)) = \sigma_{ess}(U_0) = \mathbb{S}$, donde σ_{ess} es el espectro esencial, y en general

$$\sigma_{ess}(U_\theta(w)) = \sigma_{ess}(U_{0,\theta}(w)) = \sigma(U_{0,\theta}) = \{e^{-T\varrho Im\theta} z : z \in \mathbb{S}\}$$

donde $\varrho = 1$ si $n > 1$ y $\varrho = \nu^2$ si $n = 1$. Por otra parte, algunas propiedades relativas al espectro discreto $\sigma_{dis}(U_\theta(w))$ del operador $U_\theta(w)$ son presentadas a continuación. Para la demostración véase la sección 2 del Apéndice E.

Lema 2.3 Sea $w \in \mathbb{R}$, $w > -1$. El espectro discreto de $U_\theta(w)$ se localiza de la siguiente manera:

a) Si $\text{Im}\theta > 0$, entonces

$$(2.19) \quad \sigma_{dis}(U_\theta(w)) \subseteq \{z : e^{-T_\theta \text{Im}\theta} < |z| \leq 1\}$$

b) Si $\text{Im}\theta < 0$, entonces

$$(2.20) \quad \sigma_{dis}(U_\theta(w)) \subseteq \{z : 1 \leq |z| < e^{-T_\theta \text{Im}\theta} < 1\}$$

Ademas, para todo $\theta \in S_a$

$$(2.21) \quad \sigma_{dis}(U_\theta(w)) \cap \mathbb{S} = \sigma_{pp}(U(w))$$

Los autovalores de $U_\theta(w)$ en la región anular dada por el lema 2.3 pueden ser descritos como polos de alguna extensión meromorfa del operador resolvente de $U(w)$. Para lograr esto es necesario estudiar el operador resolvente de $U_\theta(w)$.

Se tiene de la fórmula de Krein,

$$(2.22) \quad (U_\theta(w) - z)^{-1} = (U_{0,\theta} - z)^{-1} - \frac{\zeta(w)}{1 + \zeta(w) \langle \varphi_{\bar{\theta}}, (U_{0,\theta} - z)^{-1} U_{0,\theta} \varphi_\theta \rangle} \langle \varphi_{\bar{\theta}}, (U_{0,\theta} - z)^{-1} \cdot \rangle (U_{0,\theta} - z)^{-1} U_{0,\theta} \varphi_\theta$$

Esta identidad permite concluir que las singularidades de $(U_\theta(w) - z)^{-1}$ en $\mathbb{C} \setminus \sigma(U_{0,\theta})$ se producen justamente en los ceros de la función $p_w^{(\theta)}(\cdot)$ definida por,

$$(2.23) \quad p_w^{(\theta)}(z) = 1 + \zeta \langle \varphi_{\bar{\theta}}, (U_{0,\theta} - z)^{-1} U_{0,\theta} \varphi_\theta \rangle$$

Lema 2.4 Los ceros de la función $p_w^{(\theta)}(\cdot)$ en $\mathbb{C} \setminus \sigma(U_{0,\theta})$ son los elementos de $\sigma_{disc}(U_\theta(w))$.

Demostración: Sea v_0 tal que $p_w^{(\theta)}(v_0) = 0$. Es fácil ver que $h = (U_{0,\theta} - v_0)^{-1} U_{0,\theta} \varphi_\theta$ satisface $U_\theta(w)h = v_0 h$. Recíprocamente, si esta igualdad es cierta, entonces $\langle \varphi_{\bar{\theta}}, h \rangle \neq 0$ y

$$(2.24) \quad h = -\zeta(w) \langle \varphi_{\bar{\theta}}, f \rangle (U_{0,\theta} - v_0)^{-1} U_{0,\theta} \varphi_\theta$$

de donde $p_w^{(\theta)}(v_0) = 0$. ■

De este lema se desprende que el orden de cada polo de $(U_\theta(w) - z)^{-1}$ está determinado por el orden del correspondiente cero de $p_w^{(\theta)}(z)$. En particular, se tiene (véase la sección 2 del Apéndice E):

Lema 2.5 Si z_0 es un cero de $p_w^{(\theta)}(z)$ con $|z_0| = 1$ entonces es de orden uno.

Sean $\phi, \psi \in \mathcal{D}_a$. Se define

$$(2.25) \quad F_{w,\phi,\psi}(z) = \langle \phi, (U(w) - z)^{-1}U(w)\psi \rangle$$

El siguiente resultado proporciona la caracterización de los autovalores de $U_\theta(w)$ mencionada con anterioridad:

Proposición 2.3 Sea $\theta \in S_a$ con $\text{Im}\theta > 0$. Entonces la función $F_{w,\phi,\psi}^{(\theta)}(\cdot)$ definida por

$$(2.26) \quad F_{w,\phi,\psi}^{(\theta)}(z) = \langle \phi_{\bar{\theta}}, (U_\theta(w) - z)^{-1}U_\theta(w)\psi_\theta \rangle, \quad \theta \in S_a$$

es una extensión de $F_{w,\phi,\psi}(\cdot)$ desde la región $|z| > 1$ a todo $\mathbb{C} \setminus \sigma(U_{0,\theta})$. Tal extensión es meromorfa con polos ubicados en $\{z : e^{-T\rho\text{Im}\theta} < |z| \leq 1\}$, lo cuales son justamente los elementos de $\sigma_{\text{dis}}(U_\theta(w))$. Del mismo modo para $\text{Im}\theta < 0$, la función $F_{w,\phi,\psi}^{(\theta)}(\cdot)$ es una extensión meromorfa de $F_{w,\phi,\psi}(\cdot)$ desde la región $|z| < 1$ a todo $\mathbb{C} \setminus \sigma(U_{0,\theta})$ con polos en $\{z : 1 \leq |z| < e^{-T\rho\text{Im}\theta}\}$.

Demostración: Sea $|z| > 1$. De las igualdades (2.22) y (2.23) se sigue que,

$$F_{w,\phi,\psi}^{(\theta)}(z) = \langle \phi_{\bar{\theta}}, (U_{0,\theta} - z)^{-1}U_\theta(w)\psi_\theta \rangle - \frac{\zeta(w)}{p_w^{(\theta)}(z)} \langle \varphi_{\bar{\theta}}, (U_{0,\theta} - z)^{-1}U_\theta(w)\psi_\theta \rangle \langle \phi_{\bar{\theta}}, (U_{0,\theta} - z)^{-1}U_{0,\theta}\varphi_\theta \rangle$$

Nótese,

$$\langle \varphi_{\bar{\theta}}, (U_{0,\theta} - z)^{-1}U_\theta(w)\psi_\theta \rangle = \langle \varphi_{\bar{\theta}}, (U_{0,\theta} - z)^{-1}U_{0,\theta}\psi_\theta \rangle + \frac{\zeta(w)}{p_w^{(\theta)}(z)} \langle \varphi_{\bar{\theta}}, \psi_\theta \rangle \langle \varphi_{\bar{\theta}}, (U_{0,\theta} - z)^{-1}U_{0,\theta}\varphi_\theta \rangle$$

$$\langle \phi_{\bar{\theta}}, (U_{0,\theta} - z)^{-1}U_\theta(w)\psi_\theta \rangle = \langle \phi_{\bar{\theta}}, (U_{0,\theta} - z)^{-1}U_{0,\theta}\psi_\theta \rangle + \frac{\zeta(w)}{p_w^{(\theta)}(z)} \langle \varphi_{\bar{\theta}}, \psi_\theta \rangle \langle \phi_{\bar{\theta}}, (U_{0,\theta} - z)^{-1}U_{0,\theta}\varphi_\theta \rangle$$

De los argumentos empleados en la sección 2 del Apéndice E (concretamente lo realizado en la subsecciones 1 y 2 (casos $n = 1$ y $n > 1$ con $z_0 = r_0 e^{i\rho_0}$ para $r_0 > 1$)) se tiene que,

$$\langle \phi_{\bar{\theta}}, (U_{0,\theta} - z)^{-1}U_{0,\theta}\varphi_\theta \rangle = \langle \phi, (U_0 - z)^{-1}U_0\varphi \rangle, \quad \langle \phi_{\bar{\theta}}, (U_{0,\theta} - z)^{-1}U_{0,\theta}\psi_\theta \rangle = \langle \phi, (U_0 - z)^{-1}U_0\psi \rangle$$

$$\langle \varphi_{\bar{\theta}}, (U_{0,\theta} - z)^{-1}U_{0,\theta}\psi_\theta \rangle = \langle \varphi, (U_0 - z)^{-1}U_0\psi \rangle, \quad \langle \varphi_{\bar{\theta}}, (U_{0,\theta} - z)^{-1}U_{0,\theta}\varphi_\theta \rangle = \langle \varphi, (U_0 - z)^{-1}U_0\varphi \rangle$$

De esta manera se deduce,

$$\langle \varphi_{\bar{\theta}}, (U_{0,\theta} - z)^{-1}U_\theta(w)\psi_\theta \rangle = \langle \varphi, (U_0 - z)^{-1}U(w)\psi \rangle$$

$$\langle \phi_{\bar{\theta}}, (U_{0,\theta} - z)^{-1}U_\theta(w)\psi_\theta \rangle = \langle \phi, (U_0 - z)^{-1}U(w)\psi \rangle$$

Entonces la identidad (2.22) y las igualdades anteriores implican que $F_{w,\phi,\psi}^{(\theta)}(z) = F_{w,\phi,\psi}(z)$. Esto junto con la inclusión (2.19) muestran que $F_{w,\phi,\psi}^{(\theta)}(\cdot)$ extiende a $F_{w,\phi,\psi}(\cdot)$

desde la región $|z| > 1$ a todo $\mathbb{C} \setminus \sigma(U_{\theta})$. El lema 2.4 implica que esta función $F_{w,\phi,\psi}^{(\theta)}(\cdot)$ es meromorfa con polos ubicados en $\{z : e^{-T\theta \operatorname{Im}\theta} < |z| \leq 1\}$, los cuales coinciden con los elementos de $\sigma_{\text{dis}}(U_{\theta}(w))$. El caso $\operatorname{Im}\theta < 0$ es análogo. ■

Ahora, sea $R(U(w), re^{i\rho}) = (U(w) - re^{i\rho})^{-1}U(w)$. Considérese

$$(2.27) \quad \delta(U(w), r, \rho) = \frac{1}{2\pi} (R(U(w), re^{i\rho}) - R(U(w), r^{-1}e^{i\rho}))$$

y defínase la función,

$$(2.28) \quad Q_{w,\phi,\psi}(\rho) = \lim_{r \rightarrow 1^-} \langle \phi, \delta(U(w), r, \rho) \psi \rangle$$

Lema 2.6 Para todo $\rho \in \mathbb{R}$ salvo un conjunto de medida de Lebesgue nula, se verifica:

$$(2.29) \quad Q_{w,\phi,\psi}(\rho) = \lim_{r \rightarrow 1^-} \tilde{Q}_{w,\phi,\psi}(re^{i\rho})$$

donde $\tilde{Q}_{w,\phi,\psi}(\cdot)$ es la función dada por:

$$(2.30) \quad \tilde{Q}_{w,\phi,\psi}(z) = \frac{1}{2\pi} [F_{w,\phi,\psi}^{(\bar{\theta})}(z) - F_{w,\phi,\psi}^{(\theta)}(z)]$$

Demostración: Para todo $\theta \in S_a$ se tiene que hay un número finito de polos de $F_{w,\phi,\psi}^{(\theta)}(z)$ en \mathbb{S} . Luego

$$F_{w,\phi,\psi}^{(\theta)}(e^{i\rho}) = \lim_{r \rightarrow 1^\pm} F_{w,\phi,\psi}^{(\theta)}(re^{i\rho}) = \lim_{r \rightarrow 1^+} F_{w,\phi,\psi}^{(\theta)}(re^{i\rho})$$

es válido salvo un subconjunto numerable en \mathbb{R} . Para c.t.p. $\rho \in \mathbb{R}$ se tiene,

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 1^-} \tilde{Q}_{w,\phi,\psi}(re^{i\rho}) &= \frac{1}{2\pi} [\lim_{r \rightarrow 1^-} F_{w,\phi,\psi}^{(\bar{\theta})}(re^{i\rho}) - \lim_{r \rightarrow 1^-} F_{w,\phi,\psi}^{(\theta)}(re^{i\rho})] \\ &= \frac{1}{2\pi} [\lim_{r \rightarrow 1^-} F_{w,\phi,\psi}^{(\bar{\theta})}(re^{i\rho}) - \lim_{r \rightarrow 1^+} F_{w,\phi,\psi}^{(\bar{\theta})}(re^{i\rho})] \end{aligned}$$

Como $\lim_{r \rightarrow 1^+} F_{w,\phi,\psi}^{(\theta)}(re^{i\rho}) = \lim_{r \rightarrow 1^-} F_{w,\phi,\psi}^{(\theta)}(t^{-1}e^{i\rho})$, se sigue que

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} \tilde{Q}_{w,\phi,\psi}(re^{i\rho}) = \frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow 1^-} \{F_{w,\phi,\psi}^{(\bar{\theta})}(re^{i\rho}) - F_{w,\phi,\psi}^{(\theta)}(r^{-1}e^{i\rho})\}$$

Entonces, del hecho que $F_{w,\phi,\psi}^{(\theta)} = F_{w,\phi,\psi}$ cuando $|z| > 1$, y $F_{w,\phi,\psi}^{(\bar{\theta})} = F_{w,\phi,\psi}$ si $|z| < 1$, se concluye la afirmación. ■

Sea $\mathcal{H}_{pp}(U(w))$ el subespacio puramente puntual asociado al operador $U(w)$. Del resultado anterior se deduce:

Corolario 2.2 Sea $\phi \in \mathcal{D}_a$ tal que $\phi \perp \mathcal{H}_{pp}(U(w))$. Entonces la función $F_{w,\phi,\psi}^{(\theta)}(z)$ es analítica en todo elemento de $\sigma_{pp}(U(w))$, esto es $F_{w,\phi,\psi}^{(\theta)}(\cdot)$ no tiene polos en \mathbb{S} .

Demostración: En la prueba del lema 2.3 (Apéndice E) se obtiene la relación $U(w)f = v_0 f$ si y sólo si $U_\theta(w)f_\theta = v_0 f_\theta$, donde f cumple la igualdad (2.9) y f_θ la (2.24). Además, el mismo razonamiento empleado en la prueba de la inclusión $\sigma_{pp}(U(w)) \subseteq \sigma_{dis}(U_\theta(w)) \cap \mathbb{S}$, aplicado a la función $\overline{\phi(\bar{z})}f(z)$ permite probar, $\langle \phi_{\bar{\theta}}, f_\theta \rangle = \langle \phi, f \rangle$. De esto se sigue que $\phi \perp \mathcal{H}_{pp}(U(w))$ si y sólo si $\phi_{\bar{\theta}} \perp f_\theta$, para todo f verificando (2.9). Entonces para v_0 autovalor de $U(w)$ se tiene $p_w(v_0) = 0 = \langle \phi_{\bar{\theta}}, (U_{0,\theta} - z_0)^{-1} U_{0,\theta} \varphi_\theta \rangle$, y como v_0 es un cero de orden uno de $p_w(z)$, se concluye la analiticidad de $F_{w,\phi,\psi}^{(\theta)}(z)$ en v_0 . ■

Este corolario muestra que la función $\tilde{Q}_{w,\phi,\psi}$ es continua en todo \mathbb{S} , y $Q_{w,\phi,\psi}(\rho) = \tilde{Q}_{w,\phi,\psi}(e^{i\rho})$ para todo ρ . Notar que la demostración anterior prueba que si,

$$\mathcal{A}_{w,\theta} = \mathcal{A}(U_\theta(w)) = \overline{\langle \{g \in \mathcal{H} : U_\theta(w)g = v_0 g, v_0 \in \sigma_{pp}(U(w))\} \rangle}$$

entonces para todo h vector analítico se verifica que $h \perp \mathcal{H}_{pp}(U(w))$ si y sólo si $h_{\bar{\theta}} \perp \mathcal{A}_{w,\theta}$. En particular $\mathcal{H}_{pp}(U(w))^\perp = \mathcal{A}_{w,\theta}^\perp$.

El objetivo a continuación es determinar si hay alguna relación entre $\langle \phi, U(w)^k \psi \rangle$ y los autovalores de $U_\theta(w)$. Para esto los resultados ya obtenidos serán fundamentales.

Sea $\theta \in S_n$ con $Im\theta > 0$. Para $0 < l < 1$ la función $F_{w,\phi,\psi}^{(\theta)}$ solo tiene finitos polos en

$$(2.31) \quad D_l = \{z : e^{-(1-l)T_\theta Im\theta} < |z| \leq 1\}$$

pues $U_\theta(w)$ tiene finitos autovalores en esa región. Sea $\Gamma_{l_0} = \{z : |z| = e^{-(1-l_0)T_\theta Im\theta}\}$. Es posible mostrar:

Lema 2.7 *Existe $0 < l_0 < 1$ tal que ningún polo de $F_{w,\phi,\psi}^{(\theta)}$ pertenece a la curva Γ_{l_0} .*

Demostración: Asumiendo lo contrario, si $0 < l < 1$ existe $n_l \in \mathbb{N}$ tal que $|z_{n_l}| = e^{-(1-l)T_\theta Im\theta}$. Se tiene que $z_{n_{l_1}} \neq z_{n_{l_2}}$ si $l_1 \neq l_2$. Luego existe una función $l \rightarrow n_l$ definida en $[0, 1]$ que es inyectiva, lo que es una contradicción con la definición de espectro discreto. ■

De acuerdo con la hipótesis **(H2)**, considerar $\xi_1(w), \dots, \xi_s(w)$ los respectivos autovectores normalizados dados por (2.9). Por lo comentado en la observación 2.4 (ver mas adelante), la proyección ortogonal $P_{w,\nu} = \langle \xi_\nu(w), \cdot \rangle \xi_\nu(w)$ se extiende a todo $\theta \in S_n$ en la forma $P_{w,\nu,\theta} := \langle \xi_{\nu,\theta}(w), \cdot \rangle \xi_{\nu,\theta}(w)$, lo cual define una familia analítica de tipo A. Sean $(z_j(w))$ los autovalores complejos de $U_\theta(w)$. Si I denota el operador identidad en $L^2(\mathbb{R}^n)$ entonces $I = P_{w,pp} + P_{w,ac}$ donde $P_{w,pp} = \sum P_{w,\nu}$ y $P_{w,ac} = I - P_{w,pp}$ son las proyecciones ortogonales asociadas a $\mathcal{H}_{pp}(U(w))$ y $\mathcal{H}_{ac}(U(w))$ respectivamente. Para $h \in L^2(\mathbb{R}^n)$ un vector analítico, se tiene

$$h = P_{w,pp}h + h_w = \sum_{\nu=1}^s P_{w,\nu}h + h_w = \sum_{\nu=1}^s \langle \xi_\nu(w), h \rangle \xi_\nu(w) + h_w$$

con $h_w = P_{w,ac}h = h - P_{w,pp}h$.

Sea $k \geq 1$. Lo mencionado arriba permite expresar $\langle \phi, U(w)^k \psi \rangle$ en la forma,

$$\langle \phi, U(w)^k \psi \rangle = \sum_{\nu} \eta_{\nu}(w)^k \langle \phi, P_{w,\nu} \psi \rangle + \langle \phi_w, U(w)^k \psi_w \rangle$$

De esto se obtiene la siguiente estimación:

Lema 2.8 *Para todo $k \geq 1$ se cumple:*

$$(2.32) \quad \langle \phi, U(w)^k \psi \rangle = \sum_{\nu=1}^s \eta_{\nu}(w)^k \langle \phi, P_{w,\nu} \psi \rangle + \sum_{j=1}^q z_j(w)^k \langle \phi_{w,\bar{\theta}}, P_{w,j}(\theta) U_{\theta}(w) \psi_{w,\theta} \rangle + \mathcal{O}(e^{-Im\theta(1-l)T} \varrho^{k-1})$$

cuando w tiende a cero, donde $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{\phi,\psi,w,\theta}$ y s, q, l dependen de w .

Demostración: Por el teorema espectral,

$$\langle \phi_w, U(w)^k \psi_w \rangle = \int_{\mathbb{S}} e^{ikt} d\mu_w(t) = \int_{\mathbb{S}} e^{ikt} Q_{w,\phi_w,\psi_w}(t) dt$$

donde $Q_{w,\phi_w,\psi_w}(t)$ es la derivada de Radon-Nikodym de la medida μ_w asociada a los vectores ϕ_w, ψ_w . De lo realizado en la sección 3 del Apéndice E (E.74), y de la observación 2.4 se tiene que esta función coincide justamente con la función dada en (2.30) (para $\phi = \phi_w$ y $\psi = \psi_w$), y además

$$\int_{\mathbb{S}} e^{ikt} Q_{w,\phi_w,\psi_w}(t) dt = \lim_{r \rightarrow 1^-} \int_{\mathbb{S}} e^{ikt} \tilde{Q}_{w,\phi_w,\psi_w}(r e^{it}) dt$$

donde la convergencia es uniforme en $k \in \mathbb{N}$. Para l verificando el lema 2.7 y $r_0 > 0$ de tal forma que $F_{w,\phi_w,\psi_w}^{(\theta)}(\cdot)$ tampoco tenga polos en la región $D_{r_0} = \{z : r_0 \leq |z| < 1\}$, la función $\tilde{Q}_{w,\psi_w,\phi_w}(\cdot)$ sólo posee finitos polos $z_1(w), \dots, z_q(w)$ en D_l (lema 2.4).

Como

$$\int_{\mathbb{S}} e^{ikt} \tilde{Q}_{w,\phi_w,\psi_w}(r e^{it}) dt = i^{-1} r^{-k} \int_{\gamma_r} z^{k-1} \tilde{Q}_{w,\phi_w,\psi_w}(z) dz$$

donde γ_r es el circunferencia de radio $r_0 < r < 1$ centrada en el origen, recorrida en sentido positivo, y $F_{w,\phi_w,\psi_w}^{(\theta)}(\cdot)$ es analítica para $|z| < 1$, se sigue por el teorema de Cauchy

$$\begin{aligned} i^{-1} r^{-k} \int_{\gamma_r} z^{k-1} \tilde{Q}_{w,\phi_w,\psi_w}(z) dz &= -r^{-k} \sum_{j=1}^q z_j(w)^k \operatorname{Res}(F_{w,\phi_w,\psi_w}^{(\theta)}(z))|_{z=z_j(w)} + \\ &+ i^{-1} r^{-k} \int_{\Gamma_l} z^{k-1} \tilde{Q}_{w,\phi_w,\psi_w}(z) dz \end{aligned}$$

Notar que $\text{Res}(F_{w,\phi_w,\psi_w}^{(\theta)}(z))|_{z=z_j(w)} = \langle \phi_{w,\bar{\theta}}, \text{Res}[(U_\theta(w) - z)^{-1}U_\theta(w)\psi_{w,\theta}]|_{z=z_j(w)} \rangle$, con

$$\begin{aligned} \text{Res}[(U_\theta(w) - z)^{-1}]|_{z=z_j(w)} &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_j(w)|=\kappa_j} (U_\theta(w) - z)^{-1} dz \\ &= -P_{w,j}(\theta) \end{aligned}$$

donde

$$(2.33) \quad P_{w,j}(\theta) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_j(w)|=\kappa_j} (U_\theta(w) - z)^{-1} dz$$

El operador $P_{w,j}(\theta)$ es una proyección (no ortogonal) en $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^n)$. Se verifica que $\text{Ran}(P_{w,j}(\theta))$ es finito dimensional (véase la sección siguiente) y eventualmente contiene estrictamente al subespacio propio asociado al autovalor $z_j(w)$. Se sigue

$$\int_{\mathbb{S}} e^{ikt} \tilde{Q}_{w,\phi_w,\psi_w}(re^{it}) dt = r^{-k} \sum_{j=1}^q z_j(w)^k \langle \phi_{w,\bar{\theta}}, P_{w,j}(\theta) U_\theta(w) \psi_{w,\theta} \rangle + i^{-1} r^{-k} \int_{\Gamma_l} z^{k-1} \tilde{Q}_{w,\phi_w,\psi_w}(z) dz$$

y tomando límite cuando r tiende a 1^- en la igualdad anterior se llega a,

$$\int_{\mathbb{S}} e^{ikt} Q_{w,\phi_w,\psi_w}(t) dt = \sum_{j=1}^q z_j(w)^k \langle \phi_{w,\bar{\theta}}, P_{w,j}(\theta) U_\theta(w) \psi_{w,\theta} \rangle + i^{-1} \int_{\Gamma_l} z^{k-1} \tilde{Q}_{w,\phi_w,\psi_w}(z) dz$$

Siendo,

$$\left| \int_{\Gamma_l} z^{k-1} \tilde{Q}_{w,\phi_w,\psi_w}(z) dz \right| \leq C(l, w) e^{-Im\theta(1-l)T_\theta(k-1)}$$

donde

$$(2.34) \quad C(l, w) = \int_{\Gamma_l} |\tilde{Q}_{w,\phi_w,\psi_w}(z)| |dz|$$

se concluye finalmente la igualdad. ■

Considerar $0 < l_0 < 1$ verificando el lema 2.7 para $U_\theta = U_\theta(0)$ y denótese z_1, \dots, z_q los respectivos autovalores de este operador en la región $\{z : e^{-(1-l_0)T_\theta Im\theta} < |z| < 1\}$. En la próxima sección se muestra que el operador $U_\theta(w)$ depende analíticamente de w en un pequeño disco centrado en $w = 0$ del plano complejo. Del mismo modo, sus autovalores $z_j(w)$ son funciones en general multivaluadas, analíticas para $|w|$ pequeño y $z_j(w) \rightarrow z_j$ si $w \rightarrow 0$ con $w > 0$. De esto se sigue que tales funciones son una cantidad finita $\bar{q} \geq q$ independiente de w cuando $|w|$ es pequeño. Entonces considerando $|z^*| = \min\{|z_j| : j = 1, \dots, q\}$, es posible escoger $\tilde{l}_0 \geq l_0$ tal que $e^{-(1-\tilde{l}_0)T_\theta Im\theta} < |z^*|$. De donde \tilde{l}_0 satisface el lema 2.7 independiente de w si $|w|$ es pequeño. Por lo tanto se puede asumir que la identidad (2.32) se cumple para q y l independientes de w (pero podrían depender de s).

Ahora, la hipótesis **(H3)** implica que del corolario 2.1 el operador $U(w)$ no posee autovalores si $w \neq 0$ es pequeño, por lo tanto el primer sumando en (2.32) desaparece

y $\phi = \phi_w$, $\psi = \psi_w$. La analiticidad de $U(w)$ ya comentada permite mostrar que la función $\tilde{Q}_{w,\phi,\psi}(z)$ converge a $\tilde{Q}_{0,\phi,\psi}(z)$ cuando w tiende a cero y z pertenece a la curva Γ_l , donde $\tilde{Q}_{0,\phi,\psi}(z)$ es la correspondiente para U_θ . Además la convergencia es uniforme en esta curva. Por lo tanto de (2.35) se obtiene que $C(l, w)$ tiende a $C(l, 0)$ si w converge a cero.

De esta manera se ha probado el resultado principal de esta sección:

Teorema 2.2 *Asúmase las hipótesis (H1) y (H3). Sea $\theta \in S_a$ con $Im\theta > 0$ y $\phi, \psi \in \mathcal{D}_a$. Entonces existe $0 < l < 1$ tal que para todo $k \geq 1$,*

$$(2.35) \quad \langle \phi, U(w)^k \psi \rangle = \sum_{j=1}^q z_j(w)^k \langle \phi_{\bar{\theta}}, P_{w,j}(\theta) U_\theta(w) \psi_\theta \rangle + \mathcal{O}(e^{-Im\theta(1-l)T_\theta(k-1)})$$

cuando w tiende a cero, donde $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{\phi,\psi,\theta}$, y $P_{w,j}(\theta)$ es la proyección dada por (2.33). Si U_θ no posee autovalores entonces el sumando en el lado derecho de (2.35) es cero.

Esta igualdad es la herramienta fundamental del esquema que se plantea en la próxima sección. Para finalizar una comentario muy importante.

Observación 2.4 Sea $\xi_\nu = \xi_\nu(w)$ dado por (2.9), el respectivo autovector correspondiente al autovalor $\eta_\nu(w) = e^{iE_\nu(w)}$. Se tiene que ξ_ν es una función analítica en todo \mathbb{C}^n . Considerar $\|z\|^* = \min\{|z_1|, \dots, |z_n|\}$ con $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$. Se verifica

$$(2.36) \quad \lim_{\|z\| \rightarrow \infty, z \in \mathcal{C}_\epsilon, \|Imz\|^* > R} \|z\|^m |\xi_\nu(z)| = 0, \quad m \in \mathbb{N}$$

Sin embargo el límite anterior no necesariamente se cumple si $|Imz_j| = 0$ o $|Imz_j|$ tiende a cero para algún j , cuando $\|z\|$ tiende al infinito, $z \in \mathcal{C}_\epsilon$. Lo cual significa que en general (2.17) no siempre vale, de donde ξ_ν no es necesariamente un vector analítico. A pesar de esto tiene sentido considerar $\xi_{\theta,\nu}(x) = \xi_\nu(x - \theta v)$ y por lo tanto $F_{w,\xi_\nu,\xi_\nu}^{(\theta)}(z)$, $Im\theta \neq 0$ está bien definida (por (2.36)). Es posible mostrar (véase el anexo de la sección 2 en el Apéndice E) que la proposición 2.3 se satisface para $\phi = \psi = \xi_\nu$. Lo mismo acontece para dos autovectores distintos $\phi = \xi_j$ y $\psi = \xi_\nu$. Por lo tanto, todos los resultados obtenidos a partir de tal proposición son válidos en este caso.

2.4 Un poco de teoría de perturbación analítica de operadores

En esta parte se pone énfasis a la dependencia de $U_\theta(w)$ en el parámetro w (recordar que en la sección anterior, salvo en el teorema 2.2, se consideraba a w fijo). Se mostrará que tal dependencia es analítica. Esto permite estudiar los autovalores de $U_\theta(w)$, empleando algunos resultados de teoría de perturbación.

Por lo realizado en la sección anterior, $z_0 = e^{iE_0}$ es un autovalor aislado de U_θ y es simple. Sea Q el operador

$$(2.37) \quad Q = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=\kappa} (U_\theta - z)^{-1} dz$$

donde $\kappa > 0$ es tal que $\{z : |z - z_0| \leq \kappa\} \cap \sigma_{dis}(U_\theta) = \{z_0\}$. Se sabe que Q es una proyección y por lo tanto vale la descomposición $\mathcal{H} = \text{Ran}(Q) \oplus \text{Ran}(I - Q)$. Además $\text{Ker}(U_\theta - z_0) \subseteq \text{Ran}(Q)$. Se puede ver que $\text{Ker}(U_\theta - z_0) = \langle \{\Psi\} \rangle$, donde $\langle \{\Psi\} \rangle$ es el subespacio generado por el vector Ψ , y

$$(2.38) \quad \Psi = (U_{0,\theta} - z_0)^{-1} U_{0,\theta} \varphi_\theta$$

Por definición $Q = (-1) \text{Res}[(U_\theta - z)^{-1}]|_{z=z_0} = (-1) \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)(U_\theta - z)^{-1}$ y de la igualdad (2.22), que se puede reescribir como

$$(2.39) \quad (U_\theta - z)^{-1} = (U_{0,\theta} - z)^{-1} - \frac{1}{(z - z_0)q(z)} \langle \varphi_{\bar{\theta}}, (U_{0,\theta} - z)^{-1} \cdot \rangle (U_{0,\theta} - z)^{-1} U_{0,\theta} \varphi_\theta$$

(ver prueba del lema 2.5), válida en una vecindad de $z = z_0$, donde $q(z_0) = \langle \varphi_{\bar{\theta}}, (U_{0,\theta} - z_0)^{-2} U_{0,\theta} \varphi_\theta \rangle \neq 0$, se obtiene:

$$(2.40) \quad Q = \frac{1}{q(z_0)} \langle \varphi_{\bar{\theta}}, (U_{0,\theta} - z_0)^{-1} \cdot \rangle (U_{0,\theta} - z_0)^{-1} U_{0,\theta} \varphi_\theta$$

Equivalentemente

$$(2.41) \quad Q = \frac{1}{q(z_0)} \langle \varphi_{\bar{\theta}}, (U_{0,\theta} - z_0)^{-1} \cdot \rangle \Psi$$

En consecuencia $\text{Ran}(Q) = \text{Ker}(U_\theta - z_0)$ es de dimensión uno y por lo tanto z_0 es un autovalor no degenerado de U_θ .

Recordar que el operador $U_\theta(w)$ es dado por $U_\theta(w) = U_{0,\theta} + \zeta(w)U_{0,\theta}P_\theta$, donde $\zeta(w) = e^{-i(w+1)} - 1$ y $P_\theta = \langle \varphi_{\bar{\theta}}, \cdot \rangle \varphi_\theta$. Ahora, de las técnicas empleadas en la sección 2 del Apéndice E se deduce que $\langle \varphi_{\bar{\theta}}, \varphi_\theta \rangle = \langle \varphi, \varphi \rangle = 1$ y por lo tanto $P_\theta^2 = P_\theta$, o sea P_θ es una proyección. Esto permite expresar $U_\theta(w)$ en términos de U_θ de la siguiente manera: Sea

$$(2.42) \quad \beta(w) = e^{-iT w} - 1$$

con $\zeta = \zeta(0)$. Se tiene $\beta(w)\zeta = (e^{-iT w} - 1)(e^{-iT} - 1) = \zeta(w) - \beta(w) - \zeta$. Luego $U_\theta(w) = U_{0,\theta} + \zeta U_{0,\theta} P_\theta + \beta(w)[U_{0,\theta} + \zeta U_{0,\theta} P_\theta] P_\theta$. O sea, $U_\theta(w)$ puede considerarse como una perturbación del operador U_θ de la forma:

$$(2.43) \quad U_\theta(w) = U_\theta e^{-iT w P_\theta} = U_\theta + \beta(w) U_\theta P_\theta$$

En el contexto del método de traslación analítica, la igualdad anterior se expresa como $(U(w))_\theta = U_\theta(w)$. Denótese $\mathcal{U}(w) = U_\theta(w)$ con θ fijo. Siendo $\beta(w)$ una función analítica en todo \mathbb{C} se tiene que $\mathcal{U}(w)$ es una familia analítica de operadores acotados

en \mathcal{H} y en particular es de tipo A. Del desarrollo en serie de potencias de $\beta(w)$ se obtiene la representación para $\mathcal{U}(w)$

$$(2.44) \quad \mathcal{U}(w) = U_\theta + wU^{(1)} + w^2U^{(2)} + w^3U^{(3)} + \dots$$

donde $U^{(k)} = \frac{(-iT)^k}{k!} U_\theta P_\theta$. Del hecho que z_0 es un autovalor no degenerado para $\mathcal{U}(0) = U_\theta$ se sigue por la teoría de perturbación [22, 32] en este caso que existe un único $\lambda(w)$ autovalor aislado y no degenerado de $\mathcal{U}(w)$ que es una función analítica para w pequeño con $\lambda(0) = z_0$. Además existe una función analítica a valores vectoriales $\Psi(w)$ tal que $\Psi(0) = \Psi$ y $\mathcal{U}(w)\Psi(w) = \lambda(w)\Psi(w)$.

Para $\kappa > 0$ como en la expresión (2.36), el siguiente operador está bien definido si w es pequeño:

$$(2.45) \quad Q(w) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=\kappa} (\mathcal{U}(w) - z)^{-1} dz$$

Se tiene $Q(0) = Q$ y $Q(w)$ es una proyección con $\dim \text{Ran}(Q(w)) = \dim \text{Ran}(Q) = 1$. Además se cumple que $Q(w)$ es analítica en una vecindad de cero [22]. Mas aún,

$$(2.46) \quad Q(w) = Q + \sum_{k=1}^N w^k Q^{(k)} + O(|w|^{N+1}), \quad w \rightarrow 0$$

donde

$$(2.47) \quad Q^{(k)} = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=\kappa} R^{(k)}(z) dz, \quad k \geq 1$$

con $R^{(k)}(z)$ el coeficiente obtenido del desarrollo en serie de $R(z, w) = (\mathcal{U}(w) - z)^{-1}$.

Observación 2.3 En general para todo conjunto compacto K contenido en $\mathbb{C} \setminus \sigma(U_\theta)$ y

$$r_K = \min_{z \in K} \frac{1}{d(1 + \|R(z, 0)\| \|U_\theta P_\theta\|)}$$

con $d < 1$, se verifica que $R(z, w)$ es analítica en el disco $|w| < r_K$ para todo $z \in K$. Además si Γ es una curva cerrada simple contenida en K , entonces

$$G(w) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} (\mathcal{U}(w) - z)^{-1} dz$$

es una familia analítica.

Seguendo [32] capítulo XII, es posible mostrar que:

$$(2.48) \quad \Psi(w) = Q(w)\Psi$$

Por su parte, es posible deducir también un desarrollo en serie para $\lambda(w)$,

$$(2.49) \quad \lambda(w) = z_0 + \sum_{n=1}^N w^n \lambda^{(n)} + O(|w|^{N+1}), \text{ cuando } w \rightarrow 0$$

Obsérvese que de la expresión (2.48) se tiene $\langle \Psi, \mathcal{U}(w)Q(w)\Psi \rangle = \lambda(w)\langle \Psi, Q(w)\Psi \rangle$, de donde

$$(2.50) \quad \lambda(w) = \frac{\langle \Psi, \mathcal{U}(w)Q(w)\Psi \rangle}{\langle \Psi, Q(w)\Psi \rangle}$$

Las igualdades (2.44), (2.45) y (2.50) permiten determinar los coeficientes $\lambda^{(n)}$ en (2.50). Esto es consecuencia de,

$$\mathcal{U}(w)Q(w) = U_\theta Q + w(U_\theta Q^{(1)} + U^{(1)}Q) + w^2(U_\theta Q^{(2)} + U^{(1)}Q^{(1)} + U^{(2)}Q) + \dots$$

luego,

$$\begin{aligned} \langle \Psi, \mathcal{U}(w)Q(w)\Psi \rangle &= \langle \Psi, U_\theta Q\Psi \rangle + w \langle \Psi, (U_\theta Q^{(1)} + U^{(1)}Q)\Psi \rangle + \\ &+ w^2 \langle \Psi, (U_\theta Q^{(2)} + U^{(1)}Q^{(1)} + U^{(2)}Q)\Psi \rangle + \dots \end{aligned}$$

Por su parte $\langle \Psi, Q(w)\Psi \rangle = \langle \Psi, Q\Psi \rangle + w \langle \Psi, Q^{(1)}\Psi \rangle + w^2 \langle \Psi, Q^{(2)}\Psi \rangle + \dots$. Como $\langle \Psi, U_\theta Q\Psi \rangle = z_0 \langle \Psi, \Psi \rangle$ queda,

$$\lambda(w) = \frac{z_0 \langle \Psi, \Psi \rangle + w \langle \Psi, (U_\theta Q^{(1)} + U^{(1)}Q)\Psi \rangle + w^2 \langle \Psi, (U_\theta Q^{(2)} + U^{(1)}Q^{(1)} + U^{(2)}Q)\Psi \rangle + \dots}{\langle \Psi, \Psi \rangle + w \langle \Psi, Q^{(1)}\Psi \rangle + w^2 \langle \Psi, Q^{(2)}\Psi \rangle + \dots}$$

Por motivos que serán justificados más adelante, es necesario determinar solo los primeros dos coeficientes en el desarrollo $\lambda(w) = z_0 + \lambda^{(1)}w + \lambda^{(2)}w^2 + \dots$. La división de las series de potencias que define a $\lambda(w)$ muestra que estos coeficientes son de la forma,

$$\begin{aligned} \lambda^{(1)} &= \frac{\langle \Psi, (U_\theta Q^{(1)} + U^{(1)}Q)\Psi \rangle}{\langle \Psi, \Psi \rangle} - z_0 \frac{\langle \Psi, Q^{(1)}\Psi \rangle}{\langle \Psi, \Psi \rangle} \\ \lambda^{(2)} &= \frac{\langle \Psi, (U_\theta Q^{(2)} + U^{(1)}Q^{(1)} + U^{(2)}Q)\Psi \rangle}{\langle \Psi, \Psi \rangle} - z_0 \frac{\langle \Psi, Q^{(2)}\Psi \rangle}{\langle \Psi, \Psi \rangle} - \\ &- \left\{ \frac{\langle \Psi, (U_\theta Q^{(1)} + U^{(1)}Q)\Psi \rangle}{\langle \Psi, \Psi \rangle} - z_0 \frac{\langle \Psi, Q^{(1)}\Psi \rangle}{\langle \Psi, \Psi \rangle} \right\} \frac{\langle \Psi, Q^{(1)}\Psi \rangle}{\langle \Psi, \Psi \rangle} \end{aligned}$$

donde los operadores $Q^{(1)}$ y $Q^{(2)}$ son definidos como:

$$\begin{aligned} Q^{(1)} &= -QU^{(1)}S - SU^{(1)}Q \\ Q^{(2)} &= -QU^{(2)}S - SU^{(2)}Q + QU^{(1)}SU^{(1)}S + SU^{(1)}QU^{(1)}S + \\ &+ SU^{(1)}SU^{(1)}Q - QU^{(1)}QU^{(1)}S^2 - QU^{(1)}S^2U^{(1)}Q - S^2U^{(1)}QU^{(1)}Q \end{aligned}$$

con $S = \lim_{z \rightarrow z_0} R(z)(I - Q)$. Este operador es conocido como la resolvente reducida y satisface las propiedades:

$$(2.51) \quad SQ = QS = 0, \quad (U_\theta - z_0)S = S(U_\theta - z_0) = 0$$

Para los detalles, vease [22] capítulo 2. De (2.41) se observa que $f \in \text{Ran}(I - Q)$ si y sólo si $\langle \varphi_{\bar{\theta}}, (U_{0,\theta} - z_0)^{-1} f \rangle = 0$. Entonces

$$\langle \varphi_{\bar{\theta}}, (U_{0,\theta} - z)^{-1} f \rangle = (z - z_0) \langle \varphi_{\bar{\theta}}, (U_{0,\theta} - z)^{-1} (U_{0,\theta} - z_0)^{-1} f \rangle$$

Por lo tanto si $f \in \text{Ran}(I - Q)$ queda,

$$R(z)f = (U_{0,\theta} - z)^{-1} f - \frac{1}{q(z)} \langle \varphi_{\bar{\theta}}, (U_{0,\theta} - z)^{-1} (U_{0,\theta} - z_0)^{-1} f \rangle \Psi$$

Así,

$$Sf = (U_{0,\theta} - z_0)^{-1} f - \frac{1}{q(z_0)} \langle \varphi_{\bar{\theta}}, (U_{0,\theta} - z_0)^{-1} (U_{0,\theta} - z_0)^{-1} f \rangle \Psi = (I - Q)(U_{0,\theta} - z_0)^{-1} f$$

y para $f = Qf + (I - Q)f \in \mathcal{H}$ se llega a,

$$(2.52) \quad S = (I - Q)(U_{0,\theta} - z_0)^{-1}(I - Q)$$

En particular $S\Psi = 0$. Esta última igualdad y (2.52) permite simplificar las expresiones obtenidas de $\lambda^{(1)}$ y $\lambda^{(2)}$.

Lema 2.9 *Los coeficientes $\lambda^{(1)}$ y $\lambda^{(2)}$ son dados por,*

$$(2.53) \quad \lambda^{(1)} = \frac{d_1(1 + \zeta)}{q(z_0)} \langle \varphi_{\bar{\theta}}, \Psi \rangle^2$$

$$(2.54) \quad \lambda^{(2)} = [d_2 - d_1^2(1 + \zeta) \langle \varphi_{\bar{\theta}}, SU_{0,\theta} \varphi_{\theta} \rangle] \frac{(1 + \zeta)}{q(z_0)} \langle \varphi_{\bar{\theta}}, \Psi \rangle^2$$

donde $d_j = \frac{(-iT)^j}{j!}$, para $j = 1, 2$.

Demostración: Se tiene,

$$\begin{aligned} Q^{(1)}\Psi &= -SU^{(1)}Q\Psi = -SU^{(1)}\Psi \\ Q^{(2)}\Psi &= -SU^{(2)}Q\Psi + SU^{(1)}SU^{(1)}Q\Psi - QU^{(1)}S^2U^{(1)}Q\Psi - S^2U^{(1)}QU^{(1)}Q\Psi \\ &= -SU^{(2)}\Psi + SU^{(1)}SU^{(1)}\Psi - QU^{(1)}S^2U^{(1)}\Psi - S^2U^{(1)}QU^{(1)}\Psi \\ &= -SU^{(2)}\Psi + [QU^{(1)}S - SU^{(1)}]Q^{(1)}\Psi - S^2U^{(1)}QU^{(1)}\Psi \end{aligned}$$

Como $U^{(j)} = d_j U_{\theta} P_{\theta}$, se sigue que

$$\begin{aligned} \langle \Psi, (U_{\theta} Q^{(1)} + U^{(1)} Q) \Psi \rangle - z_0 \langle \Psi, Q^{(1)} \Psi \rangle &= \langle \Psi, U^{(1)} \Psi \rangle + \langle \Psi, (U_{\theta} - z_0) Q^{(1)} \Psi \rangle \\ &= \langle \Psi, (U_{\theta} - z_0) Q^{(1)} \Psi + U^{(1)} \Psi \rangle \\ &= d_1 \langle \Psi, [I - (U_{\theta} - z_0) S] U_{\theta} P_{\theta} \Psi \rangle \end{aligned}$$

La igualdad (2.52) implica $I - (U_{\theta} - z_0)S = Q$. Luego:

$$\langle \Psi, (U_{\theta} Q^{(1)} + U^{(1)} Q) \Psi \rangle - z_0 \langle \Psi, Q^{(1)} \Psi \rangle = d_1 \langle \Psi, QU_{\theta} P_{\theta} \Psi \rangle = \langle \Psi, QU^{(1)} \Psi \rangle$$

Así

$$(2.55) \quad \lambda^{(1)} = \frac{\langle \Psi, QU^{(1)}\Psi \rangle}{\langle \Psi, \Psi \rangle}$$

Ahora, notar que $U_\theta P_\theta = (1 + \zeta)U_{0,\theta}P_\theta$. Entonces, $U^{(j)} = d_j(1 + \zeta)\langle \varphi_{\bar{\theta}}, \cdot \rangle U_{0,\theta}\varphi_\theta$, obteniéndose,

$$(2.56) \quad QU^{(j)}\Psi = \frac{d_j(1 + \zeta)}{q(z_0)}\langle \varphi_{\bar{\theta}}, \Psi \rangle^2 \Psi$$

y reemplazando en la igualdad (2.55) se llega a (2.53).

Por otro lado, con el fin de determinar $\lambda^{(2)}$ es necesario realizar los siguientes calculos:

$$\langle \Psi, (U_\theta Q^{(2)} + U^{(1)}Q^{(1)} + U^{(2)}Q)\Psi \rangle - z_0\langle \Psi, Q^{(2)}\Psi \rangle = \langle \Psi, (U_\theta - z_0)Q^{(2)}\Psi \rangle + \langle \Psi, U^{(1)}Q^{(1)}\Psi \rangle + \langle \Psi, U^{(2)}\Psi \rangle$$

Como,

$$(U_\theta - z_0)Q^{(2)}\Psi = -(I-Q)U^{(2)}\Psi + (U_\theta - z_0)QU^{(1)}SQ^{(1)}\Psi - (I-Q)U^{(1)}Q^{(1)}\Psi - (I-Q)SU^{(1)}QU^{(1)}\Psi$$

se tiene,

$$\begin{aligned} (U_\theta - z_0)Q^{(2)}\Psi + U^{(1)}Q^{(1)}\Psi + U^{(2)}\Psi &= QU^{(2)}\Psi + (U_\theta - z_0)QU^{(1)}SQ^{(1)}\Psi + \\ &\quad + QU^{(1)}Q^{(1)}\Psi - (I-Q)SU^{(1)}QU^{(1)}\Psi \\ &= QU^{(2)}\Psi + (U_\theta - z_0)QU^{(1)}SQ^{(1)}\Psi + \\ &\quad + QU^{(1)}Q^{(1)}\Psi - SU^{(1)}QU^{(1)}\Psi \end{aligned}$$

y observando que $QU^{(1)}SQ^{(1)}\Psi \in \text{Ran}(Q) = \text{Ker}(U_\theta - z_0)$, se llega a

$$\begin{aligned} (U_\theta - z_0)Q^{(2)}\Psi + U^{(1)}Q^{(1)}\Psi + U^{(2)}\Psi &= QU^{(2)}\Psi + QU^{(1)}Q^{(1)}\Psi - SU^{(1)}QU^{(1)}\Psi \\ &= QU^{(2)}\Psi - QU^{(1)}SU^{(1)}\Psi - SU^{(1)}QU^{(1)}\Psi \end{aligned}$$

de donde

$$\langle \Psi, (U_\theta Q^{(2)} + U^{(1)}Q^{(1)} + U^{(2)}Q)\Psi \rangle - z_0\langle \Psi, Q^{(2)}\Psi \rangle = \langle \Psi, QU^{(2)}\Psi - QU^{(1)}SU^{(1)}\Psi \rangle - \langle \Psi, SU^{(1)}QU^{(1)}\Psi \rangle$$

Entonces,

$$(2.57) \quad \lambda^{(2)} = \frac{\langle \Psi, QU^{(2)}\Psi - QU^{(1)}SU^{(1)}\Psi - SU^{(1)}QU^{(1)}\Psi \rangle}{\langle \Psi, \Psi \rangle} - \frac{\langle \Psi, QU^{(1)}\Psi \rangle \langle \Psi, Q^{(1)}\Psi \rangle}{\langle \Psi, \Psi \rangle \langle \Psi, \Psi \rangle}$$

Para las expresiones que aparecen en la igualdad (2.57) se tiene

$$Q^{(1)}\Psi = -SU^{(1)}\Psi = -d_1(1 + \zeta)\langle \varphi_{\bar{\theta}}, \Psi \rangle SU_{0,\theta}\varphi_\theta. \text{ Ademas}$$

$$U^{(1)}SU^{(1)}\Psi = d_1^2(1 + \zeta)^2\langle \varphi_{\bar{\theta}}, \Psi \rangle \langle \varphi_{\bar{\theta}}, SU_{0,\theta}\varphi_\theta \rangle U_{0,\theta}\varphi_\theta, \text{ de donde}$$

$$QU^{(1)}SU^{(1)}\Psi = \frac{d_1^2(1 + \zeta)^2}{q(z_0)}\langle \varphi_{\bar{\theta}}, \Psi \rangle^2 \langle \varphi_{\bar{\theta}}, SU_{0,\theta}\varphi_\theta \rangle \Psi$$

Por su parte

$$SU^{(1)}QU^{(1)}\Psi = \frac{d_1^2(1+\zeta)^2}{q(z_0)} \langle \varphi_{\bar{\theta}}, \Psi \rangle^2 SU_{0,\theta}\varphi_\theta$$

muestra que,

$$\langle \Psi, QU^{(1)}\Psi \rangle \langle \Psi, Q^{(1)}\Psi \rangle = -\frac{d_1^2(1+\zeta)^2}{q(z_0)} \langle \varphi_{\bar{\theta}}, \Psi \rangle^3 \langle \Psi, SU_{0,\theta}\varphi_\theta \rangle \langle \Psi, \Psi \rangle$$

Entonces de lo anterior y la igualdad (2.56) se tiene,

$$\begin{aligned} \langle \Psi, QU^{(2)}\Psi \rangle &= \frac{d_2(1+\zeta)}{q(z_0)} \langle \varphi_{\bar{\theta}}, \Psi \rangle^2 \langle \Psi, \Psi \rangle \\ \langle \Psi, QU^{(1)}SU^{(1)}\Psi \rangle &= \frac{d_1^2(1+\zeta)^2}{q(z_0)} \langle \varphi_{\bar{\theta}}, \Psi \rangle^2 \langle \varphi_{\bar{\theta}}, SU_{0,\theta}\varphi_\theta \rangle \langle \Psi, \Psi \rangle \\ \langle \Psi, SU^{(1)}QU^{(1)}\Psi \rangle &= \frac{d_1^2(1+\zeta)^2}{q(z_0)} \langle \varphi_{\bar{\theta}}, \Psi \rangle^3 \langle \Psi, SU_{0,\theta}\varphi_\theta \rangle \langle \Psi, \Psi \rangle \end{aligned}$$

Así

$$\lambda^{(2)} = \frac{d_2(1+\zeta)}{q(z_0)} \langle \varphi_{\bar{\theta}}, \Psi \rangle^2 - \frac{d_1^2(1+\zeta)^2}{q(z_0)} \langle \varphi_{\bar{\theta}}, \Psi \rangle^2 \langle \varphi_{\bar{\theta}}, SU_{0,\theta}\varphi_\theta \rangle$$

concluyéndose (2.54). ■

Como un resumen de lo realizado hasta el momento (sección 3), se tiene de la hipótesis **(H3)** que si ψ_0 es el respectivo autovector asociado a $z_0 = e^{iE_0}$ para el operador U , entonces $\psi_0 = (U_0 - z_0)^{-1}U_0\varphi$. Se cumple que $\psi_{0,\theta} = (U_{0,\theta} - z_0)^{-1}U_{0,\theta}\varphi_\theta$ es el respectivo autovector asociado al mismo autovalor z_0 para U_θ . Este operador posee a lo más finitos autovalores z_1, z_2, \dots, z_q en la región $e^{-T\nu(1-l)}e^{Im\theta} < |z| < 1$, con $0 < l < 1$ (lema 2.3) donde cada uno de ellos es simple y (eventualmente) degenerado. También es válido que $\phi_\nu = c_\nu(U_{0,\theta} - z_\nu)^{-1}U_{0,\theta}\varphi_\theta$, $c_\nu \in \mathbb{C}$, $\nu = 1, \dots, s$ es el respectivo autovector asociado al autovalor z_ν . De la teoría de perturbación analítica de operadores se tiene lo siguiente:

Para $\mathcal{U}(w) = U_\theta(w)$ existe una función analítica $\lambda(w)$ en una vecindad de $w = 0$ con $\lambda(0) = z_0$ tal que $\lambda(w)$ es un autovalor de $U_\theta(w)$. Además existen funciones $z_{j,l}(w)$ que son todas ramas de una o varias funciones analíticas multivaluadas cerca de $w = 0$. Tales funciones son autovalores de $U_\theta(w)$ con las propiedades de ser continuas en $w = 0$, $z_{j,l}(0) = z_j$ para $j = 1, \dots, s$, y poseen a lo más singularidades algebraicas en dicho punto (para la existencia de estas funciones véase [22], capítulo 2 pag. 65). Denótese $z_j(w)$ una de estas funciones para cada j . De la observación 2.3 se deduce que la proyección $Q_j(w)$ correspondiente y definida como en (2.45) es una familia analítica tal que $Q_j(0) = Q_j$ es dado por (2.37).

Ahora, sean g y h un par de vectores analíticos en $L^2(\mathbb{R}^n)$. La continuidad de las funciones $z_j(w)$ permitirán lograr una identidad para $|\langle g, U(w)^k h \rangle|^2$ a partir del teorema 2.2. Con este propósito se reescribe la igualdad (2.35) en la forma,

$$\langle g, U(w)^k h \rangle = \lambda(w)^k \langle g_{\bar{\theta}}, Q(w)U_\theta h_\theta \rangle + \sum_{j=1}^s z_j(w)^k \langle g_{\bar{\theta}}, Q_j(w)U_\theta h_\theta \rangle + \mathcal{O}(e^{-Im\theta(1-l)T}e^{(k-1)})$$

para w tendiendo a 0, donde $0 < l < 1$ esta fijado y $w > 0$. El resultado obtenido es:

Lema 2.10 *Existe $0 < \beta < 1$ tal que,*

$$(2.58) \quad |\langle g, U(w)^k h \rangle|^2 = |\lambda(w)|^{2k} |\langle g_{\bar{\theta}}, Q(w) U_{\theta} h_{\theta} \rangle|^2 + \sum_{j=1}^s |z_j(w)|^{2k} |\langle g_{\bar{\theta}}, Q_j(w) U_{\theta} h_{\theta} \rangle|^2 + \mathcal{O}(e^{-\rho(k-1)} + \beta^k)$$

cuando w tiende a 0, donde $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{g, h, \theta}$.

Demostración: En la prueba se utiliza lo siguiente:

Si $f(x) = u(x) + \mathcal{O}(v(x))$, $x \rightarrow 0$, para $x \rightarrow 0$ se sigue que

$$\begin{aligned} ||f(x)|^2 - |u(x)|^2| &\leq |f(x) - u(x)|(|f(x)| + |u(x)|) \\ &\leq C|v(x)| (C|v(x)| + 2|u(x)|) \\ &\leq C'|v(x)| (|v(x)| + |u(x)|) \end{aligned}$$

luego si $u(x)$ y $v(x)$ son acotadas en una vecindad de $x = 0$ se obtiene la propiedad

$$(2.59) \quad |f(x)|^2 = |u(x)|^2 + \mathcal{O}(v(x)), \quad x \rightarrow 0$$

Para simplificar, denótese,

$$(2.60) \quad L = L(w) = \lambda(w)^k \langle g_{\bar{\theta}}, Q(w) U_{\theta} h_{\theta} \rangle$$

$$(2.61) \quad E = E(w) = \sum_{j=1}^s E_j, \text{ donde } E_j = E_j(w) = z_j(w)^k \langle g_{\bar{\theta}}, Q_j(w) U_{\theta} h_{\theta} \rangle$$

De la estimación $Q_j(w) = Q_j + \mathcal{O}(w)$, $w \rightarrow 0$ y

$$|\langle g_{\bar{\theta}}, Q_j(w) U_{\theta} h_{\theta} \rangle - \langle g_{\bar{\theta}}, Q_j U_{\theta} h_{\theta} \rangle| \leq \|g_{\bar{\theta}}\| \|Q_j(w) - Q_j\| \|U_{\theta} h_{\theta}\| \leq \|U_{\theta}\| \|g_{\bar{\theta}}\| \|h_{\theta}\| \|Q_j(w) - Q_j\|$$

se tiene $|\langle g_{\bar{\theta}}, Q_j(w) U_{\theta} h_{\theta} \rangle| \leq \|U_{\theta}\| \|g_{\bar{\theta}}\| \|h_{\theta}\| (\max_{1 \leq j \leq s} \|Q_j\| + 1) = F$, para w pequeño.

Por otro lado, si $\alpha = \max_{1 \leq j \leq s} |z_j|$, entonces para $0 < \alpha^* < 1 - \alpha$ existe $\delta > 0$ tal que

$$|z_j(w)| < \alpha^* + \alpha < 1, \quad |w| < \delta$$

Además, para $\eta = 1 - (\alpha^* + \alpha)$ se sigue de (2.49) que $1 - \eta < |\lambda(w)|$ si $|w| < \delta$.

Por lo tanto,

$$(2.62) \quad |z_j(w)| < |\lambda(w)|, \text{ cuando } |w| < \delta$$

luego $|E_j| \leq F|z_j(w)|^k < F(\alpha^* + \alpha)^k$. A su vez, de (2.46) se deduce al igual que antes

$$|\langle g_{\bar{\theta}}, Q(w) U_{\theta} h_{\theta} \rangle| \leq \|U_{\theta}\| \|g_{\bar{\theta}}\| \|h_{\theta}\| (\|Q\| + 1) = F'$$

De donde $|LE_j| \leq FF'(\alpha^* + \alpha)^k$.

Ahora, de las igualdades (2.60) y (2.61) se tiene

$$|L + E|^2 = |L|^2 + |E|^2 + 2Re(\bar{L}E)$$

donde,

$$|E|^2 = \sum_{j=1}^s |E_j|^2 + \sum_{i=1}^{s-1} \sum_{j \geq i+1}^s 2\operatorname{Re}(E_i \bar{E}_j)$$

Entonces las estimaciones anteriores implican,

$$\sum_{l=1}^{s-1} \sum_{j \geq l+1}^s |2\operatorname{Re}(E_l \bar{E}_j)| \leq 2F^2 \sum_{l=1}^{s-1} \sum_{j \geq l+1}^s (\alpha^* + \alpha)^{2k} = 2F^2 (\alpha^* + \alpha)^{2k} \frac{s(s-1)}{2} = F^2 s(s-1) (\alpha^* + \alpha)^{2k}$$

y $|\operatorname{Re}(\bar{L}E)| \leq FF's(\alpha^* + \alpha)^k$. Por lo tanto, haciendo $\rho = \operatorname{Im}\theta(1-l)\varrho T$, se tiene cuando w tiende a 0

$$\begin{aligned} ||\langle g, U(w)^k h \rangle|^2 - |L + E|^2| &\leq C'e^{-\rho(k-1)} (e^{-\rho(k-1)} + |L + E|) \\ &\leq C'e^{-\rho(k-1)} (e^{-\rho(k-1)} + Fs + F') \\ &\leq C'e^{-\rho(k-1)} (1 + Fs + F') \end{aligned}$$

Esto es $||\langle g, U(w)^k h \rangle|^2 - |L + E|^2| \leq C''e^{-\rho(k-1)}$ para w pequeño, con $C'' = (1 + C' + Fs + F')^2$. Entonces,

$$\begin{aligned} ||\langle g, U(w)^k h \rangle|^2 - |L|^2 - \sum_{j=1}^s |E_j|^2| &\leq C''e^{-\rho(k-1)} + 2 \sum_{l=1}^{s-1} \sum_{j \geq l+1}^s |\operatorname{Re}(E_l \bar{E}_j)| + 2|\operatorname{Re}(\bar{L}E)| \\ &\leq C''e^{-\rho(k-1)} + F^2 s(s-1)(\alpha^* + \alpha)^{2n} + 2FF's(\alpha^* + \alpha)^k \\ &= C''e^{-\rho(k-1)} + Fs(\alpha^* + \alpha)^k \{F(s-1)(\alpha^* + \alpha)^k + 2F'\} \\ &\leq C''e^{-\rho(k-1)} + \tilde{F}^2 s(s+1)(\alpha^* + \alpha)^k \\ &\leq \tilde{C}(e^{-\rho(k-1)} + (\alpha^* + \alpha)^k) \end{aligned}$$

donde $\tilde{F} = \max(F, F')$ y $\tilde{C} = \max(C'', \tilde{F}^2 s(s+1))$. O sea:

$$||\langle g, U(w)^k h \rangle|^2 - |L|^2 - \sum_{j=1}^s |E_j|^2| \leq \tilde{C}(e^{-\rho(k-1)} + (\alpha^* + \alpha)^k), \quad w \rightarrow 0$$

lo que termina la prueba. ■

2.5 Comportamiento asintótico del tiempo de vida

Sea $g, h \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Se define el tiempo total de vida (*sojourn time*) asociado a g, h , como la cantidad:

$$(2.63) \quad \tau_w(g, h) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\langle g, U(w)^k h \rangle|^2$$

El objetivo de esta sección es obtener una estimación de $\tau_w(g, h)$ en función del parámetro w cuando g y h son vectores analíticos. Para lograr esto se consideran $\tau_w^+(g, h)$ el tiempo de vida en el futuro, respectivamente $\tau_w^-(g, h)$ en el pasado, por:

$$\tau_w^\pm(g, h) = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle g, U(w)^{\pm k} h \rangle|^2$$

De la prueba del lema 2.10, se deduce

$$\begin{aligned} \left| \tau_w^+(g, h) - \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda(w)|^{2k} |\langle g_{\bar{\theta}}, Q(w)U_{\theta}h_{\theta} \rangle|^2 \right| &\leq (sF^2 + \tilde{C}) \sum_{k=1}^{\infty} \beta^k + \tilde{C} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\rho(k-1)} \\ &= \frac{\beta(sF^2 + \tilde{C})}{1 - \beta} + \frac{\tilde{C}}{1 - e^{-\rho}} \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$(2.64) \quad \tau_w^+(g, h) = \frac{|\lambda(w)|^2}{1 - |\lambda(w)|^2} |\langle g_{\bar{\theta}}, Q(w)U_{\theta}h_{\theta} \rangle|^2 + \mathcal{O}_{g,h,\theta}(1), \quad w \rightarrow 0$$

Ahora, notando que $\langle g, U(w)^{-1}h \rangle = \langle U(w)g, h \rangle = \overline{\langle g, U(w)h \rangle}$, se tiene $\tau_w^-(g, h) = \tau_w^+(g, h)$. Entonces de la igualdad $\tau_w(g, h) = |\langle g, h \rangle| + \tau_w^+(g, h)$, se deduce

$$(2.65) \quad \tau_w(g, h) = \frac{2|\lambda(w)|^2}{1 - |\lambda(w)|^2} |\langle g_{\bar{\theta}}, Q(w)U_{\theta}h_{\theta} \rangle|^2 + \mathcal{O}_{g,h,\theta}(1), \quad w \rightarrow 0$$

Del desarrollo en serie de potencias para $\lambda(w)$ en una vecindad de $w = 0$ se sigue de (2.49) y la igualdad (2.59) que en el caso de w real:

$$(2.66) \quad |\lambda(w)|^2 = 1 + b_1w + b_2w^2 + \dots + b_Nw^N + \mathcal{O}(w^{N+1}), \quad w \rightarrow 0$$

con $b_1, \dots, b_N \in \mathbb{R}$. Además cuando w tiende a cero,

$$|\langle g_{\bar{\theta}}, Q(w)U_{\theta}h_{\theta} \rangle|^2 = |\langle g_{\bar{\theta}}, QU_{\theta}h_{\theta} \rangle|^2 + \mathcal{O}_{g,h,\theta}(w)$$

Por lo tanto debe tenerse para algún $p \in \mathbb{N}$,

$$(2.67) \quad \lim_{w \rightarrow 0} w^p \tau_w(g, h) = \frac{2|\langle g_{\bar{\theta}}, QU_{\theta}h_{\theta} \rangle|^2}{C_p}$$

donde $C_p \in \mathbb{R}$. Equivalentemente:

$$(2.68) \quad \tau_w(g, h) = \frac{|\langle g_{\bar{\theta}}, QU_{\theta}h_{\theta} \rangle|^2}{w^p C_p} + \mathcal{O}_{g,h,\theta}(w^{-p}), \quad w \rightarrow 0$$

El propósito de los dos resultados que vienen a continuación es justamente encontrar los valores de p , C_p y $|\langle g_{\bar{\theta}}, QU_{\theta}h_{\theta} \rangle|^2$. Para esto se introduce algunas notaciones usadas en la subsección E.2.2 del Apéndice E:

Si $v \in \mathbb{R}$ es no nulo, o bien $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ es un vector unitario y $j^* = \max\{j : v_j \neq 0\}$, se define la sucesión (ρ_m) por:

I) $\rho_m = -(vT)^{-1}(E_0 + 2m\pi)$, si $n = 1$

II) $\rho_m = -(v_{j^*}T)^{-1}(E_0 + 2m\pi)$, si $n > 1$

Denótese $h_{j^*} = h_{j^*}(y_1, \dots, y_n) = \sum_{k=1}^n v_k y_k$ y $g_{j^*}(\cdot)$ la función

(2.69)

$$g_{j^*}(\omega) = \frac{e^{-iT v_{j^*} \omega} \overline{\varphi(y_1, \dots, y_{j^*-1}, \bar{\omega}, y_{j^*+1}, \dots, y_n)} \varphi(y_1, \dots, y_{j^*-1}, \omega, y_{j^*+1}, \dots, y_n)}{(e^{-iT h_{j^*}} e^{-iT v_{j^*} \omega} - e^{iE_0})^3}$$

Ademas, asúmase que el vector analítico φ satisface:

- (A) Si $n = 1$, φ tiene a la sucesión (ρ_m) como únicos ceros y todos son de orden uno.
- (B) Si $n > 1$, φ se anula solamente en el conjunto dado por la proposición 2.3, y para cada $y_1, \dots, y_{j^*-1}, y_{j^*+1}, \dots, y_n$ fijados, $\rho_m - v_{j^*}^{-1} h_{j^*}$ es un cero de orden uno de la función g_{j^*} en (2.70), para todo $m \in \mathbb{Z}$.

El primer resultado permite determinar el valor de p para el cual (2.67) se cumple:

Lema 2.11 *Sea $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ un vector analítico satisfaciendo las condiciones (A) o (B). Entonces las igualdades (2.67) y (2.68) son válidas con $p = 2$. La constante C_2 es dada por $C_2 = \frac{2T^2 D}{|\zeta|^2 \|\psi_0\|^3}$, donde $\psi_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$ es un autovector del operador U asociado al autovalor e^{iE_0} , y el numero D depende de la dimensión considerada,*

si $n = 1$:

$$(2.70) \quad D = \frac{\pi}{(T|v|)^3} \sum_{-\infty}^{\infty} |\varphi'(\rho_m)|^2$$

si $n > 1$:

$$(2.71) \quad D = \frac{\pi}{(T|v_{j^*}|)^3} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left| \frac{\partial}{\partial y_{j^*}} \varphi(y_1, \dots, y_{j^*-1}, \rho_m - \frac{h_{j^*}}{v_{j^*}}, y_{j^*+1}, \dots, y_n) \right|^2 dy$$

donde dy denota las variables de integración $dy_1, \dots, dy_{j^*-1}, dy_{j^*+1}, \dots, dy_n$.

Demostración: Es posible mostrar para $N = 2$ que (2.66) queda en la forma,

$$|\lambda(w)|^2 = 1 + 2\text{Re}(\lambda^{(1)} \bar{z}_0)w + [|\lambda^{(1)}|^2 + 2\text{Re}(\lambda^{(2)} \bar{z}_0)]w^2 + \mathcal{O}(w^3), \quad w \rightarrow 0$$

donde $\lambda^{(1)}$, $\lambda^{(2)}$ son dados por (2.53) y (2.54) respectivamente.

Como $\text{Re}(1 - e^{\pm iTy}) = 1 - \cos(Ty) = \frac{1}{2}|e^{\pm iTy} - 1|^2$, se tiene

$$\frac{1 + \zeta}{\zeta^2} = \frac{e^{-iT}}{(e^{-iT} - 1)^2} = \frac{2(\cos T - 1)}{|e^{-iT} - 1|^4} = \frac{-1}{|e^{-iT} - 1|^2} = \frac{-1}{|\zeta|^2}$$

y entonces $\lambda^{(1)}$ queda,

$$\lambda^{(1)} = \frac{iT}{q(z_0)|\zeta|^2}$$

con $q(z_0) = \langle \varphi_{\bar{\theta}}, (U_{0,\theta} - z_0)^{-2} U_{0,\theta} \varphi_{\theta} \rangle$ no nulo. Ahora, de la identidad (E.48) de la sección 2 del Apéndice E se sigue que $q(z_0) = (-1)\bar{z}_0\zeta$, para $\zeta = \|\psi_0\|^2$, donde

$$(2.72) \quad \psi_0(x) = \frac{e^{-iTvx} \varphi(x)}{e^{-iTvx} - z_0}$$

pertenece a $L^2(\mathbb{R}^n)$ y es el autovector asociado a z_0 . Entonces,

$$\lambda^{(1)} = \frac{-iT}{\xi \bar{z}_0 |\zeta|^2}$$

lo cual implica que $Re(\lambda^{(1)} \bar{z}_0) = 0$. Esto muestra que $p = 1$ no puede ser el valor buscado (como se aprecia al tomar $N = 1$ en (2.65)). Por otro lado, siendo $d_2 = \frac{(-iT)^2}{2} = \frac{-T^2}{2}$, $\lambda^{(2)}$ queda,

$$(2.73) \quad \lambda^{(2)} = \left[\frac{-T^2}{2} + T^2(1 + \zeta) \langle \varphi_{\bar{\theta}}, SU_{0,\theta} \varphi_{\theta} \rangle \right] \frac{z_0}{\xi |\zeta|^2}$$

Recordar que $S = (I - Q)(U_{0,\theta} - z_0)^{-1}(I - Q)$. Como:

$$\begin{aligned} (I - Q)U_{0,\theta} \varphi_{\theta} &= U_{0,\theta} \varphi_{\theta} - \frac{1}{q(z_0)} \langle \varphi_{\bar{\theta}}, (U_{0,\theta} - z_0)^{-1} U_{0,\theta} \varphi_{\theta} \rangle \Psi \\ &= U_{0,\theta} \varphi_{\theta} - \frac{1}{q(z_0)} \langle \varphi_{\bar{\theta}}, \Psi \rangle \Psi \end{aligned}$$

se tiene $(U_{0,\theta} - z_0)^{-1}(I - Q)U_{0,\theta} \varphi_{\theta} = \Psi - \frac{1}{q(z_0)} \langle \varphi_{\bar{\theta}}, \Psi \rangle (U_{0,\theta} - z_0)^{-1} \Psi$. Entonces,

$$\begin{aligned} SU_{0,\theta} \varphi_{\theta} &= \Psi - \frac{1}{q(z_0)} \langle \varphi_{\bar{\theta}}, \Psi \rangle (U_{0,\theta} - z_0)^{-1} \Psi - \left\{ \Psi - \frac{1}{q(z_0)} \langle \varphi_{\bar{\theta}}, \Psi \rangle Q(U_{0,\theta} - z_0)^{-1} \Psi \right\} \\ &= -\frac{1}{q(z_0)} \langle \varphi_{\bar{\theta}}, \Psi \rangle (U_{0,\theta} - z_0)^{-1} \Psi + \frac{1}{q(z_0)^2} \langle \varphi_{\bar{\theta}}, \Psi \rangle \langle \varphi_{\bar{\theta}}, (U_{0,\theta} - z_0)^{-2} \Psi \rangle \Psi \end{aligned}$$

y,

$$\langle \varphi_{\bar{\theta}}, SU_{0,\theta} \varphi_{\theta} \rangle = -\langle \varphi_{\bar{\theta}}, \Psi \rangle + \frac{1}{q(z_0)^2} \langle \varphi_{\bar{\theta}}, \Psi \rangle^2 \langle \varphi_{\bar{\theta}}, (U_{0,\theta} - z_0)^{-2} \Psi \rangle$$

por lo tanto,

$$(2.74) \quad \langle \varphi_{\bar{\theta}}, SU_{0,\theta} \varphi_{\theta} \rangle = \frac{1}{\zeta} + \frac{1}{\zeta^2 \bar{z}_0^2 \xi^2} \tilde{A}$$

con $\tilde{A} = \langle \varphi_{\bar{\theta}}, (U_{0,\theta} - z_0)^{-2} \Psi \rangle = \langle \varphi_{\bar{\theta}}, (U_{0,\theta} - z_0)^{-3} U_{0,\theta} \varphi_{\theta} \rangle$. De acuerdo con las identidades (E.33) y (E.52) obtenidas en la sección 2 del Apéndice E, se verifica que \tilde{A} posee las siguientes representaciones:

$$\begin{aligned} n = 1: \quad \tilde{A} &= \bar{z}_0^2 \left\{ \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{|m| \leq N} V.P. \int_{-\frac{\pi}{Tv}}^{\frac{\pi}{Tv}} \frac{(1 - e^{iTv y}) |\varphi(y + \rho_m)|^2}{|e^{-iTv y} - 1|^4} dy + \frac{\pi}{(T|v|)^3} \sum_{-\infty}^{\infty} |\varphi'(\rho_m)|^2 \right\} \\ n > 1: \quad \tilde{A} &= \bar{z}_0^2 \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{|m| \leq N} V.P. \int_{-\frac{\pi}{T|v_{j^*}|}}^{\frac{\pi}{T|v_{j^*}|}} \frac{(1 - e^{-iT v_{j^*} x}) |\varphi(y_1, \dots, y_{j^*-1}, x + \rho_m - \frac{h_{j^*}}{v_{j^*}}, y_{j^*+1}, \dots, y_n)|^2}{|e^{-iT v_{j^*} x} - 1|^4} dx dy \\ &\quad + \bar{z}_0^2 \frac{\pi}{(T|v_{j^*}|)^3} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left| \frac{\partial}{\partial y_{j^*}} \varphi(y_1, \dots, y_{j^*-1}, \rho_m - \frac{h_{j^*}}{v_{j^*}}, y_{j^*+1}, \dots, y_n) \right|^2 dy \end{aligned}$$

Observando que

$$Re \left[\int_{-\frac{\pi}{T|\nu|}}^{\frac{\pi}{T|\nu|}} \frac{(1 - e^{-iTv x}) |\varphi(x + \rho_m)|^2}{|e^{-iTv x} - 1|^4} dx \right] = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{T|\nu|}}^{\frac{\pi}{T|\nu|}} \frac{|\varphi(x + \rho_m)|^2}{|e^{-iTv x} - 1|^2} dx$$

se concluye en cualquier caso,

$$(2.75) \quad \tilde{A} = \bar{z}_0^2 (K + D)$$

donde $K \in \mathbb{C}$ cumple $Re K = \frac{1}{2}\xi$ y $D > 0$ es la identidad (2.70) o bien (2.71). Esto implica,

$$\langle \varphi_{\bar{\theta}}, SU_{0,\theta} \varphi_{\theta} \rangle = \frac{1}{\zeta} + \frac{K + D}{\zeta^2 \xi^2}$$

y reemplazando en (2.73),

$$\begin{aligned} \lambda^{(2)} &= \left[\frac{-T^2}{2} + T^2(1 + \zeta) \left(\frac{1}{\zeta} + \frac{K + D}{\zeta^2 \xi^2} \right) \right] \frac{z_0}{\xi |\zeta|^2} \\ &= \left[\frac{-T^2}{2} - T^2 \frac{(K + D)}{|\zeta|^2 \xi^2} + T^2 \frac{(1 + \zeta)}{\zeta} \right] \frac{z_0}{\xi |\zeta|^2} \end{aligned}$$

Entonces

$$\lambda^{(2)} \bar{z}_0 = \left[\frac{-T^2}{2} - T^2 \frac{(K + D)}{|\zeta|^2 \xi^2} - T^2 \frac{\zeta}{|\zeta|^2} \right] \frac{1}{\xi |\zeta|^2}$$

siendo $Re(-\zeta) = \frac{1}{2}|\zeta|^2$, se obtiene:

$$\begin{aligned} Re(\lambda^{(2)} \bar{z}_0) &= \left[\frac{-T^2}{2} - T^2 \frac{\xi}{2|\zeta|^2 \xi^2} - T^2 \frac{D}{|\zeta|^2 \xi^2} + \frac{T^2}{2} \right] \frac{1}{\xi |\zeta|^2} \\ &= \frac{-T^2}{2|\zeta|^4 \xi^2} - \frac{T^2 D}{|\zeta|^4 \xi^3} \end{aligned}$$

y como $|\lambda^{(1)}|^2 = \frac{T^2}{|\zeta|^4 \xi^2}$, se llega a

$$|\lambda^{(1)}|^2 + 2Re(\lambda^{(2)} \bar{z}_0) = -\frac{2T^2 D}{|\zeta|^4 \xi^3}$$

Luego,

$$|\lambda(w)|^2 = 1 - \frac{2T^2 D}{|\zeta|^4 \xi^3} w^2 + \mathcal{O}(w^3), \quad w \rightarrow 0$$

lo que termina la prueba. ■

El segundo resultado permite determinar completamente las igualdades (2.67) y (2.68).

Lema 2.12 *La expresión $|\langle g_{\bar{\theta}}, QU_{\theta} g_{\theta} \rangle|$ es dada por:*

$$(2.76) \quad |\langle g_{\bar{\theta}}, QU_{\theta} h_{\theta} \rangle| = \|\psi_0\|^{-2} |\langle \widetilde{\psi}_0, h \rangle| |\langle g, \psi_0 \rangle|$$

En el caso particular que $g = h = \psi_0$ queda $|\langle g_{\bar{\theta}}, QU_{\theta} g_{\theta} \rangle| = \|\psi_0\|^2$.

Demostración: Se tiene de (2.40), $QU_\theta h_\theta = \frac{1}{q(z_0)} \langle \varphi_{\bar{\theta}}, (U_{0,\theta} - z_0)^{-1} U_\theta h_\theta \rangle \Psi$. Como $(U_{0,\theta} - z_0)^{-1} U_\theta h_\theta = (U_{0,\theta} - z_0)^{-1} U_{0,\theta} h_\theta + \zeta \langle \varphi_{\bar{\theta}}, h_\theta \rangle \Psi = h_\theta + z_0 (U_{0,\theta} - z_0)^{-1} h_\theta + \zeta \langle \varphi_{\bar{\theta}}, h_\theta \rangle \Psi$ se sigue que $\langle \varphi_{\bar{\theta}}, (U_{0,\theta} - z_0)^{-1} U_\theta h_\theta \rangle = z_0 \langle \varphi_{\bar{\theta}}, (U_{0,\theta} - z_0)^{-1} h_\theta \rangle$. Entonces

$$\langle g_{\bar{\theta}}, QU_\theta h_\theta \rangle = \frac{z_0}{q(z_0)} \langle \varphi_{\bar{\theta}}, (U_{0,\theta} - z_0)^{-1} h_\theta \rangle \langle g_{\bar{\theta}}, \Psi \rangle$$

Un razonamiento similar al utilizado para obtener (E.50)-(E.52) en la sección 2 del Apéndice E implica que $\langle g_{\bar{\theta}}, \Psi \rangle = \langle g, \psi_0 \rangle$, donde ψ_0 es la función dada por (2.72). Obsérvese que

$$\widetilde{\psi}_0(x) = \frac{\varphi(x)}{e^{iTv \cdot x} - \bar{z}_0} = \Theta(x) e^{iTv \cdot x} \psi_0(x)$$

donde

$$\Theta(x) = \frac{e^{-iTv \cdot x} - z_0}{e^{iTv \cdot x} - \bar{z}_0} \text{ satisface } \lim_{x \rightarrow \rho_m} \Theta(x) = -z_0^2, \text{ para todo } m \in \mathbb{Z}$$

por lo tanto $\Theta \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. En consecuencia $\widetilde{\psi}_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$ para todo $m \geq 1$, y se cumple:

$$\langle \varphi_{\bar{\theta}}, (U_{0,\theta} - z_0)^{-1} h_\theta \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\overline{\varphi(x)} h(x)}{e^{-iTv \cdot x} - z_0} dx = \langle \widetilde{\psi}_0, h \rangle$$

con lo que se llega a (2.76). Por su parte, si $g = h = \psi_0$, se tiene

$$\langle \widetilde{\psi}_0, \psi_0 \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{-iTv \cdot x} |\varphi(x)|^2}{(e^{-iTv \cdot x} - z_0)^2} dx = -\bar{z}_0 \|\psi_0\|^2$$

lo que termina la prueba. ■

De esta manera se ha probado:

Teorema 2.3 Sean g y h vectores analíticos en $L^2(\mathbb{R}^n)$. Entonces bajo las hipótesis del lema 2.11, se tiene

$$(2.77) \quad \lim_{w \rightarrow 0} w^2 \tau_w(g, h) = \frac{|\zeta|^2 |\langle h, \widetilde{\psi}_0 \rangle|^2 |\langle g, \psi_0 \rangle|^2}{T^2 \|\psi_0\| D}$$

con D dado por las expresiones (2.70) o bien (2.71) dependiendo de la dimensión considerada.

Es inmediato de este teorema que se cumple la estimación (2.68) con $p = 2$. Sin embargo es posible mejorar esta igualdad de la siguiente forma:

Corolario 2.3 El orden de convergencia para la función $\tau_w(g, h)$ es dado por:

$$(2.78) \quad \tau_w(g, h) = \Gamma^{-1} |\zeta|^2 |\langle h, \widetilde{\psi}_0 \rangle|^2 |\langle g, \psi_0 \rangle|^2 + \mathcal{O}_{g,h,\theta}(w^{-1}), \quad w \rightarrow 0$$

donde

$$(2.79) \quad \Gamma = w^2 T^2 \|\psi_0\| D$$

Demostración: Basta considerar el caso $n = 1$. Sea

$$C_2 = \frac{2T^2 D}{|\zeta|^2 \|\psi_0\|^3}, \quad M = \frac{|\langle \widetilde{\psi}_0, h \rangle|^2}{\|\psi_0\|^4} |\langle g, \psi_0 \rangle|^2$$

y $J = C_2^{-1} M$ el valor del límite en (2.68). Se tiene

$$\begin{aligned} |w^2 \tau_w(g, h) - J| &\leq Cw^2 + |h_3(w)| \left| \frac{h_1(w)}{h_2(w)} - C_2^{-1} \right| + 4\pi^2 C_2^{-1} |h_3(w) - M| \\ &\leq Cw^2 + C_2^{-1} \left[\frac{|h_3(w)|}{|h_2(w)|} \{C_2 |h_1(w) - 1| + |h_2(w) + C_2|\} + |h_3(w) - M| \right] \end{aligned}$$

donde $h_1(w) = |\lambda(w)|^2$, $h_2(w) = (1 - h_1(w))w^{-2}$ y $h_3(w) = |\langle g_{\bar{\theta}}, Q(w)U_{\theta}h_{\theta} \rangle|^2$.

Como $h_1(w) = 1 + \mathcal{O}(w^2)$, $h_2(w) = C_2 + \mathcal{O}_{g,\theta}(w)$ y $h_3(w) = M + \mathcal{O}_{g,h,\theta}(w)$ cuando w tiende a cero, se sigue que es posible acotar $|h_3(w)|/|h_2(w)|$ para w pequeño.

Luego $|w^2 \tau_w(g, h) - J| \leq Cw^2 + \tilde{C}w \leq Const w$ si w es pequeño. De esto se obtiene (2.78). \blacksquare

En el caso particular que $g = h = \psi_0$ (véase la observación 2.4), se deduce el siguiente resultado:

Teorema 2.4 *Sea U el operador unitario definido en $L^2(\mathbb{R}^n)$ por la expresión (2.5) con $\varphi \in \mathcal{D}_a$. Asíumase que este operador posee un único autovalor $z_0 = e^{iE_0}$ con $\psi_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$ un vector propio asociado a z_0 . Sea la perturbación unitaria $U(w)$ de U dada en (2.7). Entonces si φ verifica las hipótesis del lema 2.11, el respectivo tiempo de vida $\tau_w(\psi_0)$ posee el comportamiento*

$$(2.80) \quad \lim_{w \rightarrow 0} w^2 \tau_w(\psi_0) = \frac{|\zeta|^2 \|\psi_0\|^7}{T^2 D}$$

con D igual a (2.70) o bien (2.71) dependiendo de la dimensión considerada. Equivalentemente

$$(2.81) \quad \tau_w(\psi_0) = \frac{|\zeta|^2 \|\psi_0\|^8}{\Gamma} + \mathcal{O}_{g,h,\theta}(w^{-1}), \quad w \rightarrow 0$$

para Γ en (2.79).

Apéndice A

Resolvente generalizada de un operador en $L^2(\mathbb{R}^+)$ con potencial singular

En este apéndice se estudia el operador resolvente $R_l(z)$ asociado al operador $H_l = -\frac{d^2}{dr^2} + V(r) + \frac{l(l+1)}{r^2}$ en $L^2(\mathbb{R}^+)$. El objetivo principal es conseguir una expresión más o menos explícita para $R_l(\lambda) = (H_l - \lambda - i0)^{-1}$ la resolvente generalizada de H_l (sección 3). Para esto se comienza por investigar las soluciones de la ecuación $-h'' + V(r)h + \frac{l(l+1)}{r^2}h = k^2h$, con $r > 0$ y $k \in \mathbb{C}$ desde el punto de vista de su comportamiento asintótico en vecindades de $r = 0$ y $r = \infty$ (sección 2). Concretamente se muestra la existencia de un par de soluciones $h_1(k, r), h_2(k, r)$ linealmente independientes tales que $h_1(k, r)$ es aproximadamente igual a r^{l+1} si $r \rightarrow 0$ y $h_2(k, r)$ es aproximadamente igual a e^{ikr} para $r \rightarrow \infty$, esto en el caso que el potencial V es de soporte compacto (teoremas A.2, A.4). El vector $R_l(\lambda)f$ se logra expresar en términos de las funciones $h_1(k, r)$ y $h_2(k, r)$ cuando $f \in L^2(\mathbb{R}^+)$ tiene soporte compacto. En particular se considera $f = \chi_{[0, R_1]}\psi$ con $R_1 > 0$ tal que $\text{sup}(V) \subseteq [0, R_1]$ y $\psi \in L^2_{loc}[0, \infty)$ es una solución saliente asociada a la resonancia k_0 , para $\text{Im}k_0^2 < 0$ con un comportamiento en el infinito similar al de la función $h_2(k_0, r)$. De esta manera se llega a una identidad para $\langle f, R_l(\lambda)f \rangle$ que es fundamental en el estudio realizado en el capítulo 1.

A.1 Existencia de soluciones – soluciones débiles

En esta parte se comentan algunas propiedades de las soluciones de la ecuación:

$$(A.1) \quad -\varphi'' + V(x)\varphi = z\varphi + f \quad x \geq 0, \quad z \in \mathbb{C}$$

donde V y f pertenecen a $L^1_{loc}([0, \infty))$. Por solución *clásica* de (A.1) se entiende una función φ con la propiedad que φ, φ' son localmente absolutamente continuas en $[0, \infty)$ y φ'' satisface la igualdad (A.1) c.t.p. en $[0, \infty)$. Notar que en tal caso $\varphi \in C^1([0, \infty))$

y $\varphi'' \in L^1_{loc}([0, \infty))$, de donde $\varphi \in \mathcal{H}^1_{loc}([0, \infty))$.

Una solución débil de la ecuación (A.1) es una función $\varphi \in L^2_{loc}([0, \infty))$ satisfaciendo:

$$(A.2) \quad - \int_0^\infty \varphi \theta'' + \int_0^\infty V \varphi \theta = z \int_0^\infty \varphi \theta + \int_0^\infty f \theta$$

para todo $\theta \in C_0^\infty(0, \infty)$. La relación entre estos dos tipos de solución es dada por:

Teorema A.1 Sea $V \in L^\infty_{loc}([0, \infty))$ y $f \in L^2_{loc}([0, \infty))$.

Entonces φ es solución clásica de (A.1) si y solo si φ es solución débil de (A.1).

Observación A.1 Es inmediato que para $V \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+)$ toda solución φ de (A.1) pertenece a $\mathcal{H}^1_{loc}(\mathbb{R}^+)$.

A.2 Comportamiento asintótico de las soluciones

Sea la ecuación,

$$(A.3) \quad -\varphi'' + V(r)\varphi + \frac{l(l+1)}{r^2}\varphi = z\varphi, \quad r > 0$$

donde $z \in \mathbb{C}$ y $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Los resultados siguientes dan estimaciones para el comportamiento asintótico de las soluciones de esta ecuación. Para la demostración véase [28].

Teorema A.2 Suponer que $V \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+)$ es no singular en el sentido que

$$(A.4) \quad \int_0^1 r|V(r)|dr < \infty$$

Entonces son válidas:

(I) Para $l = 0$ la ecuación (A.3) tiene dos soluciones linealmente independientes $f_1(z, \cdot)$ y $f_2(z, \cdot)$ tales que $f_1(z, r) \sim r$ y $f_2(z, r) \sim 1$ cuando $r \rightarrow 0$. Además estas funciones dependen analíticamente de z en todo \mathbb{C} .

(II) Para $l > 0$ la ecuación (A.3) tiene dos soluciones linealmente independientes $f_1(z, \cdot)$ y $f_2(z, \cdot)$ tales que $f_1(z, r) \sim r^{l+1}$ y $f_2(z, r) \sim r^{-l}$ cuando $r \rightarrow 0$, y estas funciones dependen analíticamente de z en todo \mathbb{C} .

Observación A.2 Es posible mostrar que para $f(z, \cdot) = f_j(z, \cdot)$, $j = 1, 2$, se cumple $f(z, r) = \lim_{w \rightarrow z} f(w, r)$ uniformemente en compactos de \mathbb{R}^+ . Por ejemplo

$$(A.5) \quad f(\lambda, r) = \lim_{\delta \rightarrow 0} f(\lambda + i\delta, r)$$

uniformemente en $\lambda \in [a, b]$. Notar también que en el caso $z = \lambda \in \mathbb{R}$, $f(\lambda, r)$ es una solución real de (A.3). Además, se verifica

$$(A.6) \quad f_1'(z, r) \sim (l+1)r^l, \quad r \rightarrow 0$$

$$(A.7) \quad f_2'(z, r) = r^{-(l+1)}(-1 + O(1)), \quad r \rightarrow 0$$

Teorema A.3 *Supóngase que para algún $c \geq 0$ se tiene $V(r) = V_1(r) + V_2(r)$ donde V_1 es absolutamente continua en (c, ∞) y $V_2 \in L^1(c, \infty)$. Sean V_{min}, V_{max} constantes tales que $V_{min} \leq 0, V_{max} \geq 0$ y $V_{min} \leq V_1(r) \leq V_{max}$ para $r \in (c, \infty)$. Entonces es posible encontrar soluciones $f(z, r)$ de (A.3) con las siguientes propiedades:*

1. $f(z, r)$ es definida para cada $z \in \mathcal{R}$ donde $\mathcal{R} = \mathbb{C} \setminus [V_{min}, \infty)$. Mas aún, para $r > 0$ fijo $f(z, r)$ es una función analítica de z con $z \in \mathcal{R}$. Cuando $r \rightarrow \infty$, $f(z, r)$ tiene el comportamiento asintótico

$$(A.8) \quad f(z, r) \sim \exp\left\{i \int_c^r (z - V_1(t))^{1/2} dt\right\}$$

Aca, para $w \in \mathbb{C}$ la raíz $w^{1/2}$ es definida por $(re^{i\theta})^{1/2} = r^{1/2}e^{i\theta/2}$ con $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

2. Sea $z = \lambda + i\delta$ con $\lambda > V_{max}$ y $\delta > 0$. Para todo $r > 0$ se tiene que el límite

$$(A.9) \quad f(\lambda, r) = \lim_{\delta \rightarrow 0} f(z, r)$$

existe y es solución de (A.3) con $z = \lambda$. Además se tiene el comportamiento asintótico para $r \rightarrow \infty$

$$(A.10) \quad f(\lambda, r) \sim \exp\left\{i \int_c^r (\lambda - V_1(t))^{1/2} dt\right\}$$

A.3 Solución saliente y resolvente generalizada

En relación a la ecuación (A.3) el caso que interesa es cuando la función V pertenece a $L^\infty([0, \infty))$ y es de *soporte compacto*. En tal caso se escribe $V(r) = V_1(r) + V_2(r)$ con $V_1(r) = 0$ y $V_2(r) = V(r)$ y $c = V_{max} = V_{min} = 0$ en el teorema A.3, de donde la expresión (A.8) queda

$$(A.11) \quad f(z, r) \sim \exp(\sqrt{z}ir), \quad r \rightarrow \infty$$

Entonces de acuerdo a los resultados de la sección anterior existen $\theta_1(\kappa, \cdot), \theta_2(\kappa, \cdot)$ soluciones linealmente independientes de la ecuación

$$(A.12) \quad -\theta'' + V(r)\theta + \frac{l(l+1)}{r^2}\theta = \kappa\theta, \quad r > 0$$

donde $\kappa \in \mathbb{C}$, $\kappa = k^2 = \lambda + i\delta$, con $\lambda > 0$, $\delta \geq 0$ y $l \in \mathbb{N}$, satisfaciendo las propiedades:

(A) $\theta_1(\kappa, \cdot), \theta_2(\kappa, \cdot)$ son analíticas en la región $Im\kappa > 0$ y continuas en la región $Im\kappa \geq 0$ en el sentido que

$$\theta_j(\lambda, r) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \theta_j(\lambda + i\delta, r), \quad j = 1, 2.$$

para todo $r > 0$, con $\theta_1(\lambda, \cdot)$ real y $\theta_2(\lambda, \cdot)$ compleja.

(B) $\theta_1(\kappa, \cdot) \sim r^{l+1}$, $r \rightarrow 0$ y $\theta_2(\kappa, \cdot) \sim \exp(\sqrt{\kappa}ir)$, $r \rightarrow \infty$ donde $Im\sqrt{\kappa} > 0$ para $Im\kappa > 0$.

Sea $f \in L^2(\mathbb{R}^+)$ de soporte compacto y sea la ecuación no homogénea en f :

$$(A.13) \quad -\varphi'' + V(r)\varphi + \frac{l(l+1)}{r^2}\varphi = \kappa\varphi + f$$

Por medio de variación de parámetros se tiene para $\eta > 0$ fijo, que

$$\tilde{\theta}(\kappa, r) = \left(c_1 + \frac{1}{W_0} \int_{\eta}^r \theta_2(\kappa, y)f(y)dy \right) \theta_1(\kappa, r) + \left(c_2 - \frac{1}{W_0} \int_{\eta}^r \theta_1(\kappa, y)f(y)dy \right) \theta_2(\kappa, r)$$

es una solución de (A.13) en el intervalo $[\eta, \infty)$, donde $W_0 = Wrons(\theta_1(\kappa, \cdot), \theta_2(\kappa, \cdot))(\eta)$ es constante y $d_1, d_2 \in \mathbb{C}$. Sea $\rho > 0$ tal que $sop(f) \subseteq [0, \rho]$. Entonces escogiendo

$$c_1 = -\frac{1}{W_0} \int_{\eta}^{\infty} \theta_1(\kappa, y)f(y)dy, \quad c_2 = 0$$

se obtiene,

$$(A.14) \quad \tilde{\theta}(\kappa, r) = -\frac{1}{W_0}\theta_1(\kappa, r) \int_r^{\infty} \theta_2(\kappa, y)f(y)dy - \frac{1}{W_0}\theta_2(\kappa, r) \int_{\eta}^r \theta_1(\kappa, y)f(y)dy$$

Para $r > \rho$ queda,

$$(A.15) \quad \tilde{\theta}(\kappa, r) = -\frac{1}{W_0}\theta_2(\kappa, r) \int_{\eta}^{\rho} \theta_1(\kappa, y)f(y)dy$$

lo cual implica que $\tilde{\theta}(\kappa, \cdot) \in L^2[\eta, \infty)$. Por otro lado $|\theta_1(\kappa, r)| \leq C r^{l+1}$ con $r \in (0, \eta_0)$ si η_0 es pequeño. Luego $\theta_1(\kappa, \cdot)f \in L^1(0, \eta_0)$, de donde puede tomarse $\eta = 0$ en (A.14) y concluir que $\tilde{\theta}(\kappa, \cdot)$ es solución de (A.13) en todo \mathbb{R}^+ . Además,

Lema A.1 La función $\tilde{\theta}(\kappa, \cdot)$ pertenece a $L^2(0, \eta_0)$

Demostración: Sea $\vartheta_2(\kappa, \cdot)$ una solución de (A.3) dada en el Teorema A.2 satisfaciendo $\vartheta_2(\kappa, \cdot) \sim r^{-l}$ para $r \rightarrow 0$. Entonces existen $A_1, A_2 \in \mathbb{C}$ tal que en el intervalo $(0, \eta_0)$ vale $\theta_2(\kappa, \cdot) = A_1\theta_1(\kappa, \cdot) + A_2\vartheta_2(\kappa, \cdot)$, de donde $|\theta_2(\kappa, r)| \leq C(r^{l+1} + r^{-l})$. Se tiene,

$$\begin{aligned} |\theta_2(\kappa, r)| \int_0^r |\theta_1(\kappa, y)||f(y)|dy &\leq C(r^{l+1} + r^{-l}) \int_0^r |\theta_1(\kappa, y)||f(y)|dy \\ &\leq C(r^{2(l+1)} + r)r^{1/2}\|f\|_{L^2} \end{aligned}$$

Por su parte, despues de algunos cálculos,

$$\begin{aligned}
|\theta_1(\kappa, r)| \int_r^\infty |\theta_2(\kappa, y)| |f(y)| dy &\leq C r^{l+1} (\eta_0^{l+1} + r^{-l}) \eta_0^{1/2} \|f\|_{L^2} + C r^{l+1} L \\
&= C r (1 + r^l \eta_0^{l+1}) \eta_0^{1/2} \|f\|_{L^2} + C r^{l+1} L \\
&= C [r (1 + r^l \eta_0^{l+1}) \eta_0^{1/2} \|f\|_{L^2} + r^{l+1} L]
\end{aligned}$$

para $r \in (0, \eta_0)$, lo que termina la prueba. ■

De lo anterior y (A.15) se deduce que $\tilde{\theta}(\kappa, \cdot) \in L^2(\mathbb{R}^+)$. Por otro lado La ecuación (A.13) posee una única solución $\theta(\kappa, \cdot) = (H_l - \kappa)^{-1} f \in L^2(\mathbb{R}^+)$ donde

$$H_l = -\frac{d^2}{dr^2} + V(r) + \frac{l(l+1)}{r^2}$$

Luego por unicidad debe tenerse que

$$(A.16) \quad \theta(\kappa, r) = -\frac{1}{W_0} \theta_1(\kappa, r) \int_r^\infty \theta_2(\kappa, y) f(y) dy - \frac{1}{W_0} \theta_2(\kappa, r) \int_0^r \theta_1(\kappa, y) f(y) dy$$

Notar que una consecuencia inmediata de la propiedad (B) es $\theta(\kappa, 0) = 0$. En particular para $\delta = 0$ se cumple que $\theta(\lambda, \cdot)$ es acotada en una vecindad de cero, Ademas claramente $\theta(\lambda, \cdot) \in L^\infty[\eta, \infty)$. Así $\theta(\lambda, \cdot) \in L^\infty(\mathbb{R}^+)$ es dada por,

$$(A.17) \quad \theta(\lambda, r) = \frac{1}{\Upsilon} \theta_1(\lambda, r) \int_r^\infty \theta_2(\lambda, y) f(y) dy + \frac{1}{\Upsilon} \theta_2(\lambda, r) \int_0^r \theta_1(\lambda, y) f(y) dy$$

con $\Upsilon = -W_0$.

Lema A.2 Para todo $r > 0$ es válido,

$$(A.18) \quad \theta(\lambda, r) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \theta(\lambda + i\delta, r)$$

Demostración: Sean $\delta_0 > 0$ y $\eta_0 > 0$ pequeño, se tiene $|\theta_1(\lambda + i\delta, y)| |f(y)| \leq C y^{l+1} |f(y)|$ si $0 \leq y \leq \eta_0$, uniformemente en $|\delta| \leq \delta_0$. Entonces de los teoremas A.2, A.4 y el teorema de la convergencia dominada se sigue

$$\int_0^r \theta_1(\lambda + i\delta, y) f(y) dy \rightarrow \int_0^r \theta_1(\lambda, y) f(y) dy$$

cuando $\delta \rightarrow 0$ para $0 < r < \eta_0$. En el caso que $r \in [\eta_0, \rho]$ se sigue por (A.5), $M = \sup_{0 < \delta \leq \delta_0} \sup_{\eta_0 \leq y \leq \rho} |\theta_1(\lambda + i\delta, y)| < \infty$, de donde $|\theta_1(\lambda + i\delta, y)| |f(y)| \leq M |f(y)|$ si $0 < \delta \leq \delta_0$. Nuevamente el teorema de la convergencia dominada y los teoremas A.2 y A.4 implican que:

$$\int_{\eta_0}^r \theta_1(\lambda + i\delta, y) f(y) dy \rightarrow \int_{\eta_0}^r \theta_1(\lambda, y) f(y) dy$$

si $\delta \rightarrow 0$. Finalmente (A.9) sigue de los teoremas A.2, A.4 y la igualdad (A.16) para $\theta(\lambda + i\delta, \cdot)$ (pues notar que si $r > \rho$ vale

$$\theta(\lambda + i\delta, r) = \frac{1}{\Upsilon} \theta_2(\lambda + i\delta, r) \int_0^\rho \theta_1(\lambda + i\delta, y) f(y) dy$$

■

Consecuencia del Lema A.3 es que la *resolvente generalizada* del operador H_l :

$$(A.19) \quad (H_l - \lambda - i0)^{-1} f = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} (H_l - \lambda - i\delta)^{-1} f$$

existe y es dada por (A.18).

A continuación se considera una función f en particular. Concretamente $f = \chi_{[0, R_1]} \psi$, donde $\psi \in L^2_{loc}([0, \infty))$ es solución de

$$(A.20) \quad -\psi'' + \frac{l(l+1)}{r^2} \psi + V(r)\psi = (\lambda_0 - i\epsilon)\psi, \quad r > 0$$

ψ es denominada *solución saliente*, con $R_1 > R$ donde R cumple $\text{sop}(V) \subseteq [0, R]$. Siendo $f \in L^2(\mathbb{R}^+)$ se sigue por el teorema A.2 que $f(r) \sim r^{l+1}$ para r cerca de cero. La siguiente identidad es útil [4, 23]:

$$(A.21) \quad \int_a^b u_1(y) u_2(y) dy = \frac{1}{z_2 - z_1} W(u_2, u_1)|_a^b, \quad \text{si } -u_j'' + V(r)u_j = z_j u_j, \quad j = 1, 2$$

se tiene entonces

$$\int_r^{R_1} \theta_2(\lambda, y) f(y) dy = \frac{W(f, \theta_2(\lambda, \cdot))|_r^{R_1}}{\lambda_0 - i\epsilon - \lambda}, \quad \int_0^r \theta_1(\lambda, y) f(y) dy = \frac{W(f, \theta_1(\lambda, \cdot))|_0^r}{\lambda_0 - i\epsilon - \lambda}$$

La observación A.2 implica que $W(f, \theta_1(\lambda, \cdot))(0) = \lim_{r \rightarrow 0} W(f, \theta_1(\lambda, \cdot))(r) = 0$. Entonces (A.17) queda,

$$\theta(\lambda, r) = \frac{1}{\Upsilon(\lambda_0 - i\epsilon - \lambda)} \theta_2(\lambda, r) W(f, \theta_1(\lambda, \cdot))(r) + \frac{1}{\Upsilon(\lambda_0 - i\epsilon - \lambda)} \theta_1(\lambda, r) W(f, \theta_2(\lambda, \cdot))|_r^{R_1}$$

Como $\theta_2(\lambda, r) W(f, \theta_1(\lambda, \cdot))(r) - \theta_1(\lambda, r) W(f, \theta_2(\lambda, \cdot))(r) = f(r) \Upsilon$, se tiene que

$$\theta(\lambda, r) = \frac{1}{\lambda_0 - i\epsilon - \lambda} \left[f(r) + \frac{1}{\Upsilon} \theta_1(\lambda, r) W(f, \theta_2(\lambda, \cdot))(R_1) \right]$$

Entonces

$$\int_0^{R_1} \overline{f(y)} \theta(\lambda, y) dy = \frac{1}{\lambda_0 - i\epsilon - \lambda} \int_0^{R_1} |f(y)|^2 dy + \frac{W(f, \theta_2(\lambda, \cdot))(R_1)}{\Upsilon(\lambda_0 - i\epsilon - \lambda)} \int_0^{R_1} \overline{f(y)} \theta_1(\lambda, y) dy$$

Siendo

$$\int_0^{R_1} \overline{f(y)} \theta_2(\lambda, y) dy = \frac{1}{\lambda - (\lambda_0 + i\epsilon)} W(\theta_1(\lambda, \cdot), \bar{f})|_0^{R_1}$$

y $W(\bar{f}, \theta_1(\lambda, \cdot))(0) = \lim_{r \rightarrow 0} W(\bar{f}, \theta_1(\lambda, \cdot))(r) = 0$, se obtiene finalmente,

$$(A.22) \quad \int_0^{R_1} \overline{f(y)} \theta(\lambda, y) dy = \frac{\|f\|_{L^2}^2}{\lambda_0 - i\epsilon - \lambda} + \frac{W(f, \theta_2(\lambda, \cdot))(R_1) W(\bar{f}, \theta_1(\lambda, \cdot))(R_1)}{\Upsilon |\lambda_0 - i\epsilon - \lambda|^2}$$

Apéndice B

Soluciones linealmente independientes para la ecuación de autovalores

Este apéndice tiene como finalidad un análisis de las soluciones de la ecuación $-h'' + \frac{l(l+1)}{r^2}h = k^2h$, $r > 0$, donde $k \in \mathbb{C}$. Se obtiene aquí, de forma explícita, un par de soluciones $h_1(k, r), h_2(k, r)$ linealmente independientes de esta ecuación por una aplicación del método de serie de potencias. Además se verifica que estas soluciones dependen analíticamente de k para todo $r > 0$ fijo (sin embargo esta dependencia desaparece al calcular el respectivo wronskiano). Las soluciones así obtenidas están bastante relacionadas con las funciones de Bessel de orden $l + 1/2$, por lo que además en este apéndice se mencionan las propiedades más relevantes para este trabajo que poseen tales funciones.

En esta parte se realiza un estudio de la ecuación:

$$(B.1) \quad -\psi'' + \frac{l(l+1)}{r^2}\psi = k^2\psi$$

donde $k \in \mathbb{C}$, $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, y $r > 0$. El cambio de variables $z = kr$ y $w(z) = \psi(\frac{z}{k})$ transforma esta ecuación en,

$$(B.2) \quad w'' + w - \frac{l(l+1)}{z^2}w = 0$$

Obsérvese que para la función $v(z)$ dada por

$$(B.3) \quad v(z) = e^{-iz}w(z)$$

se tiene

$$w'' + w - \frac{l(l+1)}{z^2}w = e^{-iz} \left(v'' + 2iv' - \frac{l(l+1)}{z^2}v \right)$$

Entonces $w(z)$ solución de (B.2) es equivalente a $v(z)$ solución de

$$(B.4) \quad v'' + 2iv' - \frac{l(l+1)}{z^2}v = 0$$

La ecuación (B.2) como la ecuación (B.4) se pueden resolver usando el método de serie de potencias. Para la ecuación (B.4) el punto $z = 0$ es un punto singular regular y de acuerdo con el método de Frobenius su ecuación indicial es

$$\lambda^2 + (p_0 - \lambda) + q_0 = 0$$

donde $p_0 = \lim_{z \rightarrow 0} z(2i) = 0$, $q_0 = \lim_{z \rightarrow 0} z^2 \frac{(-l)(l+1)}{z^2} = -l(l+1)$, luego se obtiene el polinomio $\lambda^2 - \lambda - l(l+1) = 0$, que tiene por raíces $\lambda_1 = l+1$, $\lambda_2 = -l$. Se busca una solución del tipo

$$v(z) = z^{l+1} \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

Se tiene,

$$v' = z^l \sum_{n=0}^{\infty} (n+l+1)c_n z^n, \quad v'' = z^l \sum_{n=0}^{\infty} (n+l+1)(n+l)c_n z^{n-1}$$

multiplicando (B.4) por z^2 y reemplazando $v(z)$ queda,

$$z^l \left(\sum_{k=0}^{\infty} k(k+2l+1)c_k z^{k+1} + \sum_{k=1}^{\infty} 2i(k+l)c_{k-1} z^{k+1} \right) = 0$$

Se sigue que c_0 es arbitrario y cumple la relación $c_k k(k+2l+1) + c_{k-1} 2i(k+l) = 0$, $k \geq 1$, de donde

$$c_k = \frac{(-2i)^k (l+1)(l+2) \dots (l+k)}{k!(2l+2)(2l+3) \dots (2l+k+1)} c_0$$

Así

$$(B.5) \quad v_1(z) = c_0 z^{l+1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-2i)^k (l+1)(l+2) \dots (l+k)}{k!(2l+2)(2l+3) \dots (2l+k+1)} z^k$$

De acuerdo con el método de Frobenius, las raíces λ_1 y λ_2 verifican $\lambda_1 - \lambda_2 = 2l+1 \in \mathbb{N}$. Esto implicaría que la función v_2 de la forma

$$v_2(z) = z^{-l} \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

no necesariamente es una solución de (B.4) linealmente independiente con v_1 . Sin embargo reemplazando v_2 en la ecuación (B.4) se tiene,

$$v' = z^{-l} \sum_{n=0}^{\infty} (n-l)c_n z^{n-1}, \quad v'' = z^{-l} \sum_{n=0}^{\infty} (n-l)(n-l-1)c_n z^{n-2}$$

de donde nuevamente c_0 es arbitrario y vale:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k(k-2l-1)c_k + 2i(k-l-1)c_{k-1})z^k = 0$$

de esto queda la relación $k(k-2l-1)c_k + 2i(k-l-1)c_{k-1} = 0$, $k \geq 1$. Lo anterior muestra que $c_k = 0$ para $k = l+1 \dots 2l$. Además esta igualdad se anula si $k = 2l+1$ con c_{2l+1} arbitrario. En tal caso v_2 es una segunda solución linealmente independiente de (B.43) (véase [8]) dada por,

$$v_2(z) = z^{-l} \sum_0^l c_k z^k + z^{-l} \sum_{2l+1}^{\infty} c_k z^k$$

donde c_k es ahora:

$$(B.6) \quad c_k = \frac{(-2i)^k l(l-1)(l-2) \dots (l-k+1)}{k! 2l(2l-1) \dots (2l-k+1)} d$$

con $d = c_0$ para $k = 1, \dots, l$ y $d = c_{2l+1}$ para $k > 2l+1$. En particular, si $c_{2l+1} = 0$

$$(B.7) \quad v_2(z) = \sum_{k=0}^l c_k z^{k-l}$$

es una solución de (B.4) en todo $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ y es analítica en este conjunto.

Haciendo $c_0 = c_l^{-1} = \frac{2l(2l-1) \dots (l+2)(l+1)}{(-2i)^l}$ se sigue de (B.6),

$$c_k = \frac{l(l-1)(l-2) \dots (l-(k-1))}{k! (-2i)^{l-k}} (2l-k)(2l-(k+1)) \dots (l+2)(l+1)$$

y se puede mostrar que $c_k = d_{l-k}$, con

$$d_j = \frac{(l+j)(l+j-1) \dots (l+2)(l+1)l(l-1) \dots (l-(j-1))}{j! (-2i)^j}$$

Así la otra solución linealmente independiente de (B.4) se escribe como:

$$(B.8) \quad v_2(z) = \sum_{j=0}^l \frac{(l+j)(l+j-1) \dots (l-j+1)}{j! (-2iz)^j}$$

De la igualdad (B.3) se establece que un par de soluciones linealmente independientes de la ecuación (B.2) son dadas por

$$(B.9) \quad w_1(z) = e^{iz} v_1(z) \quad , \quad w_2(z) = e^{iz} v_2(z)$$

Sin embargo conviene resolver directamente (B.2) empleando el método anterior. Esto es, se buscan soluciones del tipo,

$$a) \quad w_1(z) = z^{l+1} \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \quad b) \quad w_2(z) = z^{-l} \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n$$

Reemplazando $w_1(z)$ de α en la ecuación (B.2) queda,

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n+2l+1)c_n z^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{n+1} = 0$$

Para $j = n + 2$ se tiene $j - 1 = n + 1$, luego

$$\sum_{j=0}^{\infty} j(j+2l+1)c_j z^{j-1} + \sum_{j=2}^{\infty} c_{j-2} z^{j-1} = 0$$

de donde c_0 es arbitrario, $c_1 = 0$ y vale la relación $j(j+2l+1)c_j + c_{j-2} = 0$, $j = 2, 3, \dots$ Luego $c_j = 0$ con j impar y se sigue

$$(*) \quad c_{2j} = \frac{(-1)^j(2l+1)}{2^j j!(2l+1)(2l+3)(2l+5)\dots(2l+2j+1)} c_0 = \tilde{c}_j c_0, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

con $\tilde{c}_0 = 1$. Entonces

$$w_1(z) = c_0 \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{c}_j z^{l+2j+1}$$

Escogiendo $c_0 = \frac{l!}{(2l)!(2l+1)}$, se tiene $c_{2j} = \frac{(-1)^j(l+j)!}{j!(2l+2j+1)!}$. Por lo tanto

$$(B.10) \quad w_1(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j(l+j)!}{j!(2l+2j+1)!} z^{l+2j+1}$$

Recordando que la función Gamma Γ satisface $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$ para todo $p \in \mathbb{R}$, $p > -1$, se tiene

$$\Gamma(l+1/2+j+1) = \frac{1}{2^j} \Gamma(l+1/2+1)(2l+3)(2l+5)\dots(2l+2j+1)$$

de donde $2^j \Gamma(l+1/2+j+1) = \Gamma(l+1/2+1)(2l+3)(2l+5)\dots(2l+2j+1)$. Entonces la expresión (*) puede escribirse como

$$(B.11) \quad c_{2j} = \frac{(-1)^j \Gamma(l+1/2+1)}{j! 2^{2j} \Gamma(l+1/2+j+1)} c_0$$

Tomando $c_0 = (2^{l+1} \Gamma(l+1/2+1))^{-1}$ como segundo valor se llega a una solución $\tilde{w}_1(z)$

$$\tilde{w}_1(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{l+1} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j! \Gamma(l+1/2+j+1)} (z/2)^{2j} = \left(\frac{z}{2}\right)^{1/2} \left(\frac{z}{2}\right)^{l+1/2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j (z/2)^{2j}}{j! \Gamma(l+1/2+j+1)}$$

que puede ser escrita como

$$(B.12) \quad \tilde{w}_1(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{1/2} J_{l+1/2}(z)$$

donde $z^{1/2}$ se elige tal que $\text{Im}z^{1/2} \geq 0$ si $\text{Im}z \geq 0$, mas precisamente $\pi < \arg z \leq \pi$, y

$$J_{l+1/2}(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{l+1/2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j! \Gamma(l+1/2+j+1)} (z/2)^{2j}$$

se conoce como la *función de Bessel de primera clase de orden $l + 1/2$* . $J_{l+1/2}(z)$ es una solución de la *ecuación de Bessel de orden $l + 1/2$* :

$$(B.13) \quad h'' + \frac{1}{z}h' + \left(1 - \frac{(l+1/2)^2}{z^2}\right)h = 0$$

El radio de convergencia de la serie de potencias que define a la función de Bessel es infinito. Luego $J_{l+1/2}(z)$ es una función analítica en todo \mathbb{C} . Una segunda solución de (B.13) es dada por $J_{-(l+1/2)}(z)$, que no es analítica en $z = 0$, más si lo es en $z = \infty$, lo cual muestra que $J_{l+1/2}(z)$ y $J_{-(l+1/2)}(z)$ son linealmente independientes [41].

Es inmediato que por las elecciones hechas de c_0 se tiene

$$(B.14) \quad w_1(z) = \left(\frac{2^{l+1}(l+1)!\Gamma(l+1/2+1)}{(2l+2)!}\right) \tilde{w}_1(z)$$

Por otro lado, $w_2(z)$ en **b)** es solución de (B.2) si después de un cálculo se verifica

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-2l-1)d_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^{n+2} = 0$$

luego d_0 es arbitrario, $d_1 = 0$ y vale la relación $k(k-2l-1)d_k + d_{k-2} = 0$, $k \geq 2$. De esto se deduce que $d_{2k+1} = 0$ para $k = 0, 1, \dots, l-1$ mas d_{2l+1} es arbitrario. Entonces,

$$d_{2k} = \frac{(-1)^k}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2k)(1-2l)(3-2l) \dots (2j-2l-1)} d_0, \quad k = 1, 2, \dots$$

$$d_{2l+2k+1} = \frac{(-1)^k}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2j)(2l+3)(2l+5) \dots (2l+2k+1)} d_{2l+1}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Repitiendo el mismo análisis que llevó a (B.10) se obtiene $d_{2k} = \frac{(-1)^k \Gamma(-l-1/2+1)}{k! 2^{2k} \Gamma(-l-1/2+k+1)} d_0$, $d_{2l+2k+1} = \frac{(-1)^k \Gamma(l+1/2+1)}{k! 2^{2k} \Gamma(l+1/2+k+1)} d_{2l+1}$. Haciendo nuevamente, $d_0 = (2^l \Gamma(-l-1/2+1))^{-1}$, $d_{2l+1} = (2^{l+1} \Gamma(l+1/2+1))^{-1} \beta$, y observando que $\sum_0^{\infty} d_{2k} z^{2k}$ y $\sum_0^{\infty} d_{2l+2k+1} z^{2l+2k+1}$ convergen en todo \mathbb{C} se llega a

$$w_2(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{1/2} J_{-(l+1/2)}(z) + \beta \tilde{w}_1(z)$$

Notar que $w_1(z), w_2(z)$ son linealmente independientes. En particular para $\beta = 0$. Así $w_2(z)$ es dada por

$$(B.15) \quad w_2(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{1/2} J_{-(l+1/2)}(z)$$

Denótese $w_*(z) = e^{iz} v_1(z)$, $w_{**}(z) = e^{iz} v_2(z)$, con $v_1(z), v_2(z)$ dados por (B.5) y (B.7). Existen $C_1, C_2 \in \mathbb{C}$ tal que $w_*(z) = C_1 w_1(z) + C_2 w_2(z)$. Siendo $w_*(z)$ y $w_1(z)$ analíticas en $z = 0$ se tiene $C_2 = 0$. También existen $D_1, D_2 \in \mathbb{C}$ tales que $w_{**}(z) = D_1 w_1(z) + D_2 w_2(z)$. Nótese que aca D_1 no es necesariamente cero (véase un ejemplo mas adelante).

Luego $w_1(z)$, $w_{**}(z)$ son linealmente independientes y su wronskiano (que por lo tanto es no nulo) puede ser calculado explícitamente:

$$w_1'(z) = \sum_{j=0}^{\infty} (l+2j+1)A_j z^{l+2j} \quad \text{con } A_j = \frac{(-1)^j (l+j)!}{j!(2l+2j+1)}$$

$$w_{**}'(z) = ie^{iz} \left\{ \tilde{D}_0 + \sum_{k=0}^l [\tilde{D}_k + i(k-1)\tilde{D}_{k-1}]z^{-k} + il\tilde{D}_l z^{-(l+1)} \right\}$$

con $\tilde{D}_k = i^k D_k$ se sigue que

$$w_{**}(z)w_1'(z) = e^{iz} \sum_{k=0}^l \sum_{j=0}^{\infty} (l+2j+1)\tilde{D}_{k-1}A_j z^{l+2j-k}$$

$$w_{**}'(z)w_1(z) = ie^{iz} \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} A_j \tilde{D}_0 z^{l+2j+1} + \sum_{j=0}^{\infty} ilA_j \tilde{D}_1 z^{2j} \right\}$$

$$+ ie^{iz} \sum_{k=1}^l \sum_{j=0}^{\infty} [\tilde{D}_k + i(k-1)\tilde{D}_{k-1}]A_j z^{l-2j-k+1}$$

Tanto $w_{**}(z)w_1'(z)$ como $w_{**}'(z)w_1(z)$ pueden ser evaluadas en $z=0$ quedando $w_{**}(0)w_1'(0) = (l+1)A_0\tilde{D}_l$, $w_{**}'(0)w_1(0) = i \cdot ilA_0\tilde{D}_l$. Así $W(w_{**}, w_1) = w_{**}(0)w_1'(0) - w_{**}'(0)w_1(0)$ es igual a $(\frac{i}{2})^l$.

Las funciones de Bessel, tienen el siguiente comportamiento asintótico cuando $z \rightarrow \infty$

$$(B.16) \quad J_{l+1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos(z - (l+1)\frac{\pi}{2}) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \text{sen}(z - \frac{\pi}{2}l) + O(z^{-3/2})$$

$$(B.17) \quad J_{-(l+1/2)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos(z + \frac{\pi}{2}l) + O(z^{-3/2})$$

Estas funciones cumplen además la siguiente fórmula de recurrencia:

$$(B.18) \quad J_{l+3/2}(z) = \frac{2(l+1/2)}{z} J_{l+1/2}(z) - J_{l-1/2}(z)$$

Del hecho que para $l=0$ se tiene $J_{1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \text{senz}$, $J_{-1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos z$, se deduce de (B.20) $J_{3/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} (\frac{\text{senz}}{z} - \cos z)$, $J_{-3/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} (-\frac{\cos z}{z} - \text{senz})$. En este caso la función $v_2(z)$ dada en (B.7) queda $v_2(z) = 1 + i\frac{1}{z}$, de donde

$$w_{**}(z) = (-\sqrt{\pi})w_1(z) + (-\sqrt{\pi}i)w_2(z)$$

No puede dejar de mencionarse una importante propiedad relacionada con los ceros que poseen estas funciones:

La función $J_{l+\frac{1}{2}}(z)$ tiene *infinitos ceros positivos*. Todos estos ceros son *simples* y pueden ser ordenados en una sucesión creciente $a_n(l+\frac{1}{2})$ tal que $a_n(l+\frac{1}{2}) \rightarrow \infty$ cuando $n \rightarrow \infty$. La demostración de las identidades anteriores pueden ser vistas en [35, 41].

Apéndice C

Esféricos armónicos y el operador de Laplace

En este apéndice se estudia el concepto de funciones esféricas armónicas (sección 1), las cuales son esencialmente funciones del tipo $f(r)Y(\omega)$ con $r = |x|$ y $\omega = \frac{x}{|x|}$ ($x \neq 0$), las variable radial y angular respectivamente. El propósito central de este apéndice (sección 2) es establecer una descomposición del operador $H = -\Delta + V$, donde V es una función radial en una familia específica (H_l) de operadores autoadjuntos en $L^2(\mathbb{R}^+)$ en el caso $n = 3$ (proposición C.2 y teorema C.1). Para esto se utiliza el hecho que el espacio $L^2(\mathbb{R}^n)$ puede ser expresado como una suma ortogonal de subespacios generados por funciones esféricas armónicas, y la propiedad que el Laplaciano actúa de buena forma en las variables radial y angular (en el sentido que opera en cada variable separadamente).

C.1 Generalidades

La función $L : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^+ \times S^{n-1}$ definida como $L(x) = (r, \omega) = (|x|, \frac{x}{|x|})$ es una biyección con inversa dada por $L_1(r, \omega) = r\omega$. De ésto y el teorema del cambio de variables se tiene para $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ la igualdad,

$$(C.1) \quad \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = \int_0^\infty \left(\int_{S^{n-1}} f(r\omega) d\sigma(\omega) \right) r^{n-1} dr$$

donde $d\sigma$ es la medida de Lebesgue en S^{n-1} . El siguiente resultado es inmediato:

Lema C.1 *Considérese en \mathbb{R}^+ la medida $d\zeta = r^{n-1} dr$. Los espacios $L^2(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ y $L^2(\mathbb{R}^+ \times S^{n-1}, d\zeta \times d\sigma)$ son isomorfos vía el operador unitario $(\tilde{U}f)(r, \omega) = f(L_1(r, \omega))$.*

Como $L^2(\mathbb{R}^n) = L^2(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ lo anterior muestra que $L^2(\mathbb{R}^n) = L^2(\mathbb{R}^+ \times S^{n-1}, d\zeta \times d\sigma)$. Nótese que todo elemento de $L^2(\mathbb{R}^n)$ puede ser visto como una función de r y

$w = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-1})$ sus coordenadas polares generalizadas en S^{n-1} .

Ahora, recuerdese que si $\{f_m(r)\}_{m=1}^\infty$ y $\{Y_k(\omega)\}_{k=1}^\infty$ son bases ortonormales de $L^2(\mathbb{R}^+, d\zeta)$ y $L^2(S^{n-1}, d\sigma)$ respectivamente, entonces $\{f_m(r)Y_k(\omega)\}_{m,k=1}^\infty$ es una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R}^+ \times S^{n-1}, d\zeta \times d\sigma)$. Por lo tanto al considerar un operador lineal T en $L^2(\mathbb{R}^n)$ basta estudiar la acción de T sobre funciones del tipo $f(r)g(\omega)$.

En el caso que $T = \Delta$ un cálculo muestra que:

$$(C.2) \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{(n-1)}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} B$$

donde B es el operador de Laplace-Beltrami en $L^2(S^{n-1})$ definido como [27]:

$$(C.3) \quad B = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial}{\partial \theta_i} (\sqrt{g} g^{ik} \frac{\partial}{\partial \theta_k})$$

con $g = \det(g_{ik})$, $g_{ik} = \sum_{j=1}^n (\frac{\partial \omega_j}{\partial \theta_i}) \frac{\partial \omega_j}{\partial \theta_k}$, $g^{ik} = \sum_{j=1}^n (\frac{\partial \theta_j}{\partial \omega_i}) \frac{\partial \theta_j}{\partial \omega_k}$.

El espacio $L^2(S^{n-1})$ puede ser descompuesto de la siguiente forma:

$$(C.4) \quad L^2(S^{n-1}) = \bigoplus_{k \geq 0} H_k, \text{ donde } H_j \perp H_k, j \neq k$$

y $H_k = \{f|S^{n-1} : f \text{ es un polinomio homogéneo de grado } k \text{ armónico en } \mathbb{R}^n\}$. Los elementos de H_k se llaman *esféricos armónicos*. H_k es un espacio de dimensión finita. Nótese que $H_0 = \langle \{1\} \rangle$ luego $\dim H_0 = 1$. (véase [17] para la demostración de (C.4) así como otras interesantes propiedades de los espacios H_k).

Sea $Y \in H_k$. La función $|x|^k Y(\frac{x}{|x|})$ es armónica en $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Aplicando el operador de Laplace a esta función se sigue por la igualdad (C.2),

$$\begin{aligned} 0 &= \Delta(r^k Y(\omega)) = k(k-1)r^{k-2}Y(\omega) + \frac{(n-1)}{r}kr^{k-1}Y(\omega) + \frac{1}{r^2}B(r^k Y(\omega)) \\ &= k(k-1)r^{k-2}Y(\omega) + k(n-1)r^{k-2}Y(\omega) + r^{k-2}B(Y(\omega)) \end{aligned}$$

Luego $BY(\omega) = -k(k+n-2)Y(\omega)$. Por lo tanto H_k es el subespacio propio asociado al autovalor $-k(k+n-2)$ del operador B . Entonces (C.4) implica que B tiene espectro puntual, esto es $\sigma(B) = \{-k(k+n-2) : k \in \mathbb{N}\}$. Así por (C.2) se tiene para $g \in H_k$,

$$(C.5) \quad \Delta(f(r)g(\omega)) = \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{(n-1)}{r} \frac{d}{dr} - \frac{k(k+n-2)}{r^2} \right) f(r)g(\omega)$$

Sea $\{Y_{k,m}\}_{k=0, m=1, \dots, d_k}^\infty$ una base ortonormal de H_k ($d_k = \dim H_k$) y $\{f_j(r)\}_{j=0}^\infty$ es una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R}^+, d\zeta)$ por (C.4) se tiene para $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n)$,

$$(C.6) \quad \varphi = \sum_{j,k=0}^\infty \sum_{m=1}^{d_k} c_{k,m,j} f_j(r) Y_{k,m}(\omega)$$

Con el objetivo de hallar una expresión equivalente a (C.6) es necesario hacer uso de la identificación [29] $L^2(\mathbb{R}^n) \cong L^2(\mathbb{R}^+, d\zeta) \otimes L^2(S^{n-1}, d\sigma)$. De la descomposición (C.4) se llega a,

$$L^2(\mathbb{R}^n) \cong \bigoplus_{k=0}^{\infty} \widetilde{\mathcal{L}}_k, \text{ donde } \widetilde{\mathcal{L}}_k = L^2(\mathbb{R}^+, d\zeta) \otimes H_k$$

de esto se sigue que,

$$(C.7) \quad L^2(\mathbb{R}^n) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathcal{L}_k, \quad \mathcal{L}_k \cong \widetilde{\mathcal{L}}_k$$

Sea $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n)$, se tiene por (C.7) que $\varphi = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k$, con $\varphi_k \in \mathcal{L}_k$. Siendo $\{f_j(r)Y_{m,k}(w)\}_{j=0, m=1, \dots, d_k}^{\infty}$ una base ortonormal de \mathcal{L}_k queda

$$(*) \quad \varphi_k = \sum_{m=1}^{d_k} \sum_{j=0}^{\infty} c_{k,m,j} f_j(r) Y_{k,m}(w)$$

donde la convergencia es en el espacio \mathcal{L}_k (luego en $L^2(\mathbb{R}^n)$). De (*) se sigue que $c_{k,m,j} = \langle f_j Y_{k,m}, \varphi_k \rangle$, $j = 0, 1, \dots$, y como $\sum_{j=0}^{\infty} \|c_{k,m,j}\|^2 < \infty$ se obtiene,

$$\varphi_{k,m} = \sum_{j=0}^{\infty} c_{k,m,j} f_j(r) \in L^2(\mathbb{R}^+, d\zeta)$$

luego $\varphi_k = \sum_{m=1}^{d_k} \varphi_{k,m}(r) Y_{k,m}(w)$. Así (C.6) se puede escribir como

$$(C.8) \quad \varphi = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{d_k} \varphi_{k,m}(r) Y_{k,m}(w)$$

Se dice que (C.8) es la descomposición de φ en *esféricos armónicos*. Es importante notar que

$$(C.9) \quad c_{k,m,j} = \langle f_j Y_{k,m}, \varphi \rangle$$

pues $\langle f_s Y_{t,r}, \varphi \rangle = \langle f_s Y_{t,r}, \varphi_t \rangle = \langle f_s Y_{t,r}, \varphi_{t,r} Y_{t,r} \rangle = \langle f_s, \varphi_{t,r} \rangle = c_{t,r,s}$. Además de (C.9) se deduce que

$$(C.10) \quad \varphi_{k,m}(r) = \langle Y_{k,m}, \varphi \rangle = \int_{S^{n-1}} \overline{Y_{k,m}(w)} \varphi(r, w) d\sigma(w)$$

Observación C.1 Sea $\Psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$. De acuerdo con su descomposición en esféricos armónicos,

$$\Psi = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{d_k} \Psi_{km} Y_{k,m} = \sum_{k=0}^{\infty} \Psi_k$$

se tiene para $\rho > 0$ y $g = \chi_{B_\rho} \Psi$,

$$g = \sum_{k=0}^{\infty} g_k \quad \text{con } g_k = \chi_{B_\rho} \Psi_k$$

Por su parte, sea $\Psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ con $\Psi \neq 0$, es inmediato que existe $k \geq 0$ tal que $\Psi_k \neq 0$. Entonces para $\tilde{\Psi}^1 = \chi_{B_{R_1}} \Psi$, $\tilde{\Psi}^2 = \chi_{B_{R_2}} \Psi$ con $R_1 < R_2$ se tiene que si $k_0 \geq 0$ satisface $\tilde{\Psi}_{k_0}^1 \neq 0$ entonces $\tilde{\Psi}_{k_0}^2 \neq 0$.

Observación C.2 Sea $\varphi \in C(\mathbb{R}^n)$. Del lema C.1 se sigue que $\varphi(r, \cdot) \in C(S^{n-1})$ para todo $r > 0$. En particular $\varphi(r, \cdot) \in L^2(S^{n-1})$ y (C.8) es válido, donde la convergencia es en el espacio $L^2(S^{n-1})$ para todo $r > 0$, con $\varphi_{km}(r) \in C(\mathbb{R}^+)$ dado por (C.10).

En el caso $\varphi \in C^s(\mathbb{R}^n)$, $s \in \mathbb{N}$, $s \geq 2$ se sigue de (C.10) y de la derivación bajo el signo integral que $\varphi_{km}(r) \in C^s(\mathbb{R}^+)$. Además de (C.2),

$$(C.11) \quad \varphi_{km}''(r) + \frac{n-1}{r} \varphi_{km}'(r) = \int_{S^{n-1}} \overline{Y_{k,m}(\omega)} \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right] \varphi(r, \omega) d\sigma(\omega)$$

luego

$$(C.12) \quad \varphi_{km}''(r) + \frac{n-1}{r} \varphi_{km}'(r) = \int_{S^{n-1}} \overline{Y_{k,m}(\omega)} \left[\Delta - \frac{1}{r^2} B \right] \varphi(r, \omega) d\sigma(\omega)$$

El operador B es esencialmente autoadjunto en $C^\infty(S^{n-1})$ [30]. Entonces en el caso que $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ se tiene $\varphi(r, \cdot) \in C^\infty(S^{n-1})$ y vale

$$\int_{S^{n-1}} \overline{Y_{k,m}(\omega)} B \varphi(r, \omega) d\sigma(\omega) = \langle Y_{k,m}, B \varphi(r, \cdot) \rangle = \langle B Y_{k,m}, \varphi(r, \cdot) \rangle = -k(k+n-2) \varphi_{km}(r)$$

De esto se obtiene para todo $r > 0$ fijo,

$$(C.13) \quad \varphi_{km}''(r) + \frac{n-1}{r} \varphi_{km}'(r) - \frac{k(k+n-2)}{r^2} \varphi_{k,m}(r) = \int_{S^{n-1}} \overline{Y_{k,m}(\omega)} \Delta \varphi(r, \omega) d\sigma(\omega)$$

Sea $\varphi \in \mathcal{H}_{loc}^1(\mathbb{R}^n) \cap C(\mathbb{R}^n)$. Los siguientes resultados se cumplen:

Lema C.2 Para $Y \in L^2(S^{n-1})$ se define

$$(I) \quad f(r) = \int_{S^{n-1}} Y(\omega) \varphi(r, \omega) d\sigma(\omega), \quad f(0) = \varphi(0) \int_{S^{n-1}} Y(\omega) d\sigma(\omega)$$

Entonces es válido que $f \in C([0, \infty))$.

Demostración: Es claro que f es continua en \mathbb{R}^+ , solo resta mostrar la continuidad en $r = 0$. Sea σ_n el área de S^{n-1} . Para $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|\varphi(x) - \varphi(0)| < \epsilon/\sigma_n$ si $|x| < \delta$. Entonces si $0 < r < \delta$ vale,

$$\begin{aligned} |f(r) - f(0)|^2 &\leq \left(\int_{S^{n-1}} |Y(\omega)| |\varphi(r, \omega) - \varphi(0)| d\sigma(\omega) \right)^2 \leq \|Y\|_2^2 \int_{S^{n-1}} |\varphi(r, \omega) - \varphi(0)|^2 d\sigma(\omega) \\ &\leq \|Y\|_2 (\epsilon/\sigma_n) \sigma_n = \|Y\|_2 \epsilon \end{aligned}$$

esto muestra la afirmación. ■

De lo anterior se sigue que f define una distribución en \mathbb{R}^+ .

Lema C.3 Sea g la función,

$$(II) \quad g(r) = \int_{S^{n-1}} Y(\omega) \frac{\partial \varphi}{\partial r}(r, \omega) d\sigma(\omega)$$

Entonces $g \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^+)$ y se verifica para la función f dada por (I),

$$(III) \quad f \in \mathcal{H}^1_{loc}(\mathbb{R}^+) \text{ y } f' = g$$

Demostración: La función g esta bien definida, pues $|\frac{\partial \varphi}{\partial r}(x)| = |\nabla \varphi(x) \frac{x}{|x|}| \leq \|\nabla \varphi(x)\|$, de donde $\partial \varphi / \partial r \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Entonces $|g(r)| \leq \|Y\|_2 \|\partial \varphi / \partial r(r, \cdot)\|_2$ y por lo tanto de (C.1) se tiene,

$$\int_0^a |g(r)| r^{n-1} dr \leq \|Y\|_2 \int_0^a r^{n-1} \int_{S^{n-1}} |\frac{\partial \varphi}{\partial r}(r, \omega)|^2 d\sigma(\omega) dr = \|Y\|_2 \|\frac{\partial \varphi}{\partial r}\|_{L^2(B(0,a))}$$

luego $g \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^+, r^{n-1} dr)$, concluyéndose que $g \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^+)$. Para mostrar (III) considerar $|\omega| = 1$ y la función $h_\omega(r) = \varphi(r\omega)$. Sea el conjunto $\Omega_{a,b} = \{x \in \mathbb{R}^n / a < |x| < b\}$, por el teorema de Fubini,

$$\int_{S^{n-1}} \left(\int_a^b r^{n-1} |\varphi(r\omega)|^2 dr \right) d\sigma(\omega) = \int_a^b r^{n-1} \int_{S^{n-1}} |\varphi(r\omega)|^2 d\sigma(\omega) dr = \int_{\Omega_{a,b}} |\varphi(x)|^2 dx < \infty$$

luego para casi todo punto $\omega \in S^{n-1}$ vale,

$$\int_a^b r^{n-1} |\varphi(r\omega)|^2 dr < \infty$$

de donde

$$\int_a^b |h_\omega(r)|^2 dr < a^{(n-1)} \int_a^b r^{n-1} |\varphi(r\omega)|^2 dr < \infty$$

y siendo a, b arbitrarios se concluye que $h_\omega \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^+)$ para casi todo punto $\omega \in S^{n-1}$. De manera análoga la función $g_\omega(r) = \frac{\partial \varphi}{\partial r}(r\omega)$ pertenece a $L^2_{loc}(\mathbb{R}^+)$. Por la hipótesis existe $\{u_n\} \subseteq C^\infty_0(\mathbb{R}^n)$ tal que $u_n|_{\Omega_{a,b}} \rightarrow \varphi$ en $\mathcal{H}^1(\Omega_{a,b})$ [7]. Sea

$$v_{n,\omega}(r) = u_n(r\omega) \quad , \quad g_{n,\omega}(r) = v'_{n,\omega}(r) = \nabla u_n(r\omega) \cdot \omega = \frac{\partial u_n}{\partial r}(r\omega)$$

Se verifica: i) $v_{n,\omega} \rightarrow h_\omega$ en $L^2_{loc}(\mathbb{R}^+)$ ii) $g_{n,\omega} \rightarrow g_\omega$ en $L^2_{loc}(\mathbb{R}^+)$.
En efecto,

$$\begin{aligned} \int_{S^{n-1}} \left(\int_a^b r^{n-1} |v_{n,\omega}(r) - h_\omega(r)|^2 dr \right) d\sigma(\omega) &= \int_a^b r^{n-1} \int_{S^{n-1}} |v_{n,\omega}(r) - h_\omega(r)|^2 d\sigma(\omega) dr \\ &= \int_{\Omega_{a,b}} |u_n(x) - \varphi(x)|^2 dx \rightarrow 0 \end{aligned}$$

de donde existe una subsucesión de $\{v_{n,\omega}\}$ (que se anota de la misma manera) tal que

$$\int_a^b r^{n-1} |v_{n,\omega}(r) - h_\omega(r)|^2 dr \rightarrow 0$$

para casi todo punto $\omega \in S^{n-1}$ (esto pues,

$$\beta_n = \int_a^b r^{n-1} |v_{n,\omega}(r) - h_\omega(r)|^2 dr \in L^1(S^{n-1})$$

y $\|\beta_n\|_{L^1(S^{n-1})} \rightarrow 0$). De donde $\|v_{n,\omega} - h_\omega\|_{L^2(a,b)} \leq a^{-(n-1)} \|v_{n,\omega} - h_\omega\|_{L^2((a,b), r^{n-1} dr)} \rightarrow 0$, siendo a, b arbitrarios se prueba *i*), del mismo modo se muestra *ii*). Entonces se sigue,

$$(h'_\omega, \theta) = -(h_\omega, \theta') = \lim_{n \rightarrow \infty} (v'_{n,\omega}, \theta) = \lim_{n \rightarrow \infty} (g_{n,\omega}, \theta) = (g_\omega, \theta)$$

para todo $\theta \in C_0^\infty(a, b)$. De esto se obtiene que $h_\omega \in \mathcal{H}_{loc}^2(\mathbb{R}^+)$ y $h'_\omega = g_\omega$. Luego para f dado por **(I)** se tiene

$$\begin{aligned} (f, \theta') &= \int_0^\infty \int_{S^{n-1}} Y(\omega) \varphi(r\omega) \theta'(r) d\sigma(\omega) dr = \int_{S^{n-1}} Y(\omega) \int_0^\infty h_\omega(r) \theta'(r) dr d\sigma(\omega) \\ &= - \int_{S^{n-1}} Y(\omega) \int_0^\infty h'_\omega(r) \theta(r) dr d\sigma(\omega) = \int_0^\infty \int_{S^{n-1}} Y(\omega) g_\omega(r) \theta(r) d\sigma(\omega) dr \end{aligned}$$

esto es $(f, \theta') = (g, \theta)$, donde g es dado por **(II)**. ■

En el caso de $\varphi_{k,m}(r)$ dado por (C.10) se sigue que $\varphi_{k,m}(r)$ es continua en $[0, \infty)$ con

$$\varphi_{k,m}(0) = \varphi(0) \int_{S^{n-1}} \overline{Y_{k,m}(w)} d\sigma(w) = \varphi(0) \langle Y_{k,m}, 1 \rangle = 0, \quad k \geq 1$$

y

$$\varphi_{0,0}(0) = \text{Const } \sigma_n \varphi(0)$$

Es importante mencionar que una consecuencia de **(III)** es que si $\varphi \in \mathcal{H}_{loc}^2(\mathbb{R}^n) \cap C(\mathbb{R}^n)$ entonces $\varphi_{km} \in \mathcal{H}_{loc}^2(\mathbb{R}^+) \cap C[0, \infty)$ y (C.11) es válido.

Observación C.3 El operador de Laplace-Beltrami B es esencialmente autoadjunto en $C^\infty(S^{n-1})$. Si \tilde{B} denota su clausura entonces su dominio es $\mathcal{D}(\tilde{B}) = \mathcal{H}^2(S^{n-1})$. Es posible mostrar que en el caso $\varphi \in \mathcal{H}_{loc}^2(\mathbb{R}^n)$ se tiene $\varphi(r, \cdot) \in \mathcal{H}^1(S^{n-1})$ [17]. De esto se sigue que φ no necesariamente pertenece a $\mathcal{D}(\tilde{B})$, por lo tanto la igualdad (C.12) no es necesariamente cierta, y en conclusión la igualdad (C.13) tampoco.

C.2 Descomposición del Hamiltoniano

La identidad (C.5) muestra que el operador $H_0 = -\Delta$ esencialmente actúa como un operador diferencial en $L^2(\mathbb{R}^+)$. Para establecer con precisión esto se hace uso de la descomposición (C.7). En toda esta parte se trabaja en $n = 3$. Aquí se utiliza por convención la letra l en lugar de k en la igualdad (C.8). Se puede probar en este caso que la respectiva dimensión d_l es igual a $2l + 1$.

Denótese F_{lm} la proyección ortogonal sobre el subespacio $\langle \{Y_{lm}\} \rangle$ en $L^2(S^2)$, y sea $E_{lm} = I \otimes F_{lm}$. Se puede mostrar para todo l, m que E_{lm} es una proyección ortogonal

en $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^+, d\zeta) \otimes L^2(S^{n-1})$. Además $E_{lm}E_{sn} = \delta_{l,s}\delta_{m,n}$, y $\sum_{lm} E_{lm} = I$. Sean $\mathcal{H}_r = L^2(\mathbb{R}^+, d\zeta)$ y $\mathcal{H}_a = L^2(S^2, d\sigma)$. El operador E_{lm} actúa en \mathcal{H} como $(E_{lm}f)(r) = f_{lm}(r)Y_{lm}(\omega)$, donde f_{lm} es dado por (C.10). Es claro que $\mathcal{H}_{lm} = \text{Ran}(E_{lm}) \cong \mathcal{H}_r$ para cada l, m . El lema siguiente establece una descomposición de un operador, semejante a la producida en el espacio \mathcal{H} . Para los detalles, véase [1].

Lema C.4 *Sea A un operador autoadjunto en $\mathcal{H}_r \otimes \mathcal{H}_a$ y asúmase que A conmuta con cada E_{lm} . Entonces existe una familia $\{A_{lm}\}$ de operadores autoadjuntos en \mathcal{H}_r tal que $AE_{lm} = A_{lm} \otimes F_{lm}$*

Observación C.4 Este resultado es válido también cuando A es acotado y autoadjunto (respectivamente isométrico o unitario).

La demostración de los dos resultados enunciados a continuación aparecen en [1].

Proposición C.1 *El operador $H_0 = -\Delta$ en $L^2(\mathbb{R}^3)$ conmuta con E_{lm} para cada l, m . Además para cada l existe un operador $H_{0,l}$ en \mathcal{H}_r tal que $H_0E_{lm} = H_{0,l} \otimes F_{lm}$.*

Proposición C.2 *Sea V un potencial radial en $L^2(\mathbb{R}^3)$ tal que $H = H_0 + V$ es autoadjunto con $\mathcal{D}(H) = \mathcal{D}(H_0)$. Entonces para cada l existe un operador H_l en \mathcal{H}_r tal que $HE_{lm} = H_l \otimes F_{lm}$.*

Es importante notar que en ambos resultados la dependencia en m desaparece.

Considérese $H_{0,l}, H_l$ los operadores dados por las proposiciones C.1 y C.2. De acuerdo con la demostración del Lema C.1, sus respectivos dominios son:

$$\mathcal{D}(H_{0,l}) = \{g \in \mathcal{H}_r : g \otimes Y_{lm} \in \mathcal{D}(H_0)\}, \quad \mathcal{D}(H_l) = \{g \in \mathcal{H}_r : g \otimes Y_{lm} \in \mathcal{D}(H)\}$$

La condición $\mathcal{D}(H) = \mathcal{D}(H_0)$ implica $\mathcal{D}(H_0) \subset \mathcal{D}(V)$. De esto se sigue que $E_{lm}V = VE_{lm}$, y por lo tanto

$$H_l \otimes F_{lm} = HE_{lm} = H_0E_{lm} + VE_{lm} = H_{0,l} \otimes F_{lm} + V \otimes F_{lm} = (H_{0,l} + V) \otimes F_{lm}$$

luego

$$(C.14) \quad H_l = H_{0,l} + V$$

Entonces la igualdad (C.5) implica para $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^+)$,

$$(C.15) \quad H_{0,l}f = -f'' - \frac{2}{r}f' + \frac{l(l+1)}{r^2}f \quad \text{y} \quad H_l f = -f'' - \frac{2}{r}f' + \frac{l(l+1)}{r^2}f + V(r)f$$

Sea el operador unitario

$$(C.16) \quad U : \mathcal{H}_r \rightarrow L^2(\mathbb{R}^+), \quad (Uf)(r) = rf(r)$$

entonces los operadores autoadjuntos en $L^2(\mathbb{R}^+)$ $\widehat{H}_{0,l} = UH_{0,l}U^{-1}$, $\widehat{H}_l = UH_lU^{-1}$, con tiene por dominios $\mathcal{D}(\widehat{H}_{0,l}) = U(\mathcal{D}(H_{0,l}))$ y $\mathcal{D}(\widehat{H}_l) = U(\mathcal{D}(H_l))$ respectivamente. Si $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^+)$ se verifica,

$$(C.17) \quad \widehat{H}_{0,l}f = -f'' + \frac{l(l+1)}{r^2}f \quad \text{y} \quad \widehat{H}_lf = -f'' + \frac{l(l+1)}{r^2}f + V(r)f$$

Sean $T_{0,l}$ y T_l los operadores dados por (C.18) con dominio $C_0^\infty(\mathbb{R}^+)$. El resultado central es [1]:

Teorema C.1 *El operador $T_{0,0}$ no es esencialmente autoadjunto. En cambio para $l \geq 1$ $T_{0,l}$ si es esencialmente autoadjunto. Por otro lado, suponer que $V = V_1 + V_2$ con $V_1 \in L^2(\mathbb{R}^3)$ y $V_2 \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$. Entonces T_0 no es esencialmente autoadjunto, mientras que T_l si es esencialmente autoadjunto para todo $l \geq 1$.*

Recordar que si S es un operador cerrable entonces $\overline{S^*} = S^*$. De esto y los resultados anteriores se deduce que $\overline{T_{0,l}} = T_{0,l}^*$ y $\overline{T_l} = T_l^*$ cuando $l > 1$. El caso $l = 0$ es mas delicado. Se prueba que hay infinitas extensiones autoadjuntas $T_{0,0}^{(a)}, T_{0,0}^{(\infty)}$ de $T_{0,0}$ con dominios,

$$\mathcal{D}(T_{0,0}^{(a)}) = \{f \in \mathcal{D}(T_{0,0}^*) : f'(0) + af(0) = 0\}, \quad \mathcal{D}(T_{0,0}^{(\infty)}) = \{f \in \mathcal{D}(T_{0,0}^*) : f(0) = 0\}$$

donde $a \in \mathbb{R}$, y de manera análoga existen infinitas extensiones autoadjuntas $T_0^{(a)}, T_0^{(\infty)}$ de T_0 con dominios similares, verificandose que $T_{0,0}^{(\infty)} = \widehat{H}_{0,0}$ (véase [1]).

En consecuencia $\mathcal{D}(\widehat{H}_0) = \mathcal{D}(\widehat{H}_{0,0}) = \mathcal{D}(T_{0,0}^{(\infty)})$, y como $\widehat{H}_0 \subseteq T_0^*$ queda $\widehat{H}_0 = T_{0,0}^{(\infty)}$. A su vez $T_l \subseteq \widehat{H}_l$, luego $\overline{T_l} \subseteq \overline{\widehat{H}_l} = \widehat{H}_l$, y $\widehat{H}_l = \widehat{H}_l^* \subseteq T_l^* = \overline{T_l}$. Así $\overline{T_l} = \widehat{H}_l$ para $l > 1$.

En resumen, los operadores \widehat{H}_0 y \widehat{H}_l actuan como (C.18) en sus respectivos dominios,

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\widehat{H}_0) &= \{f \in L^2(\mathbb{R}^+) : f, f' \in AC_{loc}(\mathbb{R}^+), f(0) = 0, \widehat{H}_0f \in L^2(\mathbb{R}^+)\} \\ \mathcal{D}(\widehat{H}_l) &= \{f \in L^2(\mathbb{R}^+) : f, f' \in AC_{loc}(\mathbb{R}^+), \widehat{H}_lf \in L^2(\mathbb{R}^+)\} \end{aligned}$$

Nótese que la condición $f(0) = 0$ es cierta para $\widehat{H}_{0,l}$, luego se cumple para \widehat{H}_l [1].

Observación C.5 El operador U en (C.18) tiene por inversa $(U^{-1}f)(r) = r^{-1}f(r)$, ademas para $\varphi_1, \varphi_2 \in L^2(\mathbb{R}^3)$ se tiene de su representación en esféricos armónicos (C.8):

$$\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{|m| \leq l} \langle U\varphi_{l,m}^{(1)}, U\varphi_{l,m}^{(2)} \rangle_{L^2(\mathbb{R}^+)}$$

Entonces la identificación $\varphi_{l,m} \equiv U\varphi_{l,m}$ permite representar siempre todo elemento $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^3)$ en la forma (C.16) con $\varphi_{l,m} \in L^2(\mathbb{R}^+)$. En este sentido también se identifican los operadores H_l y \widehat{H}_l , por lo cual el operador H se descompone en la familia (H_l) con H_l dado por (C.21).

Apéndice D

Resolvente generalizada del operador $-\Delta + V(x)$ en $L^2(\mathbb{R}^3)$

En este apéndice D se realiza un estudio de la resolvente $R(z)$ del operador $H = -\Delta + V(x)$ en $L^2(\mathbb{R}^3)$ (sección 1), destacándose el resultado que garantiza la extensión meromorfa de $R(z)$ en un franja del plano complejo que contiene al eje real (teorema D.1). Se indica que cada polo aparecido en la extensión de la resolvente tiene asociada una función que no pertenece al espacio $L^2(\mathbb{R}^3)$, la cual es solución de una cierta ecuación diferencial y al mismo tiempo satisface una igualdad de tipo integral. Esta compatibilidad permite que la función en cuestión tenga propiedades de suavidad y de comportamiento en el infinito (sección 2).

D.1 Solución Fundamental y Resolvente

Recordar que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ es el espacio de Schwartz, $\mathcal{D}(\mathbb{R}^3) = C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$. $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ es el espacio de las distribuciones y $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ es el espacio de distribuciones temperadas. Sea $\tilde{G}(\cdot; k)$ definida para $x \in \mathbb{R}^3$ y $k \in \mathbb{C}$ por

$$(D.1) \quad \tilde{G}(x; k) = \frac{e^{ik|x|}}{4\pi|x|}$$

Un resultado (véase [21, 17, 29]):

Proposición D.1 *La función $\tilde{G}(\cdot; k)$ cumple las siguientes propiedades:*

- i) $\tilde{G}(\cdot; k) \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$.
- ii) $(-\Delta - k^2)\tilde{G}(\cdot; k) = 0$ en $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.

iii) Para $Imk \neq 0$ se verifica $\tilde{G}(\cdot; k) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ y $(-\Delta - k^2)\tilde{G}(\cdot; k) = \delta$ en $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$.

iv) Para $Imk > 0$ se tiene $\tilde{G}(\cdot; k) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ y $(-\Delta - k^2)\tilde{G}(\cdot; k) = \delta$ en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$.

De este resultado se tiene que \tilde{G} es una *solución fundamental* para el operador $-\Delta - k^2$ en $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ y también en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$, esto último cuando $Imk > 0$. Es decir:

Para $h \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ la función $u = \tilde{G} * h$ satisface $(-\Delta - k^2)u = h$ en el sentido de las distribuciones. Esto mismo sucede si $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ con $Imk > 0$.

Sea $k^2 \in \mathbb{C} \setminus [0, \infty)$. Usando la transformada de Fourier \mathcal{F} la ecuación $(-\Delta - k^2)u = f$ en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$, puede ser resuelta y obtener, $u = (2\pi)^{-3/2}\mathcal{F}^{-1}((|\cdot|^2 - k^2)^{-1}) * f$. Se cumple que $\mathcal{F}^{-1}((|\cdot|^2 - k^2)^{-1})(x) = (2\pi)^{-3/2}R_0(\cdot, k) \in L^1(\mathbb{R}^3)$. Luego la función u se escribe como:

$$(D.2) \quad u(x) = \int_{\mathbb{R}^3} R_0(x - y, k) f(y) dy$$

Ahorar, la aplicación $f \rightarrow R_0(\cdot, k) * f$ es un operador lineal y continuo en $L^2(\mathbb{R}^3)$ que es justamente la resolvente del operador $-\Delta$ [30]. O sea,

$$(-\Delta - k^2)^{-1} f(x) = \int_{\mathbb{R}^3} R_0(x - y, k) f(y) dy, \quad f \in L^2(\mathbb{R}^3)$$

La función \tilde{G} se llama la *función de Green del operador* $(-\Delta - k^2)$, y se verifica [30]: Para $k \in \mathbb{C}$ con $Rek > 0$ se tiene,

$$(-\Delta + k^2)^{-1} f(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} f(y) dy$$

Siendo $(-\Delta - k^2)^{-1} = (-\Delta + (ik)^2)^{-1} = (-\Delta + (-ik)^2)^{-1}$ y $Re(\pm ik) = \mp Imk$ queda:

$$(D.3) \quad (-\Delta - k^2)^{-1} f(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} f(y) dy$$

donde el signo \pm depende si $Imk > 0$ o $Imk < 0$. De esto se sigue que

$$(D.4) \quad R_0(x, k) = \tilde{G}(x, k), \text{ si } Imk > 0 \text{ y } \tilde{G}(x, -k), \text{ si } Imk < 0$$

D.2 Estudio de la Resolvente

Sean $x, y \in \mathbb{R}^3$ y $k \in \mathbb{C}$, denótese $G(x, y; k)$ la función

$$(D.5) \quad G(x, y; k) = R_0(x - y, k) = \tilde{G}(x - y; k) = \frac{e^{iz|x-y|}}{4\pi|x-y|}$$

Sea $\mu_s(x) = e^{-s|x|}$ con $s > 0$ fijo y defínase el conjunto $\mathcal{X}_s = L^2(\mathbb{R}^3, dv_s)$ con $dv_s(x) = \mu_s(x)dx$. Es claro que $L^2(\mathbb{R}^3) \subseteq \mathcal{X}_s \subseteq L_{loc}^1(\mathbb{R}^3)$. Se define operador L_k por

$$(D.6) \quad (L_k \varphi)(x) = - \int_{\mathbb{R}^3} G(x, y; k) V(y) \varphi(y) dy$$

se tiene que L_k puede ser escrito como:

$$(L_k \varphi)(x) = - \int_{\mathbb{R}^3} K(x, y; k) \varphi(y) dv_s(y)$$

donde $K(x, y; k) = G(x, y; k)V(y)e^{s|y|}$. Asíumase que la función V cumple:

$$(D.7) \quad |V(x)| \leq e^{-a|x|} \quad x \in \mathbb{R}^3, a > 0$$

entonces es válido,

Lema D.1 *La función $K(\cdot; k)$ pertenece al espacio $L^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3, dv_s \otimes dv_s)$*

Demostración: Nótese primero que $|K(x, y; k)| \leq \frac{e^{-Imk|x-y|+(s-a)|y|}}{4\pi|x-y|}$. Luego

$$\int_{\mathbb{R}^3} |K(x, y; k)|^2 dv_s(y) \leq \left(\frac{1}{4\pi}\right)^2 \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{-2Imk|x-y|+(s-2a)|y|}}{|x-y|^2} dy$$

Hay tres casos a considerar:

(I) $Imk > 0$: Se cumple $-2Imk|x-y| \leq -2Imk(|x|-|y|)$, luego

$$\int_{\mathbb{R}^3} |K(x, y; k)|^2 dv_s(y) \leq \left(\frac{1}{4\pi}\right)^2 e^{-2Imk|x|} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{c_1|y|}}{|x-y|^2} dy$$

con $c_1 = s - 2a + 2Imk$. Por su parte,

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{c_1|y|}}{|x-y|^2} dy \leq \int_{B(0,1)} \frac{e^{c_1|x-\xi|}}{|\xi|^2} d\xi + \int_{\mathbb{R}^3 \setminus B(0,1)} e^{c_1|x-\xi|} d\xi$$

Asumiendo que $c_1 < 0$ queda

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{c_1|y|}}{|x-y|^2} dy \leq 4\pi e^{-c_1|x|} \left\{ \int_0^1 e^{c_1 r} dr + \int_1^\infty e^{c_1 r} r^2 dr \right\}$$

Se deduce,

$$\int_{\mathbb{R}^3} |K(x, y; k)|^2 dv_s(y) \leq \frac{1}{4\pi} \frac{2}{c_1^2} \left\{ 1 - \frac{1}{c_1} \right\} e^{-(2Imk+c_1)|x|}$$

Haciendo $C = \frac{1}{4\pi} \frac{2}{c_1^2} \left\{ 1 - \frac{1}{c_1} \right\}$ se tiene

$$\int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} |K(x, y; k)|^2 dv_s(y) dv_s(x) \leq C \int_{\mathbb{R}^3} e^{-(2Imk+c_1)|x|} dv_s(x) = C \int_{\mathbb{R}^3} e^{-(2Imk+c_1+s)|x|} dx$$

y esta ultima integral converge si $2Imk + c_1 > 0$. Entonces $c_1 < 0$ si y sólo si $s - 2a + 2Imk < 0$, lo cual equivale a $2Imk < 2a - s$. Como $Imk > 0$ debe tenerse que $s < 2a$, de donde $0 < Imk < a - \frac{s}{2}$. Además $c_1 + s + 2Imk > 0$ si y sólo si $2s - 2a + 4Imk > 0$, luego $Imk > \frac{1}{2}(a-s)$. Así: $\frac{1}{2}(a-s) < Imk < a - \frac{s}{2}$, para $s < 2a$.

(II) $Imk < 0$: Acá $-2Imk|x - y| \leq -2Imk(|x| + |y|)$. Es posible concluir como en (I) que si $a < s < 2a$ y $\frac{s}{2} - a < Imk < 0$, entonces la integral de $|K(\cdot, \cdot; k)|^2$ con respecto a la medida $dv_s \otimes dv_s$ es finita.

(III) $Imk = 0$: Se obtiene lo mismo que (II).
Esto finaliza la prueba. ■

Como consecuencia del lema anterior se deduce:

Teorema D.1 *Suponer que V satisface (D.7), entonces si $a < s < 2a$ el operador L_k definido por (D.6) es compacto en \mathcal{X}_s con $k \in \mathcal{M}_s = \{w \in \mathbb{C} : -\gamma_s < Im w < \gamma_s\}$ donde $\gamma_s = a - \frac{s}{2}$.*

Notar que si $u \in \mathcal{X}_s$ entonces $V(x)u \in L^2(\mathbb{R}^3)$. Se sigue que en el caso $Imk > 0$ vale $L_k u = -(-\Delta - k^2)^{-1}V(x)u$. En particular $Ran(L_k) \subseteq Ran((-\Delta - k^2)^{-1}) = \mathcal{D}(-\Delta) = \mathcal{H}(\mathbb{R}^3) \subseteq \mathcal{X}_s$ y es posible ver que en tal caso $(1 - L_k)^{-1}$ existe, pues $L_k u = u$ si y sólo si $-(-\Delta - k^2)^{-1}V(x)u = u$. Esto sucede siempre y cuando $-\Delta u + V(x)u = k^2 u$. Luego $u \in \mathcal{D}(-\Delta + V)$ es un autovector de $-\Delta + V$ asociado a k^2 , de donde $u = 0$.

Ahora. $\{L_k\}$ es una familia analítica de operadores compactos en $k \in \mathcal{M}_s$, entonces por el Teorema analítico de Fredholm [1, 29] se tiene solo una de las siguientes posibilidades:

Existe un subconjunto discreto \mathcal{O} (por lo tanto a lo más numerable) de \mathcal{M}_s tal que es válida solo una de las siguientes alternativas:

a) $(1 - L_k)^{-1}$ no existe para todo $k \in \mathcal{M}_s$ b) $(1 - L_k)^{-1}$ existe en el conjunto $\mathcal{M}_s \setminus \mathcal{O}$

Por lo visto anteriormente la alternativa a) no puede ocurrir. Así debe verificarse b) y además se tiene que $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{M}_s^- = \{w \in \mathcal{M}_s : Im w < 0\}$. Esto se traduce como:

Sea $k \in \mathcal{M}_s \setminus \mathcal{O}$. Para todo $g \in \mathcal{X}_s$ existe una única solución φ de la ecuación funcional:

$$(D.8) \quad \varphi = L_k \varphi + g$$

dada por $\varphi = (L_k - 1)^{-1}g$, además esta solución como función de k es meromorfa en \mathcal{M}_s con polos justamente en el conjunto \mathcal{O} .

Sea $b > 0$ y $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ verificando $|f(x)| \leq e^{-b|x|}$. Se tiene que $f \in \mathcal{X}_s$ para todo $s > 0$. De acuerdo con la prueba del Teorema D.1 la función $G_1(x, y; k) = G(x, y; k)f(y)e^{s|y|}$ está en $L^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3, dv_s \otimes dv_s)$, para $b < s < 2b$ y $-\gamma_s < Imk < \gamma_s$. Luego F definida por:

$$(D.9) \quad F(x) = - \int_{\mathbb{R}^3} G(x, y; k)f(y)dy$$

también pertenece a \mathcal{X}_s . Sea el intervalo $\mathcal{A} = [\frac{a}{2}, 2a]$. Es claro que si $b \in \mathcal{A}$ se cumple $\mathcal{B}_b = (a, 2a) \cap (b, 2b) \neq \emptyset$, y en ese caso $\mathcal{B}_b = (a, 2b)$ ó $\mathcal{B}_b = (b, 2a)$. Considérese entonces

$b \in \mathcal{A}$ y $s \in \mathcal{B}_b$. El conjunto \mathcal{M}_s es el dado por el Teorema D.1 con $\gamma_s = c - \frac{s}{2}$, donde $c = \max\{a, b\}$. Para $k \in \mathcal{M}_s \setminus \mathcal{O}$ la ecuación (D.8) se transforma en la ecuación integral

$$(D.10) \quad \varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^3} G(x, y; k)(f(y) - V(y)\varphi(y))dy$$

la cual posee una única solución $\varphi \in \mathcal{X}_s$. Nótese lo siguiente:

En el caso $k \in \mathcal{M}_s^+ = \{w \in \mathcal{M}_s : \text{Im}w > 0\}$, para φ solución de (D.8) se tiene que $\varphi = L_k\varphi + F = (-\Delta - k^2)^{-1}(-V\varphi + f) \in \mathcal{H}^2(\mathbb{R}^3)$ es la única solución de

$$(D.11) \quad -\Delta\varphi + V(x)\varphi = k^2\varphi + f$$

de donde $\varphi = (-\Delta + V - k^2)^{-1}f$, o sea $(1 - L_k)^{-1}f = (-\Delta + V - k^2)^{-1}f$.

Esto significa que si $\mathcal{E} = \{f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C} : |f(x)| \leq e^{-b|x|}, b \in \mathcal{A}\}$, la aplicación $k \rightarrow (1 - L_k)^{-1}f$ restringida al conjunto \mathcal{M}_s^+ coincide con la resolvente $(-\Delta + V - k^2)^{-1}f$ cuando $f \in \mathcal{E}$. Equivalentemente,

La resolvente $(-\Delta + V - k^2)^{-1}f$ se puede extender meromorfa de \mathcal{M}_s^+ a \mathcal{M}_s^- con polos en el conjunto \mathcal{O} por medio de $(1 - L_k)^{-1}f$.

Notar que por la igualdad (D.3) $(-\Delta + V - k^2)^{-1} = (1 - L_{(-k)})^{-1}$ en \mathcal{M}_s^- luego $(-\Delta + V - k^2)^{-1} \neq (1 - L_k)^{-1}$ en \mathcal{M}_s^- .

Sea $k \in \mathcal{M}_s^- \setminus \mathcal{O}$ y $\varphi \in \mathcal{X}_s$ la única solución de la ecuación (D.10) para $f \in \mathcal{E}$ dada. La siguiente pregunta es razonable: ¿Es φ solución de la ecuación (D.11)?

Los números $k \in \mathcal{O}$, que son polos de la continuación meromorfa de la resolvente $(-\Delta + V - k^2)^{-1}$ desde \mathcal{M}_s^+ hacia \mathcal{M}_s^- , se denominan *resonancias*, y de acuerdo al Teorema de Fredholm existe $\varphi \in \mathcal{X}_s$ no trivial tal que $\varphi = L_k\varphi$, esto es:

$$(D.12) \quad \varphi(x) = - \int_{\mathbb{R}^3} G(x, y; k)V(y)\varphi(y)dy$$

La interrogante planteada es aquí la misma: ¿ φ solución de (D.12) cumple (D.11)?

Con el fin de dar una respuesta es conveniente estudiar la función $\tilde{F} = -F$ en (D.9).

Lema D.2 Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ con $|f(x)| \leq e^{-b|x|}$ para $b > 0$. Si $\text{Im}k > -b$ entonces \tilde{F} satisface $-\Delta\tilde{F} - k^2\tilde{F} = f$ en el sentido distribucional.

Demostración: Escójase s con $b < s < 2b$, se tiene que $\tilde{F} \in \mathcal{X}_s$, luego es una distribución. La prueba del lema sigue del hecho que la función $h(x, y) = G(x, y)\theta(x)f(y) \in L^1(B \times \mathbb{R}^3)$ donde $\theta \in C(\mathbb{R}^3)$ con soporte compacto $\text{sop}(\theta) \subseteq B = B(0, \rho)$. Para ver esto notar que $G(x, y) = G(y, x)$, y se tiene para $y \in \mathbb{R}^3$,

$$\int_B |G(x, y; k)\theta(x)|dx \leq M \int_B \frac{e^{-\text{Im}k|x-y|}}{4\pi|x-y|}dx = \frac{M}{4\pi} \int_{B(-y, \rho)} \frac{e^{-\text{Im}k|\xi|}}{|\xi|}d\xi$$

con $M = \sup_{x \in \bar{B}} |\theta(x)|$. Siendo $B(-y, \rho) \subseteq B(0, \rho + |y|)$ queda

$$\int_B |G(x, y; k)\theta(x)|dx \leq \frac{M}{4\pi} \int_{B(0, \rho+|y|)} \frac{e^{-\text{Im}k|\xi|}}{4\pi|\xi|}d\xi = M \int_0^{\rho+|y|} e^{-\text{Im}kr}rdr$$

Haciendo $d = -Imk$ se tiene,

$$\int_B |G(x, y; k)\theta(x)| dx \leq M \left\{ e^{d(\rho+|y|)} \left[\frac{1}{d}(\rho + |y|) - \frac{1}{d^2} \right] + \frac{1}{d^2} \right\}$$

luego

$$\int_{\mathbb{R}^3} \int_B |h(x, y; k)| dx dy \leq M \int_{\mathbb{R}^3} \left\{ e^{(d-b)|y|+d\rho} \left[\frac{1}{d}(\rho + |y|) - \frac{1}{d^2} \right] + \frac{1}{d^2} e^{-b|y|} \right\} dy < \infty$$

pues $d - b < 0$. Por el teorema de Fubini se concluye que $h \in L^1(B \times \mathbb{R}^3)$. Entonces si $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ se tiene por la propiedad iii) de la proposición D.1,

$$\langle (-\Delta - k^2)\tilde{F}, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} \left(\int_{\mathbb{R}^3} G(x, y; k)(-\Delta - k^2)\phi(x) dx \right) f(y) dy = \langle f, \phi \rangle$$

Así se cumple la ecuación. ■

Observación D.1 Sea $f \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$ con soporte compacto contenido en $B = B(0, R_0)$ y $T = \sup_{x \in B} |f(x)|$. Sea $c > 0$ tal que $T e^{aR_0} \leq c$. Para $b > 0$ dado se tiene, $\ln T + b|x| \leq \ln T + bR_0 \leq \ln c$, de donde $\ln(T/c) \leq -b|x|$, luego $T c^{-1} \leq e^{-b|x|}$. Así $|f(x)| \leq c e^{-b|x|}$, $x \in \mathbb{R}^3$.

El siguiente resultado se prueba como la proposición D.1:

Lema D.3 Sea $f \in L^2(\mathbb{R}^3)$ con soporte compacto contenido en un subconjunto B de \mathbb{R}^3 . Entonces se verifica $\tilde{F} \in C(B)$.

Sea $L_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ el conjunto de las funciones en $L^\infty(\mathbb{R}^3)$ con soporte compacto. La observación D.1 muestra que $L_0^\infty(\mathbb{R}^3) \subseteq \mathcal{E}$ (con inclusión estricta). Es posible dar respuesta la interrogante planteada:

Lema D.4 Sean $V, f \in L_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ ambas con soporte contenido en $B = B(0, R)$. Sea $\varphi \in \mathcal{X}_s$ y considerar $k \in \mathcal{M}_s^- \setminus \mathcal{O}$. Entonces φ solución de (D.10) implica que φ es solución de (D.11) en el sentido distribucional.

Demostración: Asíase φ es solución de (D.10). Como $g = -V(y)\varphi(y) + f(y) \in L^2(\mathbb{R}^3)$ es de soporte compacto se sigue por el lema D.3 que $\varphi \in C(B)$, luego $g \in L_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ y por lo tanto del lema D.2 se tiene que φ es solución de $-\Delta\varphi - k^2\varphi = f - V(x)\varphi$. De donde φ es solución de (D.11). ■

Observación D.2 Sea $V \in L_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ y $f \in L^2(\mathbb{R}^3)$ con soporte compacto contenido en B , donde $\text{sup}(V) \subseteq B$. Para φ una solución de (D.13) se tiene $-\Delta\varphi = (k^2 - V(x))\varphi + f \in L^2(B)$. Luego por regularidad de los operadores elípticos se deduce que $\varphi \in \mathcal{H}^2(B) \cap C^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus B)$, y en particular $\varphi \in C(B)$. Entonces se concluye: La única solución φ de (D.10) satisface $\varphi \in \mathcal{H}_{loc}^2(\mathbb{R}^3) \cap C(B) \cap C^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus B)$.

En el caso en que k es una resonancia, (esto es $k \in \mathcal{O}$), es posible mostrar también que φ dado en (D.12) satisface $\varphi \in C^1(B)$. Esto es consecuencia de:

Lema D.5 Sea $f \in L_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ con soporte contenido en B . Entonces $\tilde{F} \in C^1(B)$.

Observación D.3 Es importante tener presente que la diferenciabilidad obtenida por φ en el lema anterior no es posible de lograr con los argumentos empleados en la observación D.2 para deducir que $\varphi \in \mathcal{H}_{loc}^2(\mathbb{R}^3)$.

A continuación se realiza un estudio de la representación (D.12).

Lema D.6 Sea $x \in \mathbb{R}^3$ y $\tilde{x} = \frac{x}{|x|}$. Se cumple

$$(D.13) \quad |x - y| = \sqrt{|x|^2 - 2\tilde{x} \cdot y + |y|^2} = |x| - x \cdot y + O\left(\frac{1}{|x|}\right)$$

uniformemente en $|y| \leq R$.

Sea $B = B(0, R)$ y $f \in L^1(B)$. Del lema D.6 es posible considerar una función $A(x, y)$ tal que $A(x, y) = O(1)$ cuando $|x|$ tiende al infinito uniformemente en $|y| \leq R$. Se sigue para $|x|$ grande $\frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} = \frac{e^{ik|x|}}{|x|} \frac{|x|}{|x-y|} e^{ikA(x,y)}$. Entonces la función \tilde{F} dada en (D.9) se reescribe como,

$$(D.14) \quad \tilde{F}(x) = \frac{e^{ik|x|}}{|x|} Q(x), \quad \text{donde } Q(x) = \int_B \frac{|x|}{|x-y|} e^{ikA(x,y)} f(y) dy$$

cuando $|x|$ es grande. En tal caso se verifica que $\frac{|x|e^{ikA(x,y)}}{|x-y|} \leq 2e^{\pm Imk(k+R^2)}$, donde el signo negativo (positivo) es tomado si $Imk < 0$ ($Imk > 0$). Por lo tanto $|Q(x)| \leq 2e^{\pm Imk(2R+R^2)} \|f\|_{L^1(B)}$, y $Q(x)$ es acotada en una vecindad del infinito. Así se llega a la expresión

$$(D.15) \quad \tilde{F}(x) = O\left(\frac{e^{ik|x|}}{|x|}\right), \quad |x| \rightarrow \infty$$

Observación D.4 Se puede mostrar que la función $Q(x)$ definida en (D.14) no posee un comportamiento definido en el infinito. Concretamente: $\lim_{|x| \rightarrow \infty} Q(x)$ no existe.

Apéndice E

Análisis del espectro del operador U_θ : detalles técnicos

Este apéndice tiene por objetivo establecer los resultados que permiten justificar las afirmaciones relativas al espectro del operador $U_\theta(w)$, como por ejemplo que $\sigma_{disc}(U_\theta) = \sigma_{pp}(U) \cap \mathbb{S}$ (sección 2). Esto se logra estudiando las propiedades más relevantes que posee un vector analítico φ (sección 1). También (sección 4) se considera la derivada de Radon-Nikodym asociada a un vector ϕ para un operador unitario U arbitrario, proporcionándose una caracterización de esta función mediante el operador resolvente de U . Esto juega un papel crucial en el cálculo de $\langle \psi_0, U(w)^k \psi_0 \rangle$, con $k \in \mathbb{Z}$.

E.1 Propiedades del vector analítico. Ejemplos

Sea $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ un vector unitario en \mathbb{R}^n . El objetivo es analizar la existencia de una función φ que cumpla las propiedades:

- I) φ se anula en el conjunto $\mathcal{R} = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} \mathcal{R}_m$, donde $\mathcal{R}_m = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{j=1}^n v_j x_j = \hat{\rho}_m\}$, $\hat{\rho}_m = -T^{-1}(E_0 + 2m\pi)$.
- II) La función φ es analítica en todo \mathbb{C}^n , y para $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ con $\|z\|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + \dots + |z_n|^2$, se tiene

$$(E.1) \quad \lim_{\|z\| \rightarrow \infty, z \in \mathcal{C}_\varepsilon} \|z\|^k |\varphi(z)| = 0$$

para todo $k \in \mathbb{N}$, donde \mathcal{C}_ε es el conjunto $\mathcal{C}_\varepsilon = \mathcal{C}_\varepsilon^n = \mathcal{C}_\varepsilon \times \mathcal{C}_\varepsilon \times \dots \times \mathcal{C}_\varepsilon$ con \mathcal{C}_ε dado por $\mathcal{C}_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} z| \leq (1 - \varepsilon)|\operatorname{Re} z|\}$, $0 < \varepsilon < 1$.

La función φ analítica en \mathbb{C}^n es equivalente a que φ sea analítica en cada variable separadamente [38]. Para $z = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathcal{C}_\varepsilon$, se verifica $\|z\|^2 \leq (1 - \varepsilon)^2 \|\operatorname{Re} z\|^2$. Entonces $\|z\| \rightarrow \infty$ implica $\|\operatorname{Re} z\| \rightarrow \infty$.

Sea $J = \{j_1, j_2, \dots, j_s\} \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$. Considérese la descomposición $\mathbb{C}^n = \mathbb{C}^{n-s} \times \mathbb{C}^s$ en el sentido que todo elemento $z \in \mathbb{C}^n$ se escribe como $z = (\tilde{z}, z_J)$ donde $\tilde{z} = (z_{l_1}, z_{l_2}, \dots, z_{l_{n-s}}) \in \mathbb{C}^{n-s}$ y $z_J = (z_{j_1}, z_{j_2}, \dots, z_{j_s}) \in \mathbb{C}^s$.

Sea $\eta > 0$, la condición (E.1) implica que existe $R > 0$ tal que $|\varphi(z)| \leq \eta \|z\|^{-k}$ para todo $z \in C_\varepsilon$, $\|z\|^2 > R$. Entonces,

$$(E.2) \quad |\varphi(z)| = |\varphi(\tilde{z}, z_J)| \leq \eta \|\tilde{z}\|^{-k}$$

para todo $z_J \in \mathbb{C}^s$ si $\tilde{z} \in \mathbb{C}^{n-s}$ verifica $\|\tilde{z}\|^2 > R$. En particular esto es cierto si $|z_{l_m}|^2 > R$ con $m = 1, \dots, n-s$.

La semifranja $L = \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Re} z| > R, |\operatorname{Im} z| < (1-\varepsilon)R\}$ esta contenida en C_ε .

Sea $\kappa < (1-\varepsilon)R$. Para $w \in \mathbb{R}$ con $|w| > (3-\varepsilon)R$ se tiene que $D_w = D(w, \kappa)$, el disco abierto de centro w y radio κ , esta incluido en el conjunto $[w - \kappa, w + \kappa] \times [-\kappa, \kappa]$, y por lo tanto en L .

De acuerdo con la notación anterior para $\tilde{w} = (w_{l_1}, w_{l_2}, \dots, w_{l_{n-s}}) \in \mathbb{C}^{n-s}$ asúmase

$$(E.3) \quad |w_{l_m}| > (3-\varepsilon)R, \quad m = 1, \dots, n-s$$

Entonces el polidisco

$$\mathcal{D}_{\tilde{w}} = \{(z_{l_1}, z_{l_2}, \dots, z_{l_{n-s}}) \in \mathbb{C}^{n-s} : |z_{l_m} - w_{l_m}| < \kappa, 1 \leq m \leq n-s\}$$

centrado en \tilde{w} satisface $\mathcal{D}_{\tilde{w}} \subseteq L^{n-s} = L \times \dots \times L$. Considerese $\mathcal{D}_w = \mathcal{D}_{\tilde{w}} \times \mathcal{D}_{w_J}$ el polidisco centrado en $w = (\tilde{w}, w_J) \in \mathbb{R}^n$. Por la analiticidad de $\varphi(z)$, se sigue de la fórmula integral de Cauchy [38],

$$\frac{\partial \varphi}{\partial w_{j_r}}(\tilde{w}, w_J) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int_{\gamma} \int_{\gamma_{j_1}} \dots \int_{\gamma_{j_s}} \frac{\varphi(\tilde{z}, z_{j_1}, \dots, z_{j_r}, \dots, z_{j_s}) dz_{j_1} \dots dz_{j_r} \dots dz_{j_s} d\tilde{z}}{(\tilde{z} - \tilde{w})(z_{j_1} - w_{j_1}) \dots (z_{j_r} - w_{j_r})^2 \dots (z_{j_s} - w_{j_s})}$$

para todo $r = 1, \dots, s$, donde $\gamma_p(t) = w_p + \kappa e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, $p = 1, \dots, n$, $\gamma(t) = (\gamma_{l_1}(t), \dots, \gamma_{l_{n-s}}(t))$, $(\tilde{z} - \tilde{w}) = (z_{l_1} - w_{l_1}) \dots (z_{l_{n-s}} - w_{l_{n-s}})$ y $d\tilde{z} = dz_{l_1} \dots dz_{l_{n-s}}$. Denotando

$$\begin{aligned} |(\tilde{z} - \tilde{w})| &= |z_{l_1} - w_{l_1}| \dots |z_{l_{n-s}} - w_{l_{n-s}}| \\ \gamma(t) &= (\gamma_{l_1}(t), \dots, \gamma_{l_{n-s}}(t)), \quad t = (t_{l_1}, \dots, t_{l_{n-s}}) \\ |(\gamma(t) - \tilde{w})| &= |\gamma_{l_1}(t_{l_1}) - w_{l_1}| \dots |\gamma_{l_{n-s}}(t_{l_{n-s}}) - w_{l_{n-s}}| \end{aligned}$$

se tiene,

$$\begin{aligned} &\int_{\gamma} \int_{\gamma_{j_1}} \dots \int_{\gamma_{j_s}} \frac{|\varphi(\tilde{z}, z_{j_1}, \dots, z_{j_r}, \dots, z_{j_s})| |dz_{j_1}| \dots |dz_{j_r}| \dots |dz_{j_s}| |d\tilde{z}|}{|(\tilde{z} - \tilde{w})| |z_{j_1} - w_{j_1}| \dots |z_{j_r} - w_{j_r}|^2 \dots |z_{j_s} - w_{j_s}|} \leq VAR \times \\ &\times \sup_{(t, t_J) \in [0, 2\pi]^n} \frac{|\varphi(\gamma(t), \gamma_{j_1}(t_{j_1}), \dots, \gamma_{j_r}(t_{j_r}), \dots, \gamma_{j_s}(t_{j_s}))|}{|(\gamma(t) - \tilde{w})| |\gamma_{j_1}(t_{j_1}) - w_{j_1}| \dots |\gamma_{j_r}(t_{j_r}) - w_{j_r}|^2 \dots |\gamma_{j_s}(t_{j_s}) - w_{j_s}|} \end{aligned}$$

con $VAR = Var(\gamma_1) \dots Var(\gamma_n)$, donde $Var(\gamma_p)$ es la variación total de la curva γ_p , que en este caso es igual a $2\pi\kappa$ y $t_J = (t_{j_1}, \dots, t_{j_s})$. De la condición (E.3) se tiene que $\gamma_{l_m} \subseteq L$ y además

$|\gamma_m(t)| \geq |w_{l_m}| - \kappa > (3 - \varepsilon)R - (1 - \varepsilon)R = (2 - \varepsilon)R > R$, para todo $t \in [0, 2\pi]$.
Entonces de (E.2) queda,

$$\begin{aligned} & \frac{|\varphi(\gamma(t), \gamma_{j_1}(t_{j_1}), \dots, \gamma_{j_r}(t_{j_r}), \dots, \gamma_{j_s}(t_{j_s}))|}{|(\gamma(t) - \tilde{w})| |\gamma_{j_1}(t_{j_1}) - w_{j_1}| \cdots |\gamma_{j_r}(t_{j_r}) - w_{j_r}|^2 \cdots |\gamma_{j_s}(t_{j_s}) - w_{j_s}|} = \\ & = \frac{1}{\kappa^{n+1}} |\varphi(\gamma(t), \gamma_{j_1}(t_{j_1}), \dots, \gamma_{j_r}(t_{j_r}), \dots, \gamma_{j_s}(t_{j_s}))| \leq \frac{\eta}{\kappa^{n+1}} \|\gamma(t)\|^{-k} \end{aligned}$$

el cual esta acotado por $\frac{\eta}{\kappa^{n+1}} ((|w_{l_1}| - \kappa)^2 + \cdots + (|w_{l_{n-s}}| - \kappa)^2)^{-k/2}$. Así, para todo $w_j \in \mathbb{C}^s$

$$(E.4) \quad \left| \frac{\partial \varphi}{\partial w_{j_r}}(\tilde{w}, w_j) \right| \leq (|w_{l_1}| - \kappa)^2 + \cdots + (|w_{l_{n-s}}| - \kappa)^2)^{-k/2}, \quad r = 1, 2, \dots, s$$

En general, sea $\iota = (i_1, \dots, i_{n-s}, i_{n-s+1}, \dots, i_n) = (\tilde{\iota}, \iota_J)$ un multíndice con $|\iota| = i_1 + \cdots + i_n = |\tilde{\iota}| + |\iota_J|$, $\iota! = (i_1!) \cdots (i_n!) = \tilde{\iota}! \iota_J!$. Haciendo,

$$\begin{aligned} (\tilde{z} - \tilde{w})^{\tilde{\iota}} &= (z_{l_1} - w_{l_1})^{i_1+1} \cdots (z_{l_{n-s}} - w_{l_{n-s}})^{i_{n-s}+1} \\ (z_J - w_J)^{\iota_J} &= (z_{j_1} - w_{j_1})^{i_{n-s+1}+1} \cdots (z_{j_s} - w_{j_s})^{i_n+1} \end{aligned}$$

y $\gamma(t) = (\gamma_{j_1}(t), \dots, \gamma_{j_s}(t))$, se tiene

$$\partial^\iota \varphi(\tilde{w}, w_j) = \frac{\partial^{|\iota|} \varphi(\tilde{w}, w_j)}{\partial \tilde{w}^{|\tilde{\iota}|} \partial w_j^{|\iota_J|}} = \iota! \left(\frac{1}{2\pi i} \right)^n \int_{\gamma} \int_{\gamma} \frac{\varphi(\tilde{z}, z_J) dz_J d\tilde{z}}{(\tilde{z} - \tilde{w})^{\tilde{\iota}} (z_J - w_J)^{\iota_J}}$$

se razona como antes, y se obtiene

$$(E.5) \quad |\partial^\iota \varphi(\tilde{w}, w_j)| \leq \frac{\iota! \eta}{\kappa^{|\iota|}} ((|w_{l_1}| - \kappa)^2 + \cdots + (|w_{l_{n-s}}| - \kappa)^2)^{-k/2}$$

para todo $w_j \in \mathbb{C}^s$. De esto se sigue que si $k \geq 2$, y $\rho = (3 - \varepsilon)R$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{n-s} \setminus [-\rho, \rho]^{n-s}} |\partial^\iota \varphi(\tilde{x}, x_J)| dx_{l_1} \cdots dx_{l_{n-s}} &= \int_{|x_{l_1}| > \rho} \cdots \int_{|x_{l_{n-s}}| > \rho} |\partial^\iota \varphi(\tilde{x}, x_J)| dx_{l_1} \cdots dx_{l_{n-s}} \\ &\leq \frac{\iota! \eta}{\kappa^{|\iota|}} \int_{|x_{l_1}| > \rho} \cdots \int_{|x_{l_{n-s}}| > \rho} \frac{dx_{l_1} \cdots dx_{l_{n-s}}}{((|x_{l_1}| - \kappa)^2 + \cdots + (|x_{l_{n-s}}| - \kappa)^2)^{k/2}} \end{aligned}$$

De donde $\partial^\iota \varphi(\cdot, x_J) \in L^p(\mathbb{R}^{n-s})$ para todo $p > 1$. En particular $\varphi(\cdot, x_J) \in W^{m,p}(\mathbb{R}^{n-s})$, $m \in \mathbb{N}$. Notar que en el caso $s = 0$ la suposición (E.3) es cierta para todo $j = 1, 2, \dots, n$. De esto se tiene

$$|\partial^\iota \varphi(w)| \leq \frac{\iota! \eta}{\kappa^{|\iota|}} ((|w_1| - \kappa)^2 + \cdots + (|w_n| - \kappa)^2)^{-k/2}$$

concluyéndose que $\varphi \in W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$, $m \in \mathbb{N}$.

Un ejemplo:

Sea $n = 1$. Considérese $\alpha > 0$. La función $\varphi(z) = e^{-\alpha z^2} \sin z$ cumple (E.1). Para ver

esto notar que $|e^{-\alpha z^2}| \leq e^{-\alpha[\varepsilon(2-\varepsilon)](\operatorname{Re}z)^2}$. Por su parte $|\sin z| \leq \frac{1}{2}(e^{-\operatorname{Im}z} + e^{\operatorname{Im}z})$. Como en el conjunto C_ε se cumple $\pm \operatorname{Im}z \leq (1-\varepsilon)|\operatorname{Re}z|$, se obtiene

$$|\varphi(z)| \leq \frac{1}{2} e^{-\alpha[\varepsilon(2-\varepsilon)](\operatorname{Re}z)^2 + (1-\varepsilon)|\operatorname{Re}z|}$$

Ahora, $|z|^2 = (\operatorname{Re}z)^2 + (\operatorname{Im}z)^2 \leq [1 - (1-\varepsilon)^2](\operatorname{Re}z)^2$. Entonces $|z| \rightarrow \infty$ implica $|\operatorname{Re}z| \rightarrow \infty$. Luego $-\alpha[\varepsilon(2-\varepsilon)](\operatorname{Re}z)^2 + (1-\varepsilon)|\operatorname{Re}z| \rightarrow 0$, con lo que se obtiene (E.1). La función $\varphi(z) = e^{-\alpha z^2} \sin(Tz + E_0)$ satisface las propiedades I) y II). Sin embargo $\varphi(z)$ también se anula en la sucesión $\rho_m^* = -T^{-1}(E_0 + (2m+1)\pi)$. Observar que todos sus ceros son de orden uno. Se desea una función que solamente tenga ρ_m por ceros y que cumpla (E.1). Para lograr esto se procede de la siguiente forma:

Es conocido (teorema de la factorización de Weierstrass [10]),

$$(E.6) \quad \sin z = z \prod_{-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\pi n}\right) e^{\frac{z}{\pi n}} = z \prod_{-\infty}^{\infty} E_1\left(\frac{z}{\pi n}\right) = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\pi^2 n^2}\right)$$

donde $E_1(z) = (1-z)e^z$, y la prima significa que el valor $n=0$ no se considera. El producto infinito converge absoluta y uniformemente en compactos de \mathbb{C} . Se tiene,

$$(E.7) \quad \sin z = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\pi^2 (2n)^2}\right) \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\pi^2 (2n-1)^2}\right)$$

La función $q(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\pi^2 (2n-1)^2}\right)$, es analítica en todo \mathbb{C} y se anula en los puntos $(2m-1)\pi$, $m \in \mathbb{Z}$. De esto se sigue que,

$$(E.8) \quad P(z) = \frac{\sin z}{q(z)} = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\pi^2 (2n)^2}\right) = z \prod_{-\infty}^{\infty} E_1\left(\frac{z}{2\pi n}\right)$$

es analítica en todo \mathbb{C} y se anula en los puntos $2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$. Se puede probar (véase [10] capítulo XII)

Afirmación: Dado $\beta > 0$ existe $r_0 > 0$ tal que para todo $|z| \geq r_0$,

$$(E.9) \quad |P(z)| \leq |z| e^{\beta|z|^2}$$

De (A.9) se desprende que $|e^{-\alpha z^2} P(z)| \leq |z| e^{-\alpha[1-(1-\varepsilon)^2](\operatorname{Re}z)^2} e^{\beta|z|^2}$ si $|z| > r_0$. Pero $-\alpha[1-(1-\varepsilon)^2](\operatorname{Re}z)^2 + \beta|z|^2 \leq \{-\alpha[1-(1-\varepsilon)^2] + \beta[1+(1-\varepsilon)^2]\}(\operatorname{Re}z)^2$. Entonces si $\beta < \alpha \frac{1-(1-\varepsilon)^2}{1+(1-\varepsilon)^2}$, se sigue que

$$|e^{-\alpha z^2} P(z)| \leq |z| e^{\Gamma(\operatorname{Re}z)^2}, \quad |z| > r_0$$

con $\Gamma = -\alpha[1-(1-\varepsilon)^2] + \beta[1+(1-\varepsilon)^2] < 0$, obteniéndose de esto (E.1). En consecuencia la función $\varphi(z) = e^{-\alpha z^2} P(Tz + E_0)$ cumple las propiedades I)- II).

En el caso $n > 1$, si $z = (z_1, \dots, z_n) \in C_\varepsilon$ se tiene que $|e^{-\alpha(z_1^2 + \dots + z_n^2)}| \leq e^{-\alpha[1-(1-\varepsilon)^2]\|\operatorname{Re}z\|}$, además $|\operatorname{Im}(v_1 z_1 + \dots + v_n z_n)| \leq (1-\varepsilon)\|\operatorname{Re}z\|$, por lo tanto se concluye que la función

$$(E.10) \quad \varphi(z) = e^{-\alpha(z_1^2 + \dots + z_n^2)} \sin(v_1 z_1 + \dots + v_n z_n)$$

cumple I) y II). Al igual que en el caso de una variable esta función se anula también en los conjuntos $\mathcal{R}_m^* = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : v_1 x_1 + \dots + v_n x_n = \rho_m^*\}$, con ρ_m^* como antes, y queda el problema de encontrar una función que solo se anule en \mathcal{R} . El candidato natural es,

$$(E.11) \quad \tilde{P}(z_1, z_2, \dots, z_n) = P(v_1 z_1 + v_2 z_2 + \dots + v_n z_n)$$

donde $P(z)$ es dado en (E.8). Se verifica que \tilde{P} es una función analítica en todo \mathbb{C}^n con valores en \mathbb{C} . Obsérvese que $F(z) = F(z_1, z_2, \dots, z_n) = v_1 z_1 + v_2 z_2 + \dots + v_n z_n$ es un funcional lineal en \mathbb{C}^n , por lo tanto $F(\mathbb{C}^n) = \mathbb{C}$. Sin embargo cuando $\|z\| \rightarrow \infty$ el límite de $F(z)$ no existe. Luego no es posible aplicar la desigualdad (E.9). El problema de existencia queda *pendiente*.

E.2 Algunas identidades generales

Sea $z_0 = r_0 e^{iE_0}$. Para φ un vector analítico en $L^2(\mathbb{R}^n)$ se define la función:

$$(E.12) \quad h(z) = \frac{e^{-iTv \cdot z} \overline{\varphi(\bar{z})} \varphi(z)}{e^{-iTv \cdot z} - z_0}, \quad z \in \mathbb{C}^n$$

donde $v = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ es un vector unitario. El objetivo es estudiar los valores de

$$(E.13) \quad \int_{\mathbb{R}^n} h(x - \theta v) dx$$

para $\theta \in S_a = D(0, a) \subseteq \mathbb{C}$ con $Im\theta \neq 0$. La integral (E.13) se puede reescribir como

$$(E.14) \quad \int_{\mathbb{R}^n} h(y - i\epsilon v) dy$$

donde $\epsilon = Im\theta$ se asume positivo.

Del hecho que

$$e^{-iTv \cdot (y - i\epsilon v)} = \prod_{k=1}^n e^{-iTv_k (y_k - i\epsilon v_k)}$$

se sigue que (E.14) se puede expresar como integrales iteradas y basta considerar la integración con respecto a las variables y_k tales que $v_k \neq 0$. Esto sugiere que la integral se debe analizar en el caso de una variable, o sea para la función

$$(E.15) \quad h(z) = \frac{e^{-iTvz} \overline{\varphi(\bar{z})} \varphi(z)}{e^{-iTvz} - z_0}$$

con $z \in \mathbb{C}$ y $v \in \mathbb{R}$ no nulo. Nótese que $|e^{-iTv(y - i\epsilon v)}| = e^{-T\epsilon v^2}$. Entonces que el denominador de $h(y - i\epsilon v)$ en (E.15) sea no nulo depende de la elección de r_0 . Aquí se consideran valores de r_0 en el conjunto $(0, e^{-T\epsilon v^2}) \cup [1, +\infty)$. También se está interesado en estudiar los valores de (E.14) para funciones en \mathbb{C}^n del tipo

$$h_p(z) = \frac{e^{-iTvz} \overline{\varphi(\bar{z})} \varphi(z)}{(e^{-iTvz} - z_0)^p}, \quad \text{donde } p = 2, 3 \text{ y } r_0 = 1$$

E.2.1 El caso $n = 1$.

I) $r_0 > 1$:

Asúmase $v > 0$. Se verifica que $h(z)$ es analítica en la región $\mathcal{A} = \{z : \text{Im}z < (Tv)^{-1} \ln r_0\}$ la cual contiene al eje real. Sea $I_m = (-m - \frac{\pi}{Tv}, m - \frac{\pi}{Tv})$, se define la curva

$$(E.16) \quad \Gamma_m = \gamma_{1,m} + \gamma_{2,m} + \gamma_{3,m} - \gamma_{4,m}$$

donde $\gamma_{1,m}(t) = t$, $t \in I_m$, $\gamma_{2,m}(t) = m - \frac{\pi}{Tv} - it$, $t \in [0, v\epsilon]$, $\gamma_{3,m}(t) = t - i\epsilon v$, $t \in I_m$ y $\gamma_{4,m}(t) = -m - \frac{\pi}{Tv} - it$, $t \in [0, v\epsilon]$. Es claro que $\Gamma_m \subseteq \mathcal{A}$.
Siendo $e^{-iTv(\pm m - \frac{\pi}{Tv} - it)} = (-1)e^{-Tvt \mp i\epsilon vm}$ se obtiene,

$$h(\gamma_{j,m}(t)) = e^{-Tvt \mp i\epsilon vm} \frac{\varphi(\pm m - \frac{\pi}{Tv} + it)\varphi(\pm m - \frac{\pi}{Tv} - it)}{e^{-Tvt \mp i\epsilon vm} + z_0}, \quad j = 2, 4.$$

luego se deduce que

$$\left| \int_{\gamma_{j,m}} h(z) dz \right| \leq \int_0^{v\epsilon} \frac{|\varphi(\pm m - \frac{\pi}{Tv} + it)| |\varphi(\pm m - \frac{\pi}{Tv} - it)| dt}{r_0 - 1}$$

Por la propiedad del vector analítico φ (E.1),

$$(E.17) \quad |\varphi(\pm m - \frac{\pi}{Tv} \pm it)| \leq C |\pm m - \frac{\pi}{Tv} \pm it|^{-k} \leq C |\pm m - \frac{\pi}{Tv}|^{-k}$$

para $|m|$ grande y $k \in \mathbb{N}$, de donde

$$\left| \int_{\gamma_{j,m}} h(z) dz \right| \leq v\epsilon C |\pm m - \frac{\pi}{Tv}|^{-2k}$$

Así,

$$(E.18) \quad \lim_{|m| \rightarrow \infty} \int_{\gamma_{j,m}} h(z) dz = 0, \quad j = 2, 4.$$

Por el teorema de Cauchy se tiene,

$$0 = \int_{-m - \frac{\pi}{Tv}}^{m - \frac{\pi}{Tv}} h(x) dx + \int_{\gamma_{2,m}} h(z) dz - \int_{-m - \frac{\pi}{Tv}}^{m - \frac{\pi}{Tv}} h(x - i\epsilon v) dx + \int_{\gamma_{4,m}} h(z) dz$$

Entonces tomando límite,

$$0 = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{-m - \frac{\pi}{Tv}}^{m - \frac{\pi}{Tv}} h(x) dx - \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{-m - \frac{\pi}{Tv}}^{m - \frac{\pi}{Tv}} h(x - i\epsilon v) dx$$

La propiedad del vector analítico φ implica que $h(x)$, $h(\cdot - i\epsilon v) \in L^1(\mathbb{R})$, luego

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{-m - \frac{\pi}{Tv}}^{m - \frac{\pi}{Tv}} h(x - i\epsilon v) dx = \int_{-\infty}^{\infty} h(x - i\epsilon v) dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} h(x) dx = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{-m - \frac{\pi}{Tv}}^{m - \frac{\pi}{Tv}} h(x) dx$$

Así

$$(E.19) \quad \int_{-\infty}^{\infty} h(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} h(x - iv\epsilon)dx$$

En el caso que $v < 0$ la función $h(z)$ es analítica en la región $\tilde{A} = \{z : Imz > (Tv)^{-1} \ln r_0\}$ que contiene al eje real. Para la curva $\tilde{\Gamma}_m = \gamma_{1,m} + \tilde{\gamma}_{2,m} + \tilde{\gamma}_{3,m} - \tilde{\gamma}_{4,m}$ con $\gamma_{1,m}(t)$ como antes y $\tilde{\gamma}_{2,m}(t) = m - \frac{\pi}{Tv} + it$, $t \in [0, |v|\epsilon]$, $\tilde{\gamma}_{3,m}(t) = t - i\epsilon v$, $t \in I_m$, $\tilde{\gamma}_{4,m}(t) = -m - \frac{\pi}{Tv} + it$, $t \in [0, |v|\epsilon]$, los mismos calculos permiten obtener (E.19).

II) $0 < r_0 < e^{-T\epsilon v^2}$:

Sea $v > 0$. La función $h(z)$ es analítica en la región \tilde{A} que contiene al eje real. La curva Γ_m dada en (E.16) satisface $\Gamma_m \subseteq \tilde{A}$. Luego el mismo razonamiento empleado antes permite concluir que (E.19) se cumple. El caso $v < 0$ es similar.

II) $r_0 = 1$:

Sea $v > 0$. En general, la función $h(z)$ es meromorfa en \mathbb{C} con polos en $\rho_m = -(Tv)^{-1}(E_0 + 2m\pi)$, $m \in \mathcal{J}$ para $\mathcal{J} \subseteq \mathbb{Z}$, los cuales son simples.

Sea $I_m = [\rho_m - \frac{\pi}{Tv}, \rho_m + \frac{\pi}{Tv}]$. Notando que $\rho_m - \frac{\pi}{Tv} = \rho_{m+1} + \frac{\pi}{Tv}$ se tiene $\mathbb{R} = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} I_m$. Para $\delta < v\epsilon$ se define la curva,

$$(E.20) \quad \Gamma_m = -\gamma_{1,m} - \gamma_{2,m} - \gamma_{3,m} + \gamma_{4,m} + \gamma_{5,m} - \gamma_{6,m}$$

donde $\gamma_{1,m}(t) = t$, $t \in [\rho_m + \delta, \frac{\pi}{Tv} + \rho_m]$, $\gamma_{2,m}(t) = \rho_m + \delta e^{it}$, $t \in [\pi, 2\pi]$, $\gamma_{3,m}(t) = t$, $t \in [-\frac{\pi}{Tv} + \rho_m, \rho_m - \delta]$, $\gamma_{4,m}(t) = -\frac{\pi}{Tv} + \rho_m - it$, $t \in [0, v\epsilon]$, $\gamma_{5,m}(t) = t - iv\epsilon$, $t \in [-\frac{\pi}{Tv} + \rho_m, \frac{\pi}{Tv} + \rho_m]$, $\gamma_{6,m}(t) = \frac{\pi}{Tv} + \rho_m - it$, $t \in [0, v\epsilon]$.
Notar que $e^{i(E_0 + Tv(\pm \frac{\pi}{Tv} + \rho_m - it))} = -e^{Tvt}$. De esto se sigue,

$$h(\gamma_{j,m}(t)) = \frac{\overline{\varphi(\mp \frac{\pi}{Tv} + \rho_m + it)} \varphi(\pm \frac{\pi}{Tv} + \rho_m - it)}{1 + e^{Tvt}}, \quad j = 4, 6.$$

luego

$$\left| \int_{\gamma_{j,m}} h(z)dz \right| \leq \int_0^{v\epsilon} \frac{|\varphi(\mp \frac{\pi}{Tv} + \rho_m + it)| |\varphi(\pm \frac{\pi}{Tv} + \rho_m - it)|}{1 + e^{Tvt}} dt$$

La desigualdad (E.17) también se cumple aquí (con ρ_m en vez de m), de donde

$$\left| \int_{\gamma_{j,m}} h(z)dz \right| \leq v\epsilon Const \left| \mp \frac{\pi}{Tv} + \rho_m \right|^{-2k}$$

obteniéndose (E.18). Por otro lado, si $m \in \mathcal{J}$ se tiene en una vecindad de $z = \rho_m$,

$$h(z) = \frac{Res(h(z))|_{z=\rho_m}}{z - \rho_m} + f(z)$$

con $f(\cdot)$ analítica en $z = \rho_m$. Entonces

$$\int_{\gamma_{2,m}} h(z)dz = Res(h(z))|_{z=\rho_m} \cdot \int_{\gamma_{2,m}} \frac{dz}{z - \rho_m} + \int_{\gamma_{2,m}} f(z)dz$$

Como

$$(z - \rho_m)h(z) = \frac{(z - \rho_m)}{e^{-iT\nu} - e^{-iT\nu\rho_m}} e^{-iT\nu z} \overline{\varphi(\bar{z})} \varphi(z)$$

se sigue que $\text{Res}(h(z))|_{z=\rho_m} = \lim_{z \rightarrow \rho_m} (z - \rho_m)h(z) = \frac{1}{-iT\nu} |\varphi(\rho_m)|^2$. De donde

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\gamma_{2,m}} h(z) dz = \text{Res}(h(z))|_{z=\rho_m} \cdot i\pi = -\frac{\pi}{T\nu} |\varphi(\rho_m)|^2$$

luego

$$(E.21) \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\gamma_{2,m}} h(z) dz = -\frac{\pi}{T} |\varphi(\rho_m)|^2$$

Notar que para $m \notin \mathcal{J}$ la igualdad anterior es también verdadera.

Sea la curva $\Upsilon_{m,\delta,\bar{\delta}} = -\alpha_1 - \gamma_{2,m} - \alpha_2 + \tilde{\gamma}_{2,m}$, donde $\tilde{\gamma}_{2,m}(t) = \rho_m + \bar{\delta}e^{it}$, $t \in [\pi, 2\pi]$, con $\delta < \bar{\delta} < \nu\epsilon$, $\alpha_1(t) = t$, $t \in [\rho_m + \delta, \rho_m + \bar{\delta}]$, y $\alpha_2(t) = t$, $t \in [\rho_m - \bar{\delta}, \rho_m - \delta]$. Se tiene por el teorema de Cauchy,

$$0 = \int_{\Upsilon_{m,\delta,\bar{\delta}}} h(z) dz = - \int_{\alpha_1} h(z) dz - \int_{\tilde{\gamma}_{2,m}} h(z) dz - \int_{\alpha_2} h(z) dz + \int_{\gamma_{2,m}} h(z) dz$$

luego,

$$\int_{\rho_m + \delta}^{\rho_m + \bar{\delta}} h(t) dt + \int_{\rho_m - \bar{\delta}}^{\rho_m - \delta} h(t) dt = \int_{\tilde{\gamma}_{2,m}} h(z) dz - \int_{\gamma_{2,m}} h(z) dz$$

y de (E.21) se sigue,

$$\lim_{\delta, \bar{\delta} \rightarrow 0} \int_{\rho_m + \delta}^{\rho_m + \bar{\delta}} h(t) dt + \int_{\rho_m - \bar{\delta}}^{\rho_m - \delta} h(t) dt = 0$$

por lo tanto

$$V.P. \int_{\rho_m - \frac{\pi}{T\nu}}^{\frac{\pi}{T\nu} + \rho_m} h(t) dt = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \int_{\rho_m + \delta}^{\rho_m + \frac{\pi}{T\nu}} h(t) dt + \int_{\rho_m - \frac{\pi}{T\nu}}^{\rho_m - \delta} h(t) dt \right\}$$

existe para todo $m \in \mathbb{N}$. Entonces,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{-\gamma_{1,m} - \gamma_{2,m} - \gamma_{3,m}} h(z) dz = -V.P. \int_{\rho_m - \frac{\pi}{T\nu}}^{\rho_m + \frac{\pi}{T\nu}} h(t) dt + \frac{\pi}{T\nu} |\varphi(\rho_m)|^2$$

luego

$$(E.22) \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{-\gamma_{1,m} + \gamma_{2,m} - \gamma_{3,m}} h(z) dz = -V.P. \int_{\rho_m - \frac{\pi}{T\nu}}^{\rho_m + \frac{\pi}{T\nu}} h(t) dt + \frac{\pi}{T\nu} |\varphi(\rho_m)|^2$$

Del hecho que la integral de $h(z)$ a lo largo de la curva Γ_m es cero, al tomar límite cuando δ tiende a cero se verifica:

$$(*) \quad 0 = -V.P. \int_{\rho_m - \frac{\pi}{T\nu}}^{\rho_m + \frac{\pi}{T\nu}} h(t) dt + \frac{\pi}{T\nu} |\varphi(\rho_m)|^2 + \int_{\gamma_{4,m} + \gamma_{5,m} - \gamma_{6,m}} h(z) dz$$

Sea la curva $\Lambda_N = \Gamma_{-N} + \Gamma_{-(N-1)} + \cdots + \Gamma_{N-1} + \Gamma_N$ con $N \geq 1$. Por las respectivas cancelaciones se tiene que Λ_N es la curva cerrada

$$\Lambda_N = \sum_{m=-N}^N (-\gamma_{1,m} - \gamma_{2,m} - \gamma_{3,m}) - \gamma_{4,N} + \gamma_N - \gamma_{6,(-N)}$$

con $\gamma_N(t) = t - i\epsilon$, $t \in [-\frac{\pi}{T_v} + \rho_N, \frac{\pi}{T_v} + \rho_{(-N)}]$. De (*) se tiene

$$0 = \int_{\Lambda_N} h(z) dz = - \sum_{m=-N}^N V.P. \int_{\rho_m - \frac{\pi}{T_v}}^{\rho_m + \frac{\pi}{T_v}} h(t) dt + \frac{\pi}{T_v} \sum_{m=-N}^N |\varphi(\rho_m)|^2 + \int_{\gamma_{4,N} + \gamma_N - \gamma_{6,(-N)}} h(z) dz$$

Por la propiedad de vector analítico $|\varphi(\rho_m)| \leq C |\rho_m|^{-k}$ para m grande y $k \geq 2$. Entonces tomando límite cuando N tiende a infinito se obtiene:

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(x - i\epsilon) dx = \lim_{N \rightarrow \infty} V.P. \int_{\rho_N - \frac{\pi}{T_v}}^{\rho_{(-N)} + \frac{\pi}{T_v}} h(x) dx - \frac{\pi}{T_v} \sum_{m=-\infty}^{\infty} |\varphi(\rho_m)|^2$$

Nótese que de la identidad (2.12) del capítulo 2 se sigue:

$$Re \left[V.P. \int_{\rho_N - \frac{\pi}{T_v}}^{\rho_{(-N)} + \frac{\pi}{T_v}} \frac{|\varphi(x)|^2}{1 - e^{i(E_0 + T_v x)}} dx \right] = \frac{1}{2} \int_{\rho_N - \frac{\pi}{T_v}}^{\rho_{(-N)} + \frac{\pi}{T_v}} |\varphi(x)|^2 dx$$

luego

$$Re \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(x - i\epsilon) dx \right] = \frac{1}{2} \|\varphi\|^2 - \frac{\pi}{T_v} \sum_{m=-\infty}^{\infty} |\varphi(\rho_m)|^2$$

En el caso $v < 0$ se tiene $\rho_m + \frac{\pi}{T_v} < \rho_m - \frac{\pi}{T_v}$, luego se considera $\tilde{\Gamma}_m = [\rho_m + \frac{\pi}{T_v}, \rho_m - \frac{\pi}{T_v}]$ y la curva

$$(E.23) \quad \tilde{\Gamma}_m = -\gamma_{1,m} + \gamma_{2,m} - \gamma_{3,m} + \gamma_{4,m} + \gamma_{5,m} - \gamma_{6,m}$$

donde las curvas $\gamma_{j,m}$ $j = 1, 2, 3$ son las mismas de (E.20), con $\gamma_{2,m}$ definida para $[0, \pi]$ y $\gamma_{4,m}(t) = -\frac{\pi}{T_v} + \rho_m + it$, $t \in [0, |v|\epsilon]$, $\gamma_{5,m}(t) = t - i\epsilon$, $t \in [-\frac{\pi}{T_v} + \rho_m, \frac{\pi}{T_v} + \rho_m]$, $\gamma_{6,m}(t) = \frac{\pi}{T_v} + \rho_m + it$, $t \in [0, |v|\epsilon]$, se obtiene como antes:

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(x - i\epsilon) dx = \lim_{N \rightarrow \infty} V.P. \int_{\rho_{(-N)} + \frac{\pi}{T_v}}^{\rho_N - \frac{\pi}{T_v}} h(x) dx + \frac{\pi}{T_v} \sum_{m=-\infty}^{\infty} |\varphi(\rho_m)|^2$$

En resumen, para $v \in \mathbb{R}$ no nulo:

$$(E.24) \quad \int_{-\infty}^{\infty} h(x - i\epsilon) dx = \lim_{N \rightarrow \infty} V.P. \int_{c_N - \frac{\pi}{T|v|}}^{d_N + \frac{\pi}{T|v|}} h(x) dx - \frac{\pi}{T|v|} \sum_{m=-\infty}^{\infty} |\varphi(\rho_m)|^2$$

donde $d_N = \rho_{(-N)}$, $v > 0$, $d_N = \rho_N$, $v < 0$, y $c_N = \rho_N$, $v > 0$, $c_N = \rho_{-N}$, $v < 0$. Además

$$(E.25) \quad Re \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(x - i\epsilon) dx \right] = \frac{1}{2} \|\varphi\|^2 - \frac{\pi}{T|v|} \sum_{m=-\infty}^{\infty} |\varphi(\rho_m)|^2$$

A continuación se asume que el vector analítico φ satisface

$$(E.26) \quad \varphi(\rho_m) = 0, \quad m \in \mathbb{Z}$$

Sea

$$(E.27) \quad \tilde{h}(z) = \frac{e^{-iTz} \overline{\varphi(\bar{z})} \varphi(z)}{(e^{-iTz} - e^{iE_0})^2}$$

de la condición anterior se sigue que $\tilde{h}(z)$ es analítica en todo \mathbb{C} . Es de interés determinar el valor de la integral (E.14) para la función \tilde{h} .

Supóngase que $v > 0$. Para $I_m = (\rho_m - \frac{\pi}{Tv}, \rho_m + \frac{\pi}{Tv})$, y Γ_m la curva definida en (E.16), donde se reemplaza m por ρ_m , se comprueba que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{|m| \leq N} \int_{\rho_m - \frac{\pi}{Tv}}^{\rho_m + \frac{\pi}{Tv}} \tilde{h}(x) dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{|m| \leq N} \int_{-\frac{\pi}{Tv}}^{\frac{\pi}{Tv}} \tilde{h}(y + \rho_m) dy = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{h}(x - iv\epsilon) dx$$

Como,

$$\tilde{h}(x) = \frac{e^{-iTv x} |\varphi(x)|^2}{(e^{-iTv x} - e^{iE_0})^2}, \quad \text{queda } \tilde{h}(y + \rho_m) = e^{-iE_0} \frac{e^{-iTv y} |\varphi(y + \rho_m)|^2}{(e^{-iTv y} - 1)^2}$$

pero $\frac{e^{-iTv y}}{(e^{-iTv y} - 1)^2} = \frac{2(\cos Tv y - 1)}{|e^{-iTv y} - 1|^4} = \frac{-1}{|e^{-iTv y} - 1|^2}$. Luego

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{h}(x - iv\epsilon) dx = (-1) e^{-iE_0} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{|m| \leq N} \int_{-\frac{\pi}{Tv}}^{\frac{\pi}{Tv}} \frac{|\varphi(y + \rho_m)|^2}{|e^{-iTv y} - 1|^2} dy$$

Recordando que $z_0 = e^{iE_0}$ se llega a,

$$(E.28) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{h}(x - iv\epsilon) dx = (-1) \bar{z}_0 \sum_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\frac{\pi}{Tv}}^{\frac{\pi}{Tv}} \frac{|\varphi(y + \rho_m)|^2}{|e^{-iTv y} - 1|^2} dy$$

Como para todo $a, b > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $a \leq \rho_{(-N)}$ y $-b > \rho_N$ se tiene

$$\int_{-b}^a \frac{|\varphi(x)|^2 dx}{|e^{-iTv x} - e^{iE_0}|^2} \leq \sum_{|m| \leq N} \int_{\rho_m - \frac{\pi}{Tv}}^{\rho_m + \frac{\pi}{Tv}} \frac{|\varphi(x)|^2}{|e^{-iTv x} - e^{iE_0}|^2} dx = \sum_{|m| \leq N} \int_{-\frac{\pi}{Tv}}^{\frac{\pi}{Tv}} \frac{|\varphi(y + \rho_m)|^2}{|e^{-iTv y} - 1|^2} dy$$

concluyéndose por teorema de la convergencia monótona que $h \in L^1(\mathbb{R})$. De esta forma se ha probado que para todo vector analítico φ verificando (E.26), la función

$$(E.29) \quad \psi(x) = \frac{e^{-iTv x} \varphi(x)}{e^{-iTv x} - e^{iE_0}}$$

pertenece a $L^2(\mathbb{R})$. De donde

$$(E.30) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{h}(x - iv\epsilon) dx = (-1) \bar{z}_0 \|\psi\|^2$$

Para el caso $v < 0$ se llega a la misma conclusión.

Supóngase ahora que los únicos ceros de φ son (ρ_m) y, sin pérdida de generalidad, todos son de orden uno. Entonces la función

$$(E.31) \quad u(z) = \frac{e^{-iTvz} \overline{\varphi(\bar{z})} \varphi(z)}{(e^{-iTvz} - e^{iE_0})^3}$$

es meromorfa con polos simples en (ρ_m) . Sea $v > 0$ y Γ_m la curva definida en (E.20). Al igual que en la deducción de (E.21) se tiene:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\gamma_{2,m}} u(z) dz = \text{Res}(u(z))|_{z=\rho_m} \cdot i\pi$$

Siendo $\varphi(z) = (z - \rho_m)\vartheta(z)$ con $\vartheta(\rho_m) = \varphi'(\rho_m)$ en una vecindad de $z = \rho_m$, se sigue

$$(z - \rho_m)u(z) = \frac{e^{-iTvz} \overline{\vartheta(\bar{z})} \vartheta(z)}{\left(\frac{e^{-iTvz} - e^{-iTv\rho_m}}{z - \rho_m}\right)^3}$$

luego $\text{Res}(u(z))|_{z=\rho_m} = \lim_{z \rightarrow \rho_m} (z - \rho_m)u(z) = e^{-2iE_0} \frac{|\varphi'(\rho_m)|^2}{i(Tv)^3}$. Por lo tanto

$$(E.32) \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\gamma_{2,m}} u(z) dz = e^{-2iE_0} \frac{\pi}{(Tv)^3} |\varphi'(\rho_m)|^2$$

obteniéndose como en (E.24),

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(x - iv\epsilon) dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{|m| \leq N} V.P. \int_{\rho_m - \frac{\pi}{Tv}}^{\rho_m + \frac{\pi}{Tv}} u(x) dx + \bar{z}_0^2 \frac{\pi}{(Tv)^3} \sum_{m=-\infty}^{\infty} |\varphi'(\rho_m)|^2$$

Pero,

$$V.P. \int_{\rho_m - \frac{\pi}{Tv}}^{\rho_m + \frac{\pi}{Tv}} u(x) dx = \bar{z}_0^2 V.P. \int_{-\frac{\pi}{Tv}}^{\frac{\pi}{Tv}} \frac{(1 - e^{iTv y}) |\varphi(y + \rho_m)|^2}{|e^{-iTv y} - 1|^4} dy$$

Así,

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(x - iv\epsilon) dx = \bar{z}_0^2 \left\{ \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{|m| \leq N} V.P. \int_{-\frac{\pi}{Tv}}^{\frac{\pi}{Tv}} \frac{(1 - e^{iTv y}) |\varphi(y + \rho_m)|^2}{|e^{-iTv y} - 1|^4} dy + \frac{\pi}{(Tv)^3} \sum_{m=-\infty}^{\infty} |\varphi'(\rho_m)|^2 \right\}$$

Para $v < 0$ se considera la curva $\widetilde{\Gamma}_m$ dada en (E.23). Entonces se tiene en general, (E.33)

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(x - iv\epsilon) dx = \bar{z}_0^2 \left\{ \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{|m| \leq N} V.P. \int_{-\frac{\pi}{T|v|}}^{\frac{\pi}{T|v|}} \frac{(1 - e^{iTv y}) |\varphi(y + \rho_m)|^2}{|e^{-iTv y} - 1|^4} dy + \frac{\pi}{(T|v|)^3} \sum_{m=-\infty}^{\infty} |\varphi'(\rho_m)|^2 \right\}$$

Observese que $\frac{(1 - e^{iTv y})}{|e^{-iTv y} - 1|^4} = \frac{1}{(1 - e^{iTv y}) |e^{-iTv y} - 1|^2}$, y la identidad (2.14) del capítulo 2 muestra que

$$\text{Re} \left[V.P. \int_{-\frac{\pi}{T|v|}}^{\frac{\pi}{T|v|}} \frac{(1 - e^{iTv y}) |\varphi(y + \rho_m)|^2}{|e^{-iTv y} - 1|^4} dy \right] = \frac{1}{2} \int_{\rho_m - \frac{\pi}{T|v|}}^{\rho_m + \frac{\pi}{T|v|}} \frac{|\varphi(y)|^2}{|e^{-iTv y} - e^{iE_0}|^2} dy$$

Luego por lo realizado con la función ψ definida en (E.29) queda

$$\operatorname{Re} \left[\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{|m| \leq N} V.P. \int_{-\frac{\pi}{T|v|}}^{\frac{\pi}{T|v|}} \frac{(1 - e^{iTv y}) |\varphi(y + \rho_m)|^2}{|e^{-iTv y} - 1|^4} dy \right] = \frac{1}{2} \|\psi\|^2$$

E.2.2 El caso $n > 1$.

Sea $\mathcal{N} = \{j : v_j \neq 0\}$ y define para $j \in \mathcal{N}$ las funciones,

$$(E.34) \quad f_j^\pm(w) = \varphi(y_1, \dots, y_{j-1}, w, y_{j+1} \pm i\epsilon v_{j+1}, \dots, y_n \pm i\epsilon v_n)$$

donde $y_1, y_2, \dots, y_{j-1}, y_{j+1}, \dots, y_n$ se estan considerando fijos.

$$(E.35) \quad h_j(y_1, y_2, \dots, y_n) = \sum_{k \in \mathcal{N}, k \neq j} v_k y_k - i\epsilon \sum_{k \in \mathcal{N}, k \geq j+1} v_k^2$$

h_j puede ser reescrita como

$$(E.36) \quad h_j(y_1, y_2, \dots, y_n) = \sum_{k \in \mathcal{N}, k \neq j} v_k y_k - i\epsilon \left[1 - \sum_{k \in \mathcal{N}, k \leq j} v_k^2 \right]$$

Define

$$(E.37) \quad g_j(w) = \frac{e^{-iTv_j w} \overline{f_j^+(\bar{w})} f_j^-(w)}{e^{-iTh_j(y_1, y_2, \dots, y_n)} e^{-iTv_j w} - z_0}$$

Afirmación: La igualdad (E.19) se cumple y la igualdad (E.24) tiene una expresión similar en este caso.

En efecto, suponer que $r_0 = |z_0| > 1$. Se verifica que $g_j(w)$ es analítica en la región

$$(I) \quad A_j = \left\{ w : v_j \operatorname{Im} w < \epsilon \left(1 - \sum_{k \in \mathcal{N}, k \leq j} v_k^2 \right) + T^{-1} \ln r_0 \right\}$$

Se cumple $\mathbb{R} \subseteq A_j$ para todo j . Además la recta

$$(E.38) \quad L_j = \{t - i\epsilon v_j : t \in \mathbb{R}\}$$

también cumple $L_j \subseteq A_j$ pues,

$$-\epsilon v_j^2 - \epsilon \left[1 - \sum_{k \in \mathcal{N}, k \leq j} v_k^2 \right] = (-1)\epsilon \left[v_j^2 + \left[1 - \sum_{k \in \mathcal{N}, k \leq j} v_k^2 \right] \right] = (-1)\epsilon \left[1 - \sum_{k \in \mathcal{N}, k \leq j-1} v_k^2 \right] < 0$$

Del caso $n = 1$ se obtiene,

$$(E.39) \quad \int_{\mathbb{R}} g_j(y_j - i\epsilon v_j) dy_j = \int_{\mathbb{R}} g_j(y_j) dy_j$$

Entonces descomponiendo (E.14) en integrales iteradas, integrando con respecto a la variable y_{j_0} , donde j_0 es el primer elemento de \mathcal{N} , reemplazando por la integral del lado derecho de (E.39), y repitiendo el mismo procedimiento con las demas variables se llega a:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{-iTv \cdot (y - i\epsilon v)} \overline{\varphi(y + i\epsilon v)} \varphi(y - i\epsilon v)}{e^{-iTv \cdot (y - i\epsilon v)} - z_0} dy = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{-iTv \cdot y} |\varphi(y)|^2}{e^{-iTv \cdot y} - z_0} dy$$

o sea la igualdad (E.19) se cumple aqui.

El caso $r_0 < e^{-T\epsilon}$ se trata de manera similar ya que la función $g_j(w)$ es analítica en la región

$$(\tilde{I}) \quad \tilde{A}_j = \left\{ w : v_j \operatorname{Im} w > \epsilon \left(1 - \sum_{k \in \mathcal{N}, k \leq j} v_k^2 \right) + T^{-1} \ln r_0 \right\}$$

y también es cierto que $\mathbb{R} \subseteq \tilde{A}_j$ para todo j y $L_j \subseteq \tilde{A}_j$ con L_j definida por (E.38).

Sea $r_0 = 1$. Notar que,

$$\begin{aligned} -iT h_j(y_1, y_2, \dots, y_n) - iT v_j w &= -iT (h_j(y_1, y_2, \dots, y_n) + v_j \operatorname{Re} w + i v_j \operatorname{Im} w) \\ &= -iT \left(v_j \operatorname{Re} w + \sum_{k \in \mathcal{N}, k \neq j} v_k y_k - i \left(\epsilon \left[1 - \sum_{k \in \mathcal{N}, k \leq j} v_k^2 \right] - v_j \operatorname{Im} w \right) \right) \end{aligned}$$

Entonces $e^{-iT h_j(y_1, y_2, \dots, y_n)} e^{-iT v_j w} = z_0$ si y solo si

$$(E.40) \quad v_j \operatorname{Re} w + \sum_{k \in \mathcal{N}, k \neq j} v_k y_k = \rho_m$$

$$(E.41) \quad \epsilon \left[1 - \sum_{k \in \mathcal{N}, k \leq j} v_k^2 \right] - v_j \operatorname{Im} w = 0$$

Para $w \in L_j$ se tiene,

$$\epsilon \left[1 - \sum_{k \in \mathcal{N}, k \leq j} v_k^2 \right] - v_j \operatorname{Im} w = \epsilon \left[1 - \sum_{k \in \mathcal{N}, k \leq j-1} v_k^2 \right] \neq 0$$

y si $j = n \in \mathcal{N}$ queda $v_n \operatorname{Im} w = -\epsilon v_n^2 \neq 0$. Luego la recta L_j esta contenida en el dominio de analiticidad de $g_j(w)$ para todo $j \in \mathcal{N}$.

Por otro lado si $w \in \mathbb{R}$ la igualdad (E.41) no se cumple a menos que $j = j^*$ sea el ultimo elemento de \mathcal{N} . Entonces para todo $j \in \mathcal{N}, j \neq j^*$ se verifica que \mathbb{R} también este contenida en el dominio de analiticidad de $g_j(w)$. Así del caso $n = 1$ se sigue que (E.19) es válido aqui.

Para $h_{j^*} = h_{j^*}(y_1, \dots, y_n) = \sum_{k \in \mathcal{N}, k \neq j^*} v_k y_k$, se tiene

$$\int_{\mathbb{R}^n} h(y - i\epsilon v) dy = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-iT h_{j^*}} \int_{\mathbb{R}} g_{j^*}(y_{j^*} - i\epsilon v_{j^*}) dy_{j^*} dy$$

con $d\mathbf{y} = dy_1 \cdots dy_{j^*-1} dy_{j^*+1} \cdots dy_n$ y
(E.42)

$$g_{j^*}(w) = \frac{e^{-iTv_{j^*}w} \overline{\varphi(y_1, \dots, y_{j^*-1}, \bar{w}, y_{j^*+1}, \dots, y_n)} \varphi(y_1, \dots, y_{j^*-1}, w, y_{j^*+1}, \dots, y_n)}{e^{-iTh_{j^*}} e^{-iTv_{j^*}w} - z_0}$$

Cuando $j = j^*$ la ecuación $v_{j^*} Rew + \sum_{k \in \mathcal{N}, k < j^*} v_k y_k = \hat{\rho}_m$, $m \in \mathbb{Z}$ donde $\hat{\rho}_m = -T^{-1}(E_0 + 2m\pi)$, se puede cumplir. Considerar fijas las variables y_k con $k \in \mathcal{N}$, $k < j^*$. Se tiene que $w \in \mathbb{R}$ anula el denominador de la función $g_{j^*}(w)$ si y sólo si

$$(E.43) \quad w = w_m = v_{j^*}^{-1} \left(\hat{\rho}_m - \sum_{k \in \mathcal{N}, k < j^*} v_k y_k \right) = \rho_m - v_{j^*}^{-1} h_{j^*}, \quad m \in \mathbb{Z}$$

Entonces, se tiene en general que la función $g_{j^*}(w)$ es meromorfa con polos en el conjunto $\{y_{j^*}^{(m)} : m \in \mathcal{J}\}$, donde $\mathcal{J} \subseteq \mathbb{Z}$ e $y_{j^*}^{(m)} \in \mathbb{R}$ es dado por (E.43), o sea $y = (y_1, \dots, y_{j^*-1}, y_{j^*}^{(m)}, y_{j^*+1}, \dots, y_n) \in \mathcal{R}_m$. La identidad (E.24) se aplica aquí considerando los intervalos $I_m = [\rho_m - \frac{h_{j^*}}{v_{j^*}} - \frac{\pi}{T|v_{j^*}|}, \rho_m - \frac{h_{j^*}}{v_{j^*}} + \frac{\pi}{T|v_{j^*}|}]$. Se tiene $v_{j^*}(x + \rho_m - \frac{h_{j^*}}{v_{j^*}}) = v_{j^*}x + v_{j^*}\rho_m - h_{j^*}$. Luego $e^{-iTv_{j^*}(x + \rho_m - \frac{h_{j^*}}{v_{j^*}})} = e^{-iTv_{j^*}x + iTh_{j^*}} z_0$, de donde $e^{-iTh_{j^*}} e^{-iTv_{j^*}(x + \rho_m - \frac{h_{j^*}}{v_{j^*}})} = e^{-iTv_{j^*}x} z_0$. Entonces

$$(E.44) \quad g_{j^*}(x + \rho_m - \frac{h_{j^*}}{v_{j^*}}) = e^{iTh_{j^*}} \frac{e^{-iTv_{j^*}x} z_0 |\varphi(y_1, \dots, y_{j^*-1}, x + \rho_m - \frac{h_{j^*}}{v_{j^*}}, y_{j^*+1}, \dots, y_n)|^2}{e^{-iTv_{j^*}x} z_0 - z_0}$$

y se llega a,

$$(†) \quad \int_{\mathbb{R}} g_{j^*}(y_{j^*} - i\epsilon v_{j^*}) dy_{j^*} = e^{iTh_{j^*}} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{|m| \leq N} V.P. \int_{-\frac{\pi}{T|v_{j^*}|}}^{\frac{\pi}{T|v_{j^*}|}} g_{j^*}(x + \rho_m - \frac{h_{j^*}}{v_{j^*}}) dx \\ - \frac{\pi}{T|v_{j^*}|} e^{iTh_{j^*}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} |\varphi(y_1, \dots, y_{j^*-1}, \rho_m - \frac{h_{j^*}}{v_{j^*}}, y_{j^*+1}, \dots, y_n)|^2$$

Sea la función

$$\Phi(y_1, \dots, y_{j^*-1}, y_{j^*+1}, \dots, y_n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{|m| \leq N} V.P. \int_{-\frac{\pi}{T|v_{j^*}|}}^{\frac{\pi}{T|v_{j^*}|}} g_{j^*}(x + \rho_m - \frac{h_{j^*}}{v_{j^*}}) dx$$

se tiene,

$$Re[\Phi(y_1, \dots, y_{j^*-1}, y_{j^*+1}, \dots, y_n)] = \int_{\mathbb{R}} |\varphi(y_1, \dots, y_{j^*-1}, x, y_{j^*+1}, \dots, y_n)|^2 dx$$

y como $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ se deduce por el teorema de Fubini que $Re[\Phi] \in L^2(\mathbb{R}^{n-1})$. Por otro lado la función

$$\Psi(y_1, \dots, y_{j^*-1}, y_{j^*+1}, \dots, y_n) = e^{-iTh_{j^*}} \int_{\mathbb{R}} g_{j^*}(y_{j^*} - i\epsilon v_{j^*}) dy_{j^*}$$

es integrable en \mathbb{R}^{n-1} con

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \Psi(y_1, \dots, y_{j^*-1}, y_{j^*+1}, \dots, y_n) dy = \int_{\mathbb{R}^n} h(y - i\epsilon v) dy$$

Entonces (†) se escribe en la forma

$$\begin{aligned} (\dagger\dagger) \quad \Psi(y_1, \dots, y_{j^*-1}, y_{j^*+1}, \dots, y_n) &= \Phi(y_1, \dots, y_{j^*-1}, y_{j^*+1}, \dots, y_n) - \\ &- \frac{\pi}{T|v_{j^*}|} \sum_{m=-\infty}^{\infty} |\varphi(y_1, \dots, y_{j^*-1}, \rho_m - \frac{h_{j^*}}{v_{j^*}}, y_{j^*+1}, \dots, y_n)|^2 \end{aligned}$$

y tomando parte real en (††) se tiene que la función definida por la serie es integrable en \mathbb{R}^{n-1} . Además, sea $a_m = \rho_m - \frac{h_{j^*}}{v_{j^*}}$. De (E.2) aplicada a $\tilde{y} = (y_1, \dots, y_{j^*-1}, y_{j^*+1}, \dots, y_n)$ e $y_j = a_m$ ($J = \{j^*\}$) se tiene para $\eta > 0$ que existe $R > 0$ tal que

$$|\varphi(y_1, \dots, y_{j^*-1}, a_m, y_{j^*+1}, \dots, y_n)|^2 \leq C(|y_1|^2 + \dots + |y_{j^*-1}|^2 + |y_{j^*+1}|^2 \dots |y_n|^2)^{-k}$$

si $|y_j| > R$ con $j \in \{1, 2, \dots, j^* - 1, j^* + 1, \dots, n\}$ para todo $m \in \mathbb{Z}$. Entonces la función definida por la serie en (††) se puede integrar término a término. En consecuencia, (E.45)

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} h(y - i\epsilon v) dy &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{|m| \leq N} V.P. \int_{-\frac{\pi}{T|v_{j^*}|}}^{\frac{\pi}{T|v_{j^*}|}} \frac{e^{-iT v_{j^*} x} |\varphi(y_1, \dots, y_{j^*-1}, x + \rho_m - \frac{h_{j^*}}{v_{j^*}}, y_{j^*+1}, \dots, y_n)|^2}{e^{-iT v_{j^*} x - 1}} dx dy \\ &- \frac{\pi}{T|v_{j^*}|} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |\varphi(y_1, \dots, y_{j^*-1}, \rho_m - \frac{h_{j^*}}{v_{j^*}}, y_{j^*+1}, \dots, y_n)|^2 dy \end{aligned}$$

De donde la igualdad (E.25) queda en este caso:

(E.46)

$$Re \left[\int_{\mathbb{R}^n} h(y - i\epsilon v) dy \right] = \frac{\|\varphi\|^2}{2} \frac{\pi}{T|v_{j^*}|} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |\varphi(y_1, \dots, y_{j^*-1}, \rho_m - \frac{h_{j^*}}{v_{j^*}}, y_{j^*+1}, \dots, y_n)|^2 dy$$

Asúmase ahora que la función φ se anula en el conjunto $\mathcal{R} = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} \mathcal{R}_m$. Para la función

$$(E.47) \quad \tilde{h}(z) = \frac{e^{-iT v_{j^*} z} \overline{\varphi(\bar{z})} \varphi(z)}{(e^{-iT v_{j^*} z} - z_0)^2}, \quad z \in \mathbb{C}^n$$

se razona como en la deducción de (E.28),

(E.48)

$$\int_{\mathbb{R}^n} \tilde{h}(y - i\epsilon v) dy = (-1) \bar{z}_0 \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \sum_{-\infty}^{\infty} \int_{-\frac{\pi}{T|v_{j^*}|}}^{\frac{\pi}{T|v_{j^*}|}} \frac{|\varphi(y_1, \dots, y_{j^*-1}, x + \rho_m - \frac{h_{j^*}}{v_{j^*}}, y_{j^*+1}, \dots, y_n)|^2}{|e^{-iT v_{j^*} x} - 1|^2} dx dy$$

Como en (E.29), se verifica para $\tilde{y} = (y_1, \dots, y_{j^*-1}, y_{j^*+1}, \dots, y_n)$ fijo, que la función

$$\psi_{j^*}(x, \tilde{y}) = \frac{e^{-iT v_{j^*} x} \varphi(y_1, \dots, y_{j^*-1}, x, y_{j^*+1}, \dots, y_n)}{e^{-iT h_{j^*}} e^{-iT v_{j^*} x} - z_0}$$

pertenece a $L^2(\mathbb{R})$. Entonces

$$\int_{\mathbb{R}^n} \tilde{h}(y - i\epsilon v) dy = (-1) \bar{z}_0 \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} |\psi_{j^*}(x, \tilde{y})|^2 dx d\tilde{y}$$

la igualdad anterior y el teorema de Fubini permiten concluir que

$$(E.49) \quad \psi_0(y) = \frac{e^{-iTv \cdot y} \varphi(y)}{e^{-iTv \cdot y} - z_0}$$

está en $L^2(\mathbb{R}^n)$ y vale (E.30). O sea

$$(E.50) \quad \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{h}(y - i\epsilon v) dy = (-1) \bar{z}_0 \|\psi_0\|^2$$

Respecto a la función

$$(E.51) \quad u(z) = \frac{e^{-iTv \cdot z} \overline{\varphi(\bar{z})} \varphi(z)}{(e^{-iTv \cdot z} - z_0)^3}, \quad z \in \mathbb{C}^n$$

donde φ se anula en el conjunto \mathcal{R} y para cada $\tilde{y} = (y_1, \dots, y_{j^*-1}, y_{j^*+1}, \dots, y_n)$ fijo, sin pérdida de generalidad, cada w_m en (E.43) es un cero de orden uno para la función

$$g_{j^*}(w) = \frac{e^{-iTv_{j^*} \cdot w} \overline{\varphi(y_1, \dots, y_{j^*-1}, \bar{w}, y_{j^*+1}, \dots, y_n)} \varphi(y_1, \dots, y_{j^*-1}, w, y_{j^*+1}, \dots, y_n)}{(e^{-iTh_{j^*}} e^{-iTv_{j^*} \cdot w} - z_0)^3}$$

se tiene la identidad (E.33)

$$g_{j^*}(x + \rho_m - \frac{h_{j^*}}{v_{j^*}}) = \frac{(1 - e^{-iTv_{j^*} \cdot x}) |\varphi(y_1, \dots, y_{j^*-1}, x + \rho_m - \frac{h_{j^*}}{v_{j^*}}, y_{j^*+1}, \dots, y_n)|^2}{|e^{-iTv_{j^*} \cdot x} - 1|^4}$$

luego

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} g(y_{j^*} - i\epsilon v_{j^*}) dy_{j^*} &= \bar{z}_0^2 e^{iTh_{j^*}} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{|m| \leq N} V.P. \int_{-\frac{\pi}{T|v_{j^*}|}}^{\frac{\pi}{T|v_{j^*}|}} g_{j^*}(x + \rho_m - \frac{h_{j^*}}{v_{j^*}}) dx \\ &+ \bar{z}_0^2 e^{iTh_{j^*}} \frac{\pi}{(T|v_{j^*}|)^3} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial}{\partial y_{j^*}} \varphi(y_1, \dots, y_{j^*-1}, \rho_m - \frac{h_{j^*}}{v_{j^*}}, y_{j^*+1}, \dots, y_n) \right|^2 \end{aligned}$$

Como

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(y - i\epsilon v) dy = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-iTh_{j^*}} \int_{\mathbb{R}} g(y_{j^*} - i\epsilon v_{j^*}) dy_{j^*} d\tilde{y}$$

se verifica para Φ, Ψ definidas (similar a lo visto antes) de la manera obvia, una igualdad del tipo ($\dagger\dagger$). El mismo razonamiento empleado y la desigualdad (E.4) permiten deducir,

$$(E.52) \quad \begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} u(y - i\epsilon v) dy &= \bar{z}_0^2 \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{|m| \leq N} V.P. \int_{-\frac{\pi}{T|v_{j^*}|}}^{\frac{\pi}{T|v_{j^*}|}} g_{j^*}(x + \rho_m - \frac{h_{j^*}}{v_{j^*}}) dx d\tilde{y} \\ &+ \bar{z}_0^2 \frac{\pi}{(T|v_{j^*}|)^3} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left| \frac{\partial}{\partial y_{j^*}} \varphi(y_1, \dots, y_{j^*-1}, \rho_m - \frac{h_{j^*}}{v_{j^*}}, y_{j^*+1}, \dots, y_n) \right|^2 d\tilde{y} \end{aligned}$$

E.2.3 Prueba de los lemas 2.3 y 2.5

Como aplicación de las igualdades obtenidas se demuestran los lemas 2.3 y 2.5. Es suficiente probar estos resultados en el caso $w = 0$, esto es, para $U = U(0)$ y $U_\theta(w) = U_\theta(0)$ (las identidades establecidas antes se cumplen también al considerar el parámetro w).

Prueba del Lema 2.3 :

a) Sea $z_0 \in \mathbb{C}$, $|z_0| > 1$ y asumir que $\phi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ satisface $U_\theta \phi = z_0 \phi$. Se tiene,

$$\phi(x) = -\zeta \langle \varphi_\theta, \phi \rangle \frac{e^{-iTv \cdot (x-\theta v)}}{e^{-iTv \cdot (x-\theta v)} - z_0} \varphi_\theta(x)$$

y

$$(\star) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{-iTv \cdot (x-\theta v)} \overline{\varphi_\theta(x)} \varphi_\theta(x)}{e^{-iTv \cdot (x-\theta v)} - z_0} dx = -\frac{1}{\zeta}$$

de (E.19) se llega a:

$$(\star\star) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{-iTv x} |\varphi(x)|^2}{e^{-iTv x} - z_0} dx = -\frac{1}{\zeta}$$

luego ψ_0 definido como en (E.49) pertenece a $L^2(\mathbb{R}^n)$ y cumple $\langle \varphi, \psi_0 \rangle = -\frac{1}{\zeta}$. Entonces $U\psi_0 = z_0\psi_0$, lo cual no es posible. Para $|z_0| < e^{-TIm\theta}$ (E.19) nuevamente implica $(\star\star)$ llegando a la misma contradicción.

b) La prueba es igual al caso anterior empleando (E.21) cuando $\epsilon = Im\theta < 0$. ■

A continuación se muestra la igualdad (2.22)

Asúmase $Im\theta > 0$. Sea $z_0 = e^{iE_0} \in \mathbb{C}$ tal que $U_\theta \psi = e^{iE_0} \psi$. Entonces (\star) es cierto. Suponer que existe $\mathcal{J} \subseteq \mathbb{N}$ tal que $\varphi \neq 0$ en el conjunto $\bigcup_{m \in \mathcal{J}} \mathcal{R}_m$. De (E.45) se obtiene:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\zeta} &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{|m| \leq N} V.P. \int_{-\frac{\pi}{T|v_{j^*}|}}^{\frac{\pi}{T|v_{j^*}|}} \frac{e^{-iTv_{j^*} x} |\varphi(y_1, \dots, y_{j^*-1}, x + \rho_m - \frac{h_{j^*}}{v_{j^*}}, y_{j^*+1}, \dots, y_n)|^2}{e^{-iTv_{j^*} x} - 1} dx dy \\ &\quad - \frac{\pi}{T|v_{j^*}|} \sum_{m \in \mathcal{J}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |\varphi(y_1, \dots, y_{j^*-1}, \rho_m - \frac{h_{j^*}}{v_{j^*}}, y_{j^*+1}, \dots, y_n)|^2 dy \end{aligned}$$

La identidad (2.9) del capítulo 2 y (E.46) implican

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \|\varphi\|^2 - \frac{\pi}{T|v_{j^*}|} \sum_{m \in \mathcal{J}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |\varphi(y_1, \dots, y_{j^*-1}, \rho_m - \frac{h_{j^*}}{v_{j^*}}, y_{j^*+1}, \dots, y_n)|^2 dy$$

de donde,

$$\frac{\pi}{T|v_{j^*}|} \sum_{m \in \mathcal{J}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |\varphi(y_1, \dots, y_{j^*-1}, \rho_m - \frac{h_{j^*}}{v_{j^*}}, y_{j^*+1}, \dots, y_n)|^2 dy = 0$$

Entonces $\varphi(y) = 0$ si $y \in \bigcup_{m \in \mathcal{J}} \mathcal{R}_m$ lo que contradice la suposición inicial. Por lo tanto $\varphi(x) = 0$ para todo $x \in \mathcal{R}$. Luego ψ_0 dado por (E.49) pertenece a $L^2(\mathbb{R}^n)$ y verifica (**). En consecuencia $U\psi_0 = e^{iE_0}\psi_0$ y $z_0 \in \sigma_{pp}(U)$.

Recíprocamente, suponer que $\tilde{z}_0 \in \sigma_{pp}(U)$. Como $\varphi(x) = 0$ si $x \in \mathcal{R}$, la función $h(z)$ dada en (E.45) es analítica en \mathbb{C}^n . Entonces de (**) y (E.45) se obtiene (*). Luego para ψ_0 definido por (E.49) se tiene que

$$\psi_{0,\theta}(x) = \frac{e^{-iTv \cdot (x-\theta v)}}{e^{-iTv \cdot (x-\theta v)} - z_0} \varphi_\theta(x)$$

cumple $\langle \varphi_\theta, \psi_\theta \rangle = -\frac{1}{\zeta}$, con lo cual $U_\theta \psi_\theta = \tilde{z}_0 \psi_\theta$. De donde $\tilde{z}_0 \in \sigma_{dis}(U_\theta) \cap \mathbb{S}$, lo que termina la prueba. El caso $Im\theta < 0$ es análogo. ■

Prueba del lema 2.5:

De la ecuación de la resolvente $(U_{0,\theta} - z)^{-1} = (U_{0,\theta} - z_0)^{-1} + (z - z_0)(U_{0,\theta} - z)^{-1}(U_{0,\theta} - z_0)^{-1}$, se sigue $p(z) = \zeta(z - z_0)q(z)$, donde $q(z)$ se expresa por

$$(E.53) \quad q(z) = \langle \varphi_{\bar{\theta}}, (U_{0,\theta} - z)^{-1}(U_{0,\theta} - z_0)^{-1}U_{0,\theta}\varphi_\theta \rangle$$

Es inmediato que la función $q(z)$ es analítica en el conjunto $\mathbb{C} \setminus \sigma(U_{0,\theta})$ y

$$q(z_0) = \langle \varphi_{\bar{\theta}}, (U_{0,\theta} - z)^{-2}U_{0,\theta}\varphi_\theta \rangle$$

o sea,

$$(E.54) \quad q(z_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-iTv(x-\theta)} \overline{\varphi_{\bar{\theta}}(x)} \varphi_\theta(x)}{(e^{-iTv(x-\theta)} - z_0)^2} dx$$

Entonces de (E.49)-(E.51) queda $q(z_0) = -e^{iE_0} \|\psi_0\|^2 \neq 0$. Así z_0 es un cero de orden uno para $p(z)$ ■

E.2.4 Anexo

Sean $z_0 = e^{iE_0}$, $z_1 = e^{iE_1}$. Asíumase que el vector analítico φ considerado en \mathbb{C} se anula en las sucesiones $(\rho_{0,m}), (\rho_{1,m})$ dadas por $\rho_{j,m} = -T^{-1}(E_j + 2m\pi)$, $j = 0, 1$. Es conocido que las siguientes funciones pertenecen a $L^2(\mathbb{R})$

$$\xi_j(x) = \frac{e^{-iTx}\varphi(x)}{e^{-iTx} - z_j}, \quad j = 0, 1$$

y son analíticas en todo \mathbb{C} . Sea $z \in \mathbb{C}$ con $|z| > 1$, se estudiara la integral,

$$(E.55) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-iT(x-\theta)} \overline{\xi_{1,\bar{\theta}}(x)} \xi_{0,\theta}(x)}{e^{-iT(x-\theta)} - z} dx$$

la cual se reescribe en la forma,

$$(E.56) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-iT(y-i\epsilon)} \overline{\xi_1(y+i\epsilon)} \xi_0(y-i\epsilon)}{e^{-iT(y-i\epsilon)} - z} dy$$

Definiendo $\xi_j(w) = \frac{e^{-iTw} \varphi(w)}{e^{-iTw} - z_j}$, $j = 0, 1$, para $w \in \mathbb{C}$, se tiene que la función

$$(E.57) \quad g(w) = \frac{e^{-iTw} \overline{\xi_1(\bar{w})} \xi_0(w)}{e^{-iTw} - z}$$

es analítica en la región $\{w : \text{Im}w < T^{-1} \ln |z|\}$ y se expresa por,

$$(E.58) \quad g(w) = \frac{e^{-iTw} \overline{\varphi(\bar{w})} \varphi(w)}{(e^{iTw} - \bar{z}_1)(e^{-iTw} - z_0)(e^{-iTw} - z)}$$

El procedimiento que se sigue aquí es el utilizado en el caso $r_0 > 1$, esto es, se emplea una curva Γ_m del tipo dada por (E.16) donde las respectivas curvas $\gamma_{2,m}$, $\gamma_{4,m}$ son como $\gamma_{4,m}$ y $\gamma_{6,m}$ en (E.20) (caso $r_0 = 1$). Con el fin de precisar el intervalo en el cual se define la curva Γ_m se hace necesario analizar las sucesiones $(\rho_{j,m})$.

Se asumen la siguientes hipótesis:

$$I) E_0 < E_1 \quad II) E_1 - E_0 \neq 2s\pi, \text{ para todo } s \in \mathbb{N}$$

Nótese que si II) no se cumple, entonces $\rho_{1,m} = \rho_{0,m+s}$ para algún $s \in \mathbb{N}$. Se verifica:

$$(E.59) \quad \rho_{0,m} - \rho_{1,l} = \frac{E_1 - E_0}{T} + \frac{2\pi(l - m)}{T}, \quad m, l \in \mathbb{Z}$$

Recordar además que,

$$(E.60) \quad \rho_{j,m} > \rho_{j,m+1}, \quad \rho_{j,m} + \frac{\pi}{T} = \rho_{j,m-1} - \frac{\pi}{T}, \quad m \in \mathbb{Z}, j = 0, 1$$

Hay que distinguir dos casos:

$$(A) 0 < E_1 - E_0 < 2\pi:$$

Se verifica aquí,

$$\rho_{0,m} - \rho_{1,m-1} = \frac{E_1 - E_0 - 2\pi}{T} < 0$$

luego $\rho_{k,m} < \rho_{j,m-1}$ para todo $m \in \mathbb{Z}$. Además,

$$(E.61) \quad \rho_{0,m} - \rho_{1,m-1} + \frac{\pi}{T} = \frac{E_1 - E_0 - \pi}{T}, \quad \rho_{0,m} - \rho_{1,m} - \frac{\pi}{T} = \frac{E_1 - E_0 - \pi}{T}$$

Esto lleva a considerar los siguientes casos:

$$(A1) E_1 - E_0 < \pi:$$

De (E.61) se tiene que $\rho_{0,m} - \frac{\pi}{T} < \rho_{1,m} < \rho_{0,m} < \rho_{0,m} + \frac{\pi}{T} < \rho_{1,m-1}$, de donde

$\rho_{0,m}, \rho_{1,m} \in I_m$ con $I_m = [\rho_{0,m} - \frac{\pi}{T}, \rho_{0,m} + \frac{\pi}{T}]$. Notar que $\mathbb{R} = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} I_m$.

(A2) $E_1 - E_0 > \pi$:

De (E.61) se tiene que $\rho_{1,m} < \rho_{0,m} - \frac{\pi}{T} < \rho_{0,m} < \rho_{1,m-1} < \rho_{0,m} + \frac{\pi}{T}$, por lo tanto $\rho_{0,m}, \rho_{1,m-1} \in I_m$ donde $I_m = [\rho_{0,m} - \frac{\pi}{T}, \rho_{0,m} + \frac{\pi}{T}]$. También es cierto que $\mathbb{R} = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} I_m$.

(A3) $E_1 - E_0 = \pi$:

De (E.61) se tiene $\rho_{1,m-1} = \rho_{0,m} + \frac{\pi}{T}$, y $\rho_{1,m} = \rho_{0,m} - \frac{\pi}{T}$. De esto se deduce que

$$\rho_{1,m-1} - \frac{\pi}{2T} = \rho_{0,m} + \frac{\pi}{2T}, \quad \rho_{1,m} + \frac{\pi}{2T} = \rho_{0,m} - \frac{\pi}{2T}$$

Sean $I_m^0 = [\rho_{0,m} - \frac{\pi}{2T}, \rho_{0,m} + \frac{\pi}{2T}]$, $I_m^1 = [\rho_{1,m} - \frac{\pi}{2T}, \rho_{1,m} + \frac{\pi}{2T}]$. Se cumple que $\rho_{0,m} \in I_m^0$ y $\rho_{1,m} \in I_m^1$. Observar que

$$(E.62) \quad \widetilde{I}_m = I_m^0 \cup I_m^1 = [\rho_{0,m+1} + \frac{\pi}{2T}, \rho_{0,m} + \frac{\pi}{2T}]$$

Entonces $\mathbb{R} = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} \widetilde{I}_m$.

(B) $E_1 - E_0 > 2\pi$

Existe un único $N \in \mathbb{N}$ tal que $2n\pi < E_1 - E_0 < 2(N+1)\pi$. De donde $0 < E_1 - E_0 - 2N\pi < 2\pi$. La igualdad (E.59) implica $\rho_{0,m} - \rho_{1,l} = \frac{E_1 - E_0}{T} - \frac{2N\pi}{T}$ si y sólo si $l = m - N$. Luego

$$\rho_{0,m} - \rho_{1,m-N} = \frac{E_1 - E_0 - 2N\pi}{T}, \quad \rho_{0,m} - \rho_{1,m-(N+1)} = \frac{E_1 - E_0 - 2(N+1)\pi}{T}$$

Por lo tanto $\rho_{1,m-N} < \rho_{0,m} < \rho_{1,m-(N+1)}$ para todo $m \in \mathbb{Z}$. Al igual que en (E.61)

$$(E.63) \quad \rho_{0,m} - \rho_{1,m-N} - \frac{\pi}{T} = \frac{(E_1 - E_0 - 2N\pi) - \pi}{T}, \quad \rho_{0,m} - \rho_{1,m-(N+1)} + \frac{\pi}{T} = \frac{(E_1 - E_0 - 2(N+1)\pi) - \pi}{T}$$

Como en el caso (A) hay que considerar tres alternativas:

(B1) $E_1 - E_0 - 2N\pi < \pi$:

La identidad (E.63) muestra $\rho_{0,m} - \frac{\pi}{T} < \rho_{1,m-N} < \rho_{0,m} < \rho_{0,m} + \frac{\pi}{T} < \rho_{1,m-(N+1)}$, de donde $\rho_{0,m}, \rho_{1,m-N}$ pertenecen al intervalo $I_m = [\rho_{0,m} - \frac{\pi}{T}, \rho_{0,m} + \frac{\pi}{T}]$.

(B2) $E_1 - E_0 - 2N\pi > \pi$:

Se verifica de (E.63) que $\rho_{1,m-N} < \rho_{0,m} - \frac{\pi}{T} < \rho_{0,m} < \rho_{1,m-(N+1)} < \rho_{0,m} + \frac{\pi}{T}$, de donde el intervalo $I_m = [\rho_{0,m} - \frac{\pi}{T}, \rho_{0,m} + \frac{\pi}{T}]$ contiene a $\rho_{0,m}, \rho_{1,m-(N+1)}$.

(B3) $E_1 - E_0 - 2N\pi = \pi$:

Se tiene en este caso $\rho_{1,m-(N+1)} = \rho_{0,m} + \frac{\pi}{T}$, y $\rho_{1,m-N} = \rho_{0,m} - \frac{\pi}{T}$. De donde

$$\rho_{1,m-(N+1)} - \frac{\pi}{2T} = \rho_{0,m} + \frac{\pi}{2T}, \quad \rho_{1,m-N} + \frac{\pi}{2T} = \rho_{0,m} - \frac{\pi}{2T}$$

Definiendo $I_m^0 = [\rho_{0,m} - \frac{\pi}{2T}, \rho_{0,m} + \frac{\pi}{2T}]$, $I_m^1 = [\rho_{1,m-N} - \frac{\pi}{2T}, \rho_{1,m-N} + \frac{\pi}{2T}]$. Se cumple que $\rho_{0,m-N} \in I_m^0$ y $\rho_{1,m} \in I_m^1$. Del hecho que

$$\widetilde{I}_m = I_m^0 \cup I_m^1 = [\rho_{0,m+1} + \frac{\pi}{2T}, \rho_{0,m} + \frac{\pi}{2T}]$$

se obtiene $\mathbb{R} = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} \widetilde{I}_m$.

Ahora, supóngase sin pérdida de generalidad que E_0, E_1 verifican el caso (A) (el caso (B) se trata de manera análoga). Para (A1)-(A2) se define la curva

$$(E.64) \quad \Gamma_m = -\gamma_{1,m} + \gamma_{2,m} + \gamma_{3,m} - \gamma_{4,m}$$

donde $\gamma_{1,m}(t) = t$, $t \in [\rho_{0,m} - \frac{\pi}{T}, \rho_{0,m} + \frac{\pi}{T}]$, $\gamma_{2,m}(t) = \rho_{0,m} - \frac{\pi}{T} - it$, $t \in [0, \epsilon]$, $\gamma_{3,m}(t) = t - i\epsilon$, $t \in [\rho_{0,m} - \frac{\pi}{T}, \rho_{0,m} + \frac{\pi}{T}]$, $\gamma_{4,m}(t) = \rho_{0,m} + \frac{\pi}{T} - it$, $t \in [0, \epsilon]$. Siendo $e^{\mp iT(\pm \frac{\pi}{T} + \rho_{0,m} - it)} = (-1)e^{\pm iE_0} e^{\mp Tt}$, para $s = 2, 4$ queda

$$e^{-iT(\gamma_{s,m}(t))} - z_0 = (-1)z_0(e^{-Tt} + 1), \quad e^{-iT(\gamma_{s,m}(t))} - z = (-1)(z_0 e^{-Tt} + z)$$

y $e^{iT(\gamma_{s,m}(t))} - \bar{z}_1 = (-1)(\bar{z}_0 e^{Tt} + \bar{z}_1)$. Por lo tanto $|e^{-iT(\gamma_{s,m}(t))} - z_0| = e^{-Tt} + 1$, $|e^{-iT(\gamma_{s,m}(t))} - z| \geq |z| - e^{-Tt}$, $|e^{iT(\gamma_{s,m}(t))} - \bar{z}_1| = |z_0 e^{Tt} + \bar{z}_1|$.

Notar que $|z_0 e^{Tt} + \bar{z}_1| = 0$ si y sólo si $e^{Tt} = -\bar{z}_1 z_0^{-1} = -e^{i(E_1 - E_0)}$, de donde $\sin(E_1 - E_0) = 0$, por lo que $E_1 - E_0 = 2d\pi$, $d \in \mathbb{N}$ lo que contradice la hipótesis II).

Entonces $\kappa = \min_t |z_0 e^{Tt} + \bar{z}_1| > 0$. Luego,

$$|g(\gamma_{s,m}(t))| \leq \frac{e^{-Tt} |\varphi(\overline{\gamma_{s,m}(t)})| |\varphi(\gamma_{s,m}(t))|}{\kappa (e^{-Tt} + 1) (|z| - 1)}, \quad s = 2, 4$$

y la desigualdad (E.17) permite concluir (E.18). Por otro lado

$$g(x) = \frac{e^{-iTx} |\varphi(x)|^2}{(e^{iTx} - \bar{z}_1)(e^{-iTx} - z_0)(e^{-iTx} - z)}$$

es integrable pues $e^{iTx}(e^{-iTx} - z)g = \bar{\xi}_1 \xi_0 \in L^1(\mathbb{R})$. Entonces el análisis sobre las otras curvas es el mismo que para el caso $r_0 > 1$. De donde,

$$(E.65) \quad \int_{-\infty}^{\infty} g(x - i\epsilon) dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx$$

En el caso (A3) se considera la curva Γ_m dada antes, donde $\gamma_{1,m}(t) = t$, $t \in \widetilde{I}_m$, $\gamma_{2,m}(t) = \rho_{0,m+1} + \frac{\pi}{2T} - it$, $t \in [0, \epsilon]$, $\gamma_{3,m}(t) = t - i\epsilon$, $t \in \widetilde{I}_m$, $\gamma_{4,m}(t) = \rho_{0,m} + \frac{\pi}{2T} - it$, $t \in [0, \epsilon]$. Como $z_1 = -z_0$ para $s = 2, 4$ se sigue que:

$$e^{-iT(\gamma_{s,m}(t))} - z_0 = (-1)z_0(i e^{-Tt} + 1), \quad e^{-iT(\gamma_{s,m}(t))} - z = (-1)(z_0 i e^{-Tt} + z), \quad y$$

$$e^{iT(\gamma_{s,m}(t))} - \bar{z}_1 = \bar{z}_0(i e^{Tt} + 1). \quad \text{Luego, } |e^{-iT(\gamma_{s,m}(t))} - z_0|^2 = e^{-2Tt} + 1,$$

$$|e^{-iT(\gamma_{s,m}(t))} - z| \geq |z| - e^{-Tt}, \quad |e^{iT(\gamma_{s,m}(t))} - \bar{z}_1|^2 = e^{2Tt} + 1, \quad \text{y un cálculo lleva a}$$

$$|g(\gamma_{s,m}(t))| \leq \frac{e^{-Tt}}{(|z| - 1)} |\varphi(\overline{\gamma_{s,m}(t)})| |\varphi(\gamma_{s,m}(t))|, \quad s = 2, 4$$

Así el razonamiento anterior muestra la validez de (E.65).

E.3 Medida espectral y derivada de Radon-Nikodym de un operador unitario

Para U un operador unitario en \mathcal{H} se considera $(E(B))_{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})}$ la familia espectral asociada a este, donde $E(B)$ es una proyección ortogonal. A cada vector $\psi \in \mathcal{H}$ le corresponde una medida, denominada medida espectral, dada por $\mu_\psi(E) = \langle \psi, E(B)\psi \rangle = \|E(B)\psi\|^2$ con $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Sea $R(U, \zeta) = (U - \zeta)^{-1}U = (1 - \zeta U^*)^{-1}$. Para $\zeta = re^{i\rho}$, $\zeta' = 1/\bar{\zeta} = r^{-1}e^{i\rho}$ se define,

$$(E.66) \quad \delta(U, \rho) = \frac{1}{2\pi} (R(U, re^{i\rho}) - R(U, r^{-1}e^{i\rho}))$$

Por el teorema espectral se tiene,

$$\langle \psi, \delta(U, \rho)\psi \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{S}} \left[\frac{1}{1 - re^{i(\rho-t)}} - \frac{1}{1 - r^{-1}e^{i(\rho-t)}} \right] d\mu_\psi(t)$$

Como $\frac{1-r^2}{1-2\cos(\rho-t)+r^2} = \frac{1}{1-re^{i(\rho-t)}} - \frac{1}{1-r^{-1}e^{i(\rho-t)}}$ se sigue,

$$(E.67) \quad \langle \psi, \delta(U, \rho)\psi \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{S}} P(re^{i\rho}, e^{it}) d\mu_\psi(t)$$

donde $P(re^{i\rho}, e^{it}) = \frac{1-|re^{i\rho}|^2}{|re^{i\rho}-e^{it}|^2} = \frac{1-r^2}{1-2\cos(\rho-t)+r^2}$ es el núcleo de Poisson. El lado derecho en (E.67) se conoce como la integral de Poisson de la medida μ_ψ . Se puede mostrar,

$$(E.68) \quad \frac{d\mu_{\psi,ac}}{d\rho}(\rho) = \lim_{r \rightarrow 1^-} \langle \psi_{ac}, \delta(U, \rho)\psi_{ac} \rangle \quad , \quad c.t.p. \rho$$

donde $\frac{d\mu_{\psi,ac}}{d\rho}$ es la derivada de Radon-Nikodym de la parte absolutamente continua $\mu_{\psi,ac}$ de la medida espectral μ_ψ . Recordar que $\frac{d\mu_{\psi,ac}}{d\rho} \in L^1(\mathbb{S})$ y es no-negativa.

Notar que de la identidad de polarización (el producto interno se considera lineal conjugado en la primera componente)

$4\langle \phi, \psi \rangle = \|\phi + \psi\|^2 - \|\phi - \psi\|^2 + i\|\phi - i\psi\|^2 - i\|\phi + i\psi\|^2$, se sigue que

$$4\langle \phi, E(B)\psi \rangle = \langle \phi + \psi, E(B)(\phi + \psi) \rangle - \langle \phi - \psi, E(B)(\phi - \psi) \rangle + i\langle \phi - i\psi, E(B)(\phi - i\psi) \rangle - i\langle \phi + i\psi, E(B)(\phi + i\psi) \rangle$$

de esto se deduce que la medida compleja $\mu_{\phi,\psi}(B) = \langle \phi, E(B)\psi \rangle$ satisface $\mu_{\phi,\psi}(B) = \frac{1}{4}[\mu_{\phi+\psi}(B) - \mu_{\phi-\psi}(B) + i\mu_{\phi-i\psi}(B) - i\mu_{\phi+i\psi}(B)]$, y por la unicidad en la descomposición de la medida $\mu_{\phi,\psi}$ (teorema de descomposición de Lebesgue, [34]) se tiene en particular que,

$\mu_{\phi,\psi,ac} = \frac{1}{4}[\mu_{\phi+\psi,ac} - \mu_{\phi-\psi,ac} + i\mu_{\phi-i\psi,ac} - i\mu_{\phi+i\psi,ac}]$, por lo tanto se cumple c.t.p. ρ :

$$\frac{d\mu_{\phi,\psi,ac}}{d\rho} = \frac{1}{4} \left[\frac{d\mu_{\phi+\psi,ac}}{d\rho} - \frac{d\mu_{\phi-\psi,ac}}{d\rho} + i \frac{d\mu_{\phi-i\psi,ac}}{d\rho} - i \frac{d\mu_{\phi+i\psi,ac}}{d\rho} \right]$$

y la igualdad (E.68) queda en el caso general,

$$(E.69) \quad \frac{d\mu_{\phi,\psi,ac}}{d\rho}(\rho) = \lim_{r \rightarrow 1^-} \langle \phi_{ac}, \delta(U, \rho)\psi_{ac} \rangle \quad , \quad c.t.p. \rho$$

Observación 4.1 De la igualdad

$$\int_{\mathbb{S}} \frac{d\mu_{\phi,\psi}(t)}{1 - r^{\pm 1} e^{i(\rho-t)}} = 1 - \left(\int_{\mathbb{S}} \frac{d\mu_{\phi,\psi}(t)}{1 - r^{\mp 1} e^{i(\rho-t)}} \right)$$

se sigue que las expresiones

$$\int_{\mathbb{S}} \frac{d\mu_{\phi,\psi}(t)}{1 - r^{\pm 1} e^{i(\rho-t)}}$$

son simultaneamente convergentes, divergentes o acotadas cuando $r \rightarrow 1$. En el primero de estos casos se obtiene de (E.67)-(E.68)

$$(E.70) \quad \frac{d\mu_{\phi,\psi,ac}}{d\rho}(\rho) = \lim_{r \rightarrow 1^-} \frac{1}{2\pi} \left[2\text{Re} \left(\int_{\mathbb{S}} \frac{d\mu_{\phi,\psi}(t)}{1 - r e^{i(\rho-t)}} \right) - 1 \right]$$

Denotando

$$(E.71) \quad P_r(t) = P(r, e^{it}) = \frac{1 - r^2}{1 - 2 \cos t + r^2}$$

y $h = \frac{d\mu_{\psi,ac}}{d\rho}$ se tiene,

$$(E.72) \quad \langle \psi_{ac}, \delta(U, \rho) \psi_{ac} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{S}} P_r(\rho-t) d\mu_{\psi,ac}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{S}} P_r(\rho-t) h(t) dt = (P_r * h)(\rho)$$

Con la identidad (E.72) se puede probar que la convergencia en (E.69) es también válida en el espacio $L^1(\mathbb{S})$. Para esto se necesita [34]:

Lema E.1 Sea $f \in C(\mathbb{S})$, entonces $P_r * f$ converge uniformemente a f cuando $r \rightarrow 1^-$.

Obsérvese que $P_r \in L^1(\mathbb{S})$ y $\|P_r * h\|_{L^1} \leq \|h\|_{L^1}$. Entonces recordando que $C(\mathbb{S})$ es denso en $L^1(\mathbb{S})$ se tiene para $f \in L^1(\mathbb{S})$ y $\epsilon > 0$ con $\|f - g\|_1 < \epsilon/2$, donde $g \in C(\mathbb{S})$,

$$\|P_r * f - f\|_{L^1} \leq \|P_r * f - P_r * g\|_{L^1} + \|P_r * g - g\|_{L^1} + \|g - f\|_{L^1}$$

luego $\|P_r * f - f\|_{L^1} \leq \epsilon + \|P_r * g - g\|_{L^1}$ y del lema anterior se concluye la afirmación. Notar por último que del Lema de Riemann-Lebesgue, $(P_r * f)^\wedge(n) \rightarrow f^\wedge(n)$, si $r \rightarrow 1^-$, uniformemente en $n \in \mathbb{Z}$ donde \wedge denota la Transformada de Fourier, esto es

$$(E.73) \quad \lim_{r \rightarrow 1^-} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{int} (P_r * f)(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{int} f(t) dt$$

Bibliografía

- [1] Amrein, W.O., Jauch, J.M. and Sinha, K.B., *Scattering Theory in Quantum Mechanics, Lectures Notes and supplements in Physics*, W.A. Benjamin, 1977.
- [2] Asch, J., Briet, P., Astaburuaga, M.A., Cortés, V., Duclos, P. and Fernández, C., *Sojourn times for rank one perturbations*, to appear in *J.Math.Phys.*, 2006
- [3] Astaburuaga, M.A., Bourget, O., Cortés, V. and Fernandez, C. *Floquet operators without singular continuous spectrum*, submitted, 2005.
- [4] Astaburuaga, M.A. Covian, P. and Fernandez, C., *Behavior of the survival probability in some one dimensional problems*, *J.Math.Phys.* 43, 4571-4581, 2002.
- [5] Astaburuaga, M. A., Coimbra Charao, R., Fernández, C. and Perla Menzala, G., *Scattering Frequencies for a Perturbed System Elastic Wave Equations*, *Jour. of Math. Anal. and Appl.*, Vol. 219, 52-75, 1998.
- [6] Bourget, O., *Etude de la stabilité de systèmes dynamiques quantiques*, *Thèse doctorat de mathématiques, Université Joseph Fourier (Grenoble I)*, 2002.
- [7] Brezis, H., *Analyse Fonctionnelle*, Masson, 1983.
- [8] Coddington, E. and Levinson, N., *Theory of Ordinary Differential Equations*. McGraw- Hill, New York, 1955.
- [9] Coimbra Charao, R., Perla, G., *Scattering Frequencies and a Class of Perturbed System of Elastic Waves*, *Mat. Meth. in the Appl. Sci.*, Vol. 19, 699-716, 1996.
- [10] Conway, J., *Functions of Complex Variable, Second Edition*, Springer, 1978.
- [11] Cooper, J., Perla Menzala, G. and Strauss W.A., *On the scattering frequencies of time-dependent potential*, *Math. Meth. in the Appl. Sci.*, Vol. 8, 576-584, 1986.
- [12] Davies. E. B., *Resonances, spectral concentration and exponential decay* , *Lett. Math. Phys*, Vol. 1 31-35, 1975.
- [13] Emch. G. and Sinha, K., *Weak quantization in a nonperturbative model*, *J. Math. Phys.* Vol 20, 1336-1340, 1979.
- [14] Enss, V. and Veselic, K., *Bound states and propagating states for time-dependent Hamiltonians*, *Ann. Inst. H. Poincaré* Vol 39, 159-191, 1986.

- [15] Fernández, C. and Lavine, R., *Lower bounds for resonance widths in potential and obstacle scattering*, *Comm. Math. Phys.* Vol. 128, 263-284, 1990.
- [16] Fernández, C. and Sinha, K., *On a theory of Resonance in quantum mechanical scattering*, *Birkhäuser*, 89-95, 2000.
- [17] Folland, G., *Introduction to Partial Differential Equations*, *Princeton University Press*, 1976.
- [18] Froese, R. *Upper bounds for the resonance counting function of Schrödinger operators in odd dimensions*, *Canadian Journal of Mathematics* 50 (3), 538-546, 1998 .
Correction, Vol 53, No 4, 756-757, 1998.
- [19] Hislop, P.D. and Sigal, I.M., *Introduction to Spectral Theory, With Applications to Schrödinger Operators*, *Applied Mathematical Sciences*, *Springer*, 1996.
- [20] Howland, J., *Spectral concentration and virtual poles*, *Amer. J. Math.* 91, , pp. 1106-1126, 1969.
- [21] Iorio, R., *Equações diferenciais parciais: uma introdução*, *Projecto Euclides*, *IM-PA, CNPq*, 1988.
- [22] Kato, T., *Perturbation Theory for Linear Operators*, *Classics in Mathematics*, *Springer*, 1980.
- [23] Lavine, R. *Exponential Decay*, *Diff. Eq. and Math. Phys.*, *Proceedings of the Inst. Conference U. of Alabama at Birmingham*, 132-142, 1995.
- [24] Lavine, R. *Existence of almost exponentially decaying for barrier potential*, *Reviews in Mathematical Physics*, Vol. 13, No. 3, 67-305, 2001.
- [25] Lavine, R. *Spectral density and sojourn times*, *Atomic scattering Theory (J. Nuttall, ed.) University of Western Ontario, London, Ontario*, 1978.
- [26] Loe, B. *A pole-free strip for potential scattering.*, *J. Diff. Equations*, 99 (1), 112-138, 1992.
- [27] Müller, C., *Spherical Harmonics*, *Lectures Notes in Mathematics*, *Springer* 17, 1966.
- [28] Pearson, D.B., *Quantum scattering and Spectral Theory*, *Academic Press*, 1988.
- [29] Reed, M. and Simon, B. *Methods of Modern Mathematical Physics vol I, Functional Analysis*, *Academic Press*, 1972.
- [30] Reed, M. and Simon, B. *Methods of Modern Mathematical Physics vol II, Fourier Analysis, Self-Adjointness*, *Academic Press*, 1975.
- [31] Reed, M. and Simon, B. *Methods of Modern Mathematics Physics vol III, Scattering Theory*, *Academic Press*, 1979.

- [32] Reed, M. and Simon, B., *Method of Modern Mathematical Physics, Vol IV Analysis of Operators*, Academic Press, 1978.
- [33] Royden, H. L., *Real Analysis, second edition*, Macmillian Company, 1968.
- [34] Rudin, W. *Real and complex Analysis*. McGraw-Hill, 1968.
- [35] Schwartz, L. *Mathematics for Physical Sciences*, Addison-Wesley , 1966.
- [36] Simon, B., *Resonances in n-body quantum systems with dilatation analytic potentials and the foundations of time-dependent perturbation theory*, *Ann. Math.*, Vol. 97, 247-274 (1973).
- [37] Simon, B., *Resonances and complex scaling: a rigorous review*, *Internat. J. Quantum Chem.*, Vol. 14, 529-542, 1978.
- [38] Taylor, J.L., *Several complex Variables with Connections to Algebraic Geometry and Lie Groups*, *Graduate Studies in Mathematics*, Vol. 46, AMS, 2002.
- [39] Yafaev, D., *Mathematical Scattering Theory: General Theory*, *Translation of Mathematical Monographs*, Vol 105 AMS, 2000.
- [40] Yafaev, D., *Scattering Theory: Some Old and New Problems*, Springer, 2000.
- [41] Watson, G.N. *A treatise on the Theory of Bessel Function*, second edition, Cambridge, 1966.