



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA
DE CHILE - FACULTAD DE MATEMATICAS

UNA GENERALIZACION DE
LAS SUPERFICIES DE LEFSCHETZ

Por

Giancarlo A. Urzúa Elia

Tesis presentada a la Facultad de Matemáticas
de la Pontificia Universidad Católica de Chile,
como un requisito para optar al
grado de Magister en Ciencias Exactas mención Matemática.

Profesora Guía : Rubí E. Rodríguez.

Comisión Informante:

Angel Carocca - Universidad Católica de Chile.
Victor González - Universidad Técnica Federico Santa María.
Rubén Hidalgo - Universidad Técnica Federico Santa María.
Gonzalo Riera - Universidad Católica de Chile.

Junio. 2003
Santiago-Chile

A mi hermosa madre.

Agradecimientos

Llegó el momento de agradecer a las personas e instituciones involucradas en mi paso por la Facultad de Matemáticas tanto en la Licenciatura como en el Magister. Primero que nada quiero darle mis más sinceros agradecimientos al profesor que me aconsejó cambiar el rumbo hacia este maravilloso desafío, estudiar matemáticas, y me apoyó e incentivó desde el inicio de mi Licenciatura hasta el final de mi Magister: Profesor Renato Lewin. Muchas gracias, fue la mejor elección.

Agradezco especialmente a mi profesora guía Rubí E. Rodríguez por haber confiado en mi, por su apoyo constante y por haber leído y corregido mi tesis cientos de veces. Al mismo tiempo, mis agradecimientos van a todos los profesores que me brindaron abiertamente su ayuda, me introdujeron en este mundo matemático, me escucharon atentamente y me entregaron miles de consejos, entre ellos profesor Martín Chuaqui, Manuel Elgueta, Alvaro Cofré, Gonzalo Riera, Angel Carocca, Jan Kiwi, Gonzalo Masjuan. Por supuesto, les doy las gracias a los profesores Angel Carocca, Victor González, Rubén Hidalgo y Gonzalo Riera por constituir la comisión informante de mi tesis, encargada de su revisión junto con mi profesora guía, y por los gratos momentos que compartí junto a ustedes.

Muy importante ha sido el financiamiento que me han entregado diversas instituciones para realizar mis estudios. Mi reconocimiento para el Programa Padre Hurtado con su Premio Padre Hurtado, CONICYT con su Beca de Magister y a la Pontificia Universidad Católica de Chile con sus becas de matrícula e instructor becario. Es un placer decir que nunca he tenido que pagar por estudiar. Finalmente, agradezco desde mi corazón a quienes son mi motor energético, mis tres bellas mujeres: mi madre, Giovanna, mi hermana, Carina y mi señora, Coni; por el sólo hecho de estar ahí junto a mi.

Índice General

Resumen	1
Introducción	3
Capítulo 1. Planteamiento del problema y base teórica	5
Capítulo 2. Ángulos	7
Capítulo 3. Uniformización	15
Capítulo 4. Dominios especiales, saltos y teorema de isomorfismo	19
Capítulo 5. Números	25
Capítulo 6. Parametrización de \mathbb{J}_p	29
Capítulo 7. Automorfismos	35
Capítulo 8. Superficies de Lefschetz	43
8.1. Planteamiento del problema y base teórica	43
8.2. Uniformización	45
8.3. El método geométrico	46
8.4. Teorema principal de correspondencia	50
8.5. Números	51
8.6. Grupo total de automorfismos	53
8.7. Ecuaciones para las Superficies	56
Capítulo 9. Observaciones sobre casos especiales	59
9.1. Hiperelípticas en \mathbb{J}_p	59
9.2. Superficies equiláteras	61
9.3. Superficies cuadradas	63
Apéndice	67
Lista de símbolos	71
Bibliografía	73

Resumen

A continuación se presenta un estudio general de las superficies de Riemann compactas que admiten la acción de \mathbb{Z}_p (p primo) con signatura $(0; p, p, p, p)$ (llamadas de ahora en adelante \mathfrak{I}_p). Además, se incluye un trabajo del autor sobre el caso de signatura $(0; p, p, p)$ (superficies de Lefschetz), cuyos resultados ya eran conocidos. El análisis involucró geometría compleja, aritmética en el cuerpo de p elementos, topología elemental, grupos discontinuos y un poco de álgebra. La base del trabajo es la uniformización de estas superficies mediante el disco unidad $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Entre los resultados se cuentan:

- Superficies de Lefschetz (todos los resultados a continuación ya eran conocidos):
 - Se da la uniformización de estas superficies, explicitando el grupo hiperbólico que uniformiza.
 - Se cuenta cuántas superficies hay para cada p .
 - Se calcula el normalizador en $\text{Aut}(S)$ del \mathbb{Z}_p involucrado.
 - Se da ecuaciones afines para cada superficie.
- Superficies \mathfrak{I}_p :
 - Se da la uniformización de estas superficies, explicitando el grupo hiperbólico que uniformiza.
 - Se encuentra un espacio modular complejo de dimensión uno que las parametriza.
 - Se calcula el normalizador en $\text{Aut}(S)$ del \mathbb{Z}_p involucrado.
 - Se da ecuaciones afines para las superficies hiperelípticas y las superficies especiales (casos equilátero y cuadrado). Para el caso hiperelíptico se calcula $\text{Aut}(S)$.

Introducción

En general, el problema es estudiar a las superficies de Riemann compactas en las cuales actúe como grupo de automorfismos \mathbb{Z}_p (p primo) tal que fije n puntos y el cuociente sea la esfera. Lo anterior tiene dificultad si $n > 2$, ya que con $n = 0$ ó $n = 1$ no existen tales superficies y con $n = 2$ tenemos sólo a la esfera. Si S es una tal superficie y g es su género, entonces la ecuación de Riemann-Hurwitz se lee $g = \frac{(n-2)(p-1)}{2}$.

A comienzos del siglo pasado, Solomon Lefschetz (1884-1972) inició el estudio del problema (ver [3]) representando a estas superficies en ecuaciones del tipo,

$$y^p = \prod_{i=1}^{n-1} (x - a_i)^{\alpha_i}$$

en donde ni los α_i ni su suma es divisible por p . Notar que,

$$\langle (x, y) \mapsto (x, e^{\frac{2\pi i}{p}} y) \rangle \approx \mathbb{Z}_p$$

y que sus puntos fijos vienen dados por los a_i y $a_n = \infty$. Lefschetz hizo una división entre los casos $n = 3$, $n = 4$ y $n \geq 5$ según el comportamiento de la variedad jacobiana asociada a la superficie. Sin embargo, él estudió parcialmente el caso $n = 3$ y muy parcialmente los casos siguientes.

Si $n = 3$ ($p = 2g + 1$), las superficies son llamadas superficies de Lefschetz. Mucho tiempo después del estudio de Lefschetz han aparecido diferentes autores con trabajos sobre el caso $n = 3$, terminando con la descripción de dicho caso (ver [6] y [4]). En el capítulo 8 se da una clasificación de las superficies de Lefschetz usando un nuevo método de análisis. Los resultados coinciden con los anteriormente publicados por diferentes autores.

Para el caso siguiente, $n = 4$ ($p = g + 1$), no tengo conocimiento de trabajos anteriores aparte de la breve descripción de Lefschetz en [3]. En el presente trabajo se da una clasificación completa del caso $n = 4$; parametrizando las superficies en un espacio complejo de una dimensión, encontrando sus grupos uniformizadores y calculando los normalizadores en $\text{Aut}(S)$ del grupo \mathbb{Z}_p actuando en ellas.

Supongamos que S es una superficie de Riemann compacta y g su género. Una consecuencia interesante de este trabajo está relacionada con el siguiente simple hecho.

Si $T \in \text{Aut}(S)$ es tal que $|T| = p$ (primo) y $p > g$, entonces una de las siguientes afirmaciones es verdad:

- $M/\langle T \rangle$ es un toro, $g = 1$ y T no fija puntos ($n = 0$).
- $M/\langle T \rangle$ es la esfera, $g = 0$ y T fija 2 puntos ($n = 2$).
- $M/\langle T \rangle$ es la esfera, $p = 2g + 1$ y T fija 3 puntos ($n = 3$, superficies de Lefschetz).
- $M/\langle T \rangle$ es la esfera, $p = g + 1$ y T fija 4 puntos ($n = 4$, superficies \mathbb{I}_p).

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que γ es el género de $M/\langle T \rangle$ y n la cantidad de puntos fijos por T . Por Riemann-Hurwitz tenemos que:

$$2g - 2 = p(2\gamma - 2) + n(p - 1) .$$

Notar que si $n = 0$ y $p > g$, la única opción es la descrita en el enunciado. También se sabe que $n = 1$ no puede suceder (ver [2]). Supongamos $\gamma \geq 1$, entonces $\gamma = \frac{2g-2+n(p-1)}{2p} \geq 1$ lo que es equivalente a,

$$g \geq \frac{n(p-1) + 2}{2}$$

y como $p > g$,

$$p(2-n) > (2-n)$$

lo cual es una contradicción. Luego, $\gamma = 0$ y

$$g = \frac{(n-2)(p-1)}{2} .$$

Como $p > g$, tenemos que

$$p > \frac{(n-2)(p-1)}{2}$$

es decir,

$$p(n-4) < n-2 .$$

La anterior desigualdad vale si $n = 2$, $n = 3$ y $n = 4$. Si consideramos $n > 4$, tenemos que $p < 1 + \frac{2}{n-4}$ y esto no puede suceder. \square

En otras palabras, el presente trabajo clasifica a las superficies en las cuales actúa un grupo de orden p primo mayor que su género. Veremos que no hay superficies que satisfagan al mismo tiempo dos de las anteriores afirmaciones, excepto $\mathbb{C}/\langle 1, e^{\frac{2\pi i}{3}} \rangle$ la cual es Lefschetz ($p = 3$) y \mathbb{I}_2 .

CAPÍTULO 1

Planteamiento del problema y base teórica

Sean p un número primo y S una Superficie de Riemann compacta en la cual actúa \mathbb{Z}_p como grupo de automorfismos analíticos con cociente de signatura $(0; p, p, p, p)$; lo cual indica que el cociente por el grupo es una esfera y el grupo actúa con cuatro puntos fijos. A las superficies anteriores las denotaremos \mathfrak{J}_p . Se considerará $p > 2$. Con $p = 2$ estamos en género 1 y todos los toros cumplen con dichas características. Con $p > 2$ (usando Riemann-Hurwitz) tenemos que el género g para dichas superficies es $p - 1$, y de esta forma todas son uniformizadas por el disco.

Denotemos por Δ al disco unidad. Sea Γ subgrupo de los automorfismos de Δ tal que

$$M := \Delta/\Gamma = (0; p, p, p, p) .$$

Así, Γ puede ser pensado con la siguiente presentación:

$$\Gamma = \langle x, y, z : x^p = y^p = z^p = (xyz)^p \rangle .$$

En la Figura 1.1 se muestra la acción de los generadores de Γ en Δ . Un dominio fundamental para Γ es el hexágono mostrado en tal figura.

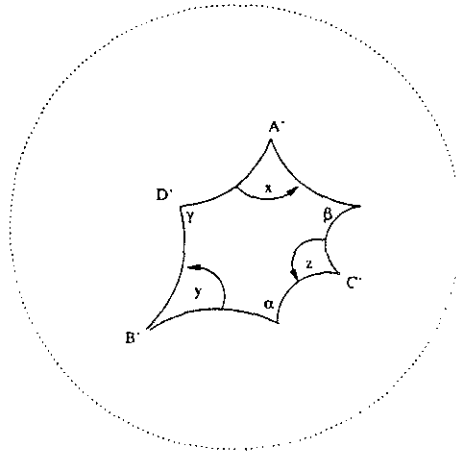
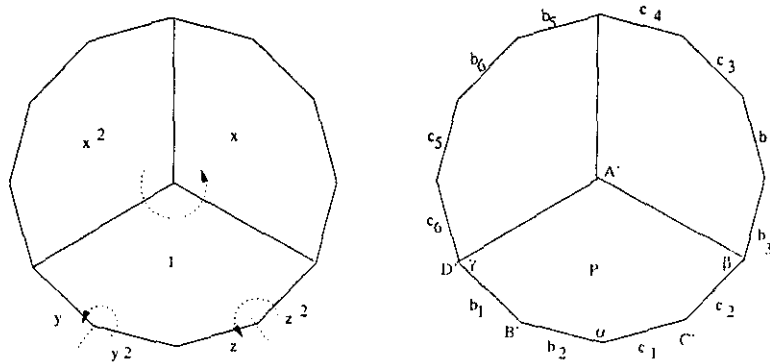


FIGURA 1.1. $A' \in \rho^{-1}(A)$, $B' \in \rho^{-1}(B)$, $C' \in \rho^{-1}(C)$ y $D' \in \rho^{-1}(D)$.

FIGURA 1.2. Caso $p = 3$, generalizable.

Notar que los ángulos α , β y γ deben ser tales que

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{2\pi}{p}.$$

La ecuación angular anterior nos muestra los dos parámetros reales libres dados por las esferas marcadas con cuatro puntos. Sea

$$\rho: \Delta \longrightarrow M$$

la función cociente inducida por Γ y R el conjunto de los puntos de ramificación de ρ , es decir,

$$R = \rho^{-1}(A) \cup \rho^{-1}(B) \cup \rho^{-1}(C) \cup \rho^{-1}(D),$$

donde A , B , C y D son las imágenes de los puntos fijos de la acción de \mathbb{Z}_p en la superficie. Llamaremos $P(\alpha, \beta, \gamma)$ el dominio fundamental para Γ explicitado arriba.

Sea Q el polígono formado por rotar p veces $P(\alpha, \beta, \gamma)$ alrededor de A' . Sea ρ_S la proyección de S a M inducida por la acción de \mathbb{Z}_p . Luego, hay una función holomorfa $\rho_\Delta: \Delta \longrightarrow S$ tal que $\rho_S \circ \rho_\Delta = \rho$, y esta ρ_Δ es inducida por la acción de algún grupo Γ^* en $\text{Aut}(\Delta)$.

Más aún, se tendrá que

$$\Gamma^* \trianglelefteq \Gamma$$

y

$$\Gamma/\Gamma^* \approx \mathbb{Z}_p.$$

Además, sin perder generalidad, la situación nos permite tomar el dominio fundamental Q para la acción de Γ^* mostrado en la Figura 1.2. En la figura también se muestra como se comporta la órbita de P por la acción de los generadores de Γ .

CAPÍTULO 2

Ángulos

En este capítulo se estudiará la pavimentación generada por el polígono $P(\alpha, \beta, \gamma)$ a causa de Γ . Dados los ángulos α , β y $\gamma = \frac{2\pi}{p} - \alpha - \beta$ en ese sentido, tendremos hay un único polígono hiperbólico $P(\alpha, \beta, \gamma)$. Lo último puede ser probado usando un sistema de tres ecuaciones con tres variables y el teorema del valor medio para funciones continuas. Luego, $P(\alpha, \beta, \gamma)$ es el mostrado en la Figura 2.1, es decir, el polígono estará formado por cuatro triángulos de ángulos interiores α , β y γ tal que $\alpha + \beta + \gamma = \frac{2\pi}{p}$. El estudio se enfocará en las pavimentaciones hechas por triángulos como los anteriores las cuales son inducidas por $P(\alpha, \beta, \gamma)$. La angulación de dichos triángulos será tomada como en la Figura 2.1, en sentido anti-horario ($\alpha\beta\gamma$ y $\alpha\gamma\beta$ son distintos sentidos).

NOTACIÓN 1. Una pavimentación del disco (triangulación) como la anterior se anotará $\Delta(\alpha, \beta, \gamma)$.

Entonces,

$$\Delta(\alpha, \beta, \gamma) = \Delta(\beta, \gamma, \alpha) = \Delta(\gamma, \alpha, \beta).$$

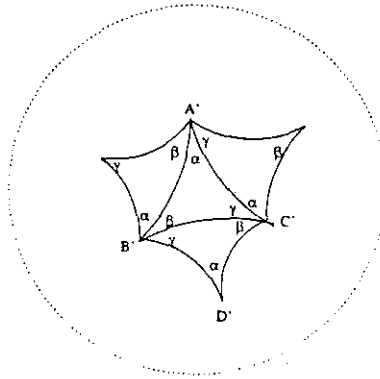


FIGURA 2.1. El dominio fundamental P .

Se hace notar que dado un Γ , y así una triangulación inicial, tenemos varias formas de obtener triangulaciones. La meta de esta sección es, dada una triangulación, encontrar una única otra triangulación (canónica) la cual representará a Γ . A su vez, cada triangulación canónica se relacionará con cada una de las $S \in \mathbb{I}_p$ por medio de la proyección desde el disco a la superficie; teniendo que si $S \approx S'$, entonces las triangulaciones canónicas respectivas son las mismas. La implicación en el otro sentido la dará una cierta combinación de números.

PROPOSICIÓN 1. *Sea $\Delta(\alpha, \beta, \gamma)$ y $r \in R$. Entonces, existen distancias mínimas entre r y cada uno de las cuatro clases de R .*

DEMOSTRACIÓN. Primero, R es un conjunto discreto en el sentido topológico. Elijamos $r \in R$ como el origen O y $r \in \rho^{-1}(A)$. Al mismo tiempo, escojamos $b \in \rho^{-1}(B)$, $c \in \rho^{-1}(C)$ y $d \in \rho^{-1}(D)$. Consideremos un disco cerrado centrado en O de radio distancia mínima entre O y los anteriores puntos. Luego, dentro del disco hay finitos puntos y entre ellos están los mínimos correspondientes. \square

PROPOSICIÓN 2. *Sea $\Delta(\alpha, \beta, \gamma)$. Entonces, se puede encontrar otro dominio fundamental P' para Γ , análogo a P , tal que $\alpha, \beta, \gamma \leq \frac{\pi}{p}$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $P(\alpha, \beta, \gamma)$ el dominio fundamental hexagonal para Γ mostrado arriba con un vértice igual al origen ($O \in \rho^{-1}(A)$). $P(\alpha, \beta, \gamma)$ lo rotamos alrededor del origen para formar un polígono Q de $4p$ lados. En la frontera de Q tendremos como vértices puntos de $\rho^{-1}(B)$, $\rho^{-1}(C)$ y $\rho^{-1}(D)$, uno de $2p$ puntos y los otros de p puntos. Esto es explicado en la Figura 2.2.

Supondremos que hay un ángulo $> \frac{\pi}{p}$ y mostraremos un procedimiento para cambiar el dominio P por otro similar, con la propiedad de que la distancia con una de las clases de vértices del nuevo Q (vértices alrededor de Q) es estrictamente menor, y la distancia con las otras dos clases sigue igual a la que había con el Q inicial.

Como esto producirá un descenso en las distancias entre O (O se mantiene fijo) y los vértices, y sólo tenemos un finito número de valores para cada una de ellas (proposición 1.1), se tendrá que el procedimiento debe parar y así todos los ángulos deben llegar a ser menores o iguales a $\frac{\pi}{p}$ (el argumento puede ser repetido siempre que un ángulo sea mayor a $\frac{\pi}{p}$). El procedimiento para cambiar P es mostrado en la Figura 2.3. En esta Figura, se supone que el ángulo γ es mayor que $\frac{\pi}{p}$.

Luego, γ es dividido en b y c , y $\alpha + \beta = a < \frac{\pi}{p}$. De esta forma, se mantienen las distancias $A'D'$ y $A'C'$, y se disminuye la distancia

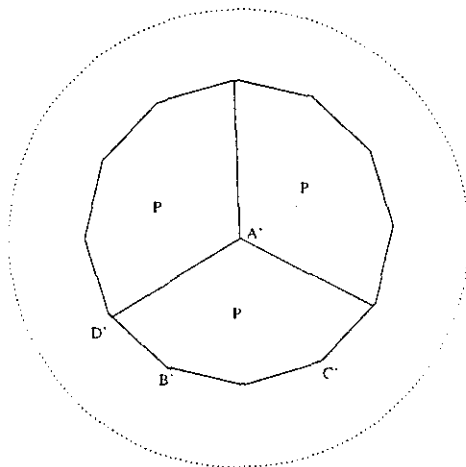


FIGURA 2.2. Q.

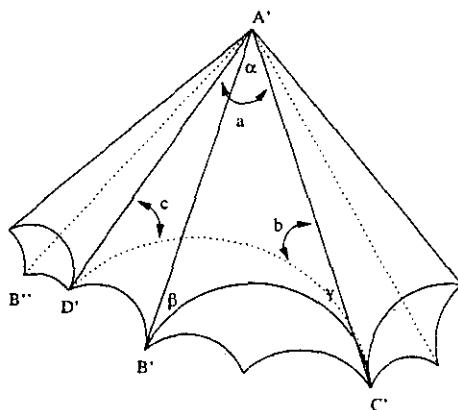
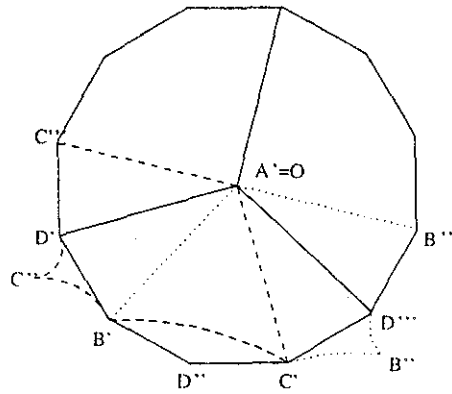


FIGURA 2.3

$A'B'$ estrictamente, fijándose en lo que sucede con $A'B''$. Como $\gamma > \frac{\pi}{p}$, $\text{dist} A'B' > \text{dist} A'B''$ (Teorema del coseno hiperbólico). \square

PROPOSICIÓN 3. Sea $\Delta(\alpha, \beta, \gamma)$ tal que los ángulos son como los de la proposición anterior y está centrada en el origen. Entonces, las distancias mínimas entre $O \in \rho^{-1}(A)$ y R son dadas por los tres lados del triángulo ABC generador, y son alcanzadas por:

1. p o $2p$ puntos entre O y $\rho^{-1}(D)$ si $\alpha < \frac{\pi}{p}$ o $\alpha = \frac{\pi}{p}$ respectivamente.

FIGURA 2.4. Eligiendo P .

2. p puntos entre O y $\rho^{-1}(B)$.
3. p puntos entre O y $\rho^{-1}(C)$.

Los anteriores puntos se encuentran en el borde del polígono Q correspondiente.

DEMOSTRACIÓN. La proposición será demostrada en forma geométrica y se usarán varias figuras explicativas-demostrativas. Supongamos pavimentado el disco con P , el cual tiene seis vértices: uno de $\rho^{-1}(A)$, uno de $\rho^{-1}(B)$, uno de $\rho^{-1}(C)$ y tres de $\rho^{-1}(D)$. Se demostrará la minimalidad con $\rho^{-1}(D)$ ya que podemos construir P con tres puntos de las otras dos clases restantes ($\rho^{-1}(B)$ y $\rho^{-1}(C)$), como se explica en la Figura 2.4.

Supongamos que la distancia mínima es alcanzada por $w \in \rho^{-1}(D)$ tal que no pertenece al borde de Q (Q es el polígono de $4p$ lados formado al rotar P alrededor de O). Luego, tenemos una situación como la de la Figura 2.5. Aquí, x e y pertenecen a R pero no a $\rho^{-1}(D)$ y $x \neq y$. El triángulo xwy es uno de los triángulos de la triangulación, es decir, sus ángulos interiores son α , β y γ en algún orden.

Si tenemos que $\angle Oyw$ o $\angle Oxw$ es mayor o igual a $\frac{2\pi}{p}$, entonces podemos contradecir la minimalidad de w . Esto es explicado en la Figura 2.6. En esta figura se supone que $\angle w'yw = \frac{2\pi}{p}$ y $w' \in \rho^{-1}(D)$. Entonces, la distancia desde el origen a w' es menor que la del origen a w , contradiciendo lo supuesto.

En la anterior explicación se usa el Teorema del coseno hiperbólico. Dos triángulos con dos lados iguales y el ángulo entre ellos distinto poseerá el lado restante mayor si el ángulo es el mayor.

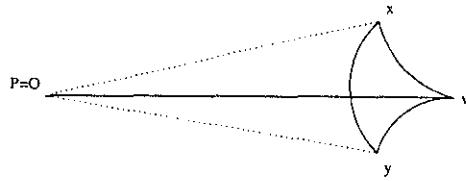


FIGURA 2.5

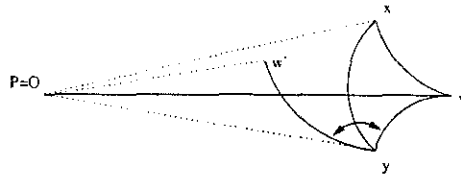


FIGURA 2.6

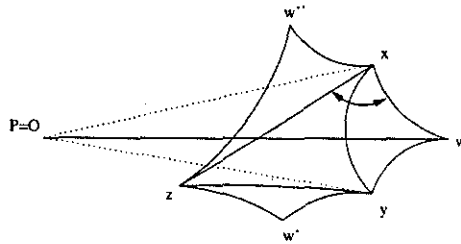


FIGURA 2.7

Ahora supondremos que $\angle Oyw$ y $\angle Oxw$ es menor a $\frac{2\pi}{p}$. Consideremos el polígono P (vértices $zw''xwyw'$) como en la Figura 2.7 el cual representa la situación.

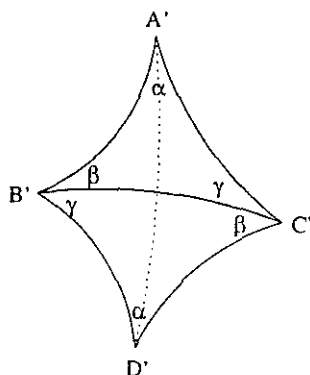
Por otro lado, las condiciones

$$\alpha, \beta, \gamma \leq \frac{\pi}{p}$$

y

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{2\pi}{p},$$

implican que la suma de cualquiera dos ángulos es mayor que $\frac{\pi}{p}$. Luego, $\angle zwx$ y $\angle zyw$ son $\geq \frac{\pi}{p}$, y de esta forma $\angle Oxw'' \leq \angle Oxw$. Si es menor, estamos listos. Si es igual, se tendrá que $\angle Oyw' < \angle Oyw$ con lo que se llega a una contradicción con la hipótesis de que w alcanzaba la

FIGURA 2.8. $\alpha = \frac{\pi}{p}$.

distancia mínima con O . Notar que el polígono P usado ($w \in P$) no pertenecía a Q , lo cual se asumió en la discusión anterior.

De esta manera, los valores mínimos de las distancias entre O y $\rho^{-1}(D)$ tienen que ser vértices de Q . Se puede ver que tenemos sólo dos casos: todas las preimágenes de D en Q son minimales ($2p$ puntos) o una por medio (p puntos). Esto dependerá de si el ángulo α es igual o menor a $\frac{\pi}{p}$ respectivamente. \square

PROPOSICIÓN 4. Sea $\Gamma \leq \text{Aut}(\Delta)$ con $\Delta/\Gamma = (0; p, p, p, p)$ ($p > 2$ primo). Entonces se puede elegir una $\Delta(\alpha, \beta, \gamma)$ para Γ con $\alpha \leq \frac{\pi}{p}$, $\beta, \gamma < \frac{\pi}{p}$ de manera única salvo en el caso en que $\alpha = \frac{\pi}{p}$, en donde se tienen dos pavimentaciones (cambiando el sentido de los ángulos).

DEMOSTRACIÓN. Suponer que todos los ángulos son menores a $\frac{\pi}{p}$. Luego, por Proposición 1 de este capítulo, tenemos p puntos minimales para cada ramificación (alrededor de Q). Si suponemos que hay otra pavimentación por triángulos de ángulos cuya suma es $\frac{2\pi}{p}$ y son menores o iguales a $\frac{\pi}{p}$, tendremos de partida que son sólo menores (hay p puntos minimales para cada clase) y finalmente tienen que coincidir por Proposición 3 (distancias minimales). Así, los ángulos son los mismos y la pavimentación es igual.

Análogamente si uno de los ángulos es igual a $\frac{\pi}{p}$ se tendrán dos posibilidades de pavimentación dado Γ , pero los ángulos son iguales (estarán en otro orden). La Figura 2.8 es explicativa al respecto. \square

De ahora en adelante la triangulación $\Delta(\alpha, \beta, \gamma)$ será pensada como la proposición anterior, cuocientando en el caso $\alpha = \frac{\pi}{p}$ las dos distintas triangulaciones. La triangulación así elegida se llamará canónica.

Las anteriores demostraciones se han hecho en base a geometría hiperbólica (sobre el disco). De esta forma, no tomamos en cuenta el caso $p = 2$. Sin embargo, para todos los toros se aplica exactamente lo dicho en el anterior teorema (aquí todo triángulo cumple con $\alpha + \beta + \gamma = \frac{2\pi}{2} = \pi$). Esto se demostrará en el estudio de la parametrización de \mathfrak{I}_p .

Ejemplo: Si se considera el toro generado por $\langle 1, \sqrt{3}i \rangle$, en un comienzo le corresponden dos triangulaciones: $\Delta(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6})$ y $\Delta(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3})$, dadas por los vértices $\{0, \sqrt{3}i, 1\}$ o $\{0, \sqrt{3}i + 1, 1\}$ respectivamente. Sin embargo, desde ahora son las mismas.

Ahora vienen dos teoremas muy importantes para la posterior clasificación de las \mathfrak{I}_p . Sea $G_S \approx \mathbb{Z}_p$ el grupo elegido inicialmente para $S \in \mathfrak{I}_p$ el cual fija cuatro puntos sobre la superficie.

LEMA 1. Si $S \in \mathfrak{I}_p$ con p impar, entonces

$$\left(p, \frac{|\text{Aut}(S)|}{p}\right) = 1.$$

DEMOSTRACIÓN. Suponer que $p^2 / |\text{Aut}(S)|$. Por Teorema de Sylow, existe un $H \leq \text{Aut}(S)$ tal que $|H| = p^2$ y $G_S \trianglelefteq H$. Entonces, H/G_S (orden p) actúa en S/G_S (esfera). Estudiaremos el orden del estabilizador en H de los puntos fijos por G_S . Luego, tenemos dos posibilidades: p o p^2 .

Sea A fijo por G_S y supongamos que $|\text{Stab}_H(A)| = p$. Luego, la imagen de A por la proyección $S \rightarrow S/G_S$ no es punto fijo de la acción de H/G_S en S/G_S . Entonces, la cardinalidad de la órbita de A por la acción de H en S puede ser:

$$1 + (p-1)p, \quad 2 + (p-2)p \quad \text{o} \quad 3 + (p-3)p \quad \text{o} \quad 4 + (p-4)p.$$

Como la cardinalidad de la órbita es divisible por p , esto no puede ser para todo $p > 3$. Si $p = 3$, entonces la órbita debe tener cardinalidad 3. Esto significa que tres de los puntos fijos por G_S están en órbita por H . Si miramos el cuarto punto, este debe ser fijo por H (mirar su órbita, $1 + (p-1)p$), y así tenemos un automorfismo H que fija un punto fijo por G_S y los otros son permutados. Sin embargo, para $p = 3$ esto no es posible y será mostrado más adelante en las posibilidades que hay para automorfismos que permuten los puntos fijos de G_S . De esta forma, el estabilizador de A no tiene orden p .

Luego, todo punto fijo por G_S debe ser fijo por H . Sin embargo, un automorfismo de la esfera en la esfera de orden p (H/G_S) sólo fija dos puntos. Así, no puede existir un tal H . \square

TEOREMA 1. Si $S, S' \in \mathfrak{J}_p$ son isomorfas, entonces existe un isomorfismo F entre ellas tal que $F(\text{Fix}(G_S)) = \text{Fix}(G_{S'})$.

DEMOSTRACIÓN. Por el Lema anterior y Teoremas de Sylow, tenemos que todo subgrupo de $\text{Aut}(S)$ isomorfo a \mathbb{Z}_p es conjugado a G_S .

Sea $H : S \rightarrow S'$ isomorfismo. Entonces, $H \circ G_S \circ H^{-1}$ es un automorfismo de S' de orden p que fija cuatro puntos. Luego, existe $L \in \text{Aut}(S')$ tal que

$$L \circ H \circ G_S \circ H^{-1} \circ L^{-1} = G_{S'}$$

Si $F = L \circ H$, se tiene lo pedido. \square

TEOREMA 2. Sean $S, S' \in \mathfrak{J}_p$ analíticamente isomorfas con p primo cualquiera. Entonces,

$$\Delta(\alpha, \beta, \gamma) = \Delta(\alpha', \beta', \gamma')$$

DEMOSTRACIÓN. Si miramos el isomorfismo inducido entre los cubrimientos universales a causa del isomorfismo entre las superficies (permutando los puntos fijos), notamos que al ser conformes llevan una triangularización en la otra (la proposición 4. no permite otra alternativa). \square

Para el caso de los toros, el anterior teorema es condición necesaria y suficiente, y se tratará después.

CAPÍTULO 3

Uniformización

Ahora empezamos con el problema combinatorial. Fijemos un Γ y con esto una $\Delta(\alpha, \beta, \gamma)$ canónica. Consideraremos la triangulación centrada en el origen ($O \in \rho^{-1}(A)$) y un dominio $P(\alpha, \beta, \gamma)$ como el de la Figura 1. Recordamos que Q es el polígono de $4p$ lados formado por p $P(\alpha, \beta, \gamma)$ alrededor de O . Q será nuestro dominio fundamental inicial para Γ^* .

La pregunta quién es Γ^* es equivalente a como se identifican los lados de Q , los cuales son nombrados como en la Figura 3.1 generalizada. Esto es equivalente a mirar las posibilidades para los homomorfismos de grupos $\phi : \Gamma \longrightarrow \mathbb{Z}_p = \langle u, u^p = 1 \rangle$ tal que $\ker(\phi) = \Gamma^*$, fijando que $\phi(x) = u$. Estas posibilidades estarán dadas por $\phi(y) = u^i$ y $\phi(z) = u^j$ con $i, j \in \{1, 2, \dots, p-1\}$ ($\phi(xyz) \neq 1 \leftrightarrow p \nmid i + j + 1$). Sin embargo, queremos dar un punto de vista geométrico de lo anterior y ese será el siguiente trabajo.

Notar que b_i y c_j no pueden ser identificados $\forall i, j \in \{1, 2, \dots, 2p\}$.

NOTACIÓN 2. Si x_i lo identifico con x_j , esto se anotará $x_i \leftrightarrow x_j$. En posteriores cálculos los subíndices serán tomados módulo $2p$ por razones obvias.

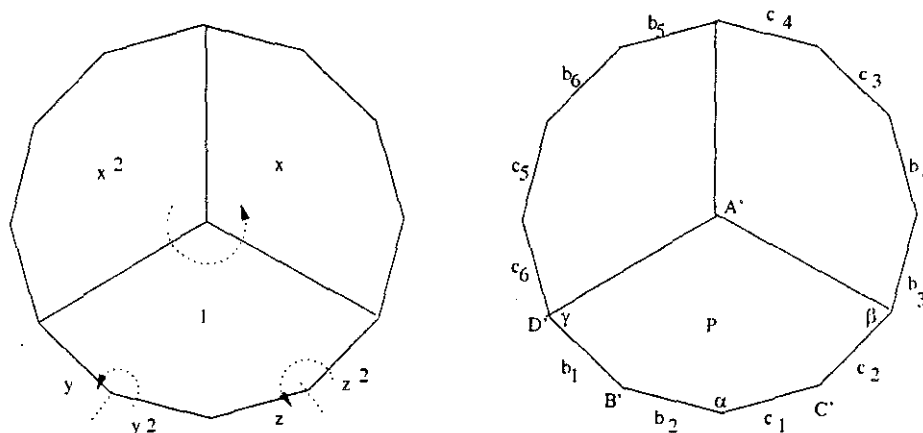
PROPOSICIÓN 5. Según la Figura 3.1 generalizada, sólo se pueden identificar $b_1 \leftrightarrow b_{2i+2}$, $c_1 \leftrightarrow c_{2j+2}$ con $i, j \in \{0, 1, 2, \dots, p-1\}$, excepto:

1. $b_1 \leftrightarrow b_2$, $c_1 \leftrightarrow c_{2j+2} \forall j$. ($i \equiv 0$)
2. $b_1 \leftrightarrow b_{2i+2}$, $c_1 \leftrightarrow c_2 \forall i$. ($j \equiv 0$)
3. $b_1 \leftrightarrow b_{2i+2}$, $c_1 \leftrightarrow c_{2(p-i)} = c_{2(p-i-1)+2} \forall i$. ($i + j + 1 \equiv 0$)

Las combinaciones posibles son $p^2 - 3p + 3$, y de esta manera, se tendrán $p^2 - 3p + 3$ superficies para analizar (sin saber si son o no isomorfas).

DEMOSTRACIÓN. Primero, ni b_1 ni c_1 pueden ser identificados con un lado de subíndice impar, ya que la superficie sufre una desorientación.

Si 1. o 2. suceden, B o C será un punto fijo de Γ^* respectivamente. Si 1. y 2. no suceden, entonces B y C corresponden a un sólo punto

FIGURA 3.1. Se generaliza para todo p .

en el cuociente por Γ^* (pensarlo como superficie de Lefschetz, capítulo 8). Ahora tiene que suceder que D también sea un único punto sobre la superficie cuociente.

Se analizará como pueden ser "pegadas" las $2p$ preimágenes de D . Sean D_{cb} los D entre C y B , y D_{bc} lo correspondiente. Entonces por simetría, los p D_{cb} y los p D_{bc} son pegados entre ellos en paquetes de igual cantidad. Sea la cantidad de paquetes n , entonces:

$$n(\text{paquete}) = 2p$$

con lo que n puede ser $1, 2, p, 2p$.

Si $n = 2p$ el paquete es de un punto, y no puede ser.

Si $n = 2$, el paquete tiene tamaño p y en el paquete hay tantos D_{cb} como D_{bc} y p no es divisible por 2.

Si $n = p$, los paquetes serían de dos y puede suceder. Esto no se desea, ya que habrían p puntos D sobre la superficie. Para paquetes de a dos, se tendría un paralelismo en los saltos dado por

$$b_1 \leftrightarrow b_{2i+2} \quad c_{2i+1} \leftrightarrow c_{2p}$$

con lo que se obtiene $i + j + 1 \equiv 0(p)$.

Si $n = 1$, todos son pegados en uno y es lo que se quiere. Contando los pares ordenados totales p^2 y restando las $3p - 3$ excepciones se obtiene lo dicho. Notar que en las excepciones aparecen elementos elípticos en el grupo Γ^* . \square

NOTACIÓN 3. Si $x_i \leftrightarrow x_j$, entonces el automorfismo que identifica x_i con x_j se anotará $T_{x_i \rightarrow x_j} \in \Gamma^*$.

PROPOSICIÓN 6. Si $b_1 \leftrightarrow b_{2i+2}$ y $c_1 \leftrightarrow c_{2j+2}$, entonces el grupo Γ^* está totalmente caracterizado y es generado por:

$$\{T_{b_{2ik+1} \mapsto b_{2i(k+1)+2}} : \text{con } k \in \{0, 1, \dots, p-1\}\}$$

y

$$\{T_{c_{2jk+1} \mapsto c_{2j(k+1)+2}} : \text{con } k \in \{0, 1, \dots, p-1\}\}$$

donde

$$T_{b_1 \mapsto b_{2i+2}} = x^i y^{-1} \quad T_{c_1 \mapsto c_{2j+2}} = x^j z^{-1}$$

y

$$T_{b_{2ik+1} \mapsto b_{2i(k+1)+2}} = x^{ki} T_{b_1 \mapsto b_{2i+2}} x^{-ki} \quad T_{c_{2jk+1} \mapsto c_{2j(k+1)+2}} = x^{kj} T_{c_1 \mapsto c_{2j+2}} x^{-kj}$$

DEMOSTRACIÓN. La demostración es análoga en b_1 y c_1 a la hecha para a_1 con las superficies de Lefschetz (Revisar en el capítulo 8 sección 8.3). Lo que importa es la elección $x^i = y$ y $x^j = z$, y el hecho de estar trabajando con p primo (trabajo en ecuaciones módulo p). \square

Entonces, dada $\Delta(\alpha, \beta, \gamma)$, para cada pegado de b_1 y c_1 se tendrá su correspondiente $\Gamma_{(i,j)}^*$ y $S_{(i,j)} = \Delta/\Gamma_{(i,j)}^*$. La Figura 3.2 muestra la armonía de las identificaciones vista con esos generadores.

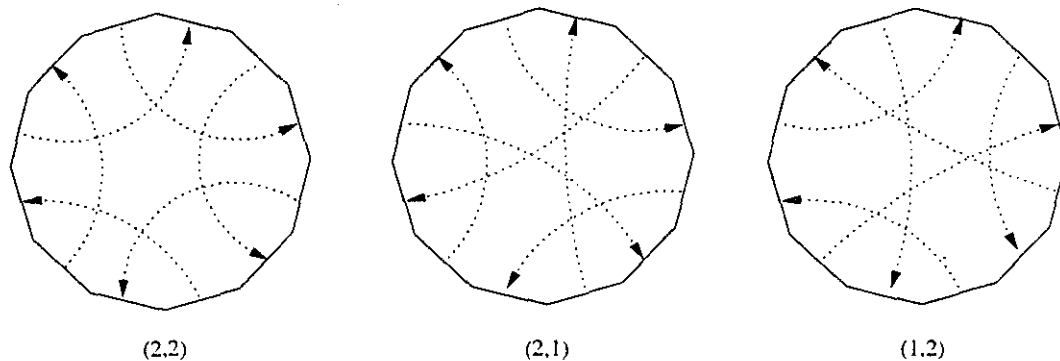


FIGURA 3.2. Caso posibles para $p = 3$.

De esta forma, una superficie $S \in \mathfrak{I}_p$ podría pensarse como

$$S_{(i,j)}^{(\alpha, \beta, \gamma)}$$

Sin embargo, distintas identificaciones iniciales darán en muchos casos superficies equivalentes. Usando los Teoremas 1 y 2, lograremos identificar cuales son isomorfas y cuales no.

CAPÍTULO 4

Dominios especiales, saltos y teorema de isomorfismo

Como consecuencia del Teorema 1, nos tendremos que fijar en dominios Q tales que estén centrados en puntos de R (la ramificación de ρ inducida por los puntos fijos de $G_S \approx \mathbb{Z}_p$ inicial), tomando todas las posibilidades. Esto porque cuando miremos un isomorfismo entre superficies miraremos el inducido entre los discos (como cubrimientos universales), y como se permutan los R (Teorema 1), se mirarán los dominios centrados en cada una de las clases de R . En esta parte serán esenciales las proposiciones de la sección 2 acerca de los ángulos y minimalidad. Partiremos usando el dominio de la sección anterior, centrado en $O \in \rho^{-1}(A)$ y rodeado de $2p$ pre-imágenes de D . A este dominio lo llamamos $[AD]$.

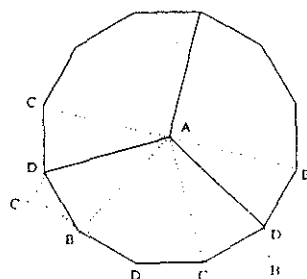
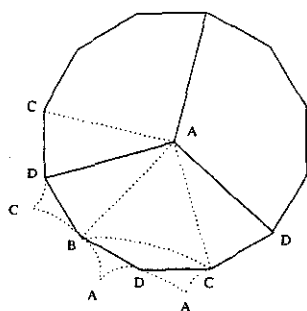
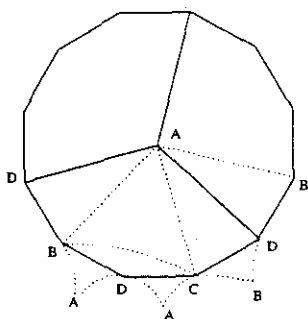
A partir de $[AD]$, construimos los dominios $[AB]$, $[AC]$, $[BC]$, $[BA]$, $[BD]$, $[CA]$, $[CB]$, $[CD]$, $[DA]$, $[DB]$ y $[DC]$, como se indica en las Figuras 4.1, 4.2, 4.3 y 4.4. En estas figuras y en el posterior trabajo no hacemos distinción entre preimágenes de un punto $\in R$ y el punto de cual proviene.

Cuando miremos un isomorfismo en el disco, las posibilidades serán inyecciones entre estos dominios. Eso si, tendrán que ser idénticos entre si y deberá coincidir la acción de Γ^* en los lados. Todo el anterior trabajo ha sido para esto y nos queda saber, a partir de como es Γ^* en $[AD]$, como trabaja Γ^* en cada uno de los dominios especiales. Eso se llamará el salto del dominio.

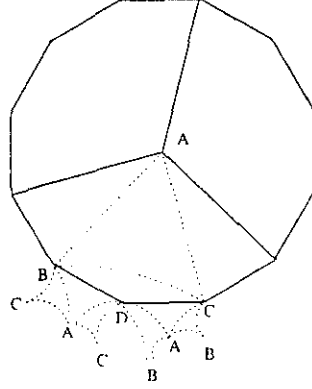
Un salto será un par ordenado con un sub-índice $n \in \{1, 2, 3\}$ el cual indica si el ángulo central es α , β o γ respectivamente. Se define, acorde a lo anterior, el salto para $[AD]$ como,

$$s[AD] = (i, j)_1$$

ya que $b_1 \leftrightarrow b_{2i+2}$, $c_1 \leftrightarrow c_{2j+2}$ y α es el ángulo central. Supondremos que el ángulo de mayor medida es α .

FIGURA 4.1. $[AD]$, $[AB]$ y $[AC]$.FIGURA 4.2. $[BA]$, $[BC]$ y $[BD]$.FIGURA 4.3. $[CA]$, $[CB]$ y $[CD]$.

DEFINICIÓN 1. (*Salto*) El salto $s[XY]$ para un dominio especial $[XY]$ se define como el par ordenado con sub-índice $(a, b)_n$ ($a, b \in \mathbb{Z}_p$ y $n \in \{1, 2, 3\}$) el cual indica como es la acción de Γ^* en los lados de la frontera (como en el dominio $[AD]$) en el sentido anti-horario y n indica si el ángulo central es α , β o γ .

FIGURA 4.4. $[DA]$, $[DB]$ y $[DC]$.

DEFINICIÓN 2. (*Igualdad entre saltos*) Dos saltos $(a, b)_n$ y $(c, d)_m$ se dirán iguales si y sólo si $a = c$, $b = d$ y $n = m$.

A continuación se calculan los saltos restantes.

PROPOSICIÓN 7. Sea $\Gamma_{(i,j)}^*$ y $k = -(i + j + 1)$, entonces:

$$\begin{aligned} s[AD] &= (i, j)_1 & s[AB] &= (j, k)_3 & s[AC] &= (k, i)_2 \\ s[BD] &= (i^{-1}j, i^{-1})_2 & s[BC] &= (i^{-1}, i^{-1}k)_1 & s[BA] &= (i^{-1}k, i^{-1}j)_3 \\ s[CD] &= (j^{-1}, ij^{-1})_3 & s[CA] &= (ij^{-1}, j^{-1}k)_2 & s[CB] &= (j^{-1}k, j^{-1})_1 \\ s[DA] &= (jk^{-1}, ik^{-1})_1 & s[DC] &= (ik^{-1}, k^{-1})_3 & s[DB] &= (k^{-1}, jk^{-1})_2 \end{aligned}$$

donde todos los números son tomados desde $\{1, 2, \dots, p-1\}$, el sistema completo de residuos módulo p .

DEMOSTRACIÓN. Se parte con el dominio $[AD]$ y su salto $(i, j)_1$, y se elige uno de sus hexágonos. En él se mira alrededor de cada vértice que sucede según Γ^* . Esto es traducido en ecuaciones modulares (ecuaciones módulo \mathbb{Z}_p), las cuales vienen dadas según se identifican los lados de cada uno de estos dominios centrados en A , B , C o D . El cálculo para cada uno es semejante al hecho en el capítulo 8 con las superficies de Lefschetz. Las ecuaciones usadas son copiadas de la Proposición 2. \square

La idea ahora es asignarle a la superficie $S_{(i,j)}^{(\alpha, \beta, \gamma)} \in \mathbb{J}_p$ un conjunto que le de información necesaria para compararse con otra de su especie, y con esto verificar isomorfismos. El conjunto dependerá de la triangulación y será:

1. En los casos distintos a los que siguen,

$$\begin{aligned} \Lambda_{(i,j)}^p = & \{(i, j)_1, (j, k)_3, (k, i)_2, \\ & (i^{-1}j, i^{-1})_2, (i^{-1}, i^{-1}k)_1, (i^{-1}k, i^{-1}j)_3, \\ & (j^{-1}, ij^{-1})_3, (ij^{-1}, j^{-1}k)_2, (j^{-1}k, j^{-1})_1, \\ & (jk^{-1}, ik^{-1})_1, (ik^{-1}, k^{-1})_3, (k^{-1}, jk^{-1})_2\}. \end{aligned}$$

2. Si $\Delta(\frac{2\pi}{3p}, \frac{2\pi}{3p}, \frac{2\pi}{3p})$,

$$\begin{aligned} \Lambda_{(i,j)_e}^p = & \{(i, j)_1, (j, k)_1, (k, i)_1, \\ & (i^{-1}j, i^{-1})_1, (i^{-1}, i^{-1}k)_1, (i^{-1}k, i^{-1}j)_1, \\ & (j^{-1}, ij^{-1})_1, (ij^{-1}, j^{-1}k)_1, (j^{-1}k, j^{-1})_1, \\ & (jk^{-1}, ik^{-1})_1, (ik^{-1}, k^{-1})_1, (k^{-1}, jk^{-1})_1\}. \end{aligned}$$

3. Si $\Delta(\frac{\pi}{p}, \frac{\pi}{2p}, \frac{\pi}{2p})$,

$$\Lambda_{(i,j)_e}^p = \Lambda_{(i,j)}^p \cup \Lambda_{(j,i)}^p.$$

El porqué de esta asignación será visualizado en la demostración del Teorema 3 en donde tendremos tres maneras distintas de mirar a una superficie en \mathbb{J}_p . Por esta razón,

1. Si $S \in \mathbb{J}_p$ y su pavimentación es $\Delta(\frac{2\pi}{3p}, \frac{2\pi}{3p}, \frac{2\pi}{3p})$, entonces se dirá que $S \in \mathbb{J}_p^e$ y S es equilátera.
2. Si $S \in \mathbb{J}_p$ y su pavimentación es $\Delta(\frac{\pi}{p}, \frac{\pi}{2p}, \frac{\pi}{2p})$, entonces se dirá que $S \in \mathbb{J}_p^c$ y S es cuadrada.
3. En otro caso se dirá que $S \in \mathbb{J}_p^a$ y S es aguda.

TEOREMA 3. Sean $i, j, i', j' \in \{1, 2, \dots, p-1\}$ con $p \nmid i + j + 1$. Entonces $S_{(i,j)}^{(\alpha, \beta, \gamma)}, S_{(i',j')}^{(\alpha', \beta', \gamma')} \in \mathbb{J}_p$ son analíticamente equivalentes si y sólo si

$$\Delta(\alpha, \beta, \gamma) = \Delta(\alpha', \beta', \gamma') \quad \text{y} \quad \Lambda_{(i,j)}^p = \Lambda_{(i',j')}^p$$

considerando los Λ según la triangulación.

DEMOSTRACIÓN. Si $\Delta(\alpha, \beta, \gamma) = \Delta(\alpha', \beta', \gamma')$ y $\Lambda_{(i,j)}^p = \Lambda_{(i',j')}^p$ en alguna triangulación, entonces se considera uno de los dominios especiales para cada uno, en los cuales el salto sea el mismo. Luego se construye una biyección analítica entre los dominios (automorfismo del disco) tal que se respete exactamente la acción de Γ^* en cada uno de ellos. Por ejemplo se pueden centrar en el origen cada uno de los centros de los dominios y rotarlos adecuadamente. Luego, las superficies correspondiente son equivalentes.

Suponer que las superficies son equivalentes analíticamente. Entonces las triangulaciones son las mismas (teorema 2), y existe un isomorfismo $F : S_{(i,j)}^{(\alpha,\beta,\gamma)} \longrightarrow S_{(i',j')}^{(\alpha',\beta',\gamma')}$ tal que $F(\text{Fix}(G_S)) = G_{S'}$ (teorema 1). Supongamos que $\text{Fix}(G_S) = \{A, B, C, D\}$. Ahora subiremos al disco y consideramos los dominios especiales $[AD]$ y $[F(A)F(D)]$ centrados en el origen. Entonces, el isomorfismo F induce una rotación $f : \Delta \longrightarrow \Delta$, $f(z) = e^{\theta i} z$. Por Proposición 3 y como $F(\text{Fix}(G_S)) = G_{S'}$, se que $f([AD]) = [F(A)F(D)]$. Explicaremos según la triangulación,

1. Si estamos en una triangularización aguda o equilátera.

$$s[AD] = s[F(A)F(D)] .$$

2. Si estamos en la triangulación cuadrada tenemos dos posibilidades,

$$s[AD] = s[F(A)F(D)] = (i, j)_1 \quad \text{o} \quad s[AD] = (j, i)_1$$

ya que tenemos más distancias minimales entre A y D ($2p$ puntos D 's).

Luego, ambas superficies tienen un salto igual. Lo que sucede es que al tener un salto, uno puede generar todos los demás de una única forma lo cual será probado en la siguiente sección. De esta forma,

$$\Lambda_{(i,j)}^p = \Lambda_{(i',j')}^p .$$

□

CAPÍTULO 5

Números

Por el momento, me referiré a los elementos de $\Lambda_{(i,j)}^p$ como simples pares ordenados, sin contar el subíndice de sus saltos. Así, por ahora,

$$\begin{aligned} \Lambda_{(i,j)}^p = \{ & (i, j), (j, k), (k, i), \\ & (i^{-1}j, i^{-1}), (i^{-1}, i^{-1}k), (i^{-1}k, i^{-1}j), \\ & (j^{-1}, ij^{-1}), (ij^{-1}, j^{-1}k), (j^{-1}k, j^{-1}), \\ & (jk^{-1}, ik^{-1}), (ik^{-1}, k^{-1}), (k^{-1}, jk^{-1}) \} . \end{aligned}$$

DEFINICIÓN 3. El conjunto Σ_p corresponde al subconjunto de $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ en el cual pueden tomar posición los pares ordenados de $\Lambda_{(i,j)}^p$. Así:

$$\Sigma_p = \{(i, j) \in \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p : i \neq 0, j \neq 0, i + j + 1 \neq 0\} .$$

PROPOSICIÓN 8. Los $\Lambda_{(i,j)}^p$ particionan al conjunto Σ_p .

DEMOSTRACIÓN. Notar que los $\Lambda_{(i,j)}^p$ tienen la particularidad de que son generados por cualquiera de sus elementos, realizando las operaciones:

$$(a, b) \mapsto (ba^{-1}, a^{-1}) \text{ y } (a, b) \mapsto (b, -(a + b + 1)) .$$

Con lo anterior se prueba que particionan Σ_p . □

PROPOSICIÓN 9. Sea $p > 3$. Entonces, hay sólo cuatro tipos de conjuntos $\Lambda_{(i,j)}^p$ en donde se repiten elementos, dados por:

- a) $\Lambda_{(1,1)}^p = \{(1, 1), (1, -3), (-3, 1), (-3^{-1}, -3^{-1})\}$.
- b) $\Lambda_{(1,p-1)}^p = \{(1, -1), (-1, -1), (-1, 1)\}$.
- c) $\Lambda_{(i,p-1)}^p = \{(i, -1), (1, -i), (-i, i), (-i^{-1}, i^{-1}), (i^{-1}, -1), (-1, -i^{-1})\}$
con $i \neq \pm 1$.
- d) 12 pares ordenados distintos en todos los demás casos.

Para el caso $p = 3$ se tiene sólo 1 conjunto:

$$\Lambda_{(2,2)}^3 = \{(2, 2), (2, 1), (1, 2)\} .$$

DEMOSTRACIÓN. Se igualan pares ordenados y se revisan las posibilidades. □

A causa de la Proposición 7, para ordenar el estudio de los conjuntos $\Lambda_{(i,j)}^p$ (vistos como antes), tendremos que estudiar cada una de las clases de la Proposición 8. No obstante, como los conjuntos $\Lambda_{(i,j)}^p$ son más complejos (tienen un subíndice que representa al ángulo central), estos se tendrán que subdividir todavía en más clases, correspondiendo estas a los saltos de igual subíndice. La meta final de este estudio es:

1. Saber $|\mathfrak{I}_p^c|$, $|\mathfrak{I}_p^e|$ y $|\mathfrak{I}_p^a|$. De esta forma sabremos cuantas *ramas* tiene la parametrización de \mathfrak{I}_p y como van unidas.
2. Saber los automorfismos de las superficies. Al conocer cuales saltos en $\Lambda_{(i,j)}^p$ son iguales, sabremos las combinaciones posibles del dominio inicial $[AD]$ con otros dominios.

Para comenzar volvemos al $\Lambda_{(i,j)}^p$ de siempre,

$$\begin{aligned} \Lambda_{(i,j)}^p = & \{(i, j)_1, (j, k)_3, (k, i)_2, \\ & (i^{-1}j, i^{-1})_2, (i^{-1}, i^{-1}k)_1, (i^{-1}k, i^{-1}j)_3, \\ & (j^{-1}, ij^{-1})_3, (ij^{-1}, j^{-1}k)_2, (j^{-1}k, j^{-1})_1, \\ & (jk^{-1}, ik^{-1})_1, (ik^{-1}, k^{-1})_3, (k^{-1}, jk^{-1})_2\} \end{aligned}$$

usado para las triangulaciones agudas. El caso más simple de analizar es \mathfrak{I}_p^e , ya que ahí todos los dominios coinciden (geoméricamente) y los únicos casos a estudiar son los obtenidos desde la Proposición 8 (nos olvidamos del subíndice). Por otro lado, el caso más complicado es \mathfrak{I}_p^c ya que se unen dos $\Lambda_{(i,j)}^p$ teniendo más posibilidades. En ese caso tendremos que poner atención en las clases de Σ_p que contienen pares *reflejados* (contienen a (i, j) y a (j, i) , y así a todos los reflejados de la clase) o buscar a las clases que las reflejan. A causa de las \mathfrak{I}_p^c , tendremos que analizar los siguientes 6 casos (cada caso en general contiene varias clases de Σ_p):

1. Caso κ_1 : Es la clase en Σ_p de $(1, 1)$ y es su reflejado.
2. Caso κ_2 : Son las clases en Σ_p de (i, i) con $i \in \{2, 3, \dots, p-2\}$ y $i \neq -2^{-1}, -3^{-1}$. La clase contiene 12 pares ordenados distintos y es su reflejado.
3. Caso κ_3 : Es la clase en Σ_p de $(-1, -1)$. Consta de 4 pares distintos y es su reflejado.
4. Caso κ_4 : Son las clases en Σ_p de $(-1, i)$ con $i \in \{2, 3, \dots, p-2\}$ y $p \nmid i^2 + 1$. Estas clases no son su propio reflejado, pero la que lo es pertenece a κ_4 .
5. Caso κ_5 : Es la clase en Σ_p de $(-1, i)$ con $i^2 \equiv -1(p)$. Este caso contiene una clase si $p \equiv 1(4)$ y es vacío en caso contrario. La clase si es su propio reflejado.

6. Caso κ_6 : Son las clases en Σ_p de todos los restantes y ninguna es su reflejado, pero su reflejado está en κ_6 .

Notar que los casos dependen de si un i en el par es 1 o -1 , únicos números en \mathbb{Z}_p que son su propio inverso. Para finalizar esta parte, contaremos cuantas superficies hay para cada triangulación.

PROPOSICIÓN 10. *Sea $p > 3$. Entonces,*

$$|\mathfrak{I}_p^c| = \frac{p^2 + 11}{12}$$

y si $p = 3$ hay sólo una superficie.

DEMOSTRACIÓN. Se usa la proposición 8 y se hace notar que no importan los dominios en si ya que son todos geoméricamente iguales. \square

Se observa que el anterior número es la cantidad de clases de Σ_p (bajo las operaciones de Proposición 7).

PROPOSICIÓN 11. *Sea p impar. Entonces,*

$$|\mathfrak{I}_p^a| = \frac{p^2 + 3}{4}$$

DEMOSTRACIÓN. Para calcularlo hay que tener presente que dado $(i, j)_n$, los siguientes saltos (en el mismo conjunto) que tienen a n como ángulo central son:

$$(i^{-1}, i^{-1})_n \quad (j^{-1}k, j^{-1})_n \quad (jk^{-1}, ik^{-1})_n$$

lo cual genera tres subórbitas en cada uno de los $\Lambda_{(i,j)}^p$ considerados, dadas por los tres ángulos centrales (esto es fácil de chequear). A priori pensaríamos que por cada clase en Σ_p tengo tres superficies distintas (ya que tengo tres nuevas órbitas dentro de cada $\Lambda_{(i,j)}^p$). No obstante, estas órbitas pueden interceptarse. Esta intercepción sólo puede producirse cuando nos referimos al caso κ_1 el cual es dividido en tres órbitas iguales. Luego, usando el cálculo anterior, se tendrán

$$\frac{12}{4} \times \left(\frac{p^2 + 11}{12} - 1 \right) + 1 = \frac{p^2 + 3}{4}$$

superficies si p no es 3. Para $p = 3$ se tienen 3 superficies distintas, y coincide con el número anterior. \square

PROPOSICIÓN 12. *Sea p impar. Entonces,*

$$|\mathfrak{I}_p^c| = \frac{p^2 + 2p + 5}{8} \quad \text{si } p \equiv 1(4)$$

o

$$|\mathfrak{I}_p^c| = \frac{p^2 + 2p + 1}{8} \quad \text{si } p \equiv -1(4).$$

DEMOSTRACIÓN. Para calcular este número, se debe encontrar en que caso las clases de Σ_p y las subclases de los $\Lambda_{(i,j)}^p$ contienen saltos reflejados, como expliqué en un comienzo. A continuación, se analizará cada uno de los casos,

κ_1 : Aquí cada una de las subclases es igual (como par ordenado) y contiene a su reflejado. Por eso hay una superficie.

κ_2 y κ_3 : Se tienen $\frac{p-3}{2}$ clases de Σ_p para analizar, cada una conteniendo a su reflejado. Mirando las tres subclases de cada clase, vemos que dos se unen por sus reflejados y la tercera se mantiene con sus propios reflejados. De esta forma, tenemos 2 superficies distintas por cada clase. Luego, hay $p - 3$ superficies.

κ_4 : En este caso tenemos que cada clase (hay $\frac{p-3}{2}$ si $p \equiv -1(4)$ y $\frac{p-5}{2}$ si $p \equiv 1(4)$) no es su reflejado, pero este se encuentra en κ_4 . Como cada una aportaba con 3 superficies, al cuocientar por su reflejado se divide por dos.

κ_5 : Este caso a veces está (dependiendo de si p es o no congruente a 1 módulo 4) y cuando está aporta con dos superficies.

κ_6 : Este caso funciona como funcionó para κ_4 , aporta con tres cada clase, pero al no ser su reflejado se cuocienta por dos.

De esta forma la suma es,

$$\text{si } p \equiv 1(4) \Rightarrow \frac{3}{2} \left(\frac{p^2+11}{2} - \frac{p-1}{2} \right) + 1 + 2 \left(\frac{p-1}{2} \right) = \frac{p^2+2p+1}{8}$$

$$\text{si } p \equiv -1(4) \Rightarrow \frac{3}{2} \left(\frac{p^2+11}{2} - \frac{p-1}{2} - 1 \right) + 1 + 2 + 2 \left(\frac{p-1}{2} \right) = \frac{p^2+2p+5}{8} \quad \square$$

CAPÍTULO 6

Parametrización de \mathfrak{J}_p

En este capítulo se buscará un espacio que represente a \mathfrak{J}_p . Partiremos por encontrar una variedad compleja de dimensión 1 que represente a las triangulaciones canónicas. Para esto, tendremos que trabajar un poco con los toros. Como primer resultado tendremos que las triangulaciones canónicas pueden ser representadas por el móduli de los toros.

DEFINICIÓN 4. Consideremos el toro $T = \mathbb{C} / \langle w_1, w_2 \rangle$. Una triangulación $\Delta(\alpha, \beta, \gamma)$ para el toro T es la pavimentación inducida por el triángulo de vértices $0, w_1, w_2$, cuyos ángulos interiores son α, β y γ (gratis que $\alpha + \beta + \gamma = \frac{2\pi}{2} = \pi$).

Por supuesto, tendremos muchas triangulaciones para un mismo toro, dependiendo de la elección de los generadores del reticulado. Sin embargo, al igual que antes, podemos encontrar una canónica.

PROPOSICIÓN 13. Siempre podemos encontrar una triangulación para cualquier toro tal que $\alpha, \beta, \gamma \leq \frac{\pi}{2}$ de manera única, salvo cuando $\alpha = \frac{\pi}{2}$ en donde tenemos dos (cambia el sentido de los ángulos).

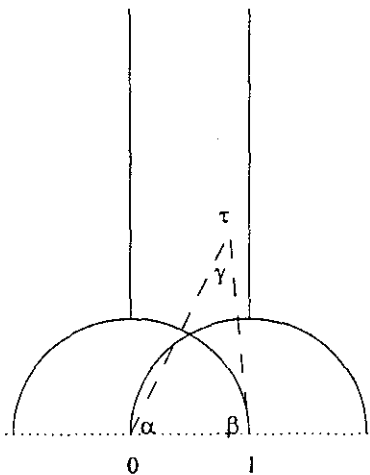


FIGURA 6.1. Dominio fundamental para los toros.

DEMOSTRACIÓN. Consideremos el dominio fundamental para la clase de los toros en el semi plano superior comprendida entre las geodésicas $x = 0$, $x = 1$, $x^2 + y^2 = 1$ y $(x - 1)^2 + y^2 = 1$. En esta región, cada punto τ representa al toro $\mathbb{C}/\langle 1, \tau \rangle$ de manera única salvo en su frontera. Los vértices de la frontera son los casos especiales cuadrado y equilátero de antes. Es fácil demostrar que cada punto τ en el interior del dominio se corresponde con la triangulación aguda generada por τ y 1 de manera única (sólo falta revisar los restantes triángulos entre $x = 0$ y $x = 1$). Para el borde $x = 0$ y $x = 1$ tenemos las dos triangulaciones posibles cuando $\alpha = \frac{\pi}{2}$. En el resto de la frontera tenemos triángulos isósceles, los cuales aportan con la misma triangulación (ya que tienen dos ángulos iguales). \square

Ahora buscaremos un variedad real de dos dimensiones que refleje las triangulaciones canónicas en general (para todo p primo). Consideremos en \mathbb{R}^2 el triángulo λ de vértices $(\frac{\pi}{p}, 0)$, $(0, \frac{\pi}{p})$ y $(\frac{\pi}{p}, \frac{\pi}{p})$ junto con su interior y sin sus vértices. $(\alpha, \beta) \in \lambda$ serán los correspondientes a la $\Delta(\alpha, \beta, \gamma)$ canónica. Como

$$\Delta(\alpha, \beta, \gamma) = \Delta(\beta, \gamma, \alpha) = \Delta(\gamma, \alpha, \beta)$$

y

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{2\pi}{p}$$

se deberá cocientar λ por el grupo (\mathbb{Z}_3) generado por,

$$(\alpha, \beta) \mapsto (\beta, \frac{\pi}{p} - \alpha - \beta).$$

Al mismo tiempo, los puntos del borde de λ (si un ángulo es $\frac{\pi}{p}$) serán identificados según $(\alpha, \beta) \mapsto (\beta, \alpha)$.

Teniendo en cuenta lo anterior, el cociente $\hat{\lambda}$ representará al conjunto de todos los $\Delta(\alpha, \beta, \gamma)$ canónicos de manera única. Esta variedad real, $\hat{\lambda}$, es isomorfa a una esfera menos un punto, y tiene como puntos marcados a $(\frac{\pi}{p}, \frac{\pi}{2p})$ y a $(\frac{2\pi}{3p}, \frac{2\pi}{3p})$, cuadrado y equilátero respectivamente.

PROPOSICIÓN 14. Sean T y T' toros y Δ , Δ' sus respectivas triangulaciones canónicas. Entonces,

$$T \approx T' \iff \Delta = \Delta'.$$

DEMOSTRACIÓN. Para probar que las triangularizaciones serán iguales basta subir el isomorfismo a \mathbb{C} (usando los generadores de las triangulaciones canónicas) y usar la anterior proposición. Si las triangulaciones son iguales, los toros son isomorfos. \square

Finalmente, al espacio de las triangulaciones canónicas con p arbitrario le trasparamos la estructura algebraica del espacio de módulos de los toros, usando la biyección continua:

$$\tau \mapsto \Delta\left(\frac{2}{p}\arg(\tau), \frac{2}{p}\arg\left(1 - \frac{1}{\tau}\right), \frac{2}{p}\left(\pi - \arg(\tau) - \arg\left(1 - \frac{1}{\tau}\right)\right)\right).$$

El τ anterior es el de la correspondiente triangulación canónica. La función está bien definida por las proposiciones anteriores.

NOTACIÓN 4. *El espacio de las triangulaciones (isomorfo analíticamente al móduli de los toros) se anotará Δ . Este espacio tiene dos puntos especiales, llamados cuadrado y equilátero.*

El paso siguiente, para construir un espacio para \mathfrak{J}_p , es tomar varias copias disjuntas de Δ ($|\mathfrak{J}_p^a|$ copias) y cuocientarlas según las reducciones que hacen las superficies cuadradas y equiláteras para cada p . Esto fue calculado en la sección anterior, y sólo falta decir como se cuocientan lo cual se hará según los casos antes definidos. Suponer $p > 3$.

κ_1 : En esta situación tenemos un sólo Δ el cual no se conectará con ningún otro. Lo encontraremos para todos los $p > 3$ y para $p = 2$ (funcionando como el espacio móduli usual para toros). La llamaremos configuración tipo-1.

κ_2 y κ_3 y κ_5 : (cada clase es su reflejado) En estos casos tendremos $\frac{p-3}{2}$ componentes disjuntas iguales si $p \equiv -1(4)$ o $\frac{p-1}{2}$ en caso contrario, cada una de las cuales está formada por 3 Δ cuocientados dos en el punto cuadrado y las tres en el punto equilátero. Una configuración como la anterior se llamará configuración tipo-2.

κ_4 y κ_6 : (cada clase no es su reflejado) Para estos casos tendremos $\frac{p^2-6p+5}{24}$ componentes disjuntas si $p \equiv 1(4)$ o $\frac{p^2-6p+17}{24}$ sino. Cada componente está formada por 6 Δ cuocientados de a dos en el punto cuadrado y de a tres en el punto equilátero (tomando de cada par cuadrado una hoja). Una configuración como esta se llamará configuración tipo-3.

Para $p = 3$ tenemos sólo una configuración tipo-2 y nada más. Finalmente hemos descrito al espacio \mathfrak{J}_p en varios bloques disconexas,

$$\text{Si } p \equiv 1(4) \Rightarrow \frac{p^2 + 6p + 17}{24} \text{ bloques}$$

o

$$\text{Si } p \equiv -1(4) \Rightarrow \frac{(p+5)(p+1)}{24} \text{ bloques.}$$

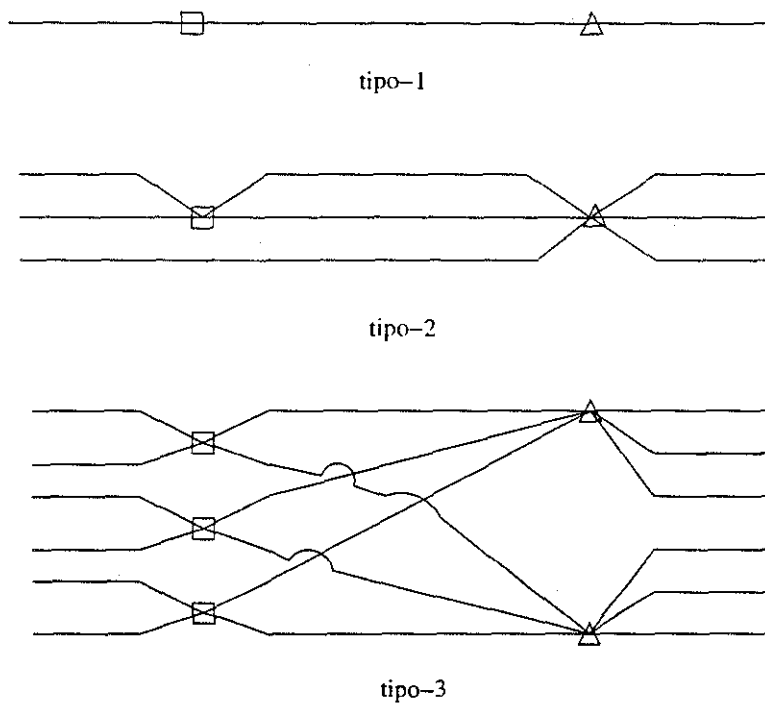
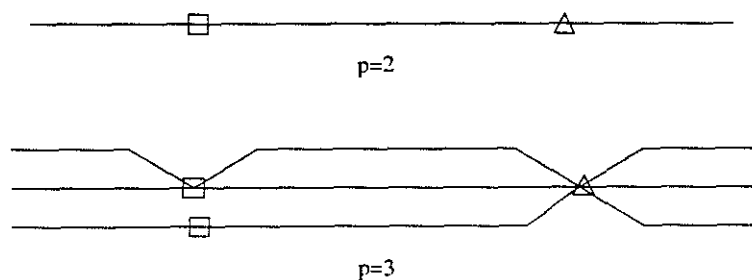
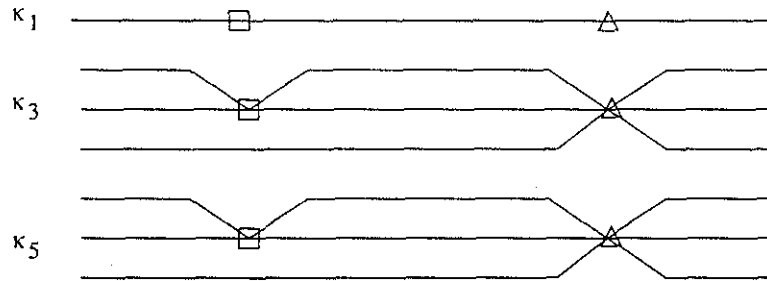
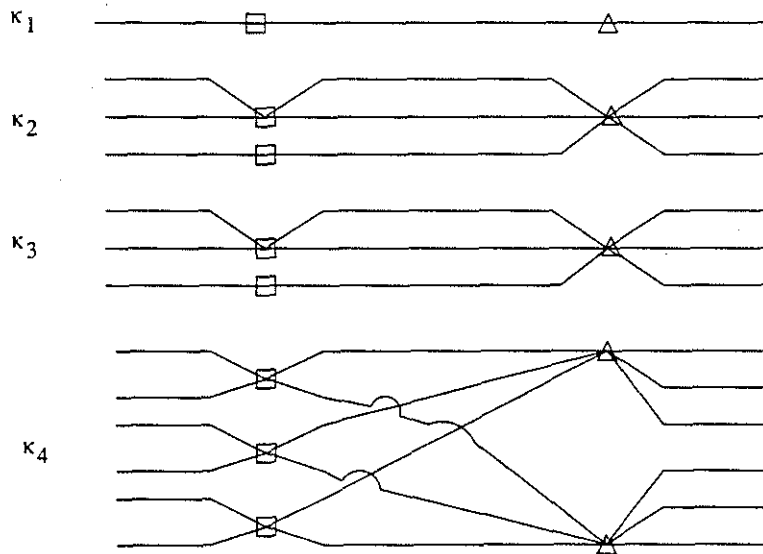


FIGURA 6.2. configuraciones de los bloques.

Los caso \mathfrak{J}_2 y \mathfrak{J}_3 son los únicos conexos, uno del tipo-1 y el otro del tipo-2, respectivamente. Al espacio anteriormente descrito, el cual representa a \mathfrak{J}_p , se le llamará \mathfrak{J}_p . Notar que en \mathfrak{J}_p dos puntos o superficies distintas son analíticamente diferentes.

FIGURA 6.3. Espacios conexos: $p = 2$ (toros) y $p = 3$.

Las siguientes figuras muestran los espacios \mathbb{J}_5 y \mathbb{J}_7 . De aquí en adelante, es decir para $p > 3$, los espacios son desconexos.

FIGURA 6.4. $p = 5$ FIGURA 6.5. $p = 7$

CAPÍTULO 7

Automorfismos

En este capítulo estudiaremos los grupos de automorfismos de las superficies en \mathfrak{J}_p . Recordamos que $G_S \approx \mathbb{Z}_p$ es el grupo escogido inicialmente para trabajar a las superficies (fija a A, B, C, D). Se calculará el grupo de automorfismos de $S \in \mathfrak{J}_p$ que permuta los puntos fijos de G_S . A este grupo lo denotaremos

$$\text{Aut}(S)' = \{ f \in \text{Aut}(S) : f(\text{Fix}(G_S)) = \text{Fix}(G_S) \} .$$

NOTACIÓN 5. $T \in \text{Aut}(S)$ será un automorfismo que fija A, B, C y D de orden p , y que además visto en $[AD]$ centrado en el origen rota en ángulo $\frac{2\pi}{p}$. De esta forma, $G_S = \langle T \rangle$.

OBSERVACIÓN 1. Notar que T centrado en B rota en $\frac{2\pi i^{-1}}{p}$, centrado en C rota en $\frac{2\pi j^{-1}}{p}$ y centrado en D rota en $\frac{2\pi k^{-1}}{p}$. Esto se calcula mediante congruencias, tal como en proposición 3.

LEMA 2. Si $R \in \text{Aut}(S)$ fijando los cuatro puntos de ramificación de T , entonces $R = T^n$ con $n \in \mathbb{N}$.

DEMOSTRACIÓN. Se tiene $R : S \rightarrow S$ tal que $R(A) = A, R(B) = B, R(C) = C$ y $R(D) = D$. Levantamos el automorfismo R al disco y tomamos como dominios fundamentales $[AD]$ centrados en el origen y con un vértice D real positivo. Esto se puede hacer con un automorfismo del disco que cambie el centro y rote.

Luego el levantamiento de R anterior es una rotación. Más aún, como R fija los puntos de ramificación de T (y ayudándose de la minimalidad de distancias), esta es una rotación en ángulo de $\frac{2\pi n}{p}$. Así, $R = T^n$ con $n \in \mathbb{N}$. □

Notar que por el Lema anterior, G_S es normal en $\text{Aut}(S)'$. La idea de las siguientes demostraciones es ver las posibilidades de combinación que tiene el salto inicial $s[A, D] = (i, j)_1$ con los otros saltos del conjunto $\Lambda_{(i,j)}^p$ correspondiente. En virtud de lo anterior, las proposiciones siguientes corresponderán a los casos κ_i y serán subdivididas según la triangulación.

PROPOSICIÓN 15. Sea S en el caso κ_1 , entonces:

1. Si $S \in \mathcal{I}_p^c$, $\text{Aut}(S)' \approx \mathbb{Z}_{3p}$.
2. Si $S \in \mathcal{I}_p^e$, $\text{Aut}(S)' \approx \mathbb{Z}_{2p}$.
3. Si $S \in \mathcal{I}_p^a$, $\text{Aut}(S)' \approx \mathbb{Z}_p$.

En este caso no hay hiperelípticas.

DEMOSTRACIÓN. En el caso κ_1 tenemos el siguiente conjunto para las agudas (conjunto base para los otros casos),

$$\Lambda_{(1,1)}^p = \{(1, 1)_1, (1, -3)_3, (-3, 1)_2, (1, 1)_2, (1, -3)_1, (-3, 1)_3,$$

$$(1, 1)_3, (1, -3)_2, (-3, 1)_1, (-3^{-1}, -3^{-1})_1, (-3^{-1}, -3^{-1})_3, (-3^{-1}, -3^{-1})_2\}.$$

Luego, según la triangulación tenemos (en el orden del enunciado),

- 1.) En este caso, como todos los subíndices son 1, podemos combinar $[AD]$ con $[BD]$ y con $[CD]$. Luego, tenemos un automorfismo R de orden $3p$ tal que

$$R(A) = B \quad R(B) = C \quad R(C) = A \quad R(D) = D$$

El automorfismo R lo definimos considerando en $[DA]$ una rotación en ángulo $\frac{2\pi}{3p}$. Así, $\langle R \rangle \approx \mathbb{Z}_{3p}$ y T es generado por R . Notar que el automorfismo que intercambia $[AD]$ con $[BD]$ y el que intercambia $[AD]$ con $[CD]$ son generados por R . Luego, como no hay más posibles intercambios y Lema 2.

$$\text{Aut}(S)' \approx \mathbb{Z}_{3p}.$$

- 2.) En este caso, podemos combinar $s[AD] = (1, 1)_1 = (i, j)_1$ con su reflejado $(1, 1)_1 = (j, i)_1$ y no hay más combinación. Si llamamos a este automorfismo R , entonces $R^{2p} = 1$ y $R^2 = T$. Luego, por Lema 2 y no más combinaciones,

$$\text{Aut}(S)' \approx \mathbb{Z}_{2p}.$$

- 3.) En este caso no hay combinación posible con $(1, 1)_1$. Luego, Lema 2 y no más combinaciones,

$$\text{Aut}(S)' \approx \mathbb{Z}_p.$$

El automorfismo de orden 2 anterior fija dos puntos, por lo tanto no es involución hiperelíptica. \square

Notar de la anterior proposición las coincidencias con los toros. Los toros son hiperelípticos por el \mathbb{Z}_p ($p = 2$).

PROPOSICIÓN 16. Sea S en el caso κ_2 , entonces:

1. Si $S \in \mathbb{I}_p^e$, $\text{Aut}(S)' \approx \mathbb{Z}_p$.
2. Si $S \in \mathbb{I}_p^c$,

$$\text{subclase de } (i, i) \Rightarrow \text{Aut}(S)' \approx \mathbb{Z}_{2p} .$$

$$\text{la otra subclase} \Rightarrow \text{Aut}(S)' \approx \mathbb{Z}_p .$$

3. Si $S \in \mathbb{I}_p^a$, $\text{Aut}(S)' \approx \mathbb{Z}_p$.

En este caso no hay hiperelípticas.

DEMOSTRACIÓN. En este caso todos los 12 pares ordenados son distintos (pares ordenados es sin subíndice).

- 1.) Como son todos distintos, no hay posibilidades para $[AD]$. Luego, $G_S = \text{Aut}(S)' \approx \mathbb{Z}_p$.
- 2.1) En este caso, podemos combinar $s[AD] = (i, i)_1$ con su reflejado $(i, i)_1 = (j, i)_1$ (rotando en $[AD]$) y no hay más combinaciones. Si llamamos a este automorfismo R , entonces $R^{2p} = 1$ y $R^2 = T$. Luego, por Lema 2 y no más combinaciones,

$$\text{Aut}(S)' \approx \mathbb{Z}_{2p} .$$

- 2.2) No hay más combinaciones ya que si $s[AD] = (i, j)_1$, $s[BD] = (j, i)_2$. Luego, $G_S = \text{Aut}(S)' \approx \mathbb{Z}_p$.

- 3.) Igual que en 1.) arriba.

El caso en que hay automorfismo de orden dos, no es la involución hiperelíptica ya que fija dos puntos. \square

PROPOSICIÓN 17. Sea S en el caso κ_3 , entonces:

1. Si $S \in \mathbb{I}_p^e$, $\text{Aut}(S)' \approx D_{2p}$.
2. Si $S \in \mathbb{I}_p^c$,

$$\text{subclase de } (-1, -1) \Rightarrow \text{Aut}(S)' \approx (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{2p}) \rtimes \mathbb{Z}_2 .$$

$$\text{subclase de } (-1, 1) \Rightarrow \text{Aut}(S)' \approx D_{2p} .$$

3. Si $S \in \mathbb{I}_p^a$, $\text{Aut}(S)' \approx D_{2p}$.

En este caso todas las superficies son hiperelípticas.

DEMOSTRACIÓN. Este será el bloque de las hiperelípticas y es el único caso para $p = 3$. El $\Lambda_{(-1, -1)}^p$ de las agudas trae varias posibilidades de intercambio,

$$\begin{aligned} \Lambda_{(-1, -1)}^p = \{ & (-1, -1)_1, (-1, 1)_3, (1, -1)_2, (1, -1)_2, (-1, -1)_1, (-1, 1)_3, \\ & (-1, 1)_3, (1, -1)_2, (-1, -1)_1, (-1, -1)_1, (-1, 1)_3, (1, -1)_2 \} . \end{aligned}$$

- 1.) Este caso será el base para los que siguen. Notar que existen R, U y V automorfismos de orden dos definidos de la siguiente manera:
- i. R es el inducido por la identidad en el disco, considerando los dominios fundamentales centrados en el origen $[AD]$ y $[DA]$ (dominios con igual salto). De esta manera, $R(A) = D, R(D) = A, R(B) = C$ y $R(C) = D$. También $R^2 = 1$ y R conmuta con T . Es fácil ver que R fija $2g + 2 = 2p$ puntos y así R es la involución hiperelíptica de la superficie.
 - ii. U es el inducido por la identidad en el disco, considerando los dominios fundamentales centrados en el origen $[AD]$ y $[CB]$ (dominios con igual salto). De esta manera, $U(A) = C, U(C) = A, U(B) = D$ y $U(D) = B$. También $U^2 = 1$, pero U no conmuta con T . Esto se puede hacer numerando los $4p$ triángulos de $[AD]$ y viendo como actúa U en ellos. Fácilmente se ve que U fija dos puntos.
 - iii. Análogamente a U, V es el inducido por la identidad en el disco, considerando los dominios fundamentales centrados en el origen $[AD]$ y $[BC]$ (dominios con igual salto). De esta manera, $V(A) = B, V(B) = A, V(C) = D$ y $V(D) = C$. También $V^2 = 1$ y V no conmuta con T . Fácilmente se ve que V fija dos puntos.

Además tenemos que T es normal en $\text{Aut}(S)'$ y

$$|\langle R, U, V, T \rangle / \langle T \rangle| = 4.$$

Luego, $|\langle R, U, V, T \rangle| = 4p$. Por otro lado, tenemos que $(RT)^{2p} = 1$ y, como R conmuta con todos y U no conmuta con $T, U(RT) \neq (RT)U$. Luego, RT y U generan un subgrupo diedral de orden $4p$. Entonces, $\langle R, T, U, V \rangle \approx D_{4p}$. Por Lema 2 y no más posibilidades,

$$\text{Aut}(S)' \approx D_{2p}.$$

- 2.1) Este caso parte complicado, pero después se suaviza. Para el dominio $[AD]$ tenemos 8 posibilidades: T (la de siempre), R, U y V (como el caso equilátero), μ de $[AD]$ a su reflejado girando en $\frac{\pi}{p}$, a de $[AD]$ a el reflejado de $[BC]$, b de $[AD]$ al reflejado de $[CB]$ y c de $[AD]$ al reflejado de $[DA]$. Todos los anteriores pueden ser inducido por la identidad del disco en el disco fijando adecuadamente los dominios. Por Lema 2 y no más posibilidades,

$$\text{Aut}(S)' = \langle T, R, U, V, \mu, a, b, c \rangle.$$

Consideremos $\eta \in \text{Aut}(S)'$ tal que intercambia $[BC]$ con su reflejado (es decir se rota $[BC]$ en $\frac{\pi}{p}$). Ahora, consideraremos una serie de hechos verificables fácilmente: $\eta^2 = T^{-1}$, $\mu^2 = T$, $\mu\eta = \eta\mu$, $\eta^{2p} = \mu^{2p} = 1$ y $|\langle \mu, \eta \rangle| = 4p$. Luego, $\langle \mu, \eta \rangle$ es isomorfo a \mathbb{Z}_{4p} o a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{2p}$. Así, $\langle \mu, \eta \rangle \approx \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{2p}$. Claramente si $F \in \text{Aut}(S)'$ fija a B y C o a D y A , entonces $F \in \langle \mu, \eta \rangle$. De esta manera, $a \circ U$, $b \circ V$ y $c \circ R$ están en $\langle \mu, \eta \rangle$. También lo está R . Luego, $\text{Aut}(S)' = \langle \mu, \eta, U, V \rangle$. Se verifica también que $\langle \mu, \eta \rangle$ es normal en $\text{Aut}(S)'$. Así, $|\text{Aut}(S)'| = 8p$ (se verifica a mano). Como $\langle \mu, \eta \rangle \trianglelefteq \text{Aut}(S)'$, $\langle \mu, \eta \rangle \cap \langle U \rangle = 1$ (U no conmuta con η ni μ) y $|\text{Aut}(S)'| = 8p$,

$$\text{Aut}(S)' \approx (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{2p}) \rtimes \mathbb{Z}_2 .$$

2.2) No hay más opciones que el R , U y V del caso 1.). Luego,

$$\text{Aut}(S)' \approx D_{2p} .$$

3.) Idem.

Todas tienen la involución hiperelíptica R con $2p$ puntos fijos. En el dominio $[AD]$ es fácil encontrar los puntos de Weierstrass. \square

PROPOSICIÓN 18. Sea S en el caso κ_4 , entonces:

1. Si $S \in \mathfrak{I}_p^e$, $\text{Aut}(S)' \approx D_p$.
2. Si $S \in \mathfrak{I}_p^c$, $\text{Aut}(S)' \approx D_p$.
3. Si $S \in \mathfrak{I}_p^a$, $\text{Aut}(S)' \approx D_p$.

No hay hiperelípticas entre ellas.

DEMOSTRACIÓN. Este caso es como el anterior sin el R hiperelíptico. Sólo tenemos la combinación dada por T y U . U como en la proposición anterior, no conmuta con T (otra manera de saber que no son hiperelípticas). Como no tienen reflejados, el caso cuadrado no da más automorfismos. De esta forma, cualquiera sea el caso,

$$\text{Aut}(S)' \approx D_p .$$

\square

PROPOSICIÓN 19. *Sea S en el caso κ_5 , entonces:*

1. Si $S \in \mathbb{I}_p^e$, $\text{Aut}(S)' \approx D_p$.
2. Si $S \in \mathbb{I}_p^c$,

subclase de $(i, -i) \Rightarrow \text{Aut}(S)' \approx \mathbb{Z}_p \rtimes \mathbb{Z}_4$.

la otra subclase $\Rightarrow \text{Aut}(S)' \approx D_p$.

3. Si $S \in \mathbb{I}_p^a$, $\text{Aut}(S)' \approx D_p$.

En ese caso no hay hiperelípticas.

DEMOSTRACIÓN. En este caso nuevamente tenemos dos posibles combinaciones para $[AD]$ en general, excepto para el caso $(i, -i)_1$ con $p \nmid i^2 + 1$. Descontando el caos excepcional, se tendrá que $\text{Aut}(S)' \approx D_{2p}$. Para el caso especial tenemos las siguientes combinaciones: $U [AD]$ con $[DA]$, $V [AD]$ con $[BC]$ reflejado y $W [AD]$ con $[CB]$ reflejado. Se tienen los siguientes hechos: $U^2 = 1$, U y T no conmutan, U posee dos puntos fijos, $V^4 = 1$, V y T no conmutan, $V^2 = U$, V tiene dos puntos fijos, T y V generan a W , $W^4 = 1$, $W^2 = U$ y W tiene dos puntos fijos. De esta forma, por Lema 2 y no más posibilidades, $\text{Aut}(S)' = \langle T, V \rangle$. Luego,

$$\text{Aut}(S)' \approx \mathbb{Z}_4 \rtimes \mathbb{Z}_p .$$

□

PROPOSICIÓN 20. *Sea S en el caso κ_6 , entonces:*

1. Si $S \in \mathbb{I}_p^e$, $\text{Aut}(S)' \approx \mathbb{Z}_p$.
2. Si $S \in \mathbb{I}_p^c$, $\text{Aut}(S)' \approx \mathbb{Z}_p$.
3. Si $S \in \mathbb{I}_p^a$, $\text{Aut}(S)' \approx \mathbb{Z}_p$.

DEMOSTRACIÓN. Lo más fácil de este proceso, tenemos 12 pares ordenados diferentes y ninguno se autorefleja (no hay $(i, i)_1$). Luego,

$$\text{Aut}(S)' = G_S \approx \mathbb{Z}_p .$$

□

Con la Proposición 17 se termina la demostración pendiente del Lema 1. A continuación veremos un simple lema que dice cuando $\text{Aut}(S)' = \text{Aut}(S)$.

LEMA 3. *Sea $S \in \mathbb{I}_p$ con $p > 2$. Entonces,*

$$\text{Aut}(S)' = \text{Aut}(S) \quad \leftrightarrow \quad G_S \trianglelefteq \text{Aut}(S) .$$

Es decir, $\text{Aut}(S)'$ es el normalizador de G_S en $\text{Aut}(S)$.

DEMOSTRACIÓN. \Rightarrow En todos los grupos anteriores, $G_S \trianglelefteq \text{Aut}(S)'$.
 \Leftarrow Sea $f \in \text{Aut}(S)$, entonces $G_S \circ f = f \circ G_S^n$ para n no divisible por p . Luego, $f(\text{Fix}(G_S)) = \text{Fix}(G_S)$. \square

No obstante, tanto para género 2 ($p = 3$) como para género 4 ($p = 5$) tenemos superficies en las que no se aplica el anterior Lema. Para género 2 existe una superficie con grupo total de automorfismo $\approx GL_2(3)$ ($|GL_2(3)| = 48$) y para género 4 se tiene a la curva de Bring con grupo total de automorfismo $\approx S_5$, el grupo simétrico en cinco letras (ver [7]).

CAPÍTULO 8

Superficies de Lefschetz

En este capítulo se muestra un trabajo sobre las superficies de Lefschetz, las cuales ya habían sido estudiadas en el pasado por otros autores (ver [6] y [4]). El trabajo a continuación fue hecho con anterioridad al estudio de las \mathfrak{I}_p e inspiró las técnicas usadas en los capítulos anteriores. Observamos nuevamente que no existen superficies de Riemann compactas tales que el cociente por \mathbb{Z}_p tenga signatura $(0; p)$ y que todas las correspondientes a $(0; p, p)$ provienen de la esfera de Riemann.

8.1. Planteamiento del problema y base teórica

Sean p un número primo y S una Superficie de Riemann compacta en la cual actúa \mathbb{Z}_p como grupo de automorfismos analíticos con cociente de signatura $(0; p, p, p)$; lo cual quiere decir que el cociente por el grupo es una esfera y el grupo actúa con tres puntos fijos. Estas Superficies son llamadas Superficies de Lefschetz. Se tomará $p > 3$ ya que con $p = 3$ se tiene que S sólo puede ser el toro $\mathbb{C}/\langle 1, \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \rangle$, mientras que con $p > 3$ se tendrán superficies que tienen al disco como cubrimiento universal, y así se tratarán uniformemente. Por teorema de Riemann-Hurwitz el género de estas superficies es $\frac{p-1}{2}$. La meta es decir todo lo que se pueda sobre estas superficies.

Sea Δ el disco unidad. Sea Γ subgrupo de los automorfismos de Δ tal que

$$M := \Delta/\Gamma = (0; p, p, p) .$$

Así, Γ puede ser pensado con la siguiente presentación:

$$\Gamma = \langle x, y : x^p = y^p = (xy)^p \rangle .$$

En la Figura 8.1 se muestra la acción de los generadores de Γ en su dominio fundamental. Notar que este cuadrilátero está completamente determinado y es formado por dos Δ equiláteros hiperbólicos de ángulo $\frac{\pi}{p}$, lo cual da una situación rígida sin parámetros libres. Sean π_S la proyección de S a M y π_Δ la proyección de Δ a M inducidas por los respectivos grupos. Luego, hay una función holomorfa $f : \Delta \rightarrow S$ tal

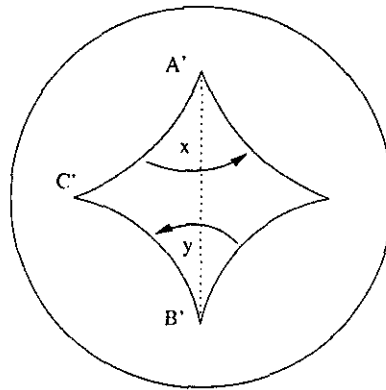


FIGURA 8.1. $A' \in f^{-1}(A)$, $B' \in f^{-1}(B)$, $C' \in f^{-1}(C)$, donde A , B y C son los puntos de ramificación de π_S . El dominio está dividido en dos triángulos equiláteros de ángulo $\frac{\pi}{p}$.

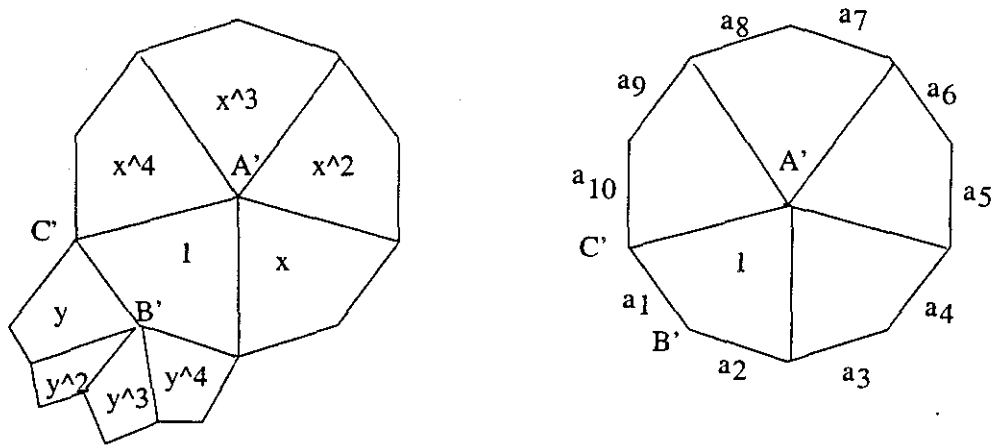


FIGURA 8.2. Caso para $p = 5$ y se generaliza de manera obvia.

que $\pi_S \circ f = \pi_\Delta$, y esta f es inducida por la acción de algún grupo Γ^* en $\text{Aut}(\Delta)$.

Más aún, se tendrá que $\Gamma^* \trianglelefteq \Gamma$ y $\Gamma/\Gamma^* \approx \mathbb{Z}_p$. Además, sin perder generalidad, la situación nos permite tomar el dominio fundamental para la acción de Γ^* mostrado en la Figura 8.2.

En la Figura 8.2 se muestra cómo se comporta la órbita del dominio fundamental tomado para Γ por la acción de los generadores de Γ .

8.2. Uniformización

La pregunta quién es Γ^* es equivalente a como se identifican los lados a_i del polígono anterior.

NOTACIÓN 6. Si a_i se identifica con a_j , se anotará $a_i \leftrightarrow a_j$. En posteriores cálculos los i serán tomados módulo $2p$ por razones obvias.

PROPOSICIÓN 21. Según la Figura 8.3 generalizada, sólo se pueden tener las siguientes posibilidades :

$$a_1 \leftrightarrow a_{2k+2} \text{ con } k \in \{1, 2, \dots, p-2\} .$$

DEMOSTRACIÓN. Primero, a_1 no puede ser identificado con un a_i donde i es impar, ya que la superficie se desorienta. Segundo, si a_1 es identificado con a_2 o a_{2p} la superficie obtenida es una esfera y esto no concuerda con la situación requerida (acción \mathbb{Z}_p con tres puntos fijos). Las demás posibilidades son las adecuadas (por ejemplo, sacar un punto y deformar). \square

NOTACIÓN 7. Si $a_i \leftrightarrow a_j$, entonces el automorfismo que envía a_i a a_j se anotará $T_{a_i \rightarrow a_j} \in \Gamma^*$.

PROPOSICIÓN 22. Si $a_1 \leftrightarrow a_{2k+2}$, entonces el grupo Γ^* está totalmente caracterizado y es generado por:

$$\{T_{a_{2kj+1} \rightarrow a_{2k(j+1)+2}} : \text{con } j \in \{0, 1, \dots, p-1\}\}$$

donde

$$T_{a_1 \rightarrow a_{2k+2}} = x^k y^{-1}$$

y

$$T_{a_{2kj+1} \rightarrow a_{2k(j+1)+2}} = x^{jk} T_{a_1 \rightarrow a_{2k+2}} x^{-jk} .$$

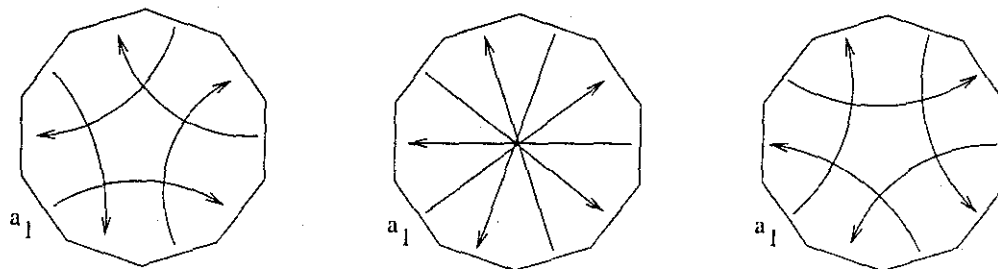
DEMOSTRACIÓN. Se puede calcular a través del dominio fundamental que

$$T_{1,2k+2} = x^k y^{-1} .$$

Luego, en el cociente Γ/Γ^* se tendrá que $x^k = y$ y esto primará para encontrar a los otros automorfismos que identifican los faltantes lados. Si nos preguntamos con quién debo identificar al lado $2k+1$, entonces la transformación tiene la forma $x^a y^{-1} x^{-k}$ y así $x^a y^{-1} x^{-k} = 1$, es decir, $x^{a-k} = y \Leftrightarrow a \equiv 2k(p)$. Entonces,

$$T_{2k+1,4k+2} = x^{2k} y^{-1} x^{-k} = x^k T_{1,2k+2} x^{-k} .$$

Posteriormente se trabaja exactamente de la misma manera por inducción, obteniendo lo pedido. \square

FIGURA 8.3. Caso para $p = 5$.

Entonces, para cada identificación de a_1 tendremos su correspondiente Γ_k^* y $S_k = \Delta/\Gamma_k^*$. La Figura 8.3 muestra la armonía de la acción vista con esos generadores.

8.3. El método geométrico

Ahora tomaremos en cuenta dominios fundamentales geoméricamente iguales al anteriormente usado centrado en A' . Estos dominios estarán centrados en A' , B' y C' , y además tendrán un sentido contra-reloj dado por los saltos. Estos dominios están formados por $2p$ triángulos equiláteros (hiperbólicos) cuyos ángulos interiores miden $\frac{\pi}{p}$ y están todos unidos a un vértice común. Más abajo, la Figura 8.4 muestra uno de estos triángulos cuyo vértice común es A' , y los otros dos vértices son C' y B' , en ese sentido.

Se va a elegir un trio de vértices A' , B' , C' correspondiente a uno de dichos triángulos, para formar los dominios fundamentales que se usarán. No se pierde la generalidad, ya que cada uno de los dominios elegido puede ser transformado a otro similar mediante un automorfismo del disco.

Serán diferentes dos dominios centrados en A' con el lado opuesto del triángulo elegido $\overline{B'C'}$ o $\overline{C'B'}$, ya que el pegado tiene un sentido contra-reloj. Por ejemplo, si $a_1 = \overline{B'C'}$ se pegaba según Γ^* con a_{2k+2} , entonces según Γ^* , $a_2 = \overline{C'B'}$ se pegará con $a_{2(p-1-k)+2}$. Esto último se definirá y se llamará salto (correspondiente a cada dominio orientado).

Desde ahora, llamaré a los vértices elegidos A , B y C . Las definiciones a continuación serán útiles para manejarse en este punto de vista geométrico.

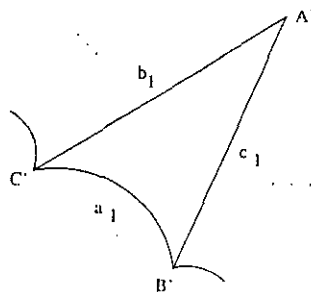


FIGURA 8.4. Triángulo extraído del dominio fundamental de Γ^* .

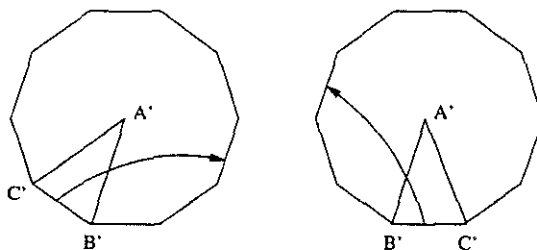


FIGURA 8.5. En la figura se explica la diferencia entre dominios orientados para un mismo Γ^* .

DEFINICIÓN 5. (**dominio orientado**) Un dominio orientado (XYZ) para Γ^* es un dominio como los explicados arriba, de triángulos $\triangle XYZ$ cuyo vértice común es X . Los puntos X, Y y Z son distintos y pertenecen a $\{A, B, C\}$.

DEFINICIÓN 6. (**Salto**) El salto $s(XYZ)$ para (XYZ) se define como el número de lados en el dominio total (XYZ) entre el lado \overline{YZ} y su pegado, en el sentido contra reloj, dividido por dos.

De esta manera, sabemos que $s(ABC) = k$ y $s(ACB) = p - 1 - k$. Para completar la descripción, se calcularán las combinaciones que faltan .

PROPOSICIÓN 23. Dado Γ_k^* , entonces:

$$\begin{aligned} s(ACB) &= k & s(ABC) &= p - 1 - k \\ s(BAC) &= p - 1 - k^{-1} & s(BCA) &= k^{-1} \\ s(CBA) &= p - (k + 1)^{-1} & s(CAB) &= (k + 1)^{-1} - 1 \end{aligned}$$

donde los inversos son tomados módulo p .

DEMOSTRACIÓN. Para saber los otros dos saltos seguiremos el siguiente proceso. Elegir un triángulo (ACB) . Los lados opuestos a los

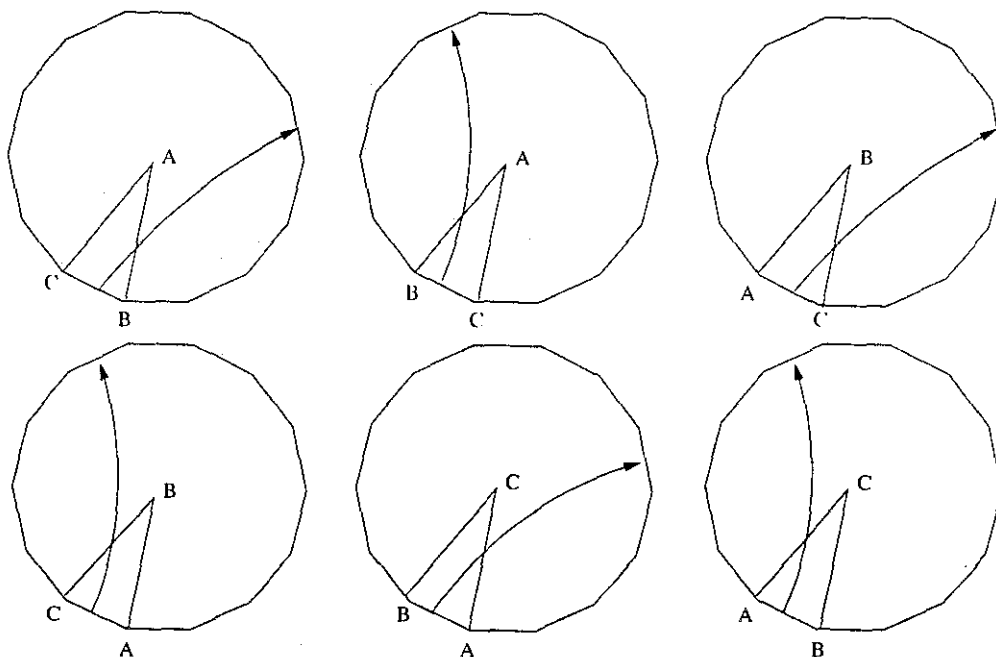


FIGURA 8.6. La figura muestra la superficie Ω_2^7 (Curva de Klein) en los diferentes dominios considerados.

vértices serán a_1 , b_1 y c_1 respectivamente. Alrededor de B y C se miran (BAC) y (CBA) , y se busca con quién se pega b_1 y c_1 de acuerdo al grupo Γ_k^* ya dado.

Para (BAC) , lo que hay que contar es cuántas comas hay en la siguiente serie:

$$a_1 \leftrightarrow a_{2k+2}, a_{2k+1} \leftrightarrow a_{4k+2}, \dots, a_{2p-2k-1} \leftrightarrow a_{2p}.$$

Luego se tendrá la siguiente ecuación extraída desde el cálculo de Γ_k^* :

$$ks(BAC) \equiv -1 - k(p) \Rightarrow s(BAC) \equiv p - 1 - k^{-1}(p).$$

En forma simétrica, para $D(CBA)$ se obtendrá:

$$s(BAC)s(CBA) \equiv -1 - s(BAC)(p) \Rightarrow s(CBA) \equiv p - (k+1)^{-1}(p).$$

Los restantes se obtienen operando los saltos calculados con $p - 1 -$
 •. □

Ahora, a cada superficie S_k se le asigna el siguiente conjunto de números:

$$\Omega_k^p = \{k, p-1-k, p-1-k^{-1}, k^{-1}, p-(k+1)^{-1}, (k+1)^{-1}-1\}$$

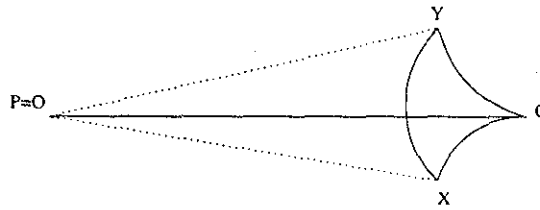


FIGURA 8.7. Situación de la demostración.

La primera consecuencia de esto es que este conjunto se corresponde a la superficie de manera biunívoca. De esta manera, veremos que problemas analíticos serán transformados en numéricos. La siguiente proposición geométrica podría ser útil para establecer la correspondencia biunívoca.

PROPOSICIÓN 24. *Se pavimenta el disco con Δ hiperbólicos equiláteros de ángulos interiores iguales a $\frac{2\pi}{n}$ con $n \in \mathbb{N}$ mayor o igual que 3. Sea P un vértice de estos triángulos en el disco. Entonces la distancia mínima entre P y otro vértice es la medida del lado del triángulo equilátero, y sólo es alcanzada por los vértices alrededor de él (a través de los lados adyacentes a él).*

DEMOSTRACIÓN. Mediante un automorfismo del disco, se puede elegir al punto P como el origen. Se demostrará inicialmente que existe una tal distancia mínima entre los vértices. Tomar disco D cerrado centrado en $P = O$ de radio hiperbólico mayor que la medida del lado del triángulo equilátero. Luego, como los vértices son puntos aislados, hay finitos puntos dentro de D . Como fuera del disco la distancia es mayor, existe una cota mínima entre los finitos vértices dentro de D .

Suponer que hay punto Q que no es vértice alrededor de P tal que logra la cota mínima. Miran los n triángulos equiláteros alrededor de Q . Luego uno de ellos es atravesado por el trazo \overline{PQ} . Sean los vértices de este triángulo Q , X e Y .

Luego se compararán las medidas de \overline{PY} (o \overline{PX}) y \overline{PQ} . Como,

$$\angle PXY < \angle PXQ \leq \pi \quad \text{y} \quad \overline{XY} = \overline{XQ}$$

se obtiene por medio de la fórmula del coseno hiperbólico que,

$$\cosh(\overline{PQ}) > \cosh(\overline{PY}) .$$

De esta manera,

$$\overline{PQ} > \overline{PY}$$

lo que es una contradicción. Notar que esto se pudo hacer ya que Q no es vértice alrededor de P ($X, Y \neq O$). Luego, los mínimos sólo pueden estar alrededor de P , y se ve que son todos ellos. \square

8.4. Teorema principal de correspondencia

TEOREMA 4. Sean $k, k' \in \{1, 2, \dots, p-2\}$. Entonces, S_k^p y $S_{k'}^p$ son analíticamente equivalentes si y sólo si $\Omega_k^p = \Omega_{k'}^p$.

DEMOSTRACIÓN. Si $\Omega_k^p = \Omega_{k'}^p$, entonces se utilizan uno de los dominios fundamentales de S_k^p y $S_{k'}^p$ para los cuales el salto sea el mismo. Luego se hace una biyección analítica tal que se respete exactamente la acción de Γ^* en cada uno de ellos. Por ejemplo se pueden centrar en el origen cada uno de los centros de los dominios y rotarlos adecuadamente. En la práctica es conjuar. Luego, $S_k^p \simeq S_{k'}^p$.

Para la siguiente implicación, una observación fundamental: Sea S superficie de Lefschetz ($p > 3$). Luego,

$$\left(p, \frac{|\text{Aut}(S)|}{p}\right) = 1.$$

Demostración: Suponer que p^2 divide a $|\text{Aut}(S)|$ y sea $G \approx \mathbb{Z}_p$ el grupo que actúa con los tres puntos fijos produciendo un $(0; p, p, p) = S/G$. Entonces, por Sylow, existe grupo $H \leq \text{Aut}(S)$ con $|H| = p^2$ tal que $G \trianglelefteq H$ (de hecho H es abeliano). Luego, hacemos actuar H en S y, como G es normal, esto es equivalente a hacer actuar G en S , y así, H/G en S/G . En seguida calculamos el orden del estabilizador de los puntos marcados por G en H . Así este puede ser p (por G) o p^2 . Notar que el grupo H/G actúa discontinuamente en la esfera y en consecuencia tiene una posibilidad sólomente: $(0; p, p)$.

Suponer que el estabilizador tiene orden p . Luego, la imagen de este punto por $\pi_S : S \rightarrow S/G$ no es punto fijo de la acción de H/G en S/G . Luego, la órbita de este punto por la acción de H en S es de cardinalidad: $kp + 1 \vee kp + 2 \vee kp + 3$ (dependiendo de si los otros puntos fijos de G están o no en la órbita dada por H/G) y ninguna de ellas es válida, ya que el orden de H es p^2 . Luego, el orden del estabilizador debe ser p^2 para cada punto fijo de G y esto no puede ser ya que H/G sólo tiene dos puntos fijos. Luego, $\left(p, \frac{|\text{Aut}(S)|}{p}\right) = 1$. \square

Entonces sólo pueden haber clases de conjugación de G como subgrupos de orden p . Luego, hay que notar que bajo clases de conjugación

los saltos definidos no son afectados, ya que se corresponden con con-
jugar por un automorfismo del disco. Existe el caso en que hay clases
de conjugación: curva de Klein (8 clases).

Suponer $S_k^p \simeq S_{k'}^p$. Por la discusión anterior, se puede suponer
que el isomorfismo q entre las superficies permuta los tres puntos de
ramificación. Subir en cada superficie a los dominios fundamentales
(ACB) y ($q(A)q(C)q(B)$) centrados en el origen y con el vértice entre el
lado a_1 ($q(a_1)$) y a_{2p} ($q(a_{2p})$) real (se puede hacer enviando el respectivo
 A al origen más una rotación).

Así el isomorfismo induce un automorfismo entre los discos que fijan
al origen. Luego debe ser una rotación y, más aún usando el hecho
geométrico de minimalidad de la distancia entre vértices, la rotación es
en un ángulo de $\frac{n\pi}{p}$ con $n \in \{1, \dots, 2p-1\}$ (enviando un dominio sobre
el otro). Luego, los saltos en ambos dominios deben ser el mismo ya
que en caso contrario no habría inyectividad en q . Luego, $\Omega_k^p = \Omega_{k'}^p$.
(Se observa que sólo se ha demostrado que un salto es el mismo, pero
más adelante mostraré que cualquiera de los números de Ω_k^p genera a
todos los otros) \square

8.5. Números

Ahora pondremos nuestra atención sobre los conjuntos Ω_k^p . El
análisis de dichos conjuntos entregará información sobre posibles auto-
morfismos actuando en las superficies. Por el momento, estos conjuntos
nos dirán cuantas Lefschetz tres hay dado p .

PROPOSICIÓN 25. *Los Ω_k^p particionan el conjunto $\mathbb{Z}_p \setminus \{0, p-1\}$.*

DEMOSTRACIÓN. Notar que los Ω_k^p tienen la particularidad de que
son generados por cualquiera de sus elementos haciendo las operaciones:

$$(\bullet)^{-1}(\text{mod } p) \text{ y } p-1-\bullet.$$

Con lo anterior se prueba que particionan $\mathbb{Z}_p \setminus \{0, p-1\}$. \square

PROPOSICIÓN 26. *La cardinalidad de Ω_k^p puede ser una de las sig-
uientes:*

- a) 2, en cuyo caso $p \equiv 1(3)$ y sólo puede pasar para un Ω_k^p para
cada uno de los p .
- b) 3, lo cual sucede sólo para un Ω_k^p en cada p y es

$$\Omega_1^p = \left\{1, \frac{p-1}{2}, p-2\right\}.$$

- c) 6, en todos los demás casos.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que dos elementos son iguales en un Ω_k^p y sea a uno de ellos, entonces:

$$a \equiv a^{-1} \vee a \equiv p-1-a \vee a \equiv p-(a^{-1}+1)^{-1} \vee a \equiv p-1-a^{-1} \vee a \equiv (a^{-1}+1)^{-1}.$$

Si sucede cualquiera de las tres primeras se tendrá el caso de Ω_1^p (cada una da cada uno de los elementos que lo conforman). Si suceden cualquiera de las dos últimas son equivalentes a la resolución de la ecuación:

$$a^2 + a + 1 \equiv 0(p)$$

la cual tiene solución (dos soluciones) ssi -3 es residuo cuadrático módulo p lo cual es cierto ssi $p \equiv 1(3)$, y esto último es en virtud de la ecuación en símbolos de Legendre:

$$\left(\frac{-3}{p}\right)\left(\frac{p}{3}\right) = 1$$

lo cual indica lo dicho (la ecuación de arriba proviene del teorema de reciprocidad cuadrática de Gauss). Así los valores de a serán:

$$\pm \sqrt{-3} \frac{p-1}{2} - \frac{p+1}{2}.$$

□

TEOREMA 5. El número de Ω_k^p 's distintos es :

$$\frac{p+5}{6} \quad \text{si } p \equiv 1(3)$$

o

$$\frac{p+1}{6} \quad \text{si } p \equiv -1(3).$$

DEMOSTRACIÓN. Si $p \equiv 2(3)$ entonces para completar los sextos debo agregar tres elementos a Ω_1^p . Así,

$$\frac{p-2+3}{6} = \frac{p+1}{6}$$

es la cantidad de Ω_k^p 's distintos.

Si $p \equiv 1(3)$ entonces para completar los sextos debo agregar tres elementos a Ω_1^p y cuatro al caso raro. Así,

$$\frac{p-2+3+4}{6} = \frac{p+5}{6}$$

es la cantidad de Ω_k^p 's distintos.

□

COROLARIO 1. *El número de superficies de Riemann compactas distintas con acción de \mathbb{Z}_p ($p > 3$ primo) con cuociente de signatura $(0; p, p, p)$ es :*

$$\frac{p+5}{6} \quad \text{si } p \equiv 1(3)$$

o

$$\frac{p+1}{6} \quad \text{si } p \equiv -1(3) .$$

8.6. Grupo total de automorfismos

Ahora se encontrará el grupo total de automorfismos $\text{Aut}(\Omega_k^p)$ para cada una de estas superficies, usando un hecho muy conocido que no se demostrará aquí (ver [3], páginas 176-185).

OBSERVACIÓN 2. *Sea Ω_k^p Superficie de Lefschetz y $T \in \text{Aut}(\Omega_k^p)$ de orden p que fija tres puntos. Entonces, excepto en Ω_2^7 (curva de Klein), el grupo generado por este automorfismo es normal.*

Notar que la observación anterior también nos dice que todo automorfismo R de la superficie debe ser tal que $R(\text{Fix}(T)) = \text{Fix}(T)$. De ahora en adelante los Ω_k^p serán pensados como vectores de seis componentes enteras, ordenados según se definió al final de la proposición 23. es decir,

$$\begin{aligned} \Omega_k^p = \{ & s(ACB) = k, s(ABC) = p - 1 - k, \\ & s(BAC) = p - 1 - k^{-1}, s(BCA) = k^{-1}, \\ & s(CBA) = p - (k + 1)^{-1}, s(CAB) = (k + 1)^{-1} - 1 \} . \end{aligned}$$

NOTACIÓN 8. $T \in \text{Aut}(\Omega_k^p)$ será el automorfismo de Ω_k^p que fija A . B y C de orden p , y que además visto en (ACB) centrado en el origen rota en ángulo $\frac{2\pi}{p}$.

OBSERVACIÓN 3. T visto centrado en B rota en $\frac{2\pi k^{-1}}{p}$ y centrado en C rota en $\frac{2\pi(-1-k)^{-1}}{p}$.

Las siguientes propiedades servirán para calcular de manera simple los grupos de automorfismos.

LEMA 4. Si $R \in \text{Aut}(\Omega_k^p)$ fijando los tres puntos de ramificación de T , entonces $R = T^n$ con $n \in \mathbb{N}$. Además, si R fija uno de los tres puntos de ramificación de T y no estamos en Ω_1^p , entonces $R = T^n$ con $n \in \mathbb{N}$.

DEMOSTRACIÓN. Se tiene $R : \Omega_k^p \rightarrow \Omega_k^p$ tal que $R(A) = A$, $R(B) = B$ y $R(C) = C$. Levantamos el automorfismo R al disco y tomamos como dominios fundamentales (ACB) centrados en el origen y con el vértice C real positivo. Esto se puede hacer con un automorfismo del disco que cambie el centro y rote.

Luego el levantamiento de R es una rotación. Más aún, como R fija los puntos de ramificación de T , esta es una rotación en $\frac{2\pi n}{p}$. Así, $R = T^n$ con $n \in \mathbb{N}$.

Notar que si R fija uno de los puntos de ramificación de T y R no es T^n , entonces debe intercambiar los otros dos. De esta forma, y pensando en la demostración del Teorema Principal, para poder intercambiar dos vértices se necesita que el salto centrado en esos vértices sea el mismo. Así, por ejemplo,

$$\Omega_2^{13} = \{2, 10, 5, 7, 4, 8\}$$

no puede intercambiar los puntos. Esto implicará que la superficie Ω_2^{13} no acepta otro automorfismo distinto a una potencia de T .

Entonces, como tenemos sólo tres tipos de Ω_k^p , fácilmente se chequea que sólo Ω_1^p acepta fijar un vértice (el cuál es (C)) mediante un automorfismo distinto de T^n . □

Con esta proposición fácilmente se encuentran los grupos totales de automorfismos. Hay tres posibles casos y se demostrarán en las tres siguientes proposiciones.

PROPOSICIÓN 27.

$$\text{Aut}(\Omega_1^p) \approx \mathbb{Z}_{2p}.$$

DEMOSTRACIÓN. Observando las posibilidades numéricas que nos da el ahora vector Ω_1^p , notamos que existe un automorfismo R de orden dos (involución hiperéptica además) tal que

$$R(C) = C \quad R(A) = B \quad R(B) = A$$

ya que

$$\Omega_1^p = \left\{ 1, p-2, p-2, 1, \frac{p-1}{2}, \frac{p-1}{2} \right\}.$$

Esta R viene inducida por tomar dominio en el disco centrado en C y rotar en ángulo π . Los puntos de Weierstrass son C y los p puntos

medios de los lados del dominio. De esta forma tenemos $\langle R, T \rangle \approx \mathbb{Z}_{2p}$, generado por rotar alrededor de C en $\frac{\pi}{p}$.

Sea $Q \in \text{Aut}(\Omega_1^p)$. Luego, Q intercambia los puntos de ramificación de T . Por lema 4 y usando las posibilidades que nos da Ω_1^p , se tendrá que $Q = T^n$ o $QR = T^n$ para algún n natural. Luego

$$\text{Aut}(\Omega_1^p) \approx \mathbb{Z}_{2p} .$$

□

PROPOSICIÓN 28.

$$\text{Aut}(\Omega_k^p) \approx \mathbb{Z}_p \rtimes \mathbb{Z}_3$$

con $p > 7$, $p \equiv 1(3)$ y $k^2 + k + 1 \equiv 0(p)$. Con $p = 7$ se tiene la curva de Klein (Ω_2^7) con su famoso grupo de orden 168.

DEMOSTRACIÓN. Observando las posibilidades numéricas que nos da el vector Ω_k^p , con $k^2 + k + 1 \equiv 0(p)$, $p \equiv 1(3)$ y $p > 7$, notamos que existe un automorfismo R de orden tres tal que

$$R(A) = B \quad R(B) = C \quad R(C) = A$$

ya que

$$\Omega_k^p = \{k, k^{-1}, k, k^{-1}, k, k^{-1}\} .$$

Para fijar este automorfismo, R se levanta como la identidad del disco en el disco, enviando (ACB) sobre (BAC) . Al hacer esto queda completamente identificado R . Si en (ACB) numeramos los triángulos $\triangle ACB$ en sentido contra reloj tomando como primer triángulo el de vértice C real positivo, la imagen por R permutará los triángulos rotando su interior en 120, alrededor de su punto central (su circuncentro). Observando se obtiene que sólo dos triángulos son fijos 1 y $2(p-1)$. De esta forma sus centros son fijos y de esta manera R tiene dos puntos fijos. Esto también se puede observar después de haber cuocientado por T (ver como actúa un \mathbb{Z}_3 en la esfera).

Así teniendo muy bien identificados a los automorfismos, fácilmente se demuestra que T y R no conmutan. La no conmutatividad se puede probar moviéndose horizontal-vertical o vertical-horizontal en los siguientes números (módulo $2p$):

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & \dots & 2p-1 & 2p \\ 1 & 2k+2 & 2k+1 & 4k+2 & \dots & 1-2k & 2 \end{array}$$

verticalmente R y horizontalmente T . Aquí se usa el hecho de que la rotación T rota en $\frac{2\pi k^{-1}}{p}$ alrededor de B . Notar que por Riemann-Hurwitz,

$$\Omega_k^p / \langle R \rangle$$

tiene género $\frac{p-1}{6}$. Como en la proposición anterior, podemos decir que si hay otro automorfismo, este es múltiplo de T y/o R . Luego, $\text{Aut}(\Omega_k^p) \approx \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_3$. \square

PROPOSICIÓN 29. *En todos los otros casos,*

$$\text{Aut}(\Omega_k^p) \approx \mathbb{Z}_p .$$

DEMOSTRACIÓN. Aquí no hay alternativas de intercambio para los puntos de ramificación de T , ya que Ω_k^p tiene seis números distintos. \square

8.7. Ecuaciones para las Superficies

Para finalizar daremos ecuaciones a las superficies.

PROPOSICIÓN 30. *La superficie Ω_k^p es equivalente a la siguiente curva en \mathbb{C}^2*

$$y^p = (x-1)(x-w)^k(x-w^2)^{-1-k}$$

donde $w = e^{\frac{2\pi i}{3}}$.

DEMOSTRACIÓN. Como sobre la esfera puedo enviar tres puntos en otros tres puntos cualesquiera, elegiré como representantes de los puntos destacados A, B, C a las raíces cúbicas de la unidad $1, w, w^2$.

Por otro lado, tengo p copias de la esfera que deben ser pegadas para reproducir a la superficie Ω_k^p . Alrededor de A se pegaron las copias secuencialmente $I, x, x^2, \dots, x^{p-1}$. A será representado por el 1 de la esfera, B por w y C por w^2 . Luego la superficie viene dada por

$$y^p = (x-1)(x-w)^a(x-w^2)^b$$

donde a y b indican como van pegadas las copias de esfera alrededor de B y C , respectivamente, según la numeración dada por A . Por el trabajo de saltos, tenemos que

$$a = s(ACB) = k \quad b = s(ABC) = p - 1 - k .$$

Eliminando el p de b , nos quedamos con

$$y^p = (x-1)(x-w)^k(x-w^2)^{-1-k} .$$

\square

Como anteriormente vimos, si la superficie es Ω_1^p , entonces su ecuación representativa es

$$y^p = \frac{(x-1)(x-w)}{(x-w^2)^2}$$

y $\text{Aut}(\Omega_1^p) \approx \mathbb{Z}_{2p}$ es generado por:

$$(x, y) \mapsto \left(\frac{w}{x}, \frac{w_p}{y} \right)$$

donde w_p es raíz p -ésima primitiva de la unidad.

Para el caso $\text{Aut}(\Omega_k^p) \approx \mathbb{Z}_p \rtimes \mathbb{Z}_3$ ($p - 1$ debe ser divisible por 3 y $p > 7$) tenemos como ecuación

$$y^p = \frac{(x-1)(x-w)^k}{(x-w^2)^{1+k}}$$

y además

$$\text{Aut}(\Omega_k^p) = \langle (x, y) \mapsto (x, w_p y), (x, y) \mapsto (wx, y^k \frac{(x-w^2)^t}{(x-w)^t}) \rangle$$

donde $k^2 + k + 1 \equiv 0(p)$ y $t = \frac{1+k+k^2}{p}$.

En todos los casos restantes, exceptuando la curva de Klein, el grupo total de automorfismos es \mathbb{Z}_p generado por $(x, y) \mapsto (x, w_p y)$.

CAPÍTULO 9

Observaciones sobre casos especiales

9.1. Hiperelípticas en \mathfrak{I}_p

En los capítulos anteriores se dedujo que para cada \mathfrak{I}_p tenemos un bloque desconexo del tipo-2 en donde todas las superficies consideradas son hiperelípticas y no hay una superficie con tal característica fuera de él. Este bloque se identifica con el caso κ_3 representado por el siguiente conjunto numérico:

$$\Lambda_{(-1,-1)}^p = \{(-1, -1)_1, (-1, 1)_3, (1, -1)_2, (1, -1)_2, (-1, -1)_1, (-1, 1)_3, \\ (-1, 1)_3, (1, -1)_2, (-1, -1)_1, (-1, -1)_1, (-1, 1)_3, (1, -1)_2\} .$$

En el capítulo sobre automorfismos, es calculado el normalizador $(\text{Aut}(S)')$ del \mathbb{Z}_p considerado, dando en este caso como resultado,

- Si $S \in \mathfrak{I}_p^e \cup \mathfrak{I}_p^a$, $\text{Aut}(S)' \approx D_{2p}$.
- Si $S \in \mathfrak{I}_p^c$,

$$\text{subclase de } (-1, -1) \Rightarrow \text{Aut}(S)' \approx (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{2p}) \rtimes \mathbb{Z}_2 .$$

$$\text{subclase de } (-1, 1) \Rightarrow \text{Aut}(S)' \approx D_{2p} .$$

Se quiere mostrar en esta sección que $\text{Aut}(S)' = \text{Aut}(S)$ para todos los casos y todo p , excepto en una superficie de \mathfrak{I}_3 , la curva de 48 automorfismos. Para comenzar, daremos las ecuaciones canónicas de estas superficies, las cuales nos darán una configuración en la esfera que nos permitirá cumplir con nuestro objetivo.

PROPOSICIÓN 31. *Sea $S \in \mathfrak{I}_p$ hiperelíptica. Entonces, S puede ser representada por la siguiente curva en \mathbb{C}^2 ,*

$$y^2 = (x^p - a^p)\left(x^p + \frac{1}{a^p}\right)$$

donde $a \in \mathbb{C}$ distinto de cero.

Esto se demuestra usando el anterior cálculo de $\text{Aut}(S)'$ el cual nos indica como pueden ser movidos los puntos y que orden tienen. Notar que todo automorfismo de la superficie baja a la esfera ya que la involución está en el centro del grupo. Esta configuración de los puntos

de Weierstrass en la esfera viene dada por dos polígonos regulares de p lados uno encima del otro y tal que un elemento de orden dos lleve uno en el otro.

Resultados conocidos indican que para $p = 3$ existe sólo una superficie con grupo de automorfismos de orden 48 y 24 (ver [?]). La de orden 48 viene dada por la configuración de los puntos centrales de las caras de un cubo, que es un caso particular de lo explicado arriba con los polígonos. La superficie con 24 automorfismos, y así, la que posee $8p$ automorfismos viene dada por la configuración de los puntos vértices de un polígono regular de $2p$ lados. Observar que, por ejemplo, esto sucede cuando el a de la ecuación anterior es uno. Geométricamente los puntos de Weierstrass son desplazados sobre la esfera hasta llegar a esa configuración, lo cual corresponde a moverse en las ramas de \mathbb{J}_p .

Varios automorfismos de estas superficies pueden ser calculados fácilmente mirando la ecuación y teniendo en cuenta la demostración del cálculo de $\text{Aut}(S)'$. Así, $\text{Aut}(S)'$ es generado por:

$$(x, y) \mapsto (x, -y)$$

$$(x, y) \mapsto \left(\frac{1}{x}, \frac{y}{x^p}\right)$$

$$(x, y) \mapsto (w_p x, y)$$

con w_p raíz p -ésima de la unidad.

Se agrega a esta lista $(x, y) \mapsto (-x, y)$ en el caso $|a| = 1$. Cuando tenemos $p > 3$, los puntos no pueden tomar una configuración análoga a la del cubo para hacer crecer el grupo más que lo calculado ($\text{Aut}(S)'$). Basta ver que un paquete de $2p$ puntos sobre la esfera no pueden funcionar como lo pide $\text{Aut}(S)'$, chequeando los 6 posibles casos que ella posee (sus posibles grupos finitos). Luego, $\text{Aut}(S)' = \text{Aut}(S)$. De esta manera,

PROPOSICIÓN 32. *Sea $S \in \mathbb{J}_p$ hiperelíptica con $p > 2$. Entonces, el grupo de automorfismo total de la superficie es:*

- Si $p = 3$,
 1. $S \in \mathbb{J}_3^c \cup \mathbb{J}_3^a$, $\text{Aut}(S) \approx D_6$, salvo el caso de la curva de 48 automorfismos la cual es aguda ($\approx GL_2(3)$).
 2. $S \in \mathbb{J}_3^c$.

$$\text{subclase de } (-1, -1) \Rightarrow \text{Aut}(S) \approx (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6) \rtimes \mathbb{Z}_2 .$$

$$\text{subclase de } (-1, 1) \Rightarrow \text{Aut}(S) \approx D_6 .$$

- Si $p > 3$,
 1. $S \in \mathbb{I}_p^e \cup \mathbb{I}_p^a$, $\text{Aut}(S) \approx D_{2p}$.
 2. $S \in \mathbb{I}_p^c$,

subclase de $(-1, -1) \Rightarrow \text{Aut}(S) \approx (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{2p}) \rtimes \mathbb{Z}_2$.

subclase de $(-1, 1) \Rightarrow \text{Aut}(S) \approx D_{2p}$.

OBSERVACIÓN 4. La superficie $S_{(-1,-1)}^c$ poseyendo como grupo total de automorfismos $\approx (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{2p}) \rtimes \mathbb{Z}_2$ es única para cada p , generalizando lo que sucedía en $p = 3$.

9.2. Superficies equiláteras

A continuación haré un resumen de los resultados acerca de estas superficies. \mathbb{I}_p^e viene a ser el conjunto que generaliza al toro

$$\mathbb{C} / \langle 1, \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \rangle .$$

- Si $p > 3$, entonces

$$|\mathbb{I}_p^e| = \frac{p^2 + 11}{12}$$

, y si $p = 3$ hay sólo una superficie equilátera.

- Con respecto a $\text{Aut}(S)'$ se tiene lo siguiente:
 - a) $\text{Aut}(S_{(1,1)_1}^e)' \approx \mathbb{Z}_{3p}$. $S_{(1,1)}^e$ es la única con esta propiedad para cada $p > 3$.
 - b) $\text{Aut}(S_{(-1,-1)_1}) \approx D_{2p}$ (una para cada $p > 2$)(Hiperelíptica). Sin embargo, este grupo está presente en todo el bloque hiperelíptico correspondiente.
 - c) $\text{Aut}(S)' \approx D_p$ (Hay $\frac{p-3}{2}$ para cada p) (no Hiperelíptica).
 - d) $\text{Aut}(S)' \approx \mathbb{Z}_p$ (Todas las restantes para cada p).

- Las ecuaciones de las Superficies como curvas en \mathbb{C}^2 son:

$$y^p = (x - 1)(x - w)^i(x - w^2)^j$$

donde $w = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ y $i, j \in \{1, 2, \dots, p-1\}$ y $p \nmid (i + j + 1)$. La clasificación como ecuaciones según el $\text{Aut}(S)'$ anterior es:

a) $y^p = (x-1)(x-w)(x-w^2)$. Tenemos de esta forma que

$$\text{Aut}(S_{(1,1)_1}^e)' = \langle (x, y) \mapsto (wx, w_p y) \rangle .$$

b) $y^p = \frac{x-1}{x^2+x+1}$ (Hiperelíptica). Los generadores del grupo diedral $\text{Aut}(S_{(-1,-1)_1}^e) \approx D_{2p}$ son:

$$(x, y) \mapsto \left(\frac{x+2}{x-1}, w_p y \right)$$

y

$$(x, y) \mapsto \left(\frac{wx + 2w^2}{x-w}, -\frac{t}{y} \right)$$

donde $t = \sqrt[p]{\frac{1}{3}}$ constante.

c) $y^p = \frac{(x-1)(x-w)^i}{x-w^2}$ $i \in \{2, 3, \dots, p-2\}$. El grupo diedral $\text{Aut}(S_{(i,-1)_1}^e)' \approx D_p$ es generado por:

$$(x, y) \mapsto (x, w_p y)$$

y

$$(x, y) \mapsto \left(\frac{wx + 2w^2}{x-w}, -\frac{t}{y} \right)$$

donde $t = \sqrt[p]{\frac{3^i}{w^{1+i}}}$ constante.

d) Todas las restantes combinaciones.

La elección de las raíces cúbicas de la unidad para estas superficies se prueba tomando en cuenta de que hay una única superficie en \mathbb{J}_p ($p > 3$) tal que admite la acción de \mathbb{Z}_3 . Como en la ecuación $y^p = x^3 - 1$ tiene género $p-1$ y admite \mathbb{Z}_3 , esta debe ser tal superficie. Es decir, cuando tengo una triangulación equilátera en el disco, los cuatro puntos pueden ser representados por tales raíces más el infinito. Luego, sólo hay que fijar quienes son los exponentes y estos vienen dados por los saltos correspondiente, tal cual se hizo en las superficies de Lefschetz.

9.3. Superficies cuadradas

A continuación, al igual que en la sección anterior, haré un resumen de los resultados acerca de estas superficies. \mathfrak{J}_p^c viene a ser el conjunto que generaliza al toro

$$\mathbb{C} / \langle 1, i \rangle$$

- Sea p impar. Entonces,

$$|\mathfrak{J}_p^c| = \frac{p^2 + 2p + 5}{8} \quad \text{si } p \equiv 1(4)$$

o

$$|\mathfrak{J}_p^c| = \frac{p^2 + 2p + 1}{8} \quad \text{si } p \equiv -1(4).$$

- Abajo se muestran las superficies cuadradas según los casos κ_i . En cada caso recordaremos el grupo $\text{Aut}(S)'$ y daremos una ecuación en \mathbb{C}^2 a cada superficie, junto con los automorfismos que generan $\text{Aut}(S)'$. Al igual que en el caso equilátero, en virtud de que en cada \mathfrak{J}_p tenemos, por ejemplo, una única superficie con $\text{Aut}(S)' \approx (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{2p}) \rtimes \mathbb{Z}_2$ y la curva $y^p = \frac{x^2-1}{x^2+1}$ cumple con esa característica, entonces si el salto inicial de S es $(a, b)_1$ tenemos que la superficie viene dada por la ecuación,

$$y^p = (x-1)(x-i)^a(x+1)^c(x+i)^b$$

con $i = \sqrt{-1}$ y $c = -1 - a - b$ (el antiguo k). De esta forma, los cuatro puntos ramificados son representados por las raíces cuartas de la unidad. Sea w_p raíz p -ésima de la unidad.

- κ_1) El caso κ_1 posee una superficie y p debe ser mayor que 3. Se tiene $\text{Aut}(S_{(1,1)_1})' \approx \mathbb{Z}_{2p}$ y la superficie viene dada por la ecuación,

$$y^p = (x-1)(x^2+1)(x+1)^{p-3}$$

$$\text{y } \text{Aut}(S_{(1,1)_1})' = \langle (x, y) \mapsto \left(\frac{1}{x}, \frac{-w_p y}{x}\right) \rangle.$$

- κ_2) En este caso tenemos varias superficies y dos posibilidades para $\text{Aut}(S)'$. Esto depende de si el salto es $(a, a)_1$ con $a \neq -1, 1$ o no.

* Si $S_{(a,a)_1}$, entonces $\text{Aut}(S_{(a,a)_1})' \approx \mathbb{Z}_{2p}$ y su ecuación es,

$$y^p = (x-1)(x^2+1)^a(x+1)^{-1-2a}.$$

$$\text{Además, } \text{Aut}(S_{(a,a)_1})' = \langle (x, y) \mapsto \left(\frac{1}{x}, \frac{-w_p y}{x}\right) \rangle.$$

* En el otro caso tenemos la ecuación inicial evaluada en el respectivo salto y $\text{Aut}(S)' \approx \mathbb{Z}_p$.

κ_3) El caso hiperelíptico también nos muestra dos posibles $\text{Aut}(S)$ (aquí se puede hablar de grupo total de automorfismos),

* Si $S_{(-1,-1)_1}$, entonces $\text{Aut}(S_{(-1,-1)_1}) \approx (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{2p}) \rtimes \mathbb{Z}_2$ y su ecuación es,

$$y^p = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}.$$

Además, los automorfismos generadores son:

$$\begin{aligned} (x, y) &\mapsto (-x, y) \\ (x, y) &\mapsto \left(\frac{1}{x}, \frac{-w_p y}{x}\right) \\ (x, y) &\mapsto \left(\frac{i}{x}, \frac{-1}{y}\right). \end{aligned}$$

Notar que esta superficie es única con tales características y generaliza a la única curva de género dos con 24 automorfismos.

* Para el otro caso tenemos $\text{Aut}(S_{(-1,1)_1}) \approx D_{2p}$ y su ecuación es,

$$y^p = \frac{(x-1)(x+i)}{(x-i)(x+1)}.$$

Además, los automorfismos generadores son:

$$\begin{aligned} (x, y) &\mapsto (-x, y) \\ (x, y) &\mapsto (x, w_p y) \\ (x, y) &\mapsto \left(\frac{i}{x}, \frac{-1}{y}\right). \end{aligned}$$

κ_4) En este caso tenemos sólo una posibilidad para el grupo: $\text{Aut}(S)' \approx D_p$. La ecuación es evaluar el salto en la ecuación general, y los automorfismos generadores son: $(x, y) \mapsto (x, w_p y)$ y $(x, y) \mapsto \left(\frac{i}{x}, \frac{-1}{y}\right)$.

κ_5) Recordamos que este caso está sujeto a la condición

$$p \equiv 1(4).$$

Aquí tenemos dos posibilidades:

* Si $S_{(a,-a)_1}$ con $a^2 \equiv -1(p)$, entonces $\text{Aut}(S_{(a,-a)_1})' \approx \mathbb{Z}_p \rtimes \mathbb{Z}_4$ y su ecuación es,

$$y^p = \frac{(x-1)(x-i)^a}{(x+1)(x+i)^a}.$$

Supongamos que $a^2 - pt = -1$ con $t \in \mathbb{N}$, entonces los automorfismos generadores son:

$$(x, y) \mapsto (ix, y^a \frac{(x+i)^t}{(x-i)^t})$$

$$(x, y) \mapsto (x, w_p y).$$

Notar que esta superficie es única con tales características y generaliza a la curva de Bring. La curva de Bring es $S_{(2,3)_1}^c$ ($p=5$) en este lenguaje (ver [7]).

* El caso restante es análogo al caso κ_4 .

κ_6) Este es el caso más simple: $\text{Aut}(S)' \approx \mathbb{Z}_p$ y hay dos en cada bloque (configuración tipo-3) por cada p .

Apéndice

Los Ω_k^p para algunos primos

A continuación se presentan algunos de los conjuntos de números asociados a las superficies de Lefschetz.

$$\Omega_1^5 = \{1, 2, 3\}$$

$$\Omega_1^7 = \{1, 3, 5\} \quad \Omega_2^7 = \{2, 4\}$$

$$\Omega_1^{11} = \{1, 5, 9\} \quad \Omega_2^{11} = \{2, 3, 4, 6, 7, 8\}$$

$$\Omega_1^{13} = \{1, 6, 11\} \quad \Omega_2^{13} = \{2, 10, 5, 7, 8, 4\} \quad \Omega_3^{13} = \{3, 9\}$$

$$\Omega_1^{17} = \{1, 8, 15\} \quad \Omega_2^{17} = \{2, 5, 7, 9, 11, 14\} \quad \Omega_3^{17} = \{3, 4, 6, 10, 12, 13\}$$

Las superficies con tres números son todas las hiperelípticas, con grupo de automorfismo $\approx \mathbb{Z}_{2p}$. La superficie Ω_2^7 es la curva de Klein. Salvo ella, todas las superficies con dos números tienen un grupo total de automorfismos $\approx \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_3$. Finalmente, las superficies con seis números no aceptan más simetrías aparte de las dadas por \mathbb{Z}_p , convirtiéndose las más rígidas dentro de las Lefschetz.

Tablas para las clases de Σ_p

A continuación las tablas de las clases de Σ_p para los primos $p = 3, 5, 7, 11, 13$. En ellas se identifican los dominios $[XY]$ (con su ángulo central) y sus respectivos saltos, lo cual sirve mucho para comprender a las superficies \mathfrak{I}_p . Abajo de cada clase se indica el caso κ_i al cual pertenece.

	p=3		p=5				p=7		
$[AD]_1$	2.2	1.1	1.4	2.3	1.1	1.2	1.6	2.5	3.4
$[AB]_3$	2.1	1.2	4.4	3.4	1.4	2.3	6.6	5.6	4.6
$[AC]_2$	1.2	2.1	4.1	4.2	4.1	3.1	6.1	6.2	6.3
$[BD]_2$	1.2	1.1	4.1	4.3	1.1	2.1	6.1	6.4	6.5
$[BC]_1$	2.2	1.2	1.4	3.2	1.4	1.3	1.6	4.3	5.2
$[BA]_3$	2.1	2.1	4.4	2.4	4.1	3.2	6.6	3.6	2.6
$[CD]_3$	2.1	1.1	4.4	2.4	1.1	4.4	6.6	3.6	2.6
$[CA]_2$	1.2	1.2	4.1	4.3	1.4	4.5	6.1	6.4	6.5
$[CB]_1$	2.2	2.1	1.4	3.2	4.1	5.4	1.6	4.3	5.2
$[DA]_1$	2.2	3.3	1.4	2.3	2.2	3.5	1.6	2.5	3.4
$[DC]_3$	2.1	3.3	4.4	3.4	2.2	5.5	6.6	5.6	4.6
$[DB]_2$	1.2	3.3	4.1	4.2	2.2	5.3	6.1	6.2	6.3
	κ_3	κ_1	κ_3	κ_5	κ_1	κ_2	κ_3	κ_4	κ_4

						p=11							
[AD] ₁	1.1	1.2	1.3	1.4	1.10	2.3	2.5	2.10	8.10	3.10	5.10		
[AB] ₃	1.8	2.7	3.6	4.5	10.10	3.5	5.3	10.9	10.3	10.8	10.6		
[AC] ₂	8.1	7.1	6.1	5.1	10.10	5.2	3.2	9.2	3.8	8.3	6.5		
[BD] ₂	1.1	2.1	3.1	4.1	10.10	7.6	8.6	5.6	4.7	7.4	2.9		
[BC] ₁	1.8	1.7	1.6	1.5	1.10	6.8	6.7	6.10	7.10	4.10	9.10		
[BA] ₃	8.1	7.2	6.3	5.4	10.10	8.7	7.8	10.5	10.4	10.7	10.2		
[CD] ₃	1.1	6.6	4.4	3.3	10.10	4.8	9.7	10.9	10.3	10.8	10.6		
[CA] ₂	1.8	6.9	4.2	3.4	10.10	8.9	7.5	9.2	3.8	8.3	6.5		
[CB] ₁	8.1	9.6	2.4	4.3	1.10	9.4	5.9	2.10	8.10	3.10	5.10		
[DA] ₁	7.7	5.8	6.2	3.9	1.10	5.7	9.8	6.10	7.10	4.10	9.10		
[DC] ₃	7.7	8.8	2.2	9.9	10.10	7.9	8.4	10.5	10.4	10.7	10.2		
[DB] ₂	7.7	8.5	2.6	9.3	10.10	9.5	4.9	5.6	4.7	7.4	2.9		
	κ_1	κ_2	κ_2	κ_2	κ_3	κ_6	κ_6	κ_4	κ_4	κ_4	κ_4		

						p=13											
[AD] ₁	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.12	2.3	2.4	2.11	2.12	3.4	3.5	3.10	3.12	5.8		
[AB] ₃	1.10	2.9	3.8	4.7	5.6	12.12	3.7	4.6	11.12	12.11	4.5	5.4	10.12	12.10	8.12		
[AC] ₂	10.1	9.1	8.1	7.1	6.1	12.1	7.2	6.2	12.2	11.2	5.3	4.3	12.3	10.3	12.5		
[BD] ₂	1.1	2.1	3.1	4.1	5.1	12.1	8.7	2.7	12.7	6.7	10.9	6.9	12.9	4.9	12.8		
[BC] ₁	1.10	1.9	1.8	1.7	1.6	1.12	7.10	7.3	7.6	7.12	9.6	9.10	9.4	9.12	8.5		
[BA] ₃	10.1	9.2	8.3	7.4	6.5	12.12	10.8	3.2	6.12	12.6	6.10	10.6	4.12	12.4	5.12		
[CD] ₃	1.1	7.7	9.9	10.10	8.8	12.12	9.5	10.7	6.12	12.11	10.4	8.11	4.12	12.10	5.12		
[CA] ₂	1.10	7.11	9.7	10.5	8.9	12.1	5.11	7.8	12.7	11.2	4.11	11.6	12.9	10.3	12.8		
[CB] ₁	10.1	11.7	7.9	5.10	9.8	1.12	11.9	8.10	7.6	2.12	11.10	6.8	9.4	3.12	8.5		
[DA] ₁	4.4	6.3	2.5	8.2	3.11	1.12	6.4	5.9	2.11	7.12	6.11	11.4	3.10	9.12	5.8		
[DC] ₃	4.4	3.3	5.5	2.2	11.11	12.12	4.2	9.11	11.12	12.6	11.8	4.10	10.12	12.4	8.12		
[DB] ₂	4.4	3.6	5.2	2.8	11.3	12.1	2.6	11.5	12.2	6.7	8.6	10.11	12.3	4.9	12.5		
	κ_1	κ_2	κ_2	κ_2	κ_2	κ_3	κ_6	κ_6	κ_4	κ_4	κ_6	κ_6	κ_4	κ_4	κ_5		

Lista de símbolos

- $|G| : |g|$: orden del grupo G : orden del elemento $g \in G$.
- $H \leq G$: H es subgrupo de G .
- $N \trianglelefteq G$: N es subgrupo normal de G .
- G/N : grupo cociente de G por el grupo normal N .
- S/G : superficie cociente de S por el grupo G .
- $|G : H|$: índice de H en G .
- $\langle g \rangle$: subgrupo generado por g .
- $\text{Aut}(S)$: grupo total de automorfismos analíticos de la superficie S .
- $\text{Stab}_G(A)$: estabilizador del punto A en G .
- $\text{Fix}(G)$: conjunto de puntos fijos por la acción del grupo G .
- $H \approx G$: isomorfismo de grupos
- \mathbb{Z}_p : grupo cíclico de p elementos.
- D_n : grupo diedral de orden $2n$.
- $H \rtimes G$: producto semidirecto de H por G .

Bibliografía

1. Allen Broughton. *Classifying finite group actions on surfaces of low genus*, Journal of pure and applied algebra 69 (1990), 233-270.
2. H. Farkas and I. Kra. *Riemann Surfaces*, Graduate Text in Mathematics, v.72, Springer (1996).
3. Solomon Lefschetz. *On certain numerical invariants of algebraic varieties with application to abelian varieties*, *Trans. Amer. Math. Soc.* 22 (1921), Reprinted in Selected Papers, S. Lefschetz, Chelsea, 1971, New York.
4. Esteban Gómez González. *Irreducible components and isolated points in the branch locus of the moduli space of smooth curves*, Bol. Soc. Mat. Mexicana (3) Vol. 2 (1996), 115-128.
5. Gonzalo Riera. *Automorphisms of abelian varieties associated with Klein surfaces*, Journal London Math. Soc. (2) 51 (1995), 442-452.
6. Gonzalo Riera and Rubí E. Rodríguez. *Riemann surfaces and abelian varieties with an automorphism of prime order*, Duke Mathematical Journal 69 (1993), 199-217.
7. Gonzalo Riera and Rubí E. Rodríguez. *The period matrix of Bring's curve*, Pacific Journal of Mathematics 154 (1992), 179-200.