7.5. Espacios de Hilbert

Definición 7.50. Un espacio vectorial complejo con producto interno que es completo se denomina un **espacio de Hilbert**.

Ejemplo. (i) $l_2 := \{\{a_n\} : a_n \in \mathbb{C}, \sum |a_n|^2 < \infty\}$ es un espacio de Hilbert con el producto interno dado por $(a, b) = \sum a_n \overline{b_n}$.

(ii) $L^2(\mu) = \{f \text{ compleja medible tal que} |f| \in L^2(\mu)\}$ es un espacio de Hilbert con el producto interno $(f, g) = \int f\overline{g}\, d\mu$.

Observación. Sea $x \in \mathcal{H}$ con $\mathcal{H}$ espacio de Hilbert. Luego, las aplicaciones

$$\begin{aligned} x &\to (x, y) \\ x &\to (y, x) \\ x &\to \|x\| \end{aligned}$$

son continuas.

El siguiente resultado es inmediato y se deja como ejercicio para el lector.

Lema 7.51. *Si M es subespacio de un espacio vectorial normado V, entonces $\overline{M}$ es subespacio vectorial.*

Definición 7.52. Dado un espacio vectorial V, decimos que $E \subset V$ es **convexo** si, para cada par de puntos x, $y \in E$, $0 < t < 1$

$$t\,x + (1-t)\,y \in E$$

Definición 7.53. Sea $\mathcal{H}$ un espacio vectorial complejo con producto interno. Dados x, $y \in \mathcal{H}$, decimos que x es **ortogonal** a y si $(x, y) = 0$. Dado $x \in \mathcal{H}$, denotamos $x^{\perp}$ al conjunto de todos los $y \in \mathcal{H}$ que son ortogonales a x. Finalmente, dado un subespacio M, denotamos $M^{\perp}$ al conjunto de todos los $y \in \mathcal{H}$ tales que $(x, y) = 0$, para todo $x \in M$.

Lema 7.54. *Sea $\mathcal{H}$ un espacio vectorial complejo con producto interno.*

(i) Para todo $x \in \mathcal{H}$, el conjunto $x^{\perp}$ es cerrado.

(ii) Si $M \subset \mathcal{H}$, entonces $M^{\perp}$ es cerrado.

DEMOSTRACIÓN. La primera parte es una consecuencia de la continuidad de la aplicación $x \to (x, y)$. La segunda se sigue de la primera al observar que $M^{\perp} = \bigcap_{x\in M} x^{\perp}$. □

Lema 7.55. *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert. Sea $E \subset \mathcal{H}$ cerrado y convexo. Luego, existe un único $x_0 \in E$ que minimiza la norma en E, o sea, $\|x_0\| = \inf_{x\in E} \|x\|$.*

DEMOSTRACIÓN. Consideremos la identidad del paralelógramo

$$\|x - y\|^2 + \|x + y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2, \quad \text{para todo } x, y \in \mathcal{H}$$

Sea $\delta = \inf_{x\in E} \|x\|$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\delta > 0$. Luego, si $x \in E$

$$\frac{\|x - y\|^2}{4} = \frac{\|x\|^2}{2} + \frac{\|y\|^2}{2} - \left\|\frac{x + y}{2}\right\|^2 \leq \frac{\|x\|^2}{2} + \frac{\|y\|^2}{2} - \delta^2. \tag{7.7}$$

Si suponemos la existencia de puntos x_0 y x_0' que minimizan la norma en E concluímos reemplazando en (7.7) que

$$\frac{\|x_0 - x_0'\|^2}{4} \leq \frac{\delta^2}{2} + \frac{\delta^2}{2} - \delta^2 = 0.$$

Esto demuestra la unicidad del min imizador de la norma. Ahora, por definición de δ, tenemos que existe una sucesión x_n en E tal que $\|x_n\| \to \delta$. Utilizando nuevamente la ecuación (7.7) obtenemos

$$\frac{\|x_n - x_m\|^2}{4} \leq \frac{\|x_n\|^2}{2} + \frac{\|x_m\|^2}{2} - \delta^2.$$

Esto prueba que la sucesión x_n es de Cauchy. Como $\mathcal{H}$ es completo y E es cerrado, existe $x_0 \in E$ tal que $x_n \to x_0$. Por la continuidad de la norma tenemos

$$\|x_0\| = \lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \delta,$$

con lo que terminamos la demostración del lema. □

Teorema 7.56. *Sea M un subespacio cerrado de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$.*

(i) Todo $x \in \mathcal{H}$ tiene una descomposición única

$$x = Px + Qx$$

donde $Px \in M$ y $Qx \in M^\perp$ ($\mathcal{H} = M \oplus M^\perp$).

(ii) Px es el elemento de M más cercano a x y Qx el elemento de $M^\perp$ más cercano a x.

(iii) $P : \mathcal{H} \to M$ y $Q : \mathcal{H} \to M^\perp$ son operadores lineales continuos.

(iv) $\|x\|^2 = \|Px\|^2 + \|Qx\|^2$.

Demostración. Sea $x \in \mathcal{H}$ y definamos el conjunto cerrado convexo $E = x + M$ dado por

$$E = \{z \in \mathcal{H} \,:\, z = x + y,\, y \in M\}.$$

Supongamos que $x = x_1 + y_1 = x_2 + y_2$ tal que $x_1, x_2 \in M$ e $y_1, y_2 \in M^\perp$, entonces

$$x_1 - x_2 = y_2 - y_1 \in M \cap M^\perp = \{0\},$$

de donde se concluye la unicidad de la descomposición x. Ahora, por el Lema 7.55 sabemos que existe un único $Qx \in E$ tal que $\|Qx\| = \inf_{y\in E} \|y\|$. Probaremos que $Qx \in M^\perp$. Definimos $Px = x - Qx \in M$. Por definición de E tenemos que para todo $\alpha \in \mathbb{C}$ y todo $y \in M$, $\|y\| = 1$, se satisface que

$$\|Qx\|^2 \leq \|Qx - \alpha y\|^2 = \|Qx\|^2 - \overline{\alpha}(Qx, y) - \alpha(y, Qx) + \overline{\alpha}\alpha.$$

Luego

$$\overline{\alpha}(Qx, y) + \alpha(y, Qx) - \overline{\alpha}\alpha \leq 0.$$

Por lo tanto, eligiendo $\alpha = (Qx, y)$ tenemos que $|(Qx, y)| \leq 0$. Entonces $(Qx, y) = 0$, para todo $y \in M$ lo que prueba que $Qx \in M^\perp$. Esto demuestra la parte (i). Para probar (ii), notemos que para todo $y \in M$ se tiene

$$\|x - y\|^2 = \|Qx\|^2 + \|Px - y\|^2.$$

Luego

$$\inf_{y \in M} \|x - y\| = \|Qx\| = \|Px - x\|.$$

La prueba de que Qx es el elemento más cercano a x en $M^\perp$ es análoga. Suponiendo la veracidad de (iv) es inmediata la continuidad de los operadores P y Q. Luego, probaremos (iv). Para ello lo único que debemos considerar es que Px es ortogonal a Qx, por lo tanto

$$\|x\|^2 = \|Px\|^2 + (Px, Qx) + (Qx, Px) + \|Qx\|^2 = \|Px\|^2 + \|Qx\|^2.$$

$\square$

Los operadores P y Q del teorema anterior se denomina **proyección ortogonal** en M y $M^\perp$, respectivamente.

Ejercicio. Si $x \in \mathcal{H}$, pruebe que

(i) $P^2x = Px$

(ii) $\|P\| = 1$

(iii) P es simétrico y positivo: $(Px, x) = (x, Px) \geq 0$.

Corolario 7.57. *Si M es un subespacio cerrado propio de $\mathcal{H}$, entonces $M^\perp \neq 0$.*

Demostración. Sea $x \in \mathcal{H} - M$, luego por el teorema anterior sabemos que x se puede descomponer como suma directa de $Px \in M$ y $Qx \in M^\perp$. Como $x \notin M$, tenemos que $Qx \neq 0$. $\square$

Teorema 7.58 (Lema de Riesz). *Si l es un funcional lineal continuo en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, entonces, existe un único $y \in \mathcal{H}$ tal que*

$$l(x) = (x, y), \quad \forall x \in \mathcal{H}.$$

Demostración. Si $l(x) = 0$, para todo $x \in \mathcal{H}$, basta elegir $y = 0$. En caso contrario definimos

$$M := \{x : l(x) = 0\}.$$

Claramente M es un subespacio propio cerrado y convexo de $\mathcal{H}$. Luego, como consecuencia del corolario anterior existe un $z \neq 0$ en $M^\perp$ tal que $\|z\| = 1$. Ahora definimos $u = l(z)x - l(x)z \in M$. Entonces,

$$l(x) = l(x)(z, z) = l(z)(x, z) = (x, y),$$

donde $y = \overline{l(z)}\, z$.
Para probar la unicidad de y, supongamos la existencia de $y' \in \mathcal{H}$, $y' \neq y$ tal que $l(x) = (x, y')$ para todo $x \in \mathcal{H}$. Entonces

$$(x, y - y') = 0 \quad \text{para todo } x \in \mathcal{H}.$$

Eligiendo $x = y - y'$, vemos que $y = y'$. $\square$

Veremos a continuación una generalización de este teorema.

Teorema 7.59 (Lax-Milgram). *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $B : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ tal que,* *(i)* $B(x, y)$ *es lineal en* x *y antilineal en* y.

(ii) *Existe una constante* C *tal que* $|B(x, y)| \leq C\|x\| \, \|y\|$ *para todo* x, $y \in \mathcal{H}$.

(iii) *Existe una constante* $b > 0$ *tal que* $B(x, x) \geq b \, \|x\|^2$ *para todo* $x \in \mathcal{H}$.

Luego, si $l : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ *es un funcional lineal acotado, entonces, existe un único* $y \in \mathcal{H}$ *tal que* $l(x) = B(x, y)$*, para todo* $x \in \mathcal{H}$.

DEMOSTRACIÓN. Por la hipótesis (i), para cada $y \in \mathcal{H}$, $B(x, y)$ es un funcional lineal. Por el Lema de Riesz sabemos que existe un único $z(y)$ tal que $B(x, y) = (x, z(y))$. Definimos entonces la función $z : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ que a cada y le asocia $z(y)$, definido por la relación $B(x, y) = (x, z(y))$. Es obvio que $z(y)$ es lineal. Luego, al tomar y valores en todo el espacio de Hilbert, esto define un subespacio lineal de H.Probaremos que este subespacio es cerrado.

De la igualdad $B(y, y) = (y, z)$, notemos que

$$b||y|| \leq ||z||.$$

Sea $\{z_n\}$ una sucesión de puntos que son imágenes de otra sucesión $\{y_n\}$ de modo que $B(x, y_n) = (x, z_n)$ para todo $x \in \mathcal{H}$. Luego $B(x, y_n - y_m) = (x, z_n - z_m)$. Además

$$b||y_n - y_m|| \leq ||z_n - z_m||.$$

Esto implica que si z_n converge a z, entonces y_n es una sucesión de Cauchy. Como H es completo, y_n converge a algún $y \in H$. De la condición (ii), vemos que entonces $B(x, y_n)$ converge a $B(x, y)$. Claramente (x, z_n) converge a (x, z). Luego

$$B(x, y) = (x, z).$$

Probaremos ahora que este subespacio cerrado es en realidad todo el espacio de Hilbert. En efecto, en caso contrario existe un punto x distinto de 0 ortogonal a todos los elementos del subespacio. Luego,

$$B(x, y) = 0,$$

para todo $y \in H$. Tomando $y = x$ vemos que $B(x, x) = 0$. Por lo tanto $||x|| = 0$. Como todo funcional lineal l se puede representar en la forma (x, z) para algún $z \in H$, esto termina la prueba. □

Finalizamos con el siguiente resultado.

Teorema 7.60. *Sea* $\{y_n\}$ *una colección de puntos de un espacio de Hilbert* H*. Un punto* $y \in H$ *pertenece a la clausura* Y *del espacio lineal más pequeño que contiene a* $\{y_n\}$ *si y sólo si*

$$(y, z) = 0$$

para todo z *que satisface*

$$(y_j, z) = 0,$$

para todo j.

DEMOSTRACIÓN. Sea Z el conjunto de vectores z ortogonales a todos los y_j. Probaremos que Z es el complemento ortogonal de Y. Claramente $Z \subset Y^?$.Ahora, todo punto en $Y^?$ is ortogonal a todos los y_j. Luego $Z = Y^?$. Luego $Y = Z^?$.

□

Definición 7.61. Una colección de puntos $\{x_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ en un espacio de Hilbert se llama **ortonormal** si

$$(x_\alpha, x_\beta) = 0,$$

para $\alpha \neq \beta$, y $||x_\alpha|| = 1$ para todo α. Si la clausura del espacio generado por esta base es todo el espacio de Hilbert, decimos que tenemos una **base ortonormal**.

Lema 7.62. *Las funciones de Haar* $\{H_k^{(n)} : k \in I(n), n \geq 0\}$ *forman una base ortonormal en* $L^2[0,1]$.

7.6. Espacios de Sobolev

Veremos cómo se aplican los resultados anteriores para demostrar la existencia de soluciónes de ciertas ecuaciones diferenciales.

Definición 7.63. Sean $-\infty \leq a < \infty$ y $-\infty < b \leq \infty$. Sea $I = (a,b)$ y $1 \leq p < \infty$. Definimos el espacio de Sobolev

$$W^{1,p}(I) := \{u \in L^p(I) : \exists g \in L^p \text{ tal que} \int u\,\phi'\,dx = -\int g\,\phi\,dx,\ \forall \phi \in C_0^1(I)\}$$

Ocupamos la notación $u' = g$. Cuando $p = 2$, denotamos $\mathcal{H}^1(I) := W^{1,2}(I)$. Además, definimos $\mathcal{H}_0^1$ como la clausura de C_0^1 en $\mathcal{H}^1(I)$.
Definimos en $W^{1,p}(I)$,

$$||u||_{\mathcal{W}^{1,p}} = (||u||_p^p + ||u'||_p^p)^{1/p},$$

y en $\mathcal{H}^1$, definimos $(u,v)_{\mathcal{H}^1} = \int u\,\overline{v}\,dx + \int u'\,\overline{v}'\,dx$.

Ejercicio. Pruebe que $||\cdot||_{W^{1,p}}$ es una norma y $(\cdot,\cdot)$, un producto interno.

Lema 7.64. *Para* $1 \leq p < \infty$, $\mathcal{W}^{1,p}(I)$ *es un espacio de Banach.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\{u_n\}$ una sucesión de Cauchy en $W^{1,p}(I)$. Luego $\{u_n\}$ y $\{u_n'\}$ son sucesiones de Cauchy en $L^p(I)$. Como $L^p(I)$ es completos, existen límites u y u' de tales sucesiones respectivamente. Además

$$\int u_n \phi' dx = -\int u_n' \phi dx.$$

Tomando el límite cuando $n \to \infty$ vemos que entonces

$$\int u\phi' dx = -\int u'\phi dx.$$

□

En lo que sigue $I = (0,1)$. Buscamos una solución débil de $-u'' + u = f$ con condiciones de borde $u(0) = u(1) = 0$ y $f \in C(\overline{I})$. O sea, buscamos $u \in \mathcal{H}_0^1(I)$ tal que

$$\int u'\,\phi'\,dx + \int u\,\phi\,dx = \int f\,\phi\,dx,\ \forall \phi \in C_0^1(I).$$

Basta definir $l(v) = \int f\,v\,dx$ para $v \in \mathcal{H}_0^1$ y verificar que l es acotado. Pero

$$|l(v)| \leq ||f||_2\,||v||_2 \leq ||f||_2\,||v||_{\mathcal{H}_0^1}.$$

Luego, por el lema de Riesz, existe un único $u \in \mathcal{H}_0^1$ tal que $l(v) = (v,u)_{\mathcal{H}_0^1} = \int u\,v\,dx + \int u'\,v'\,dx$. Se puede probar que esta solución es en realidad una solución clásica.

7.7. Teorema de Radon-Nikodym

Definición 7.65. Sean λ y μ dos medidas definidas en un espacio medible $(X, \mathcal{M})$. Diremos que λ es **absolutamente continua** respecto a μ si $\lambda(E) = 0$ cada vez que $\mu(E) = 0$. Ocuparemos la notación $\lambda \ll \mu$.

Definición 7.66. Dada una medida λ en una σ-álgebra $\mathcal{M}$, decimos que λ está **concentrada** en $A \in \mathcal{M}$ si $\lambda(E) = \lambda(E \cap A)$, para todo $E \in \mathcal{M}$. Diremos que dos medidas λ, μ en $\mathcal{M}$ son **mutuamente singulares** si existen conjuntos disjuntos $A, B \in \mathcal{M}$ tales que λ está concentrada en A y μ en B. Denotaremos $\lambda \perp \mu$.

La siguiente proposición se deja como ejercicio para el lector.

Proposición 7.67. *Supongamos que μ, λ, λ_1 y λ_2 son medidas en un espacio de medida $(X, \mathcal{M})$.*

(a) Si $\lambda_1 \perp \mu$ y $\lambda_2 \perp \mu$, entonces $\lambda_1 + \lambda_2 \perp \mu$.

(b) Si $\lambda_1 \ll \mu$ y $\lambda_2 \ll \mu$, entonces $\lambda_1 + \lambda_2 \ll \mu$

(c) Si $\lambda_1 \ll \mu$ y $\lambda_2 \perp \mu$, entonces $\lambda_1 \perp \lambda_2$.

(d) Si $\lambda \ll \mu$ y $\lambda \perp \mu$, entonces $\lambda = 0$.

Lema 7.68. *Si μ es una medida σ-finita, en un espacio de medida $(X, \mathcal{M})$, entonces existe una función $W \in L^1(\mu)$ tal que $0 < W(x) < 1$ para todo $x \in X$.*

Demostración. Definamos la sucesión de funciones medibles

$$w_n(x) = \frac{\chi_{E_n}(x)}{1 + \mu(E_n)} \cdot \frac{1}{2^n}$$

donde $X = \amalg_{n=1}^{\infty} E_n$, con $\mu(E_n) < \infty$, donde hemos ocupado el hecho que μ es una medida σ-finita. Ahora, consideremos la sucesión monótona de funciones medibles

$$W_n(x) = \sum_{k=1}^{n} w_k(x).$$

Luego

$$W(x) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(x),$$

es una función medible con recorrido en $(0,1)$ que, por el Teorema de convergencia monótona, satisface

$$\int W \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int w_n \, d\mu \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1.$$

Por lo tanto, $W \in L^1(\mu)$ y $0 < W(x) < 1$, para todo $x \in X$. $\square$

La importancia del lema anterior, es que nos permitirá sustituír μ por una medida finita $\overline{\mu}$ ($d\overline{\mu} = w \, d\mu$), que tiene los mismo conjuntos de medida cero que μ. Es decir $\overline{\mu} \ll \mu$.

Teorema 7.69. *Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida. Supongamos que $\mu(X) < \infty$, $f \in L^1(\mu)$, S es un conjunto cerrado en $\mathbb{R}$ y los promedios*

$$A_E(f) = \frac{1}{\mu(E)} \int_E f \, d\mu$$

pertenecen a S para todo $E \in \mathcal{M}$ con $\mu(E) > 0$. Entonces $f(x) \in S$ μ-c.s.

Demostración. Sea $x \in S^c$. Luego existe un $r > 0$ tal que $[x - r, x + r] \subset S^c$. Como S^c es la unión numerable de intervalos cerrados Δ, basta probar que si $E = f^{-1}(\Delta)$, donde Δ es un intervalo cerrado, entonces $\mu(E) = 0$. Supongamos que $\mu(E) > 0$. Entonces

$$r < \left| \frac{1}{\mu(E)} \int_E f \, d\mu - x \right| \leq \frac{1}{\mu(E)} \int_E |f - x| \, d\mu \leq r,$$

lo que es una contradicción. $\square$

Teorema 7.70 (Lebesgue-Radon-Nikodym). *Sea $(X; \mathcal{M})$ un espacio medible. Sea μ una medida σ-finita en $(X, \mathcal{M})$, y λ una medida en $(X; \mathcal{M})$. Entonces*

(a) Si λ es σ-finita, existe una descomposición única de λ, de la forma,

$$\lambda = \lambda_a + \lambda_s,$$

donde λ_a y λ_s son medidas en $(X, \mathcal{M})$ tales que $\lambda_a \ll \mu$ y $\lambda_s \perp \mu$.

(b) Si λ es finita, existe una única función $h \in L^1(\mu)$ tal que

$$\lambda_a(E) = \int_E h \, d\mu,$$

para todo $E \in \mathcal{M}$.

Demostración. La unicidad de la descomposición de la medida λ se tiene suponiendo que si λ'_a, λ'_s es otra descomposición de λ, luego

$$\lambda_a - \lambda'_a = \lambda'_s - \lambda_s$$

son tales que $\lambda_a - \lambda'_a \ll \mu$ y $\lambda'_s - \lambda_s \perp \mu$, entonces de la Proposición 7.67 se concluye la unicidad.

El Lema 7.68 y la Proposición 5.28 nos permiten concluir que existe $w \in L^1(\mu)$, $0 < w < 1$, tal que

$$\phi(E) = \int_E w\, d\mu \quad \text{para todo } E \in \mathcal{M}$$

es una medida finita sobre $\mathcal{M}$. Luego, podemos definir la medida finita sobre $\mathcal{M}$ dada por

$$\varphi(E) = \lambda(E) + \phi(E) \quad \text{para todo } E \in \mathcal{M}.$$

Consideremos el espacio de Hilbert $L^2(\varphi)$ y el operador $T : L^2(\varphi) \to \mathbb{R}$ definido por

$$Tf = \int f\, d\lambda,$$

con

$$|Tf| \leq \int |f|\, d\lambda \leq \int |f|\, d\varphi \leq \varphi(X)^{1/2} \|f\|_2.$$

Luego T es un funcional lineal continuo. Entonces, por el Lema de Riesz existe $g \in L^2(\varphi)$ tal que $Tf = (f, g)$. Es decir

$$\int f\, d\lambda = \int fg\, d\varphi. \tag{7.8}$$

Sea $E \in \mathcal{M}$ y $f(x) = \chi_E(x)$. Luego, de (7.8) vemos que

$$\lambda(E) = \int_E g\, d\varphi.$$

Si $\varphi(E) > 0$, entonces

$$0 \leq \frac{1}{\varphi(E)} \int_E g\, d\varphi = \frac{\lambda(E)}{\varphi(E)} \leq 1$$

y por el teorema anterior tendremos que $g(x) \in [0, 1]$ φ-c.s. Sin perdida de generalidad podemos suponer que $g(x) \in [0, 1]$, para todo $x \in X$. Definamos los conjuntos medibles

$$A = \{x \in X \,:\, 0 \leq g(x) < 1\} \quad \text{y} \quad B = \{x \in X \,:\, 0 \leq g(x) = 1\}.$$

Luego para cada $E \in \mathcal{M}$ tenemos que la medida λ se puede descomponer en $\lambda = \lambda_a + \lambda_s$, donde $\lambda_a(E) = \lambda(A \cap E)$ y $\lambda_s(E) = \lambda(B \cap E)$. Ahora, si rescribimos (7.8) en la forma

$$\int (1 - g) f\, d\lambda = \int f\, g\, w\, d\mu, \tag{7.9}$$

y consideramos la función medible $f = \chi_B$, luego en (7.9) tendremos que

$$\int_B w\, d\mu = 0$$

Como w es estrictamente positivo en X, luego $\mu(B) = 0$ y $\lambda_s \perp \mu$. Ahora, consideremos $f = (1 + g + \cdots + g^n)\chi_E$ en (7.9). Luego

$$\int_{E\cap A} (1 - g^{n+1}) d\lambda = \int_E (1 - g^{n+1})\, d\lambda = \int_E (1 + g + \cdots + g^n) g\, w\, d\mu.$$

Por el Teorema de convergencia monótona existe $h \in L^1(\mu)$, tal que

$$\lambda_a(E) = \lim_{n\to\infty} \int_{E\cap A} (1 - g^{n+1})\, d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_E (1 + g + \cdots + g^n) g\, w\, d\mu = \int_E h\, d\mu$$

de donde se obtiene que $\lambda_a \ll \mu$ y la representación planteada en (b). La unicidad de h se deja como ejercicio para el lector. $\square$

Corolario 7.71. *Sea λ una medida σ-finita en $(\mathbb{R}, \mathcal{M})$, donde $\mathcal{M}$ son los conjuntos Lebesgue medibles. Luego*

$$\lambda = \lambda_a + \lambda_{pp} + \lambda_s,$$

donde $\lambda_a \ll m$, $\lambda_{pp} \perp m$ y $\lambda_s \perp m$. Además, la función de distribución cumulativa de λ_s es continua, mientras que λ_{pp} es una medida cuyo soporte es un conjunto discreto sólo con puntos aislados.

7.8. Medidas con signo

Necesitaremos introducir el concepto de medida con signo para posteriormente estudiar los duales de los espacios L^p.

Definición 7.72. Sea $(X, \mathcal{M})$ un espacio medible. Decimos que una función real extendida ν definida en $\mathcal{M}$ es una **medida con signo** si

(i) ν toma a lo más uno de los valores ∞ o $-\infty$.

(ii) $\nu(\phi) = 0$.

(iii) Si E_n es una sucesión de conjuntos medibles disjuntos entonces

$$\nu(\cup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(E_n).$$

La igualdad significa que la serie de la derecha converge absolutamente si $\nu(\cup_{n=1}^{\infty} E_n)$ es finito, y diverge propiemante en caso contrario.

Decimos que un subconjunto A es un **conjunto positivo** respecto a ν si A es medible y todo subconjunto medible E de A tiene medida $\nu(E) \geq 0$. Similarmente definimos lo que es un **conjunto negativo**. Un conjunto medible que es a la vez positivo y negativo se llama un **conjunto nulo**.

Notemos que un conjunto de medida cero no es necesariamente un conjunto nulo.

Lema 7.73. *Todo subconjunto medible de un conjunto positivo es positivo. Además la unión de una cantidad numerable de conjuntos positivos es positivo.*

Demostración. La primera afirmación es trivial. Ahora, sea A la unión de una sucesión $\{A_n\}$ de conjuntos positivos. Sea E un subconjunto medible de A y

$$E_n := E \cap A_n \cap A_{n-1}^c \cap \cdots \cap A_1^c.$$

Luego E_n es un subconjunto medible de A_n y $\nu(E_n) \geq 0$. Como $E = \cup E_n$ y los conjuntos de la sucesión $\{E_n\}$ son disjuntos tenemos

$$\nu(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(E_n) \geq 0.$$

$\square$

Lema 7.74. *Sea E un conjunto medible tal que $0 < \nu(E) < \infty$. Luego existe un conjunto positivo A contenido en E con $\nu(A) > 0$.*

Demostración. Supongamos que E contiene conjuntos de medida negativa. Sea n_1 el entero positivo más pequeño tal que existe un conjunto medible $E_1 \subset E$ tal que

$$\nu(E_1) < -\frac{1}{n_1}.$$

Inductivamente, si $E - \cup_{j=1}^{k-1} E_k$ no es un conjunto positivo, definimos n_k como el entero positivo más pequeño para el que existe un conjunto medible E_k tal que

$$E_k \subset E - \cup_{j=1}^{k-1} E_k,$$

y

$$\nu(E_k) < -\frac{1}{n_k}.$$

Definimos

$$A := E - \cup_{k=1}^{\infty} E_k.$$

Luego $E = A \cup \cup_{k=1}^{\infty} E_k$. Como es una unión disjunta, tenemos

$$\nu(E) = \nu(A) + \sum_{k=1}^{\infty} \nu(E_k).$$

Esto significa que la serie del lado derecho converge absolutamente, porque $\nu(E)$ es finito. Luego $\sum 1/n_k$ es convergente y n_k tiende a infinito. Como $\nu(E_k) \leq 0$ y $\nu(E) > 0$, necesariamente $\nu(A) > 0$. Ahora, sea $\epsilon > 0$. Elegimos k suficiéntemente grande de modo que $(n_k - 1)^{-1} < \epsilon$. Como A está contenido en $E - \cup_{j=1}^{k} E_j$, A no puede contener conjuntos medibles de medida menor que $-(n_k - 1)^{-1}$ que es mayor que $-\epsilon$. Como ϵ es arbitrario, vemos que A no puede contener conjuntos de medida negativa. □

Proposición 7.75. Teorema de descomposición de Hahn *Sea ν una medida con signo en un espacio medible $(X, \mathcal{M})$. Luego existe un conjunto positivo A y uno negativo B tal que $X = A \cup B$ y $A \cap B = \phi$.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad suponemos que $+\infty$ es el valor que ν no toma. Sea λ el supremo de $\nu(A)$ sobre todos los conjuntos positivos. Notemos que como ϕ es positivo, $\lambda \geq 0$. Sea $\{A_i\}$ una sucesión de conjuntos positivos tales que $\lambda = \lim_{n\to\infty} \nu(A_n)$. Definimos

$$A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Sabemos que A es un conjunto positivo. Por lo tanto $\lambda \geq \nu(A)$. Pero $A - A_i \subset A$. Luego $\nu(A - A_i) \geq 0$. Luego

$$\nu(A) = \nu(A_i) + \nu(A - A_i) \geq \nu(A_i).$$

Es decir, $\nu(A) \geq \lambda$ y por lo tanto $\lambda = \nu(A) < \infty$. Sea $B = A^c$ y E un subconjunto positivo de B. Luego E y A son disjuntos y $E \cup A$ es positivo. Además

$$\lambda \geq \nu(E \cup A) = \nu(E) + \lambda.$$

Luego $\nu(E) = 0$. Esto significa que B no tiene subconjuntos positivos de medida positiva. Por el lema anterior, esto implica que B no tiene subconjuntos de medida positiva. Es decir, B es negativo.

$\square$

La descomposición de la proposición anterior se llama la **descomposición de Hahn de X respecto a ν.**

Definición 7.76. Sea ν una medida con signo en un espacio medible $(X, \mathcal{M})$. Sea $\{A, B\}$ la descomposición de Hahn de X respecto a ν. Definimos las medidas

$$\nu_+(E) = \nu(A \cap E),$$

y

$$\nu_-(E) = \nu(B \cap E).$$

Notemos que ν_+ y ν_- son mutuamente singulares. Tenemos además la siguiente proposición.

Proposición 7.77. Descomposición de Jordan. *Sea ν una medida con signo en un espacio medible $(X, \mathcal{M})$. Luego existen dos medidas mutuamente singulares ν_+ y ν_- en $(X, \mathcal{M})$ tales que $\nu = \nu_+ - \nu_-$. Además, existe sólo un par de tales medidas mutuamente singulares.*

Definición 7.78. Sea ν una medida con signo en un espacio medible $(X, \mathcal{M})$. Sea $\{\nu_+, \nu_-\}$ la descomposición de Jordan de μ. Definimos la **variación total** de ν como

$$|\nu|(E) = \nu_+(E) + \nu_-(E).$$

7.9. Duales de los espacios L^p

Queremos identificar los funcionales lineales acotados definidos en un espacio $L^p(\mu)$. Notemos que si $p > 1$, cualquier función $g \in L^q(\mu)$, con q el exponente conjugado de p, define un funcional lineal acotado en la forma

$$F(f) = \int fg d\mu.$$

Mostraremos que no hay más. El primer paso es el siguiente lema.

Lema 7.79. *Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida finita y g una función integrable tal que para alguna constante M*

$$\left| \int gf d\mu \right| \leq M ||\phi||_p,$$

para todas las funciones simples ϕ. Luego $g \in L^q(\mu)$.

Demostración. Supongamos primero que $p > 1$. Sea ψ_n una sucesión de funciones simples nonegativas que converge creciéntemente a $|g|^p$. Sea sg el signo de g y $\phi_n = (\psi_n)^{1/p} sg$. Luego ϕ_n es una función simple y

$$||\phi_n||_p = \left\{ \int \psi_n d\mu \right\}^{1/p}.$$

Además $\phi_n g \geq |\phi_n||\psi_n|^{1/q} = \psi_n$. Luego

$$\int \psi_n d\mu \leq \int \phi_n g d\mu \leq M \left\{ \int \psi_n d\mu \right\}^{1/p}.$$

Por lo tanto

$$\left\{ \int \psi_n d\mu \right\}^{1/q} \leq M.$$

Por el teorema de la convergencia monótona tenemos que

$$\int |g|^q d\mu \leq M^q.$$

□

Lema 7.80. *Sea $\{E_n\}$ una sucesión disjunta de conjuntos medibles, y para cada n sea f_n una función en $L^p(\mu)$, $1 \leq p < \infty$, que es nula fuera de E_n. Sea $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$. Luego $f \in L^p(\mu)$ si y sólo si $\sum_{n=1}^{\infty} ||f_n||_p^p < \infty$. En ese caso $f \in L^p(\mu)$, $\lim_{n\to\infty} ||f - \sum_{i=1}^{n} f_i||_p = 0$ y $||f||_p^p = \sum_{n=1}^{\infty} ||f_n||_p^p$.*

Teorema 7.81. *Sea l un funcional lineal acotado en $L^p(\mu)$, con $1 \leq p < \infty$ y μ una medida σ-finita. Luego existe un único elemento $g \in L^q(\mu)$, con q exponente conjugado de p, tal que*

$$l(f) = \int fg d\mu.$$

Además $||l|| = ||g||_q$.

Demostración. Supongamos primero que μ es finita. Luego toda función medible y acotada está en $L^p(\mu)$. Definimos en los conjuntos medibles la función

$$\nu(E) = l(1_E).$$

Supongamos que E es una unión de conjuntos medibles disjuntos $\{E_n\}$. Sea α_n el signo de $l(1_{E_n})$. Luego, por el lema anterior tenemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\nu(E_n)| = l(f) < \infty$$

y

$$\sum_{n=1}^{\infty} \nu(E_n) = l(1_E).$$

Luego ν es una medida con signo que es absolutamente continua respecto a μ. Por el teorema de Radon-Nikodym, existe una función medible g tal que

$$\nu(E) = \int_E g d\mu,$$

para todo conjunto medible E. Como ν es finita, g es integrable. Si ϕ es una función simple, por la linealidad de l y de la integral, vemos que

$$l(\phi) = \int \phi g d\mu.$$

Como el lado izquierdo está acotado por $||F||||\phi||_p$, tenemos que $g \in L^q(\mu)$. Ahora, se m el funcional lineal acotado en $L^p(\mu)$ definido por

$$m(f) = \int fgd\mu.$$

Luego $m-l$ es un funcional lineal acotado que es cero en el subespacio de las funciones simples. Como la funciones simple son densas en $L^p(\mu)$ concluímos que $m = l$. Es decir,

$$l(f) = \int fgd\mu,$$

para toda función $f \in L^p(\mu)$. Es fácil ver que $||l|| = ||g||_q$.

Para demostrar la unicidad, supongamos que existen dos funciones g_1 y g_2 que determinan l. Luego $g_1 - g_2$ nos da el funcional lineal idénticamente nulo. Luego $||g_1 - g_2|| = 0$.

Para extender el teorema al caso σ-finito, sea $\{X_n\}$ una sucesión creciente de conjuntos medibles de medida finita cuya unión es X. Por lo anterior, sabemos que para cada n existe una función $g_n \in L^q(\mu)$ que es cero fuera de X_n y tal que

$$l(f) = \int g_n f d\mu,$$

para toda $f \in L^p(\mu)$ que es cero fuera de X_n. Además $||g_n||_q \leq ||l||$. Por unicidad, podemos suponer que $g_{n+1} = g_n$ en X_n. Para $x \in X_n$ definimos $g(x) = g_n(x)$. Luego $|g_n|$ crece puntualmente a $|g|$. Luego, por el teorema de la convergencia monótona

$$\int |g|^p d\mu = \lim \int |g_n|^q d\mu \leq ||l||^q.$$

Por lo tanto $g \in L^q(\mu)$. Si $f \in L^p(\mu)$, definimos $f_n = f$ en X_n y $f_n = 0$ en X_n^c. Luego f_n converge puntualmente a f y en $L^p(\mu)$. Como $|fg|$ es integrable y $|f_n g| \leq |fg|$, el teorema de la convergencia dominada implica que

$$\int fgd\mu = \lim \int f_n g d\mu = \lim \int f_n g_n d\mu = \lim l(f_n) = l(f).$$

$\square$